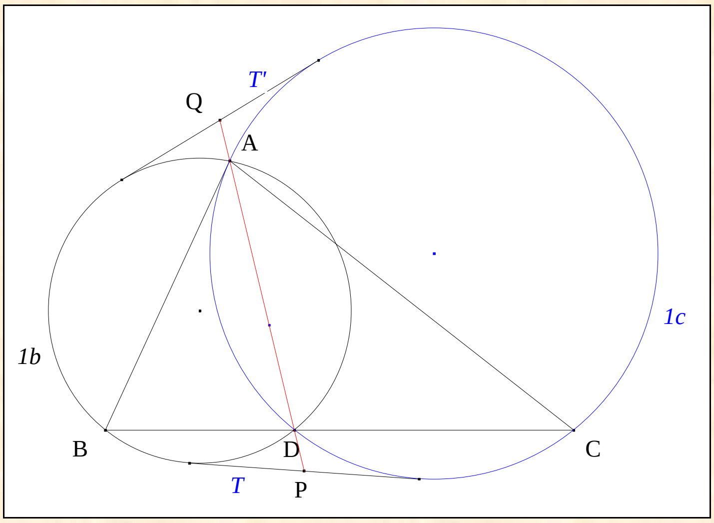
ÉLÉGANCE 11

AB.AC = PQ²

Qu'est ce qui vous plait le plus dans une preuve synthétique ?
C'est son élégance. [1]

What you like most in a synthetic proof ?
Its elegance.

Jean - Louis AYME [2]



Résumé. Cette note présente une élégante preuve concernant la relation AB.AC = PQ².
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. This note presents an elegant proof of the relation AB.AC = PQ².
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

---

[1] Qualité de ce qui est exprimé avec justesse et agrément, avec une netteté sobre, sans lourdeur

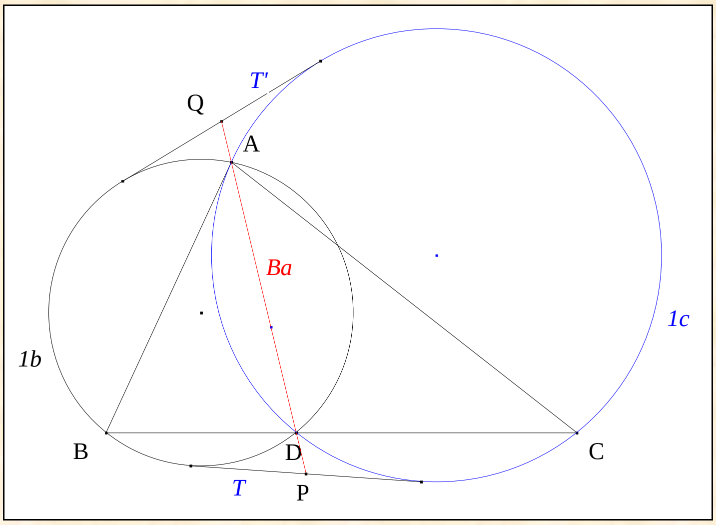
[2] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 31/07/2016 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sommaire

A. LE PROBLÈME [3]

VISION

Figure :



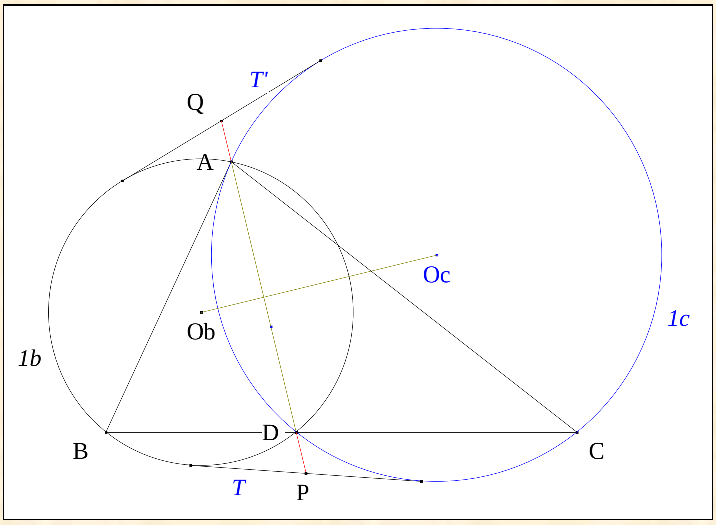
Traits :

