45°

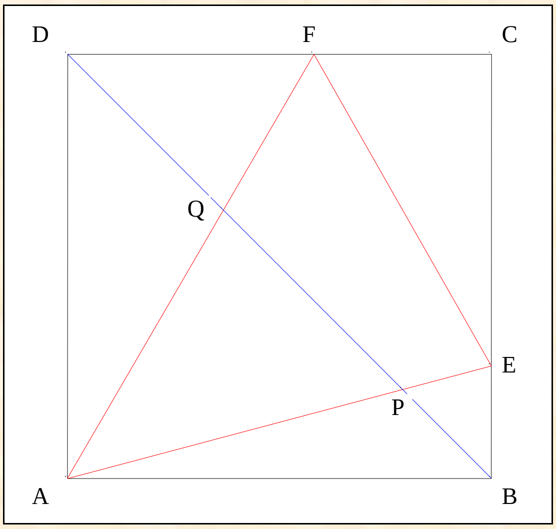
UN ANGLE DANS UN CARRE

A THEMA IN PROCESS

†

Le rythme est au temps
ce que
la symétrie au sens ancien est à l'espace. [1]

Jean-Louis AYME [2]



Résumé. L'auteur présente *A Thema in Process* concernant "45°, un angle dans un carré". Les différents problèmes recensés par l'auteur concernant ce résultat qui lui sont apparus comme une "symétrie brisée", ont été fédérés par ses soins de telle façon que le développement présenté par équivalence soit "symétrique". Des preuves originales sont offertes au lecteur. Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents *A Thema in Process* concerning "45 °, an angle in a square". The various problems identified by the author about this result that he emerged as a "broken symmetry", have been federated by itself in such a way that the development submitted by equivalence is "symmetric". Original proofs are available to the reader. The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

---

[1] Pour Vitruve, architecte romain du Ie av. J.-C., la symétrie consistait en "la répétition de formes semblables" par un accord de mesure commune i.e. une comodulation. Le sens ancien se perdit à la fin du XVIIe au profit du sens moderne.

[2] Saint-Denis, Île de La Réunion (Océan Indien, France), le 20/07/2014

Sommaire

POINT DE VUE

Mieux vaut une once de pratique
où la main devient le regard de l'âme et de l'esprit,
qu'une tonne de théorie.

L'auteur propose un article "in process" i.e. en construction, partie par partie.
Au rythme de cette démarche qui s'insère dans le temps, correspond une symétrie i.e. une comodulation dans l'espace publié.
De là, l'auteur espère qu'une harmonie peut naître entre ces deux pôles, et s'exprimer dans un langage muet pour ne parler qu'au regard et non plus aux yeux.

ORIGINE DU THÈME

80 USSR OLYMPIAD 1991

11 FORM

Second day

21. On the sides AB and AD of a square $ABCD$ points K, N are chosen, respectively, so that $AK \cdot AN = 2BK \cdot DN$. The lines CK and CN intersect the diagonal BD at points L and M. Prove that the points K, L, M, N, A are concyclic.

(D Tereshin, Moscow)

[3]

RMO–1999

3. Let $ABCD$ be a square and M, N points on sides AB, BC, respectably, such that $\angle MDN = 45°$. If R is the midpoint of MN show that $RP = RQ$ where P, Q are the points of intersection of AC with the lines MD, ND.

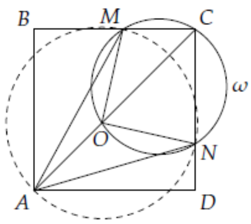
[4]

Baltic Way 2003 mathematical team contest

Riga, November 2, 2003

Working time: 4.5 hours.
Queries on the problem paper can be asked during the first 30 minutes.

12. *Let ABCD be a square. Let M be an inner point on side BC and N be an inner point on side CD with $\angle MAN = 45°$. Prove that the circumcentre of AMN lies on AC.*



[5]

Ainsi que de nombreux problèmes sans relation entre eux, proposés [6] sur le site *Art of Problem Solving* [7].

[3] Tereshin D. A., **XXV** *Soviet Mathematical Olympiad*, **11**th Form, Day **1** (1991) ; http://limtaosin.files.wordpress.com/2012/08/arkadii-m-slinko-ussr-mathematical-olympiads-1989-19921.pdf

[4] http://www.isical.ac.in/~rmo/rmo99.pdf

[5] http://www.math.olympiaadid.ut.ee/eng/archive/bw/bw03eng.pdf

[6] Square, RMO 1999 problem, AoPS du 28/08/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=500164
Ayme J.-L., Five concyclic points, *Mathlinks* du 17/11/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=378150
Perpendicular problem?, *Mathlinks* du 25/12/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=383620

[7] AoPS ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewforum.php?f=4

I. UNE CHAÎNE HARMONIEUSE D'ÉQUIVALENCES

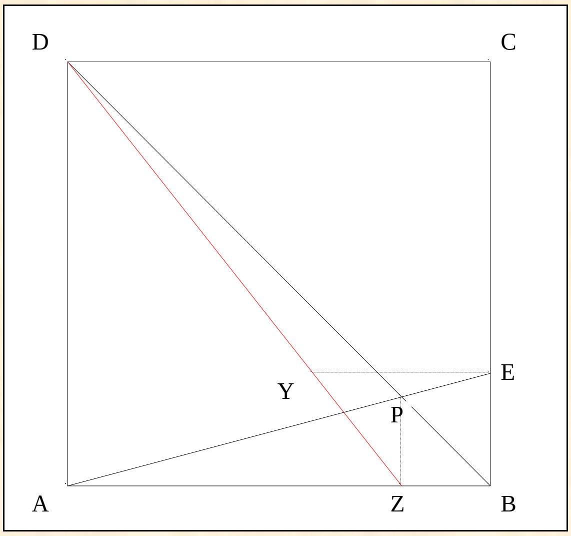
Commentaire : dans cette partie, les notations ne varient pas d'un énoncé à un autre.

L'AUTEUR

D'UN ALIGNEMENT À UNE MÉDIATRICE

VISION

Figure :



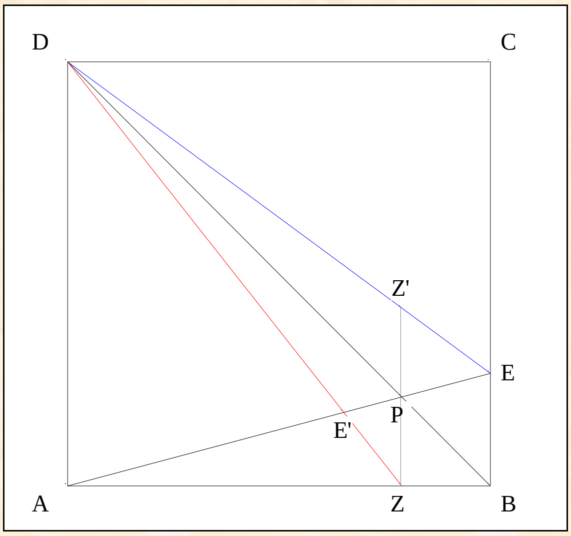
Traits : ABCD un carré,
E un point de [BC],
P le point d'intersection de (BD) et (AE),
Y un point de la parallèle à (AB) issue de E
et Z le pied de la perpendiculaire à (AB) issue de P.

Donné : Y est sur (DZ) *si, et seulement si,* (PZ) est la médiatrice de [EY]. [8]

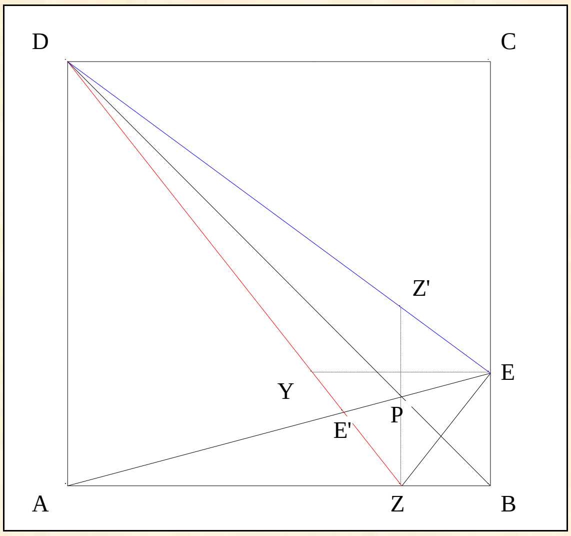
Commentaire : pour l'auteur ce lemme est analogue à une pierre précieuse engoncée dans sa gangue minérale.

