

PROBLÈMES RECOMPOSÉS



A POINT ON [EF]

REVISITED

BY

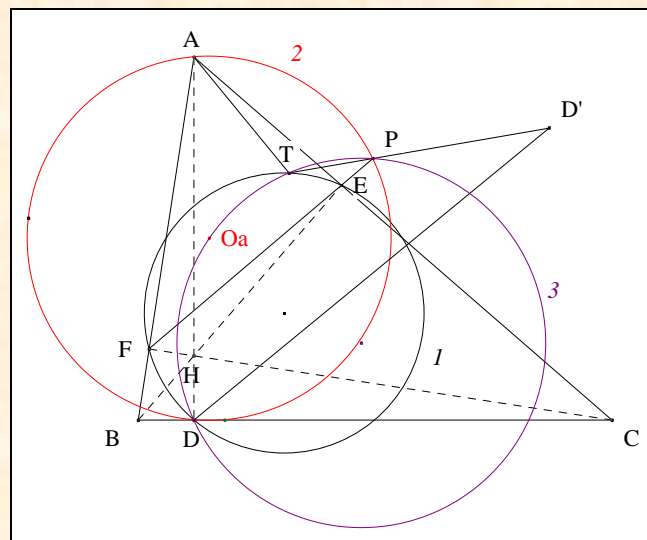
JEAN-LOUIS AYME

PREMIÈRE PREUVE SYNTHÉTIQUE

*Maintenant,
il vous faudra apprendre à être dans le monde sans être du monde.
Le monde vous hait parce que vous ne lui appartenez pas.
Si vous apparteniez au monde, le monde vous aimerait.
Mais au préalable, c'est Moi, qui vous ai arraché au monde.*



Jean - Louis AYME ¹



Résumé. L'auteur présente un problème difficile, recomposé par ses soins ce qui permet une approche synthétique plus digeste pour les amoureux de la Géométrie traditionnelle. Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

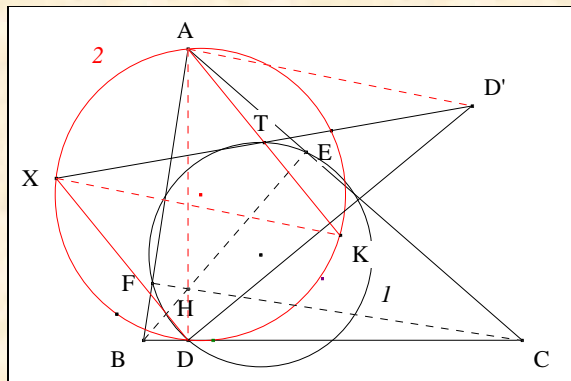
Abstract. The author presents a difficult problem, recomposed by him which allows a more digestible synthetic approach for lovers of traditional Geometry.

¹ St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 20/06/2022 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

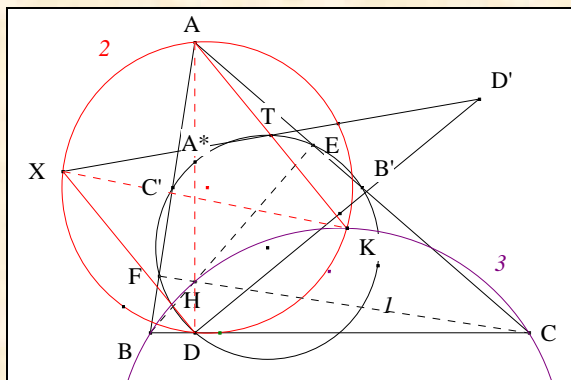
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

Sommaire	
A. Récapitulation	3
B. Le problème recomposé par l'auteur	5
C. Visualisation	7
Étape 1 : T est le milieu de [AK]	8
Étape 2 : K est sur le A-cercle de Carnot de ABC	11
Étape 3 : [SK] corde commune à deux cercles	12
Étape 4 : S est sur (EF)	13
Étape 5 : P est sur (EF)	14
D. Une récolte	16
E. Lexique Français-Anglais	19

