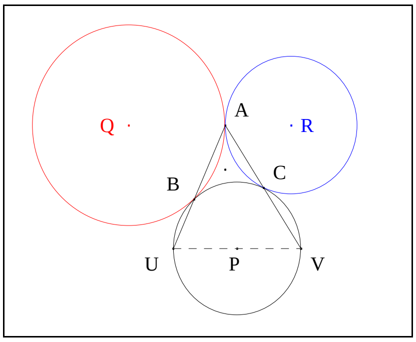
# À PROPOS

# DU

# THÉORÈME DE BOUTIN [1]

Dans la forêt, vaste et obscure, des théorèmes portant sur la géométrie du triangle, il m'a été permis d'entrevoir une clairière, voire le théorème de Boutin dont les différentes versions contribuent dans un souci d'élégance et de clarté, à rendre plus aisées et plus simples certaines démonstrations considérées comme ardues.

**Le théorème de Boutin** [2]




**Hypothèses** :

|  |  |  |
|---|---|---|
|  | Γp, Γq, Γr | trois cercles de centre P, Q, R, deux à deux tangents extérieurement, |
|  | A , B, C | les points de contact de Γr et Γq, de Γq et Γp, de Γp et Γr, |
| et | U, V | les points d'intersection des droites (AB) et (AC) avec Γp. |

**thèse** : (UV) est la parallèle à (QR) passant par P.

**Démonstration** :

- Notons Ta la tangente commune intérieure à Γr et Γq, et Tu, Tv les tangentes à Γp en U et V.
- Les cercles Γp et Γq, Γr et Γp conduisent au théorème de Reim[3] ; Tu // Ta et Ta // Tv ;
  par transitivité de la relation //, Tu // Tv ;
  par définition d'une tangente, Tu ⊥ (PU) et Tv ⊥ (PV) ;
  sachant que la relation // est compatible avec la relation ⊥, (PU) // (PV) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (PU) = (PV) i.e. (UV) passe par P.
- Sachant que PQ + AR = PR + AQ, RP + BQ = RQ + BP et QR + CP = QP + CR, le cercle Γ circonscrit au triangle ABC est inscrit dans le triangle des centres PQR.
- Les cercles Γp et Γ conduisent au théorème de Reim : (UV) est parallèle à (QAR) i.e. à la tangente de Γ en A.

**Scolies :**

1. (UC) et (VB) sont deux hauteurs du triangle AUV dont l'orthocentre H est sur Γ.
2. Le triangle de contact ABC est acutangle sinon son triangle tangentiel PQR lui serait extérieur.

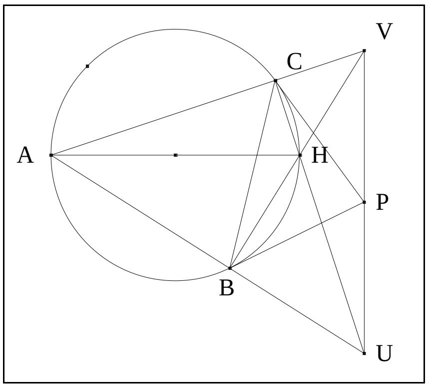
---

[1] Ayme J.-L., À propos du théorème de Boutin, *Mathématiques et Pédagogie* (Belgique) 144 (2003) 7-13.

[2] M.A. Boutin est né à Paris en 1858. Professeur de mathématiques, il entre en 1885 à la Société mathématique de France et publie dans le *Journal de mathématiques élémentaires* de 1890, un théorème qui aujourd'hui, porte son nom. En 1889, il découvre une propriété caractérisant tous les points de la droite d'Euler.

[3] Cf. appendice 1.

**Version à partir du triangle de contact**




**Hypothèses** :

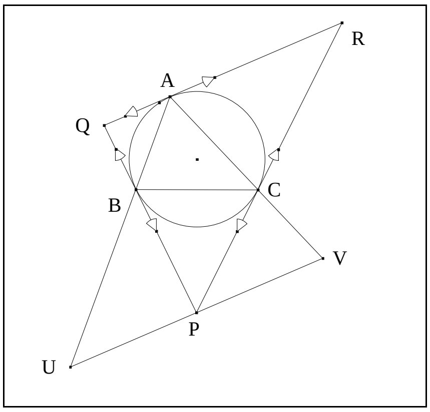
| | | |
|---|---|---|
| | ABC | un triangle acutangle, |
| | Γ | le cercle de centre I, circonscrit à ABC, |
| | H | le point de Γ diamétralement opposé à A, |
| | U, V | les points d'intersection de (AB) et (CH), de (AC) et (BH), |
| et | P | un point de [UV]. |

**Thèse** : P est le milieu de [UV] *si, et seulement si*, les droites (PB) et (PC) sont tangentes à Γ

**Scolie :**
H est l'orthocentre du triangle AUV; la hauteur (AH) étant perpendiculaire à (UV) et à la tangente Ta de Γ en A en tant que diamètre de Γ, Ta est parallèle à (UV).