VISUALISATION

[8] Ayme J.-L., A perpendicular bisector, AoPS du 27/06/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=595409



- Notons Z', E' les points d'intersection resp. de (PZ) et (DE), (DZ) et (AE).
- **Scolie :** (AD), (BE) et (ZZ') sont parallèles entre elles.
- Le quadrilatère ABED étant un trapèze, P est le milieu de [ZZ'] ;
  en conséquence, le pinceau (D ; A, P, Z, Z') est harmonique ;
  il s'en suit que le quaterne (A, P, E', E) est harmonique.
- **Conclusion partielle :** par changement d'origine, le pinceau (Z ; A, P, E', E) est harmonique.



- **Conclusion :** sachant que (EY) // (ZA) et (PZ) $\perp$ (ZA),

  nous obtenons l'équivalence :

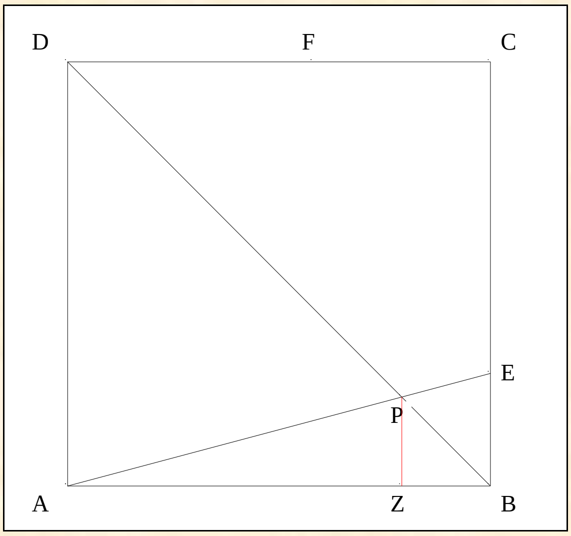
  Y est sur (DZ) *si, et seulement si,* (PZ) est la médiatrice de [EY].

ÉQUIVALENCE 1

D'UNE MÉDIATRICE À UNE RELATION

VISION

Figure :



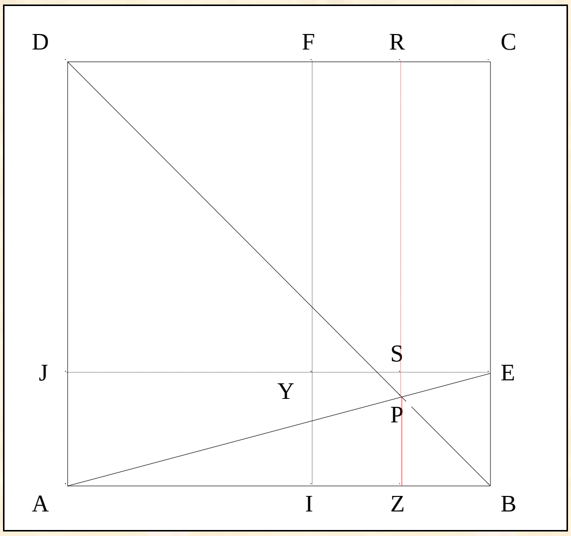
Traits : ABCD un carré,
E un point de [BC],
P le point d'intersection de (BD) et (AE),
F un point de [CD],
et Z le pied de la perpendiculaire à (AB) issue de P.

Donné : (PZ) est la médiatrice de [CF] *si, et seulement si*, 2.BE.DF = CE.CF. [9]

Commentaire : d'une médiatrice à une relation métrique.

VISUALISATION

[9] Ayme J.-L., A relation, AoPS du 28/06/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=595567

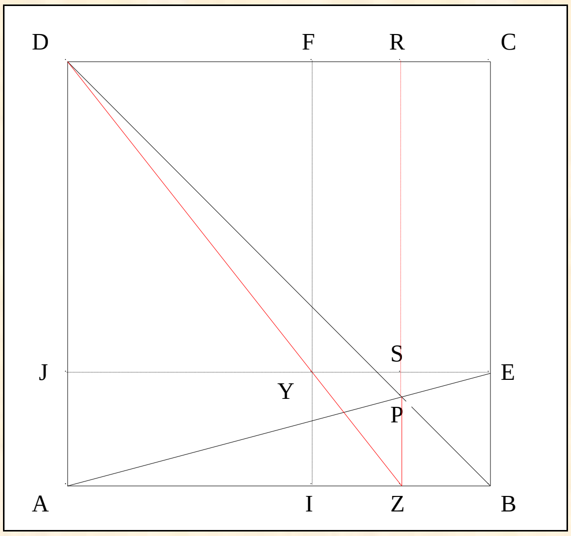


- Notons Y le point tel que le quadrilatère FCEY soit un rectangle
  R, S les points d'intersection de (PZ) resp. avec (CD), (EY)
  et I, J les points d'intersection resp. de (FY) et (AB), (EY) et (AD).

- Une chasse rectangul-aire :

  * le rectangle YIAJ : [YIAJ] = BE.DF

  * le rectangle YECF : [YECF] = [YSRF] + [SECR] = CE.CF.



- Une chasse d'équivalence :

(PZ) est la médiatrice de [CF]

$\updownarrow$

* d'après "l'auteur", Y est sur (DZ)

$\updownarrow$

* d'après Euclide "Rectangles complémentaires", [YIAJ] = [YSRF]

$\updownarrow$

* ou encore, 2.[YIAJ] = 2.[YSRF]

$\updownarrow$

* d'après "l'auteur", 2.[YIAJ] = [YECF]

$\updownarrow$

* par une autre écriture, 2.BE.DF = CE.CF.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation ↔,

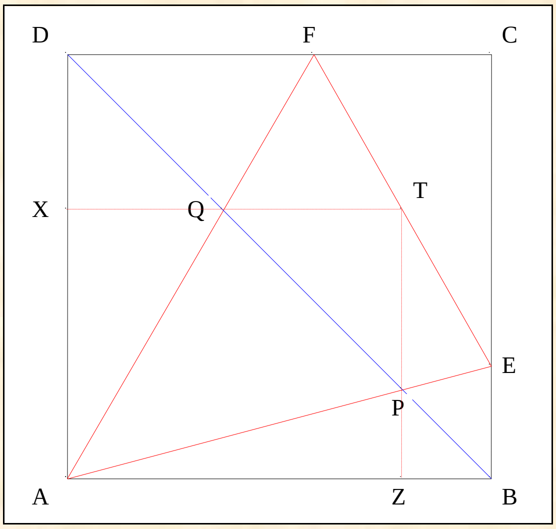
(PZ) est la médiatrice de [CF] *si, et seulement si,* 2.BE.DF = CE.CF.

ÉQUIVALENCE 2

D'UNE RELATION À UN MILIEU

VISION

Figure :

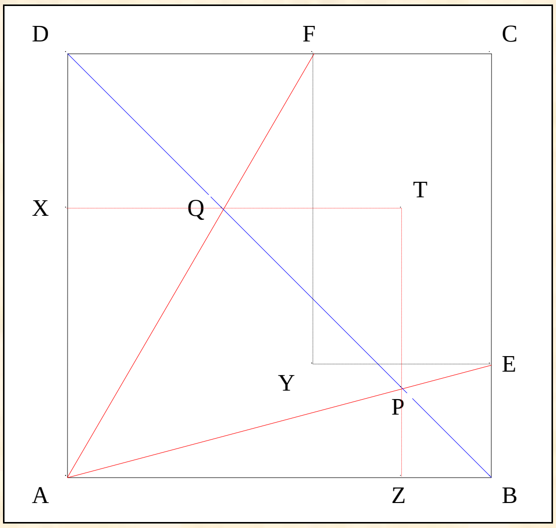


Traits : ABCD un carré,
E un point de [BC], [CD] tels que CE ≠ CF,
P le point d'intersection de (BD) et (AE),
F un point de [CD] tel que CE ≠ CF,
Q le point d'intersection de (BD) et (AF),
X, Z les pieds des perpendiculaires à (AD), (AB) issues de P
et T le point d'intersection de (PZ) et (QX).

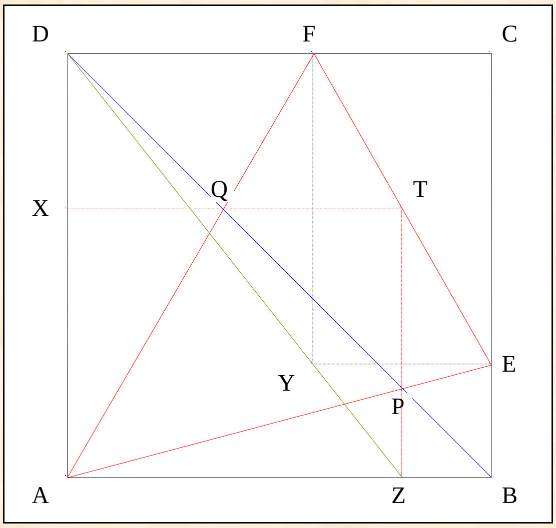
Donné : 2.BE.DF = CE.CF *si, et seulement si,* T est le milieu de [EF].