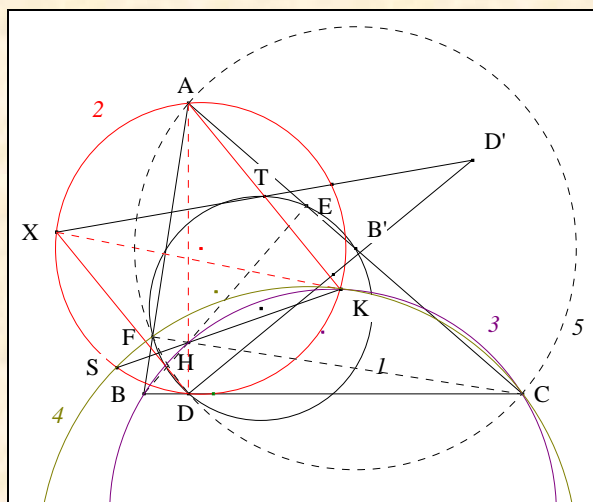
A. RÉCAPITULATION



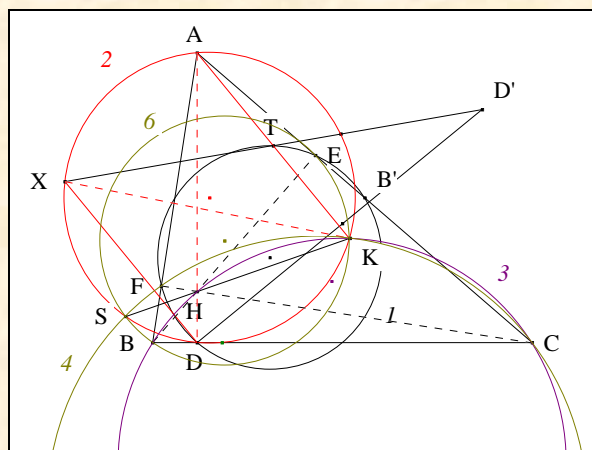
Étape 1 : T est le milieu de [AK] et [XD']



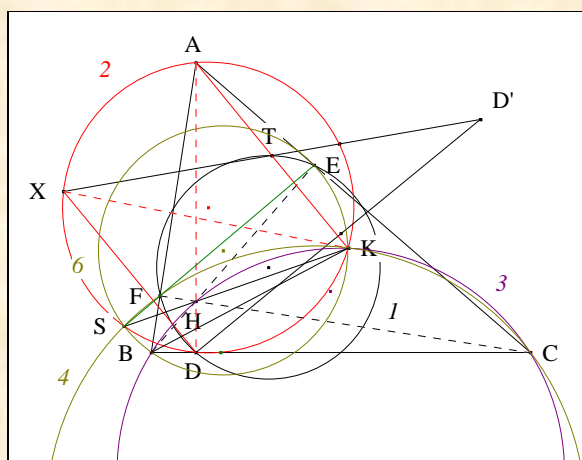
Étape 2 : 3 est le A-cercle de Carnot de ABC



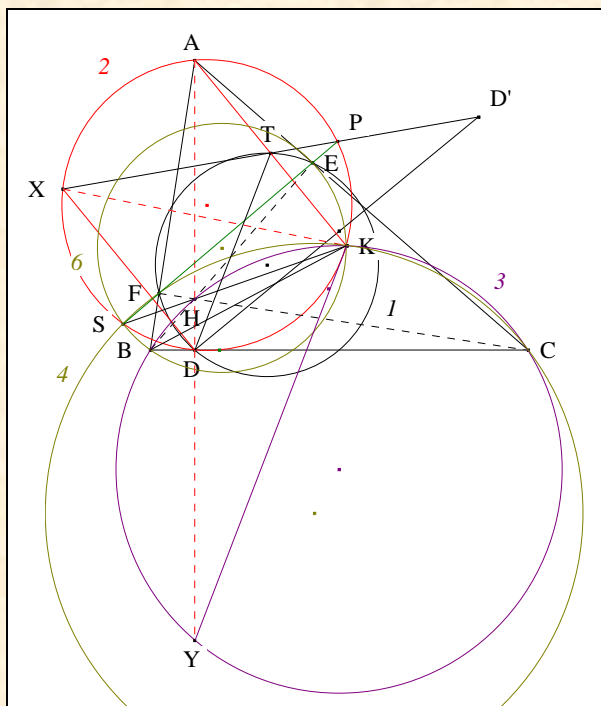
Étape 3 : S, K, F et C sont cocycliques



Étape 3 : S, K, E et B sont cocycliques



Étape 4 : S est sur (EF)



Étape 5 : P est sur (EF)

B. LE PROBLÈME RECOMPOSÉ ²

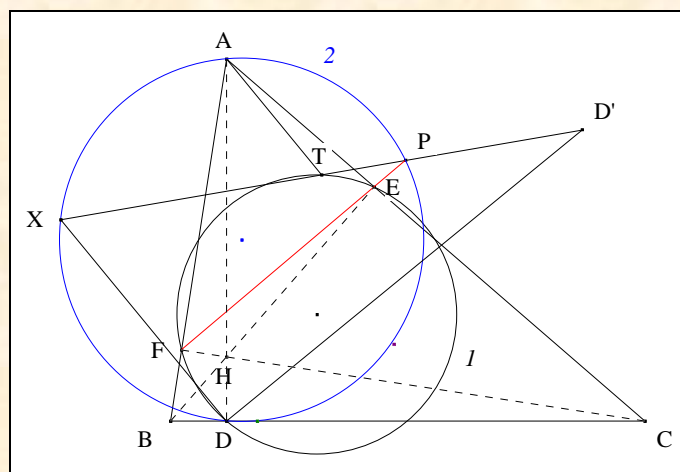
par

Jean-Louis (France)

(May 2022)

VISION

Figure :



Traits :

ABC	un triangle,
H	l'orthocentre,
DEF	le triangle orthique,
I	le cercle d'Euler ³ de ABC,
T	un point de I ,
D'	le symétrique de D par rapport à (AT),
X	le point d'intersection la parallèle à (AT) et (D'T),
2	le cercle circonscrit au triangle XDA

et P le second point d'intersection of 2 avec (D'X).

Donné : (EF) passe par P.