	ABC	un triangle,
	Ba	la A-bissectrice intérieure de ABC,
	D	le pied de *Ba*,
	1b, *1c*	les cercles circonscrits resp. aux triangles BAD, CAD,
	T, *T'*	les tangentes extérieures communes à *1b* et *1c*,
et	P, Q	les points d'intersection de (AD) resp. avec *T*, *T'*.

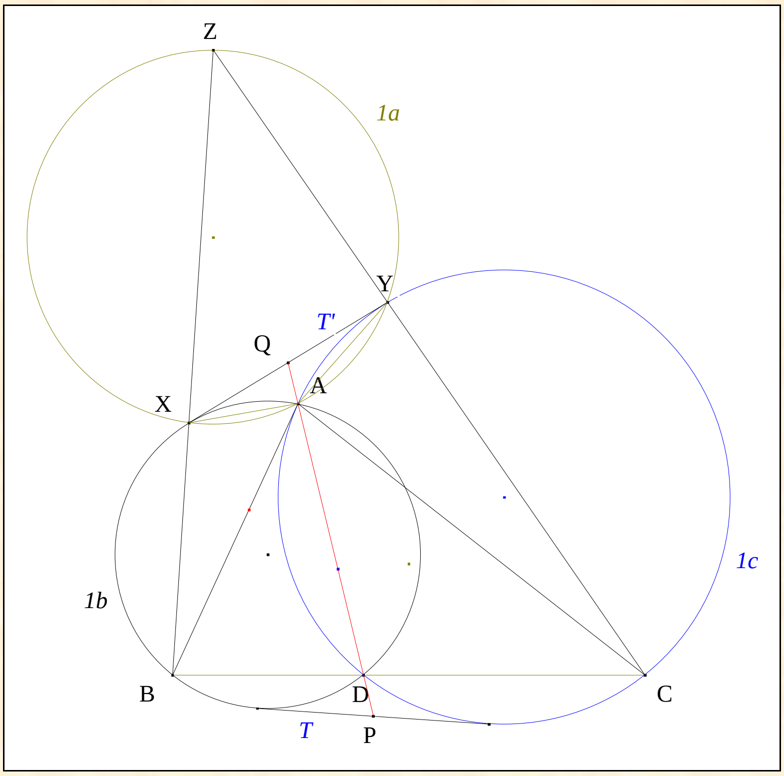
Donné : AB.AC = PQ².

[3] radical axis and tangents, AoPS du 07/08/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1285629_radical_axis_and_tangents
Geometry Problem, AoPS du 08/09/2016/
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1302683_geometry_problem
Angle Bisector and External Tangents., AoPS du 23/06/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1466591_angle_bisector_and_external_tangents
D**1854**. A la recherche d'une jolie preuve, *Diophante* ;
http://www.diophante.fr/problemes-par-themes/geometrie/d1-geometrie-plane-triangles-et-cercles/3885-d1854-a-la-recherche-d-une-jolie-preuve