Commentaire : d'une relation métrique à un milieu.

VISUALISATION



- Notons Y le point tel que le quadrilatère FCEY soit un rectangle
  et T le point d'intersection de (PZ) et (QX).



- Une première chasse d'équivalence :

2.BE.DF = CE.CF

↕

* d'après **E. 2**, [10] (PZ) est la médiatrice de [EY]

↕

* d'après "l'auteur", Y est sur (DZ)

↕

* d'après "l'auteur", (QX) est la médiatrice de [FY].

- Une seconde chasse d'équivalence :

(PZ) est la médiatrice de [EY] et (QX) est la médiatrice de [FY]

↕

T est le centre de symétrie de CEYF

↕

T est le milieu de [EF].

---

[10] **E. 2** signifie "équivalence **2**"

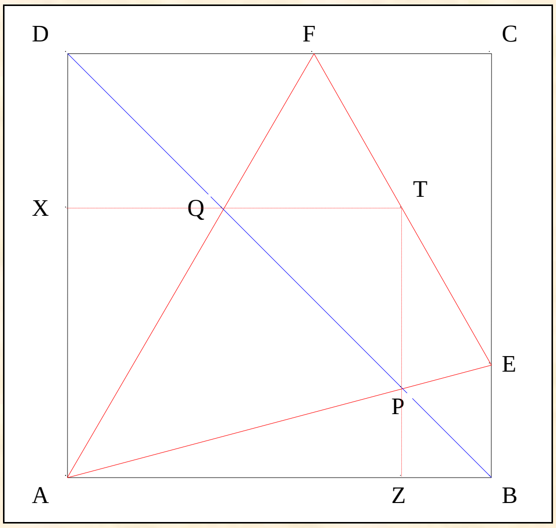
- **Conclusion :** 2.BE.DF = CE.CF *si, et seulement si*, T est le milieu de [EF].

ÉQUIVALENCE 3

D'UN MILIEU À UNE RELATION

VISION

Figure :

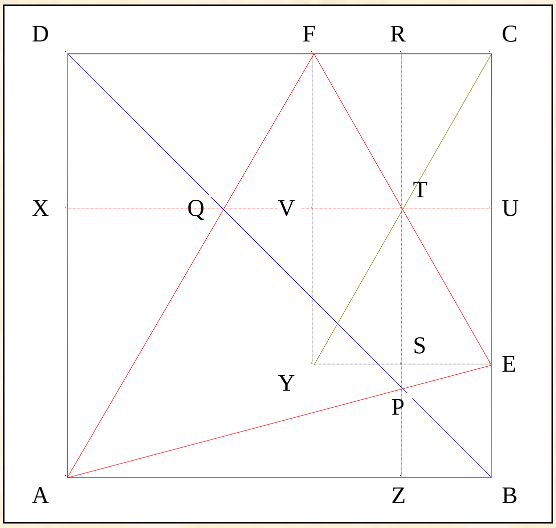


Traits :	ABCD	un carré,
	E	un point de [BC], [CD] tels que CE ≠ CF,
	P	le point d'intersection de (BD) et (AE),
	F	un point de [CD] tel que CE ≠ CF,
	Q	le point d'intersection de (BD) et (AF),
	X, Z	les pieds des perpendiculaires à (AD), (AB) issues de P
et	T	le point d'intersection de (PZ) et (QX).

Donné : T est le milieu de [EF] *si, et seulement si*, BP.CE = DQ.CF.

Commentaire : d'un milieu à une relation métrique

VISUALISATION



- Notons X, Z les pieds des perpendiculaires à (AD), (AB) issues de P,
  Y le point tel que le quadrilatère FCEY soit un rectangle,
  R, S les points d'intersection de (PZ) resp. avec (CD), (EY)
  et U, V les points d'intersection de (QX) resp. avec (CB), (FY).

- Une chasse rectangul-aire :

  * le rectangle ESRC : [ES.RC] = ES.EC = BP. cos 45°.CE

  * le rectangle FVUC : [FVUC] = FV.FC = DQ.cos 45°.CF.

- Une chasse d'équivalence :

  T est le milieu de [EF]
  ↕
  * T étant le centre de symétrie de CEYF, T est le milieu de [CY]
  ↕
  * d'après Euclide "Rectangles complémentaires", [ES.RC] = [FVUC]
  ↕
  BP.CE = DQ.CF.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation ↔,

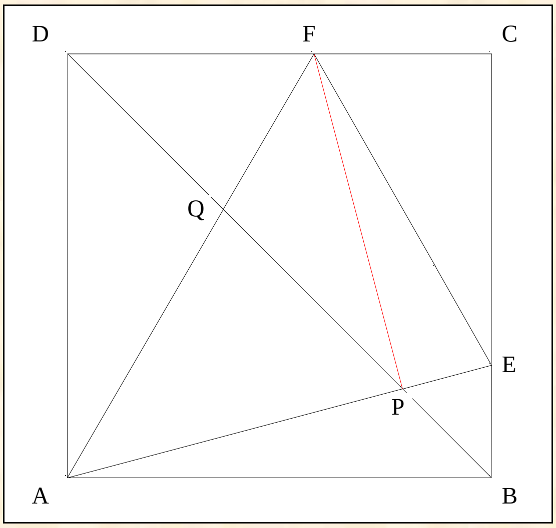
  T est le milieu de [EF] *si, et seulement si*, BP.CE = DQ.CF.

ÉQUIVALENCE 4

D'UNE RELATION À UNE PERPENDICULARITÉ

VISION

Figure :

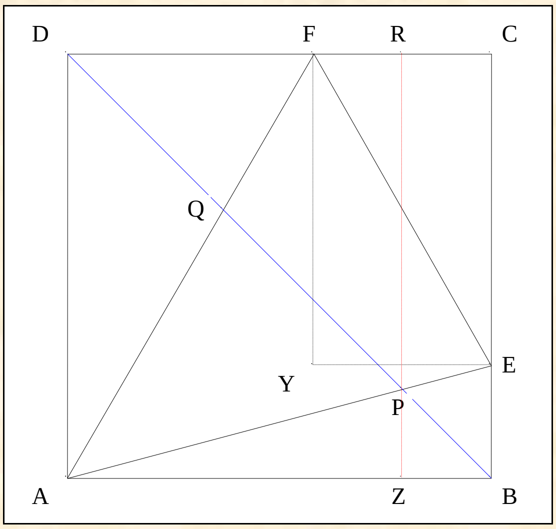


Traits : ABCD un carré,
E un point de [BC], [CD] tels que CE $\neq$ CF,
P le point d'intersection de (BD) et (AE),
F un point de [CD] tel que CE $\neq$ CF
et Q le point d'intersection de (BD) et (AF).

Donné : BP.CE = DQ.CF *si, et seulement si,* (AE) $\perp$ (FP) et (EQ) $\perp$ (AF).

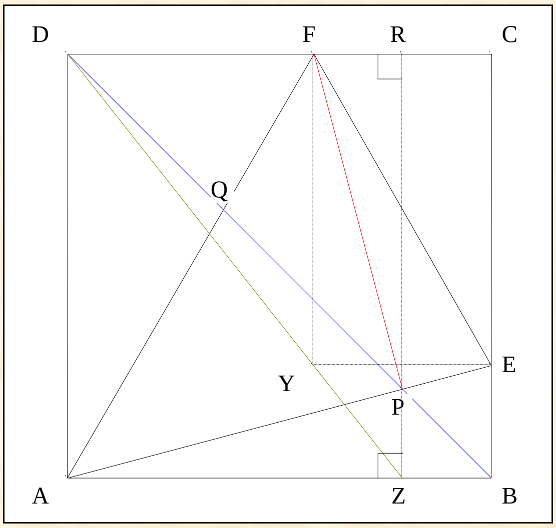
Commentaire : d'une relation métrique à une perpendicularité

VISUALISATION



- Notons Z le pied de la perpendiculaire à (AB) issues de P,
  Y le point tel que le quadrilatère FCEY soit un rectangle
  et R, S les points d'intersection de (PZ) resp. avec (CD), (EY).

- Par projection de [BP], PZ = CR ;
  par construction, AZ = DR
  par position de P sur la diagonale (BD) du carré ABCD, DR = RP ;
  par transitivité de la relation =, AZ = RP.