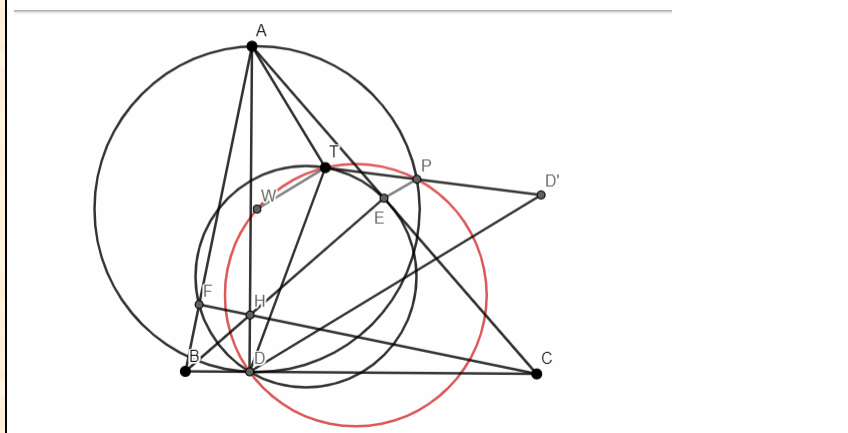
²

³

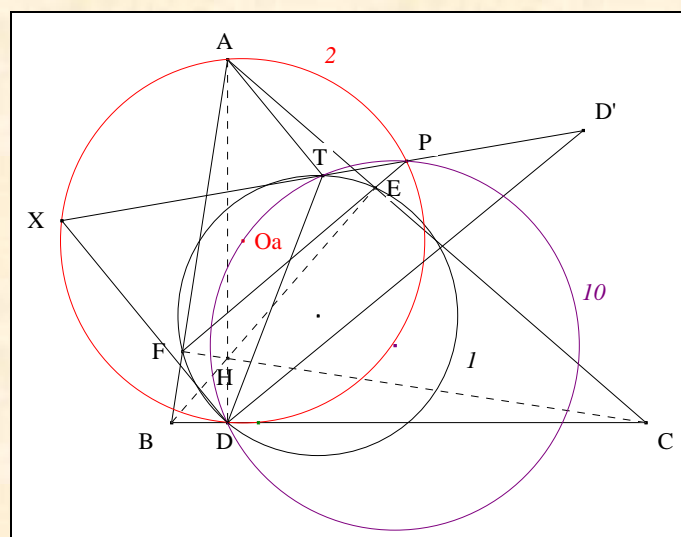
Ayme J.-L., Not so easy, AoPS du 03/06/2022 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h2856723_not_so_easy
 I est le cercle circonscrit à DEF

Archive :

Let ABC be a triangle with altitudes AD, BE, CF intersect at orthocenter H . Let T be an arbitrary point lies on (DEF) . D' be the reflection point of D on AT . $D'T$ intersects EF at P . Prove that (DTP) passes through the circumcenter of ADP .



4



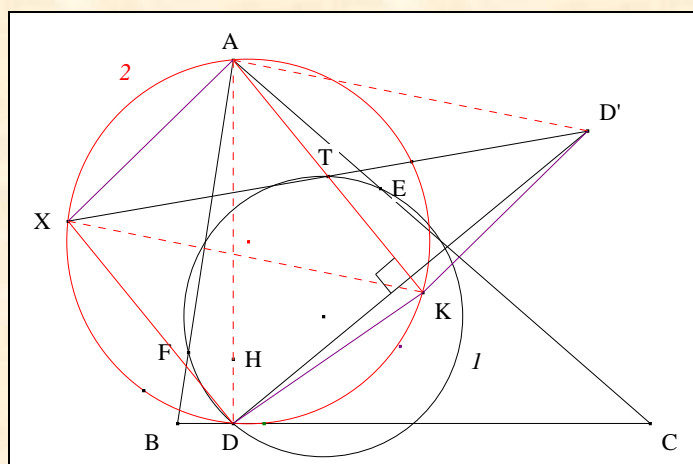
L'auteur dans sa recherche d'une solution synthétique a introduit le point X , seconde intersection de $(D'T)$ avec le cercle 2, et a remarqué que les droites (DX) et (AT) sont parallèles⁵.

⁴ T lies on Euler circle, AoPS du 25/05/2022 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h2851451_t_lies_on_euler_circle
⁵ Ayme J.-L., Two remarkable parallels, AoPS du 28/05/2022 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h2853281_two_remarkable_parallel

