

PETITES HISTOIRES DE LA GÉOMÉTRIE

À PROPOS DU PLAN PROJECTIF

1. La perspective des peintres

Dans leur volonté de reproduire le réel et d'imiter la nature, les peintres grecs ont tenté sans succès de donner l'illusion de la profondeur dans leurs tableaux. Cette impossibilité opératoire était due à une méconnaissance des règles mathématiques qui leurs auraient permis, de dessiner, entre autre, une rangée d'arbres disparaissant à l'horizon.

C'est au XIV^e siècle que l'architecte florentin Filippo Brunelleschi découvre les lois de la perspective fuyante ¹ que Léon Battista Alberti expose, au siècle suivant, dans son *Della pittura* ².

Cette perspective aboutit à une représentation plane de l'espace observé par un seul œil et son protocole met en place le dispositif d'Albrecht Dürer ³ i. e. :

- * le point de vue, sommet du cône visuel, identifié à l'œil
- * la table sur laquelle repose le sujet à dessiner ⁴
- * la fenêtre au travers de laquelle l'œil explore l'espace du sujet pour le dessiner "projectivement" de manière à avoir la même image sur le tableau ⁵.

L'intersection de ces deux plans orthogonaux conduit à la ligne de terre ⁶, et l'intersection du plan horizontal passant par l'œil avec le plan du tableau, est la ligne d'horizon.

En 1636, Girard Desargues publie son *Brouillon project* dans lequel il précise que des droites parallèles sur "la table" deviennent en perspective sur "le tableau" des droites

- * concourantes sur la ligne d'horizon ⁷ en un "point de fuite" ⁸ associé à leur **direction** si elles ne sont pas parallèles au plan du tableau ;
- * sinon, parallèles.

De même, des droites concourantes sur "la table" deviennent en perspectives sur "le tableau" des droites concourantes ou parallèles suivant que la droite joignant l'œil au point de concours de ces droites, rencontre ou non le plan du tableau.

2. La perspective conique

Elle apparaît comme une géométrisation non homogène de la perspective fuyante des peintres car elle entraîne dans son sillage des "points à l'infini" qui jouent tous un rôle différent de ceux que nous connaissons. Notons qu'une droite du plan horizontal a pour image, lorsqu'elle existe, une droite du plan vertical.

¹ Cette perspective conique est plus réaliste que la perspective cavalière où l'œil de l'observateur est à l'infini

² Architecte italien (1404-1472)

³ Peintre et graveur allemand (1471-1538)

⁴ Le plan horizontal de référence

⁵ Le plan vertical, le tableau, la vitre transparente situé entre l'œil et le sujet

⁶ Axe de la perspective

⁷ Droite à l'infini

⁸ Point d'un dessin en perspective où convergent des droites parallèles dans la réalité

3. L'idée intuitive de plan projectif

Le plan géométrique ⁹ vu comme un ensemble ponctuel, structuré par les axiomes de la géométrie, est un plan qui ne contient pas de "points à l'infini".

En convenant d'ajouter à ce plan

- * un "point à l'infini" pour chaque direction de droites
- * et une "droite à l'infini" qui les contient tous.

Jean-Victor Poncelet et Karl Georg Christian von Staudt ¹⁰ proposent au XIX^e siècle, une approche intuitive du plan projectif ¹¹ où deux droites sont toujours sécantes.

Inversement, si on enlève une droite du plan projectif, on obtient un plan géométrique pour lequel la droite supprimée joue le rôle d'une droite à l'infini.

Notons que, dans un tel plan, les notions de longueur, distance, aire, parallélisme et orthogonalité n'ont plus lieu.

⁹ Voir le plan horizontal

¹⁰ Christian von Staudt (1798-1867)

¹¹ Voir le plan vertical