- Une chasse d'équivalence :

BP.CE = DQ.CF

↕

* d'après **E. 3**, **2**, **1**, (PZ) est la médiatrice de [CF]

↕

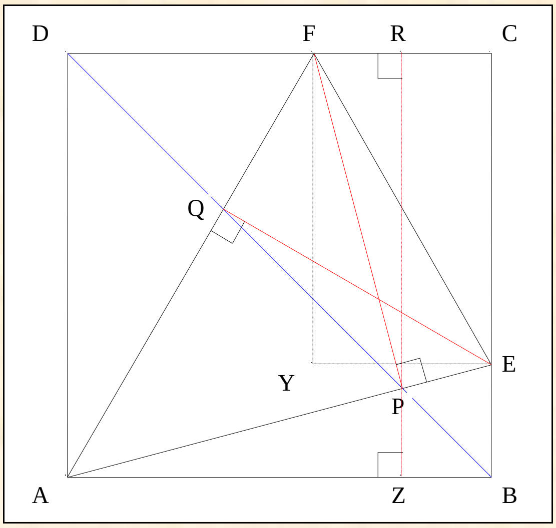
* d'après "Le théorème c.a.c. ", les triangles ZAP et RPF sont égaux

↕

* d'où, <ZAP = <RPF

↕

* "Angles à côtés perpendiculaires", (AE) ⊥ (FP).



- Mutatis mutandis, nous montrerions que BP.CE = DQ.CF

↕

(AF) ⊥ (EQ).

- **Conclusion :** par transitivité de la relation ↔,

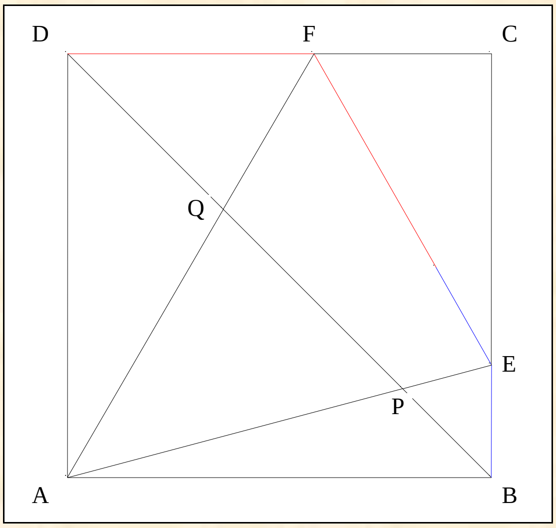
BP.CE = DQ.CF *si, et seulement si,* (AE) ⊥ (FP) et (EQ) ⊥ (AF).

ÉQUIVALENCE 5

DE DEUX PERPENDICULARITÉS À UNE RELATION

VISION

Figure :

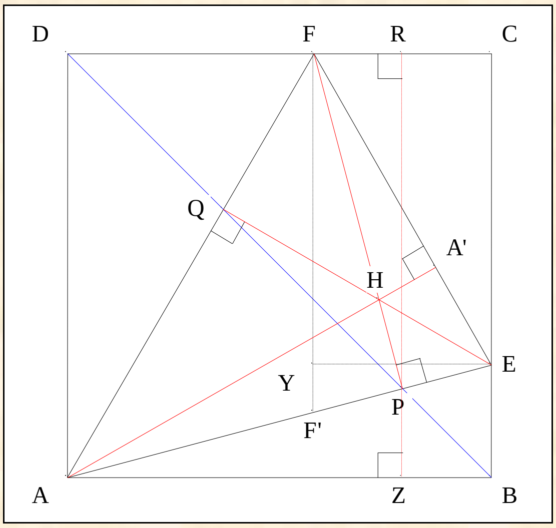


Traits : ABCD un carré,
E un point de [BC], [CD] tels que CE ≠ CF,
P le point d'intersection de (BD) et (AE),
F un point de [CD] tel que CE ≠ CF
et Q le point d'intersection de (BD) et (AF).

Donné : (FP) ⊥ (AE) et (EQ) ⊥ (AF) *si, et seulement si,* EF = BE + DF.

Commentaire : de deux perpendicularités à une nouvelle relation métrique.

VISUALISATION



- Notons Y le point tel que le quadrilatère FCEY soit un rectangle
  et H, A', F' les points d'intersection resp. de (FP) et (EQ), (AH) et (EF), (AY) et (AE).

- Une chasse d'équivalence :

(FHP) $\perp$ (AE) et (EHQ) $\perp$ (AF)

↕

* d'après Archimède, H est l'orthocentre du triangle AEF et (AHA') $\perp$ (EF)

↕

* par perpendicularité, les triangles AA'E et FPE sont semblables

↕

* d'après "l'auteur", les triangles FPE et FPF' sont égaux

↕

* "angles alterne- internes", les triangles FPF' et RPF sont semblables

↕

* d'après **E. 4**, les triangles RPF et ZAP sont égaux

↕

* "angles", les triangles ZAP et BAE sont semblables

↕

* par transitivité de la relation ↔, les triangles AA'E et BAE sont égaux

↕

* ou encore, EA' = BE.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que FA' = DF.

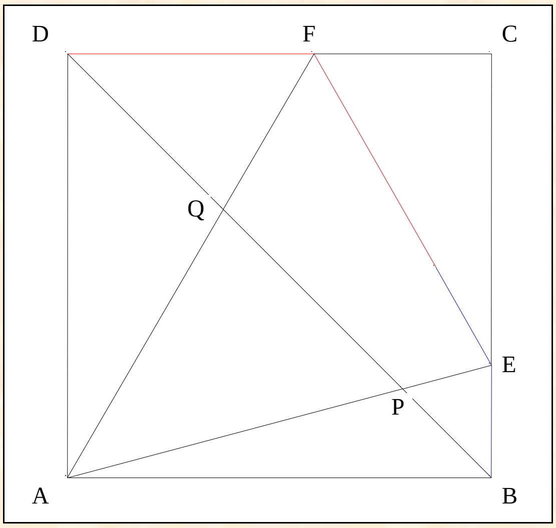
- **Conclusion :** (FP) $\perp$ (AE) et (EQ) $\perp$ (AF) *si, et seulement si,* EF = BE + DF.

ÉQUIVALENCE 6

D'UNE RELATION À UN ANGLE DE 45°

VISION

Figure :

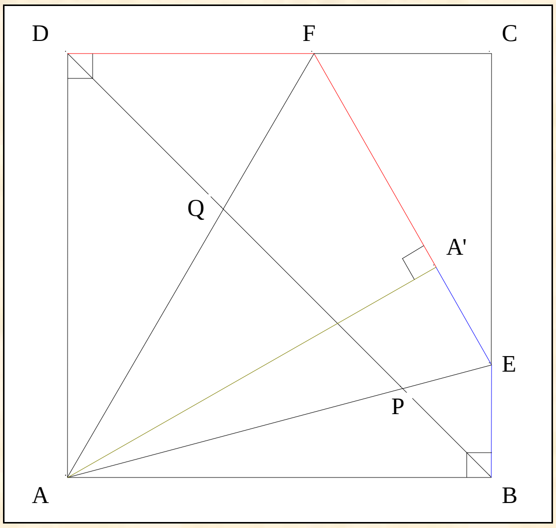


Traits : ABCD un carré,
E un point de [BC], [CD] tels que CE ≠ CF,
P le point d'intersection de (BD) et (AE),
F un point de [CD] tel que CE ≠ CF
et Q le point d'intersection de (BD) et (AF).

Donné : EF = BE + DF *si, et seulement si,* <EAF = 45°.

Commentaire : d'une relation métrique au fameux angle de 45°.

VISUALISATION



- Notons A' le pied de la A-hauteur du triangle AEF.

- Une chasse d'équivalence :

EF = BE + DF

↕

* d'après **E. 5**, EA' = BE et FA' = DF

↕

* "théorème a.a.a. ", les triangles ABE et AA'E sont égaux
les triangles ADF et AA'F sont égaux

↕

* ou encore, (AE) est la bissectrice intérieure de <BAA'
(AF) est la bissectrice intérieure de <DAA'

↕

* chasse angulaire, <EAF = 45°

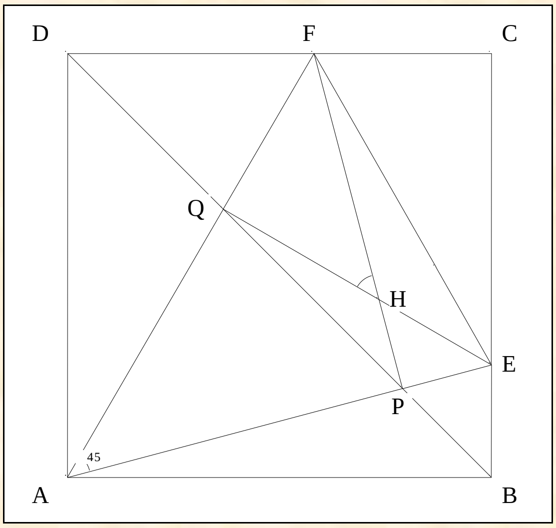
- **Conclusion :** EF = BE + DF *si, et seulement si,* <EAF = 45°.