C. VISUALISATION

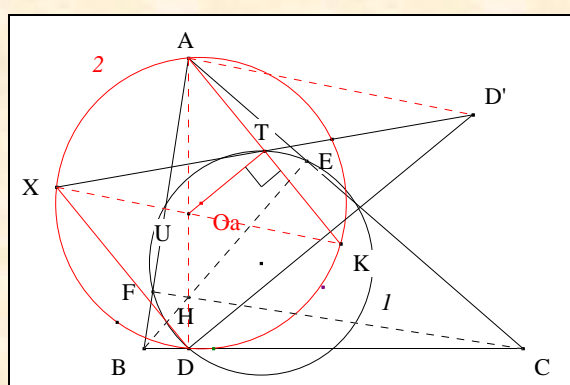
ÉTAPE 1

T est un milieu



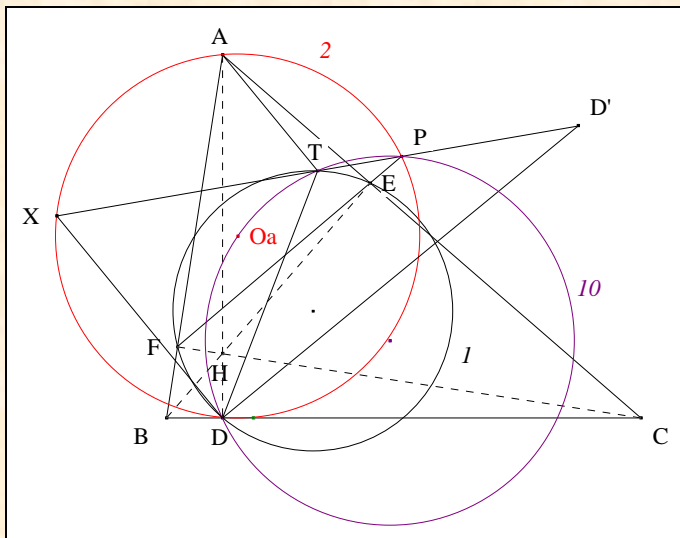
- Notons K le second point d'intersection de (AT) avec 2 .
- Une chasse segmentaire :
 - * le trapèze cyclique $AXDK$ étant isocèle, $AX = KD$ et $XK = AD$
 - * (AT) étant la médiatrice de $[DD']$, $KD = KD'$ et $AD = AD'$
 - * par transitivité de $=$, $AX = KD'$ et $XK = AD'$
 - * en conséquence, le quadrilatère $AXKD'$ est un parallélogramme.
- **Conclusion partielle :** T est le milieu de $[AK]$ et $[XD']$.

Scolies : (1) deux perpendiculaires



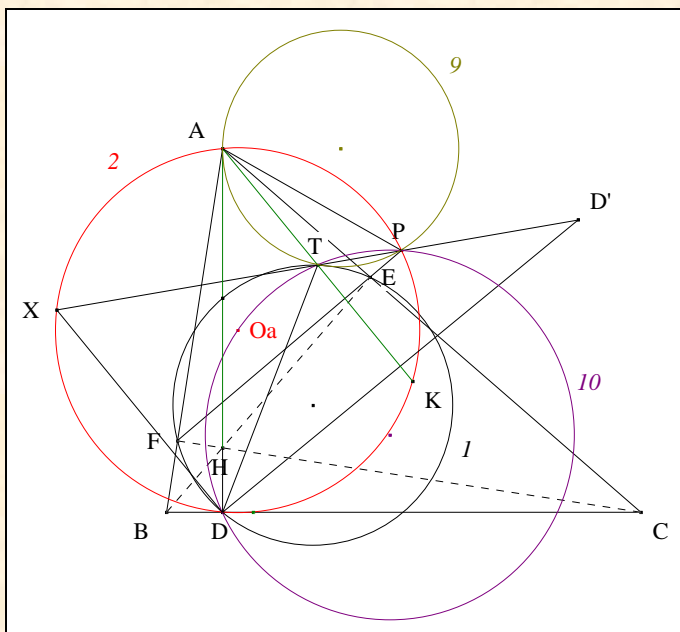
- Notons O_a le centre de 2
et U le point d'intersection de (AD) et (KX) .
- **Conclusion :** d'après "Le théorème de la médiatrice", (UO_a) est perpendiculaire à $[AK]$ en T .
- (2) Le triangle $DD'X$ est D-rectangle

(3) un cercle passant par le centre d'un cercle ⁶



- Notons O_a le centre de 2
et I_0 le cercle circonscrit au triangle DTP.
- Par hypothèse, (AT) étant la médiatrice de $[DD']$, $TD = TD'$.
- D'après Étape 1, T étant le milieu de $[D'X]$, $TD' = TX$;
par transitivité de =, $TD = TX$.
- **Conclusion :** d'après "Cercle passant par le centre d'un cercle" ⁷
appliqué aux cercles 10 et 2, O_a est sur I_0 .