**Démonstration :**
**C.N. :** d'après le théorème de Möbius[4], le cercle de diamètre [UV] passant par B et C, est orthogonal à Γ ce qui revient à dire que les droites (PB) et (PC) sont tangentes à Γ.
**C.S. :** d'après le théorème de Pascal, (UPV) est la pascale[5] de l'hexagone dégénéré ABTbHCTcA; les triangles BUV et CUV étant rectangles en B et C sont inscriptibles dans le demi cercle de diamètre [UV] ; puis, en appliquant le théorème de Boutin, on conclut.

**Version à partir du triangle tangentiel**




**Hypothèses** :

PQR un triangle,

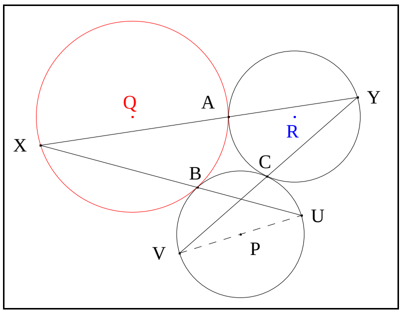
[4] Möbius A. F., mathématicien allemand (1790 -1868); le théorème : une sécante mobile étant menée par l'un des points d'intersection de deux cercles, les droites qui joignent l'autre point d'intersection aux deux extrémités de la sécante déterminent entre elles un angle constant égal à l'angle déterminé par les droites qui joignent ce même point d'intersection aux deux centres.
[5] Cf. appendice 3.

| | | |
|---|---|---|
| | Γ | le cercle inscrit dans PQR, |
| | ABC | le triangle de contact de PQR, |
| et | Δp | une droite passant par P telle que |
| | U, V | soient les points d'intersection de Δp avec (AB) et (AC). |

**Thèse :** Δp est parallèle à (QR) *si, et seulement si,* P est le milieu de [UV]

**Démonstration :**
le cercle Γp de centre P passant par B et C coupe (AB) en U' et (AC) en V' ; d'après le théorème de Boutin, (U'V') est la parallèle à (QR) passant par le milieu P de [U'V'].
**C.N. :** d'après le postulat d'Euclide, Δp = (U'V'); en conséquence, P est le milieu de [UV].
**C.S. :** raisonnons par l'absurde en supposant que Δp n'est pas parallèle à (QR); le quadrilatère UU'VV' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme; en conséquence, (AUU') serait parallèle à (AV'V) ce qui est contradictoire.

**Une généralisation de Yaglom**[6]




**Hypothèses :**

| | | |
|---|---|---|
| | Γp, Γq, Γr | trois cercles de centre P, Q, R, deux à deux tangents extérieurement, |
| | A, B, C | les points de contact de Γr et Γq, de Γq et Γp, de Γp et Γr, |
| | U | un point de Γp, |
| et | X, Y, V | les seconds points d'intersection de (UB) avec Γq, (XA) avec Γr, (YC) avec Γp. |

**Thèse** : la droite (UV) passe par P.

**Scolie :**
U est distinct de V, sinon les cercles Γp, Γq et Γr seraient concourants d'après le théorème du pivot[7] en considérant le triangle UXY avec A sur (XY), B sur (UX) et C sur (UY).

**Démonstration :**
notons Tu, Tx, Ty et Tv, les tangentes à Γp, Γq , Γr et Γp en U, X, Y et V ;
les cercles Γp et Γq , Γq et Γr, Γr et Γp conduisent au théorème de Reim ; il s'en suit que Tu // Tx, Tx // Ty, Ty // Tv et par transitivité, Tu // Tv ; puis, comme dans le deuxième point de la démonstration du théorème de Boutin, on conclut.

**Scolies :**
1. le résultat reste vrai lorsque deux points coïncident en considérant la tangente en ce point.
2. Nous retrouvons le théorème de Boutin lorsque X et Y coïncident avec A.
3. PQR est le triangle tangentiel de ABC.
4. Une droite parallèle à (UV) :

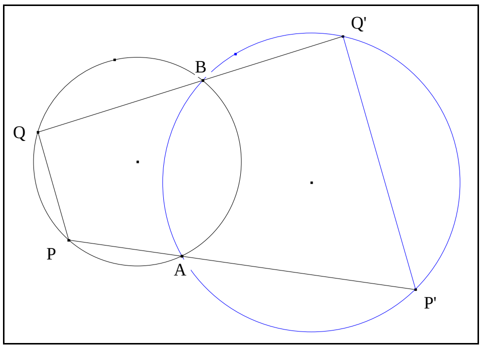
notons U', V' les seconds points d'intersection de (AB) et (AC) avec Γp ; le quadrilatère UU'VV' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu P est un parallélogramme; en conséquence, (UU') // (VV').

---
[6] Yaglom I. M., *Transformations géométriques* II, MAA, p. 31. Isaac Moisevitch Yaglom est né en Ukraine en 1921.
[7] Cf. appendice 2.