ÉQUIVALENCE 7

D'UN ANGLE DE 45° À UN ANGLE DE 45°

VISION

Figure :

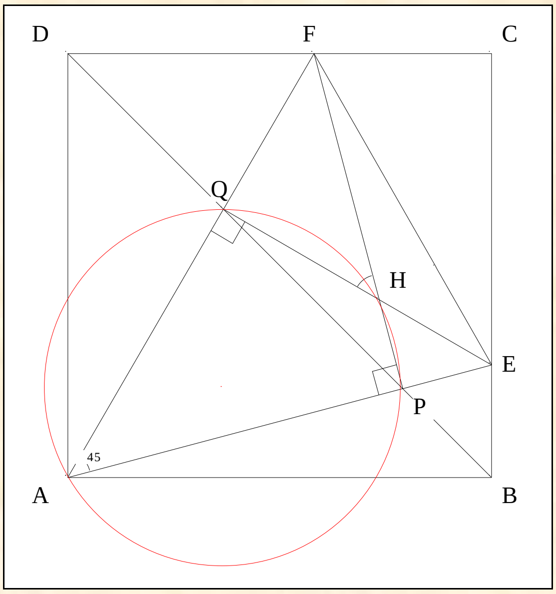


Traits : ABCD un carré,
E un point de [BC], [CD] tels que CE ≠ CF,
P le point d'intersection de (BD) et (AE),
F un point de [CD] tel que CE ≠ CF,
Q le point d'intersection de (BD) et (AF),
et H le point d'intersection de (FP) et (EQ).

Donné : <EAF = 45° *si, et seulement si,* <FHQ = 45°.

Commentaire : du fameux angle de 45° à un autre angle de 45°.

VISUALISATION



- Une chasse d'équivalence :

		<EAF = 45°
*	d'après **E. 6**, **7**,	(FP) ⊥ (AE) et (EQ) ⊥ (AF)
*	cocyclité,	le cercle de diamètre [AH] passe par P et Q
*	quadrilatère cyclique,	<FHQ = 45°.

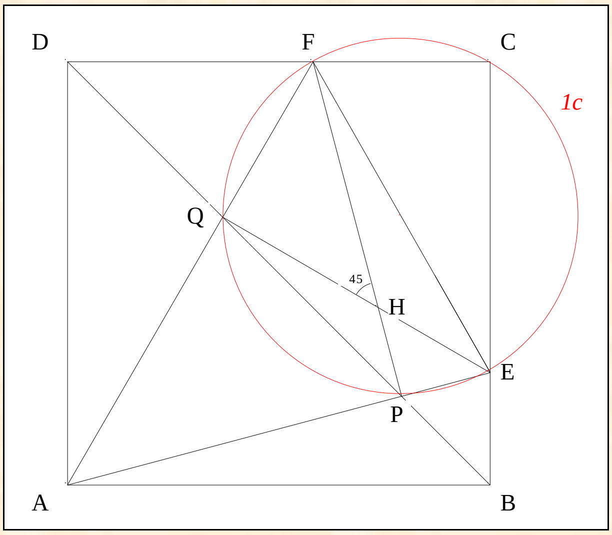
- **Conclusion :** <EAF = 45° *si, et seulement si,* <FHQ = 45°.

ÉQUIVALENCE 8

D'UN ANGLE DE 45° À CINQ POINTS COCYCLIQUES

VISION

Figure :



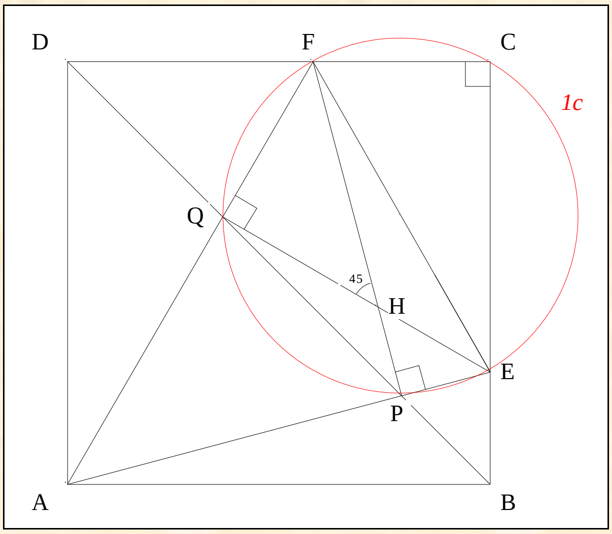
Traits :	ABCD	un carré,
	E	un point de [BC], [CD] tels que CE ≠ CF,
	P	le point d'intersection de (BD) et (AE),
	F	un point de [CD] tel que CE ≠ CF,
	Q	le point d'intersection de (BD) et (AF),
	H	le point d'intersection de (FP) et (EQ),
et	*1c*	le cercle de diamètre [EF].

Donné : <FHQ = 45° *si, et seulement si,* Q et P sont sur *1c*. [11]

Commentaire : d'un autre angle de 45° à cinq points cocycliques.

VISUALISATION

[11] 45° in a square, AoPS du 24/10/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=440751



- Une chasse d'équivalence :

<FHQ = 45°

↕

* d'après **E. 7**, <EAF = 45°

↕

* d'après **E. 6**, **7**, (FP) ⊥ (AE) et (EQ) ⊥ (AF)

↕

* d'après Thalès, le cercle de diamètre [EF passe par P et Q.

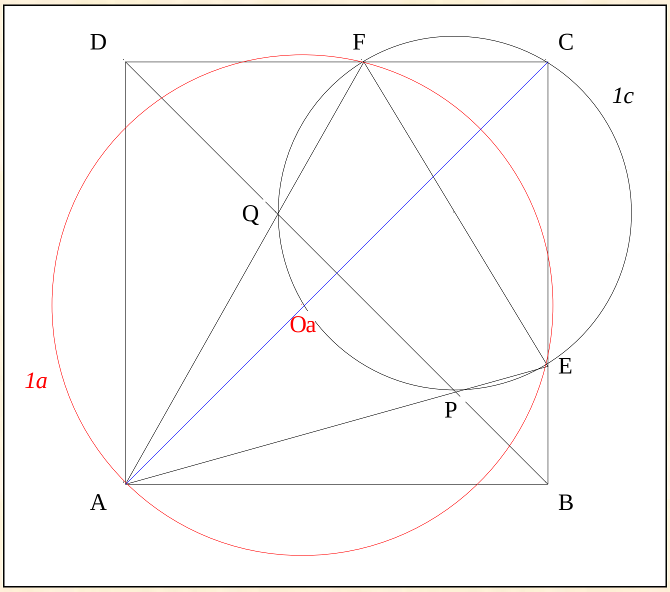
- **Conclusion :** <FHQ = 45° *si, et seulement si*, Q et P sont sur *1a*.

ÉQUIVALENCE 9

DE CINQ POINTS COCYCLIQUES À UN CENTRE SUR UNE DIAGONALE

VISION

Figure :

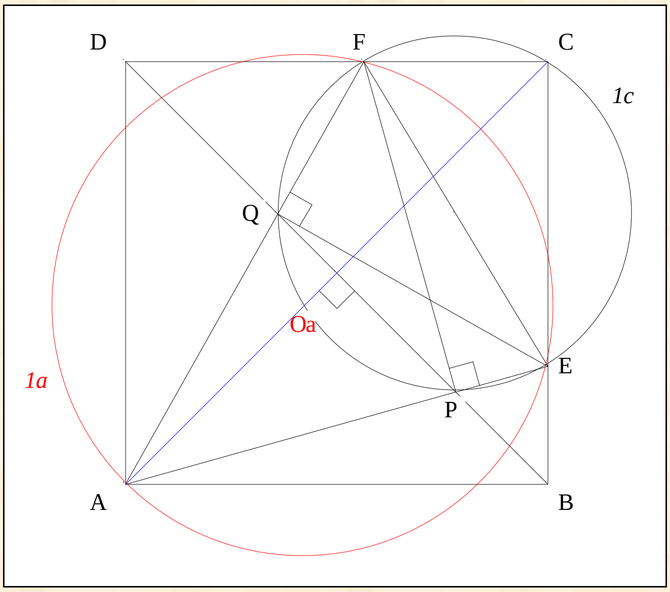


Traits :	ABCD	un carré,
	E	un point de [BC], [CD] tels que CE ≠ CF,
	P	le point d'intersection de (BD) et (AE),
	F	un point de [CD] tel que CE ≠ CF,
	Q	le point d'intersection de (BD) et (AF),
	1c	le cercle de diamètre [EF],
	1a	le cercle circonscrit au triangle AEF
et	Oa	le centre de *1a*.