(4) Une tangente

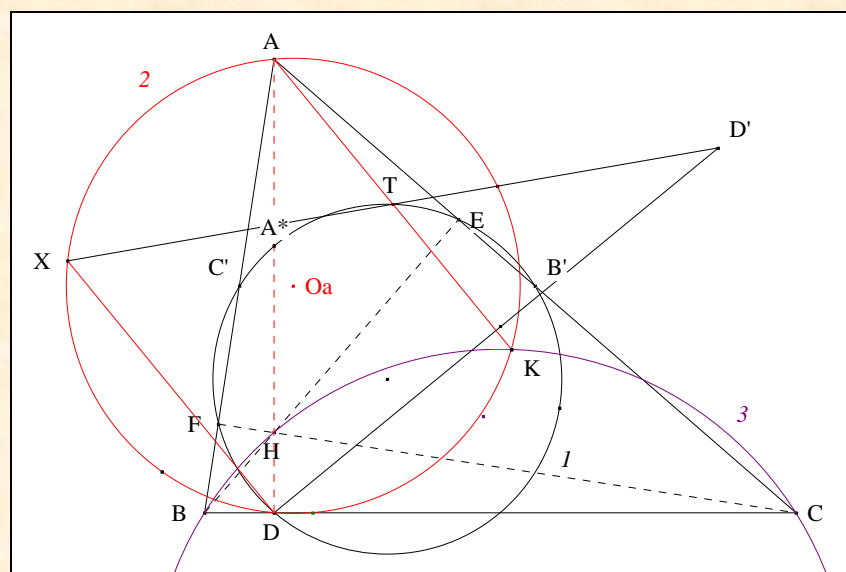


⁶ Un cercle passant par le centre d'un cercle ; <https://les-mathematiques.net/vanilla/index.php?p=/discussion/2330408/un-cercle-passant-par-le-centre-dun-cercle/p1?new=1>
⁷ Ayme J.-L., Technique et vision géométrique 1, Problème 8, G.G.G. vol. 79 ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

- Notons ρ le cercle circonscrit au triangle ATP .
- Une chasse angulaire :
 - * par une autre écriture, $\angle APT = \angle APX$
 - * par "Angles inscrits dans 2", $\angle APX = \angle ADX$
 - * par "Angles alternes-internes", $\angle ADX = \angle DAT$
 - * par transitivité de $=$, $\angle APT = \angle DAT$.
- **Conclusion :** par "Le théorème de la tangente", (AD) est la tangente à ρ en A .

ÉTAPE 2

K est sur le A-cercle de Carnot de ABC



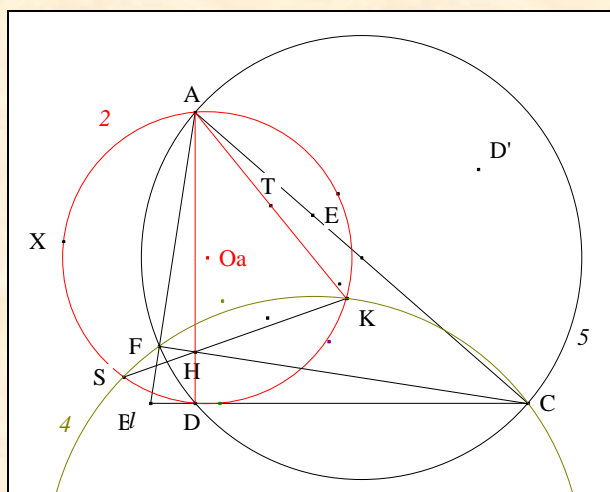
- Notons A^*, B', C' les milieux de $[AH], [AC], [AB]$.
- D'après Euler-Brianchon-Poncelet ⁸, A^*, B', C' sont sur l .
- **Conclusion partielle** : par homothétie de centre A et de rapport 2, H, C, B et K sont cocycliques.
- Notons \mathcal{C}_3 ce cercle.

- Scolies :**
- (1) A^* est le A-point d'Euler de ABC
 - (2) \mathcal{C}_3 est le A-cercle de Carnot de ABC
 - (3) \mathcal{C}_3 est le symétrique du cercle circonscrit à ABC par rapport à (BC) .

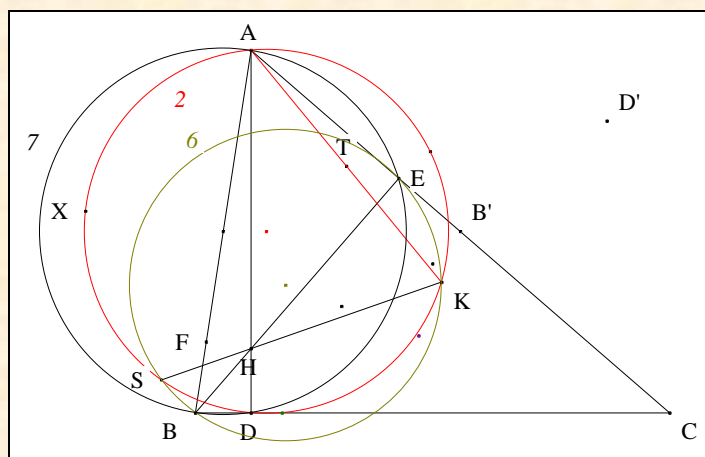
⁸ Brianchon, Poncelet, *Annales de Gergonne* **11** (1820-21) 215, théorème 9 ; <http://www.numdam.org/item/AMPA/Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, ..., G.G.G. vol. 2, p. 3-5 ; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

ÉTAPE 3

[SK] corde commune à deux cercles



- Notons S le second point d'intersection de (KH) avec 2,
et 4 le cercle passant par C, K, F
5 le cercle de diamètre [AC] ; il passe par D et F.
- **Conclusion partielle** : d'après Gaspard Monge "Le théorème des trois cordes"⁹ appliqué aux cercles 2, 4, 5 et aux cordes [KS], [CF], [AD] concourantes en H, S est sur 4.



- Notons 6 le cercle passant par B, K, E
et 7 le cercle de diamètre [AB] ; il passe par D et E.
- **Conclusion partielle** : d'après Gaspard Monge "Le théorème des trois cordes"¹⁰ appliqué aux cercles 2, 6, 7 et aux cordes [KS], [BE], [AD] concourantes en H, S est sur 6.