VISUALISATION



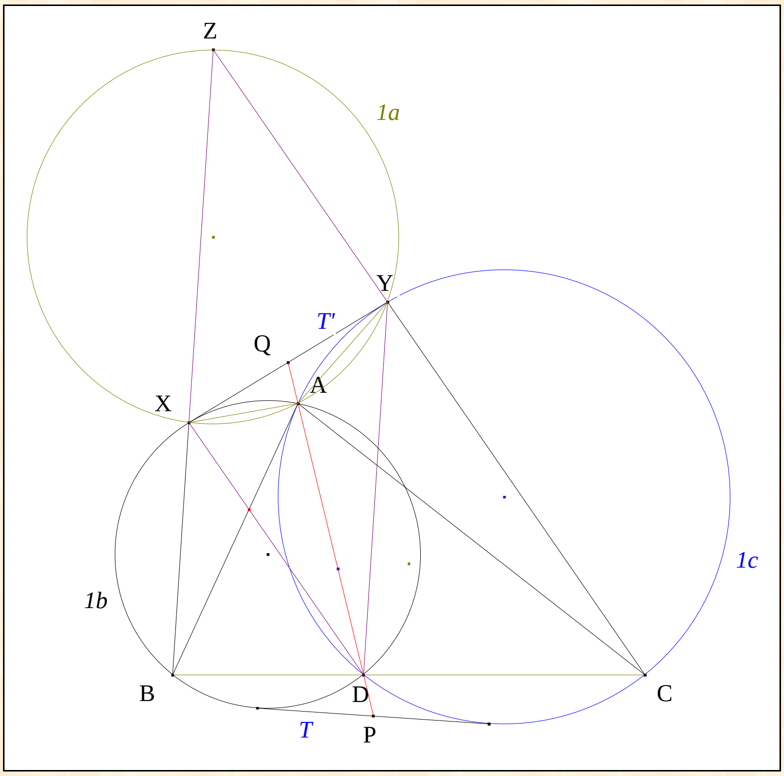
- Notons Ob, Oc les centres resp. de *1b*, *1c*.
- Par symétrie d'axe (ObOc), AQ = DP.



- Notons X, Y les points de contact de *T'* resp. avec *1b*, *1c*
  et Z le point d'intersection de (BX) et (CY).
- D'après "Une monienne brisée" [4]
  appliquée à la monienne (BDC) et à la monienne brisée (XAY), A, X, Y et Z sont cocycliques.

[4] Ayme J.-L., Deux cercles sécants, G.G.G. vol. **12**, p. 45-46 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

- Notons *1a* ce cercle.



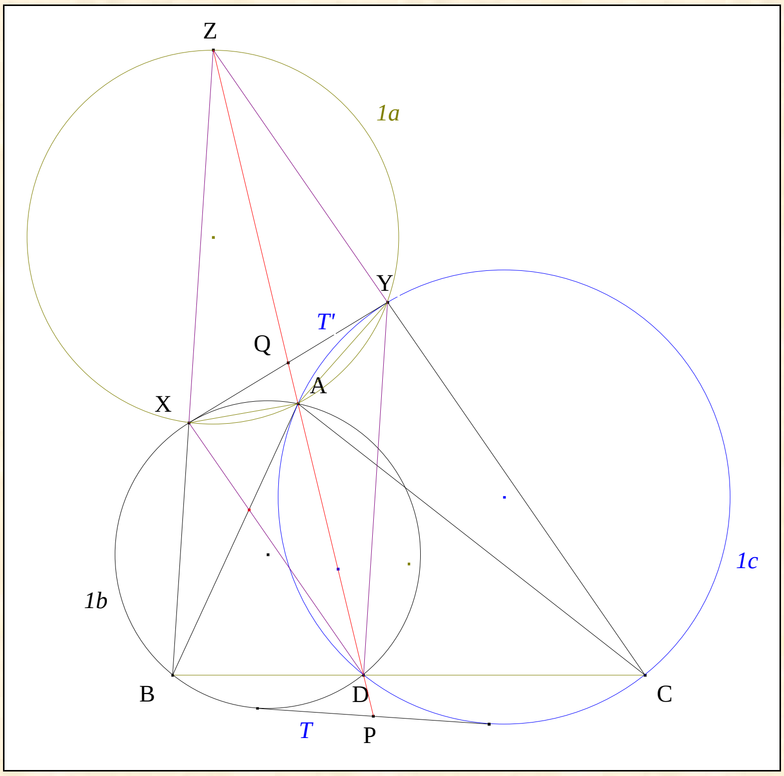
- Une première chasse angulaire :

  * par hypothèse, <BAD = <DAC
  * par "Angles inscrits", <BAD = <BXD et <DAC = <DYC
  * par "Angle supplémentaire", <DXZ = <ZYD.