Donné : Q et P sont sur *1c* *si, et seulement si*, Oa est sur (AC). [12]

VISUALISATION

[12] Points M and N on the square ABCD [Baltic way 2003], *Mathlinks* du 06/11/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=376339.



- Une chasse d'équivalence :

		Q et P sont sur *1c*	
			↕
*	d'après Archimède	(FP) ⊥ (AE) et (EQ) ⊥ (AF)	
	d'après von Nagel "Un rayon" [13],	(AOa) ⊥ (DPQB) [14]	
			↕
*	ou encore,	Oa est sur (AC).	

- **Conclusion :** Q et P sont sur *1c* *si, et seulement si,* Oa est sur (AC).

Note historique : ce problème a été posé lors du *Baltic way* qui s'est déroulé le 2 novembre 2003 à Riga (Lettonie).
Baltic Way team competition est le nom d'un concours régional de mathématiques initié en 1990 et s'adressant à des lycéens de onze pays proche de la mer Baltique où du nord de l'Europe : les trois pays fondateurs, Estonie, Lettonie, Lituanie auxquels s'ajoutent Danemark, Finlande, Suède, Norvège, Pologne, Allemagne (représentant sa partie la plus au nord avec Rostock et Hambourg), Russie (représentant la région de St.-Petersburg), Islande (pour avoir été le premier pays à reconnaître l'indépendance des états baltes). A la discrétion des organisateurs, des pays sont invités comme Israël en 2001, Biélorussie en 2004, Belgique en 2005.
Chaque équipe est composée de 5 lycéens qui sont confrontés à résoudre 20 problèmes en 4h 30.
Cette compétition a lieu en général en automne. Elle commémore la *Baltic chain* du 23 août 1989 (date du 50e anniversaire du pacte germano-soviétique) où deux millions environ de personnes se sont données la main pour former une chaîne humaine de plus de 600 km traversant les trois états baltes de Tallinn à Vilnius pour protester contre le communisme et réclamer l'indépendance de leurs pays.

---

[13] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 19 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

[14] Indian Regional MO (1999) Problem **3** ;
Mortici C., Folding a square to identify adjacent sides, *Forum Geometricorum* **9** (2009) 100 ;
http://forumgeom.fau.edu/FG2009volume9/FG200908index.html
Ayme J.-L., Four collinear points, *Mathlinks* du 10/11/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=376897

Baltic Way 2003 mathematical team contest

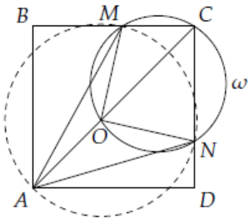
Riga, November 2, 2003

Working time: 4.5 hours.
Queries on the problem paper can be asked during the first 30 minutes.

12. *Let $ABCD$ be a square. Let M be an inner point on side BC and N be an inner point on side CD with $\angle MAN = 45°$. Prove that the circumcentre of AMN lies on AC.*

Solution: Draw a circle ω through M, C, N; let it intersect AC at O. We claim that O is the circumcentre of AMN.

Clearly $\angle MON = 180° - \angle MCN = 90°$. If the radius of ω is R, then $OM = 2R\sin 45° = R\sqrt{2}$; similarly $ON = R\sqrt{2}$. Hence we get that $OM = ON$. Then the circle with centre O and radius $R\sqrt{2}$ will pass through A, since $\angle MAN = \frac{1}{2}\angle MON$.



[15]

15 http://www.math.olympiaadid.ut.ee/eng/archive/bw/bw03eng.pdf

II. RÉSULTATS ÉPARS

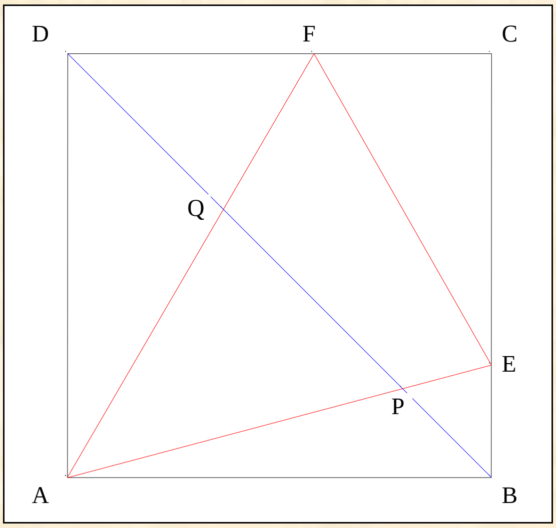
Commentaire : ici, les "attaques" des problèmes peuvent être qualifiées de "frontale" dans le sens où aucuns liens avec d'autres problèmes de la même nature ne sont invoqués…
Des problèmes sont laissés aux bons soins des lecteurs.
Rappelons que la chaîne d'équivalences présentée permet de les résoudre.

Pour certains problèmes rencontrés par l'auteur avant l'élaboration de cet article, les notations peuvent différer légèrement d'un énoncé à un autre.

1. D'une contrainte à une autre contrainte

VISION

Figure :



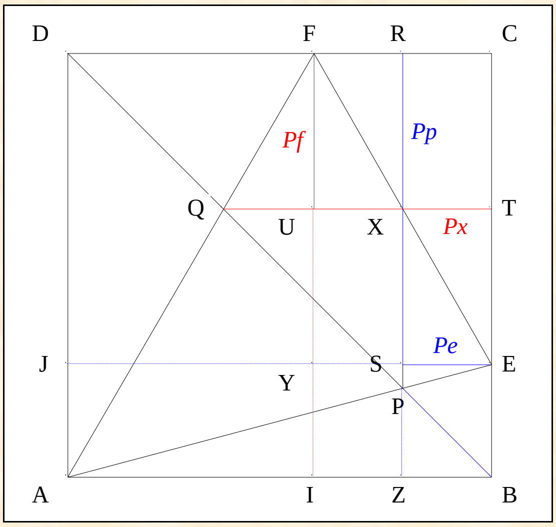
Traits :

	ABCD	un carré,
	E	un point de [BC], [CD] tels que CE ≠ CF,
	P	le point d'intersection de (BD) et (AE),
	F	un point de [CD] tel que CE ≠ CF,
et	Q	le point d'intersection de (BD) et (AF).

Donné : *si*, BP.CE = DQ.CF *alors*, 2.BE.DF = CE.CF.

Commentaire : les notations diffèrent légèrement des précédentes.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Partons de la contrainte, BP.CE = DQ.CF

- Réitérons la démarche initiée en **III. 1.** ;
  celle-ci nous permet de construire la figure avec les notations indiquées ci-dessus.

- Notons I, J les points d'intersection resp. de *Pf* et (AB), *Pe* et (AD).

- **Rappels :** **(1)** PZ = ES.

  (2) 1/PZ = 1/a + 1/x ;

  (3) ES = (ax)/(a+x).

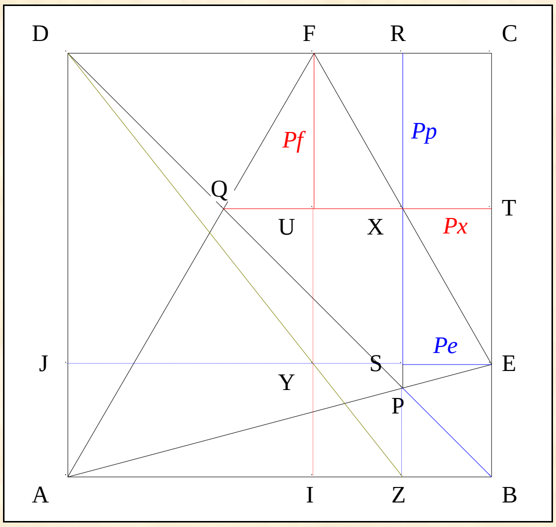
- Nous avons : * [AIYJ] = AI.AJ = AI.BE

  * [FRSY] = RS.SY = CE.ES

  * par développement et simplification, [AIYJ] = [FRSY].

- **Conclusion :** en explicitant ce dernier résultat, 2.BE.DF = CE.CF.