⁹

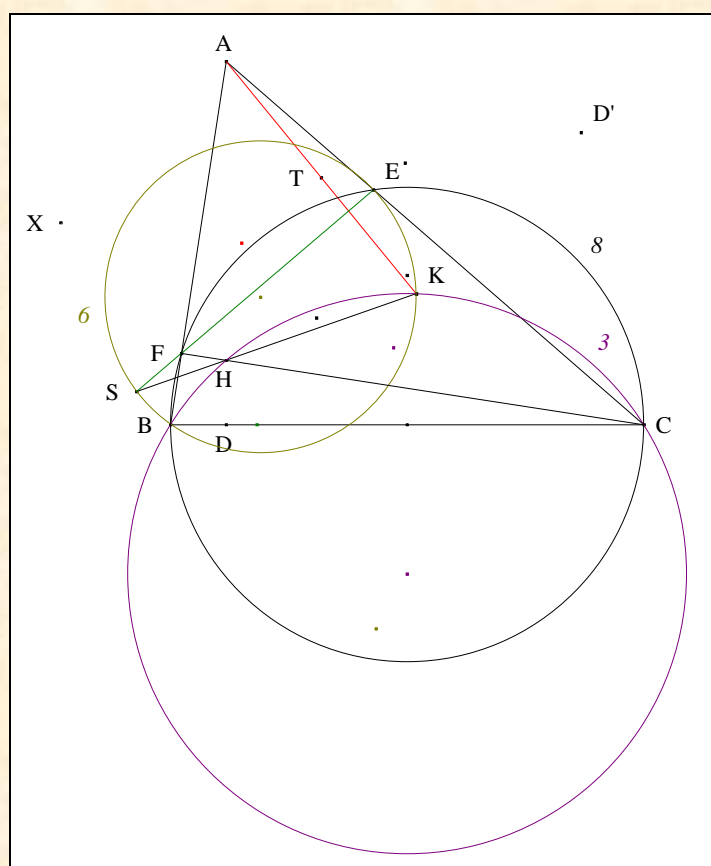
Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6 ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

¹⁰

Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6 ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

ÉTAPE 4

S est sur (EF)

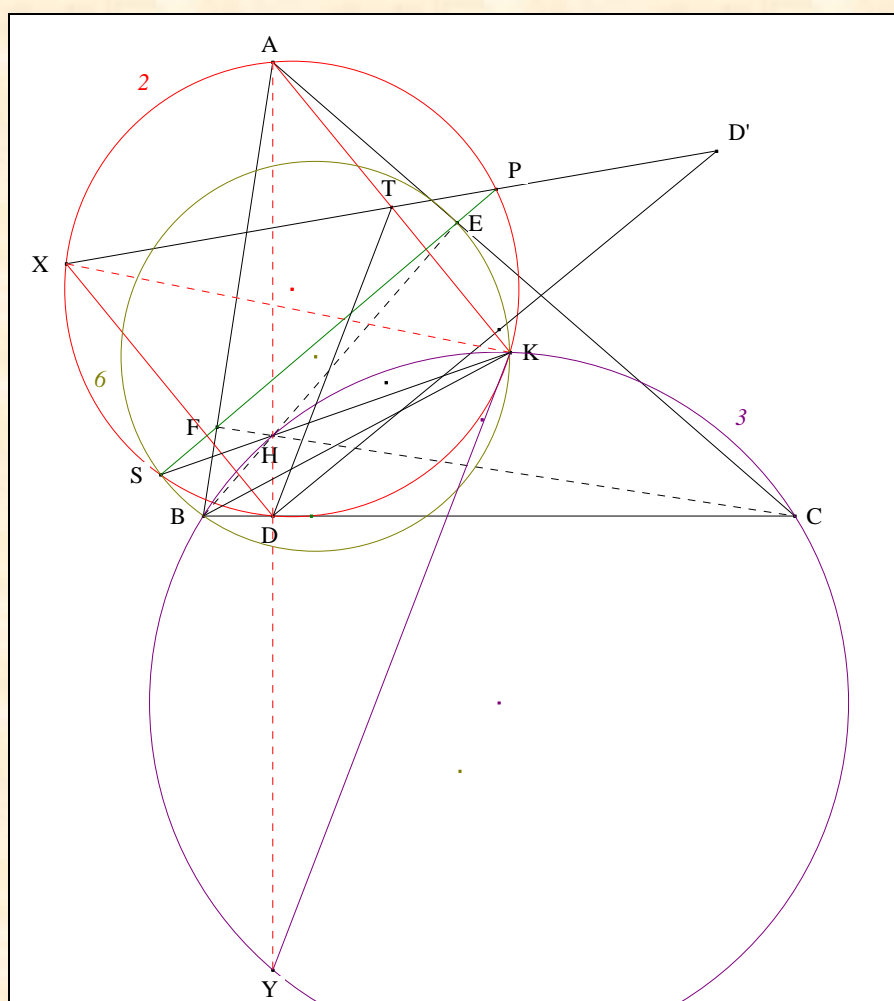


- Notons δ le cercle de diamètre $[BC]$; il passe par E et F.
- **Conclusion partielle** : d'après Auguste Miquel "Le théorème des trois cercles concourants"¹¹ appliqué au triangle FHS avec C sur (FH), K sur (HS), i.e. aux cercles δ , 3 et 6 concourant en B, E, intersection de δ et 6, est sur (SF) ou encore S est sur (EF).