- Une seconde chasse angulaire :

  * par "Angles inscrits", <XZY = <AXY + <XYA
  * par "Angle de la tangente", <XZY = <ABX + <YDA
  * par "Angles inscrits", <ABX = <ADX
  * par substitution et addition, <XZY = <YDX.

- **Conclusion partielle :** le quadrilatère DXZY est un parallélogramme.

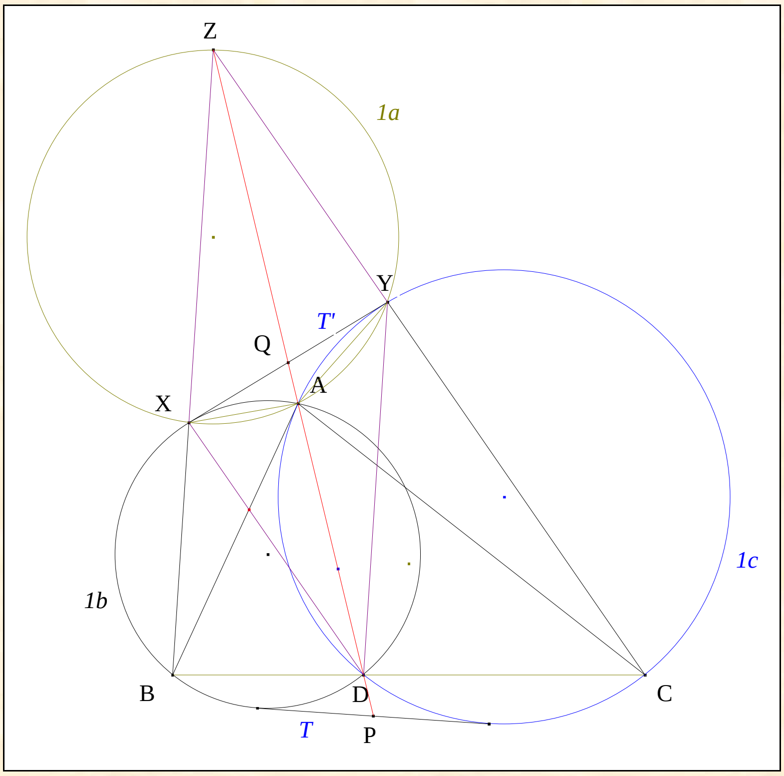


- Q étant le milieu de [XY], (DQ) passe par Z.

- **Scolies :** **(1)** AQ = PD

  (2) QZ = DQ.

- **Conclusion partielle :** par addition membre à membre, AZ = PQ.



- Une première chasse angulaire :

  * nous avons : <DXZ = <ZYD
  * d'après Möbius "Angle de deux cercles", <DXZ = <ZAB et <ZYD = <CAZ
  * par substitution, <ZAB = <CAZ.

- Une seconde chasse angulaire :

  * par une autre écriture, <ABZ = <ABX
  * par "Angles inscrits", <ABX = <ADX
  * par une autre écriture, <ADX = <ZDX
  * par "Angles alternes-internes", <ZDX = <DZY.