- **Scolie :**



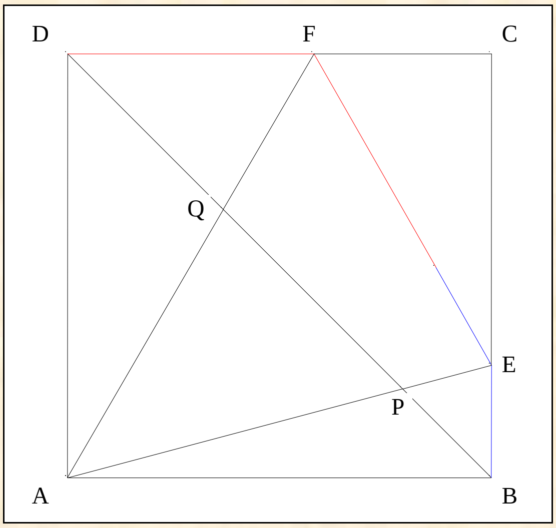
- **Conclusion :** d'après Euclide "**I**. Proposition **43**",
  appliqué à [AIYJ] = [FRSY], D, Y et Z sont alignés.

Note : *si*, BP.CE = DQ.CF *alors*, D, Z et Y sont alignés.

2. D'une autre contrainte à une nouvelle contrainte

VISION

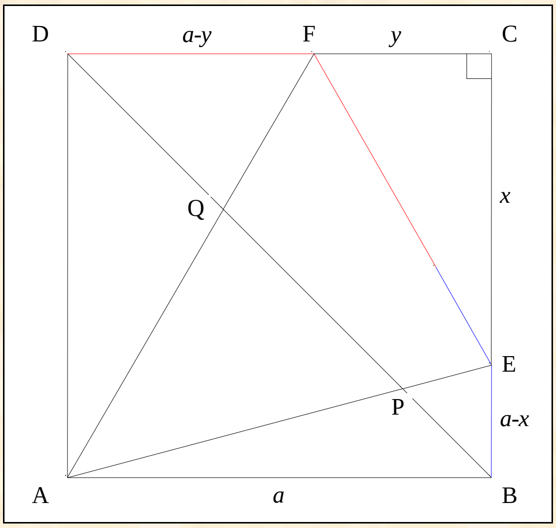
Figure :



Traits : ABCD un carré,
E un point de [BC], [CD] tels que CE ≠ CF,
P le point d'intersection de (BD) et (AE),
F un point de [CD] tel que CE ≠ CF
et Q le point d'intersection de (BD) et (AF).

Donné : *si*, CE.CF = 2.BE.DF *alors*, EF = BE + DF.

VISUALISATION



- Notons a, x, y les longueurs resp. de AB, CE, CF.

- Une chasse d'équivalence :

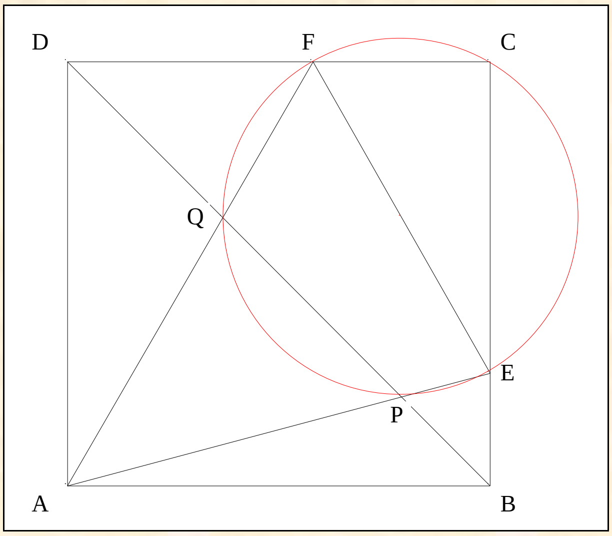
*	partons de	CE.CF	= 2.BE.DF
			↕
*	écriture algébrique	xy	$= 2(a-x).(a-y)$
			↕
*	développement	xy	$= 2a^2 - 2a(x+y) + 2xy$
			↕
*	duplication	2xy	$= 4a^2 - 4a.(x+y) + 4xy$
			↕
*	identification,	2xy	$= 4a^2 - 4a(x+y) + [(x+y)^2 - (x-y)^2]$
			↕
*	simplification	$x^2 + y^2$	$= [2a - (x+y)]^2$
			↕
*	décomposition,	$x^2 + y^2$	$= [(a - x) + (a - y)]^2$
			↕
*	écriture géométrique,	$CE^2 + CF^2$	$= (BE + DF)^2$
			↕
*	théorème de Pythagore,	EF^2	$= (BE + DF)^2$
			↕
*	ou encore,	EF	= BE + DF

- **Conclusion :** par transitivité de la relation ↔, CE.CF = 2.BE.DF ↔ EF = BE + DF.

3. D'une contrainte à cinq points cocycliques

VISION

Figure :

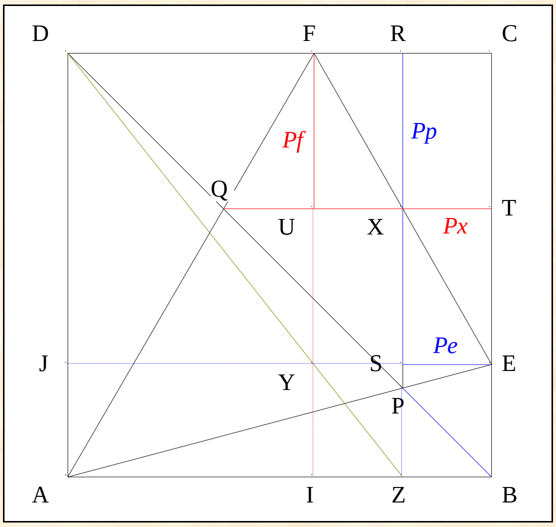


Traits : ABCD un carré,
E un point de [BC], [CD] tels que CE ≠ CF,
P le point d'intersection de (BD) et (AE),
F un point de [CD] tel que CE ≠ CF,
et Q le point d'intersection de (BD) et (AF).

Donné : *si*, 2.BE.DF = CE.CF *alors*, E, P, C, F et Q sont cocycliques. [16]

Commentaire : les notations diffèrent légèrement des précédentes.

VISUALISATION



- **Hypothèse :** 2.BE.DF = CE.CF
- Considérons la figure présentée en **III. 1.**

[16] Tereshin D. A., **XXV** *Soviet Mathematical Olympiad*, **11**th Form, Day **1** (1991) ;
http://limtaosin.files.wordpress.com/2012/08/arkadii-m-slinko-ussr-mathematical-olympiads-1989-19921.pdf
Crux Mathematicorum **4** (1994) 101-102 ; https://cms.math.ca/crux/
A square and five concyclic points, AoPS du 17/02/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=576621

- Une chasse rectangul-aire :

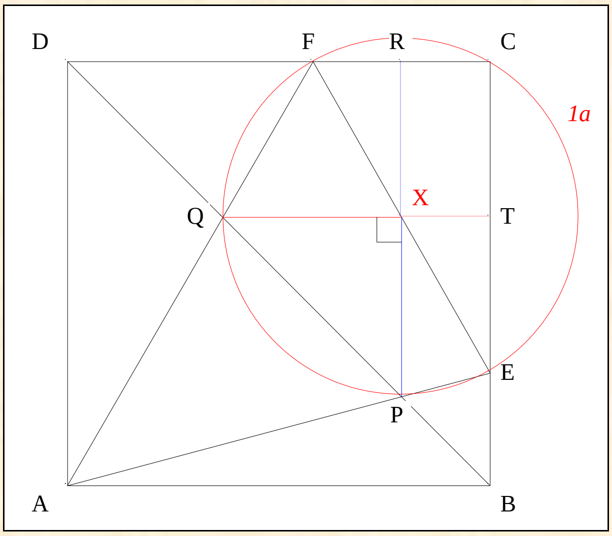
  * par projection, BP.BQ = 2.BZ.BT
  * Z étant le milieu de [BI], 2.BZ.BT = BI.BT
  * par "la technique des aires", BI.BT = [BIUT]
  * par décomposition, [BIUT] = [BIYE] + [EYUT]
  * par "la technique des aires", [EYUT] = [SYFR]
  * par transitivité de la relation =, BP.BQ = [BIYE] + [SYFR].

- **Rappel :** *si*, BP.CE = DQ.CF *alors*, D, Z et Y sont alignés.

- Une seconde chasse de rectangles équivalents :

  * par substitution, BE.BC = BE.BA
  * par "la technique des aires", BE.BA = [ABEJ]
  * par décomposition, [ABEJ]= [BIYE] + [AIYJ]
  * D, Z et Y étant alignés, [AIYJ] = [SYFR]
  * par transitivité de la relation =, BE.BC = [BIYE] + [SYFR].