¹¹ Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. 13, p. 4-6 ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

ÉTAPE 5

(EF) passe par P.



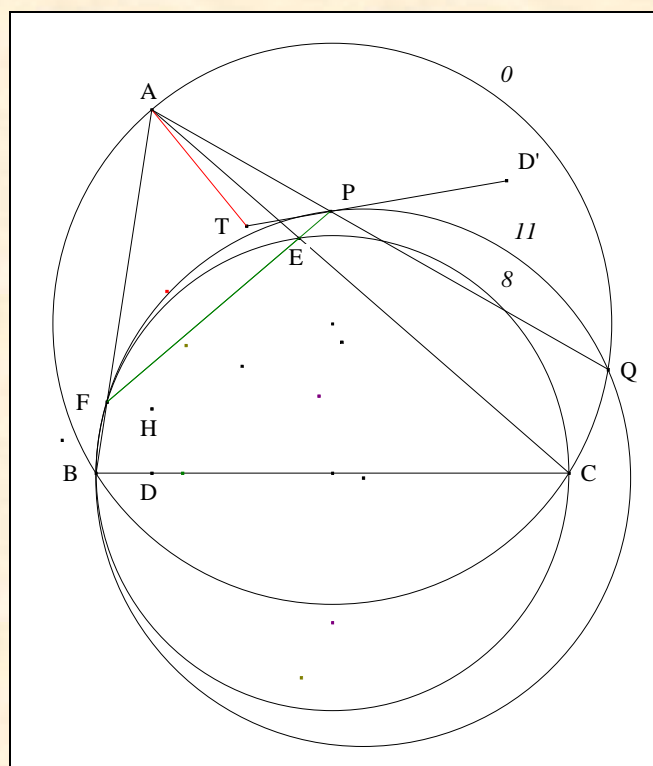
- Notons P le second point d'intersection of 2 avec $(D'X)$.
 Y le second point d'intersection de (AHD) avec 3.
- 3 étant le symétrique du cercle circonscrit à ABC , D est le milieu de $[AY]$.
- D'après Thalès de Milet "La droite des milieux"
 appliqué au triangle AYK , $(DT) // (YK)$.
- Une chasse angulaire :
 - * par "Angles inscrits de 6", $\angle KSE = \angle KBE$
 - * par une autre écriture, $\angle KBE = \angle KBH$
 - * par "Angles inscrits de 3", $\angle KBH = \angle KYH$
 - * par "Angles à côtés parallèles", $\angle KYH = \angle TDH$
 - * par une autre écriture, $\angle TFH = \angle TDA$
 - * par symétrie d'axe (AT) , $\angle TDA = \angle AD'T$

- * par une autre écriture, $\sphericalangle AD'T = \sphericalangle AD'X$
- * par "Angles alternes-internes", $\sphericalangle AD'X = \sphericalangle KXD'$
- * par une autre écriture, $\sphericalangle KXD' = \sphericalangle KXP$
- * par "Angles inscrits de 2", $\sphericalangle KXP = \sphericalangle KSP$
- * par transitivité de $=$, $\sphericalangle KSE = \sphericalangle KSP$
- * en conséquence, S, E et P sont alignés.

- **Conclusion** : d'après Étape 4 et l'axiome d'incidence **Ia**, (EF) passe par P.

D. UNE RÉCOLTE

1. Un premier cercle



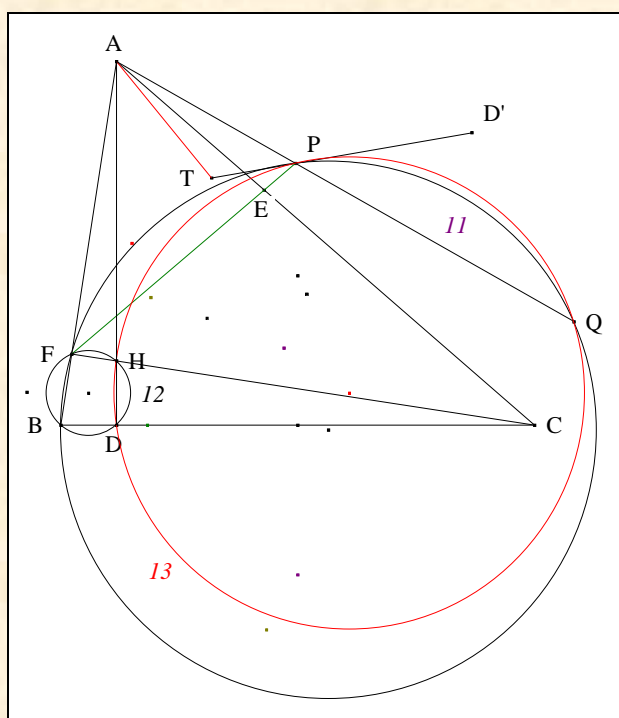
- Notons O le cercle circonscrit à ABC
et Q le second point d'intersection de (AP) avec O .
- D'après Highway to Geometry 3¹², (EF) est l'inverse de O de pole A , de puissance $AB \cdot AF$.
- D'après Étape 5, (EF) passant par P , Q est l'inverse de P .
- **Conclusion :** P, Q, B, F sont cocycliques.¹³
- Notons II ce cercle.