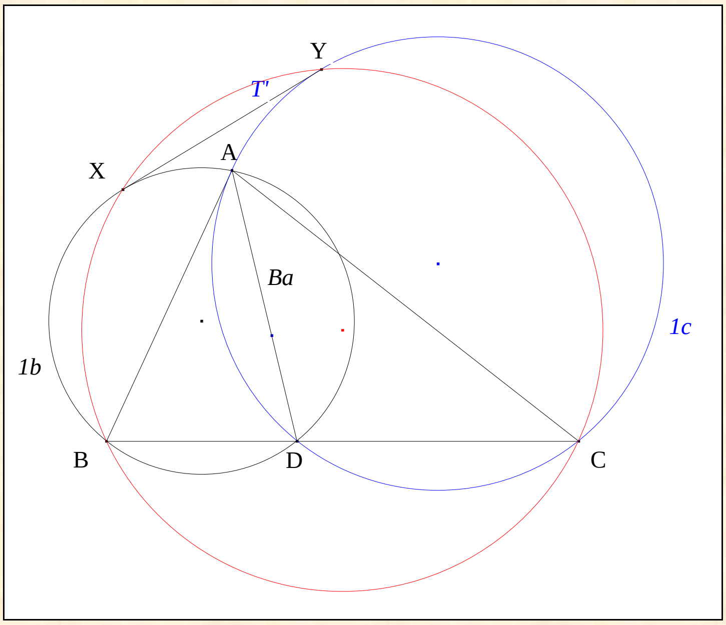
- Les triangles ABZ et AZC étant sembles, AB/AZ = AZ/AC ou encore AB/PQ = PQ/AC.

- **Conclusion :** par "le produit en croix", AB.AC = PQ^2.

B. QUATRE POINTS COCYCLIQUES

VISION

Figure :

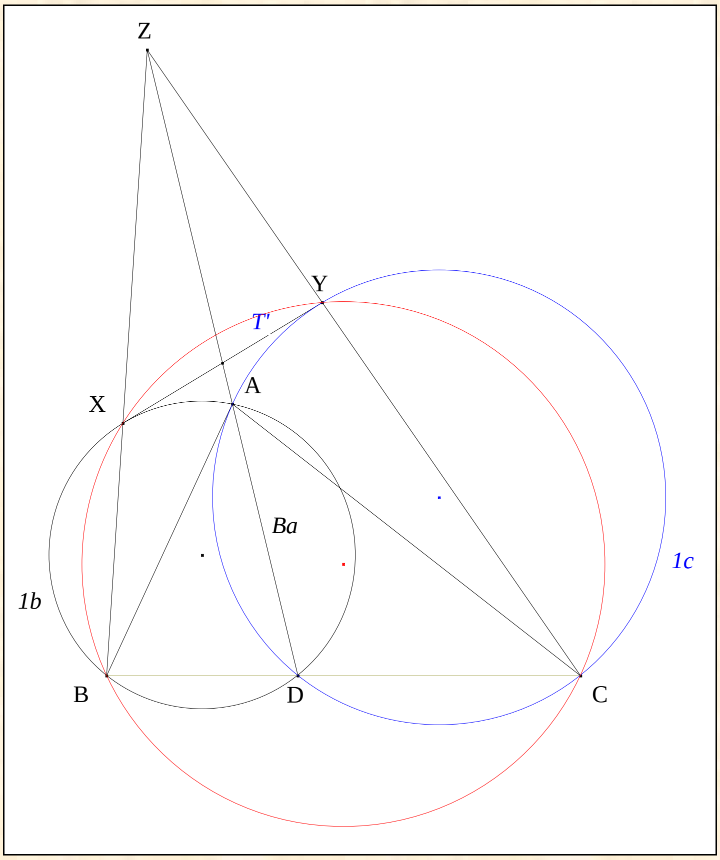


Traits : ABC un triangle,
Ba la A-bissectrice intérieure de ABC,
D le pied de *Ba*,
1b, *1c* les cercles circonscrits resp. aux triangles BAD, CAD,
T' la tangente extérieure commune à *1b* et *1c* (comme indiquée sur la figure)
et X, Y les points de contact de *T'* resp. avec *1b*, *1c*

Donné : B, C, X et Y sont cocycliques. [5]

VISUALISATION

[5] Ayme J.-L., Four concyclic points, AoPS du 25/06/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1467751_four_concyclic_points



- Notons Z le point d'intersection de (BX) et (CY).

- D'après **A.** p. 5, (DA) passe par Z.

- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" [6], B, C, X et Y sont cocycliques.

[6] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange/fr