Notons D le second point d'intersection de (CU) avec le cercle Γ circonscrit à ABC; les cercles Γ et Γp conduisent au théorème de Reim :
(AD) // (UU'); d'où par transitivité, (AD) // (VV'). Les cercles sécants Γ et Γp, la droite (ACV') et les parallèles (AD) et (VV'), conduisent à l'alignement des points D, B et V; en conséquence, d'après le théorème de Reim appliqué à ces mêmes cercles, la tangente à Γ en D est parallèle à (UV).
5. Position de D :
les cercles Γp et Γq conduisent au théorème de Reim : (U'U) // (AX) et par transitivité (AD) // (AX); d'après le postulat d'Euclide, D est sur la droite (XY).
6. D étant le point d'intersection des droites (UC) et (VB), les céviennes[8] (UB) et (VC) sont deux hauteurs du triangle DVU dont l'orthocentre H est sur Γ.

## APPENDICE

**Appendice 1 :** le théorème de Reim [9]




| | | |
|---|---|---|
| **Hypothèses :** | Γ, Γ' | deux cercles sécants, |
| | A, B | les deux points d'intersection de Γ et Γ', |
| | Da | une droite passant par A, |
| | Q | un point de Γ, |
| | Q' | un point de Γ' |
| et | Db | la droite brisée (QBQ'). |

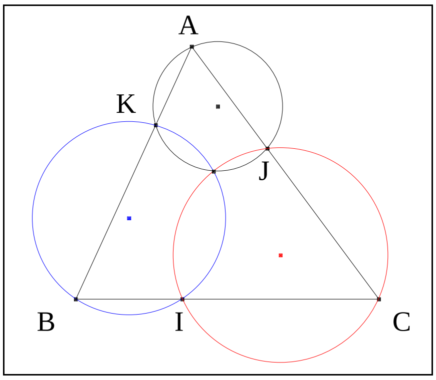
**Thèse :** Db est une droite *si, et seulement si,* (PQ) est parallèle à (P'Q'). [10]

**Scolie :** ce théorème reste vrai lorsque les cercles sont tangents ou que les points P et Q sont confondus ; dans ce dernier cas, on envisage la tangente.

**Appendice 2 :** le théorème du pivot [11]

---

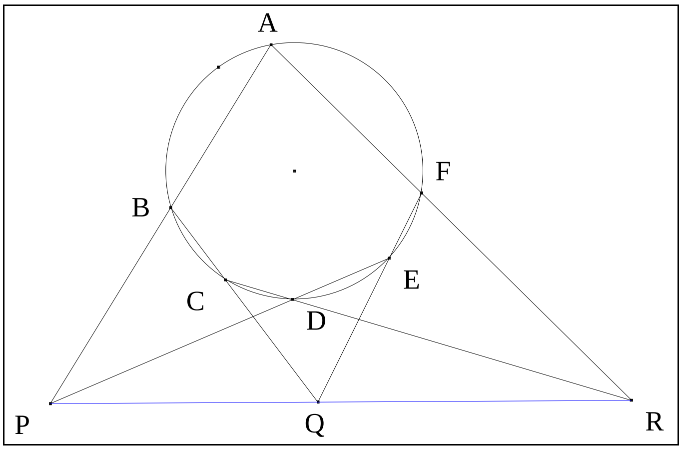
[8] Nom donné aux droites passant par un sommet d'un triangle en l'honneur de Jean de Céva (1648-1734).
[9] Proposé aux Maxi olympiades belges de 1982.
Reim Anton (1832-1922), mathématicien allemand.
[10] Une démonstration de cette équivalence peut se faire par la méthode des angles.
[11] Nom donné par Forder H. G. dans *Higher Course Geometry*, Cambridge Press (1949) et découvert par Miquel A., Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville 3 (1838) 485-487.




**Hypothèses :** ABC un triangle,
I un point de la droite (BC),
J un point de la droite (CA)
et K un point de la droite (AB).

**Thèse :** les cercles circonscrits aux triangles AKJ, BIK et CJI sont concourants. [12]

**Appendice 3 :** le théorème de Pascal [13]




**Hypothèses :** Γ un cercle,
ABCDEF un hexagone inscrit dans Γ
et P, Q, R les points d'intersection de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

**Thèse :** les points P, Q et R sont alignés.

**Scolies :**
1. la droite (PQR) est la pascale de l'hexagone ABCDEF.
2. Le résultat reste vrai lorsque les points C et D, E et F sont confondus; dans ce dernier cas, on remplace les côtés [CD] et [EF] par les tangentes à Γ en C et E. Cette situation particulière a été étudiée par MacLaurin ou Mac-Laurin Colin, *Traité des Fluxions* (1748) Appendice § 36.

[12] Une démonstration de ce théorème peut se faire par la méthode des angles ou à partir du théorème de Reim.
[13] Appelé aussi "Hexagramma mysticum".
Pascal Blaise (1623-1662).