2. Un second cercle

¹² Ayme J.-L., Highway to Geometry 3, Problème 2, G.G.G. vol. 65, p. 6-8 ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

¹³ Ayme J.-L., Four concyclic points, AoPS du 08/96/2022 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h2859624_four_concyclic_points

Ayme J.-L., Four concyclic points, AoPS du 09/06/2022 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h2860318_four_concyclic_points

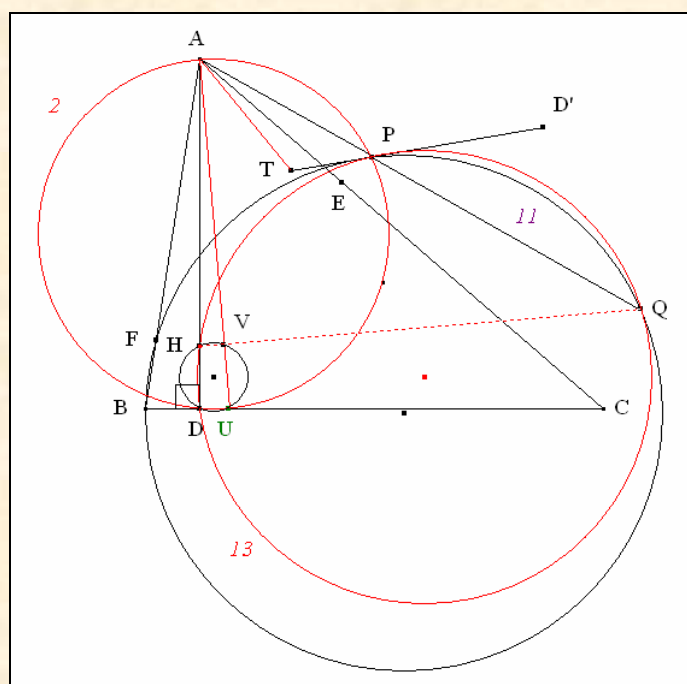


- Notons 12 le cercle de diamètre $[BH]$; il passe par D et F .
- **Conclusion :** d'après Gaspard Monge "Le théorème des trois cordes" ¹⁴ appliqué aux cercles 12 , 11 et aux cordes $[BF]$, $[DH]$, $[PQ]$ concourantes en A , D , H , P et Q sont cocycliques.
- Notons 13 ce cercle.

3. Deux perpendiculaires ¹⁵

¹⁴ Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6 ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

¹⁵ Ayme J.-L., Two perpendicular lines, AoPS du 09/06/2022 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h2860316_two_perpendicular_lines



- Notons U le second point d'intersection de 2 avec (BC),
 I_4 le cercle de diamètre [HU] ; il passe par D ;
 et V le second point d'intersection de I_4 avec (AU).
- D'après Auguste Miquel "Le théorème des trois cercles concourants" ¹⁶
 appliqué au triangle VAQ avec U sur (VA), P sur (AQ),
 i.e. aux cercles I_4 , 2 et I_1 concourant en D, V est sur (QH).
- **Conclusion :** d'après Thalès de Milet "Triangle inscrit dans un demi-cercle",
 (AU) est perpendiculaire à (HQ) en V.

¹⁶

Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. 13, p. 4-6 ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

E. LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A			N	
aligné	collinear		Notons	name
annexe	annex		nécessaire	necessary
axiome	axiom		note historique	historic note
appendice	appendix		O	
adjoint	associate		orthocentre	orthocenter
a propos	by the way btw		ou encore	otherwise
acutangle	acute angle		P	
axiome	axiom		parallèle	parallel
B			parallèles entre elles	parallel to each other
bissectrice	bisector		parallélogramme	parallelogram
bande	strip		pédal	pedal
C			perpendiculaire	perpendicular
centre	incenter		pied	foot
centre du cercle circonscrit	circumcenter		point de vue	point of view
cercle circonscrit	circumcircle		postulat	postulate
céviennne	cevian		point	point
colinéaire	collinear		pour tout	for any
concourance	concurrence		Q	
coincide	coincide		quadrilatère	quadrilateral
confondu	coincident		R	
côté	side		remerciements	thanks
par conséquence	consequently		reconnaissance	acknowledgement
commentaire	comment		respectivement	respectively
D			rapport	ratio
d'après	according to		répertorié	to index
donc	therefore		S	
droite	line		semblable	similar
d'où	hence		sens	clockwise in this
distinct de	different from		order	
E			segment	segment
extérieur	external		Sommaire	summary
F			symédiane	symmedian
figure	figure		suffisante	sufficient
H			sommet (s)	vertex (vertice)
hauteur	altitude		T	
hypothèse	hypothesis		trapèze	trapezium
I			tel que	such as
intérieur	internal		théorème	theorem
identique	identical		triangle	triangle
i.e.	namely		triangle de contact	contact triangle
incidence	incidence		triangle rectangle	right-angle triangle
L				
lemme	lemma			
lisibilité	legibility			
M				
mediane	median			
médiatrice	perpendicular bissector			
milieu	midpoint			