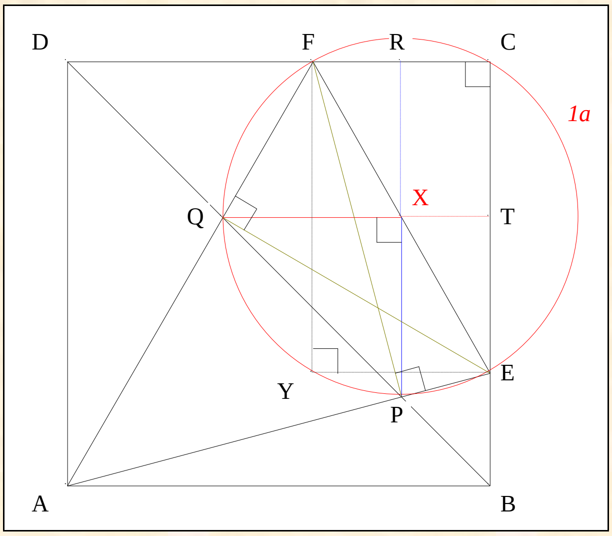
- **Conclusion partielle :** BE.BC = BP.BQ.



- **Conclusion :** d'après Steiner "Puissance d'un point par rapport à un cercle", E, P, C, F et Q sont cocycliques.

- Notons *1a* ce cercle

Scolies :



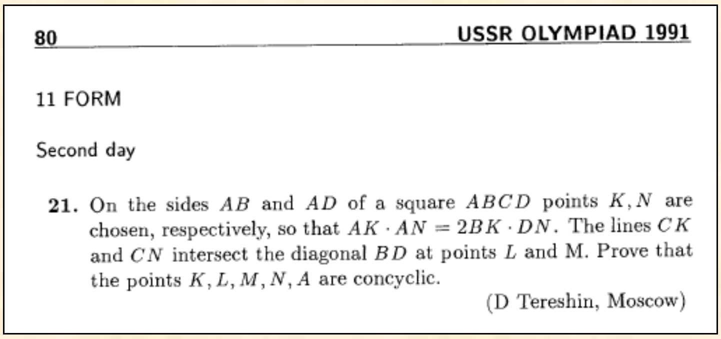
(1) *1a* a pour centre X et pour diamètre [EF]

(2) un sixième point sur *1a* : *1a* passe par Y

(3) le triangle XPQ est X-rectangle isocèle [17]

(4) d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (EQ) ⊥ (AF) et (FP) ⊥ (AE).

Archive



80 **USSR OLYMPIAD 1991**

11 FORM

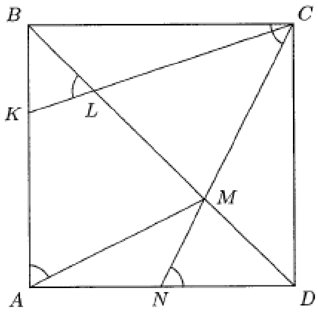
Second day

21. On the sides AB and AD of a square $ABCD$ points K, N are chosen, respectively, so that $AK \cdot AN = 2BK \cdot DN$. The lines CK and CN intersect the diagonal BD at points L and M. Prove that the points K, L, M, N, A are concyclic.

(D Tereshin, Moscow)

[17] a right isoceles triangle in a square, AoPS du 25/06/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=595089

21. Let us prove, first, that $\angle BKC + \angle DNC = \frac{3}{4}\pi$.



Suppose the sidelength of the square is equal to 1 and set

$$\alpha = BK = \cot \angle BKC, \qquad \beta = DN = \cot \angle DNC.$$

According to the conditions of the problem, we get $(1-\alpha)(1-\beta) = 2\alpha\beta$ so $-(\alpha+\beta) = -1 + \alpha\beta$. Since $0 < \alpha < 1$ and $0 < \beta < 1$ we can be sure that $\alpha\beta \neq 1$ and therefore

$$-1 = \frac{\alpha + \beta}{-1 + \alpha\beta} = \tan(\angle BKC + \angle DNC),$$

96 USSR OLYMPIAD 1991

which implies $\angle BKC + \angle DNC = \frac{3}{4}\pi$. Therefore

$$\angle BLK = \pi - \frac{\pi}{4} - \angle BKC = \angle DNC = \angle BCM.$$

We also note that $\angle BCM = \angle BAM$ since these angles are symmetric with respect to the diagonal BD. It follows now that $\angle KLM + \angle KAM = \pi$, and the points A, K, L, M are concyclic. It can be proved in the same way that the points A, N, M, L are also concyclic. These circles coincide as they have 3 common points.

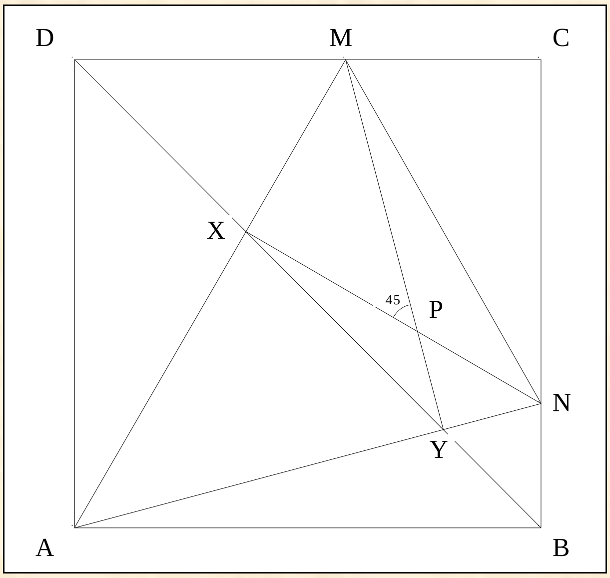
Autre énoncé : *si*, BP.CE = DQ.CF *alors*, E, P, C, F et Q sont cocycliques. [18]

4. D'un angle de 45° à un autre angle de 45°

VISION

Figure :

[18] Concyclic points on square, AoPS du 25/04/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=531432

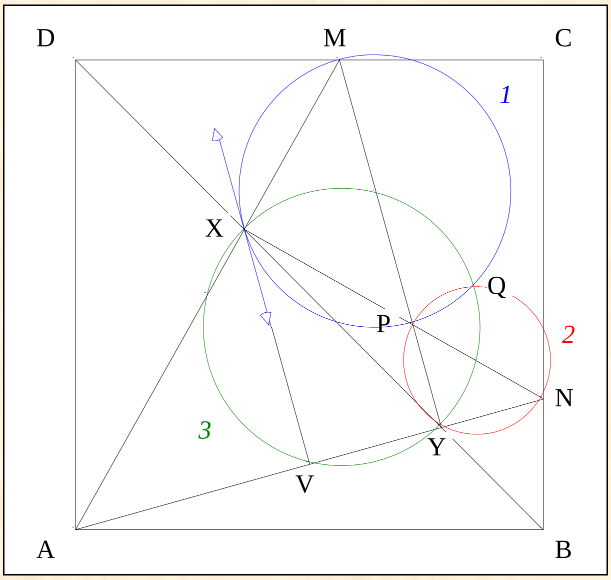


Traits : ABCD un carré,
M, N deux points resp. de]CD[,]BC[
X, Y les points d'intersection de (BD) resp. avec (AM), (AN)
et P le point d'intersection de (MY) et (NX).

Donné : *si,* <MPX = 45° *alors* <MAN = 45°. [19]

Commentaire : les notations diffèrent légèrement des précédentes.

VISUALISATION

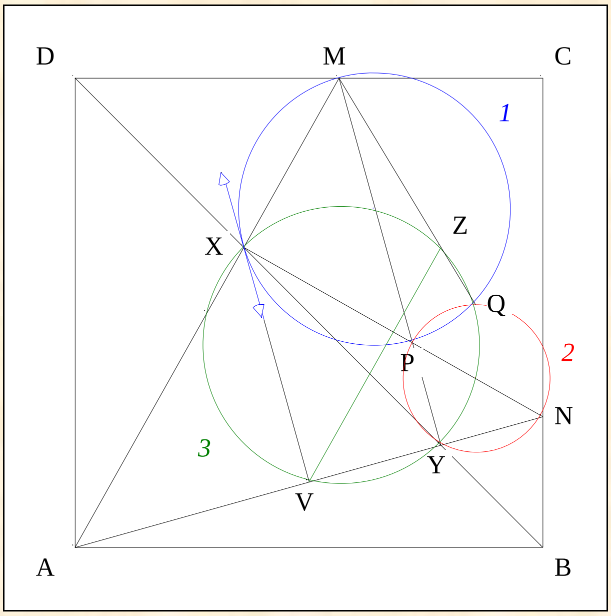


- Notons *1*, *2* les cercles circonscrits resp. aux triangles MPX, NPY,
  Q le second point d'intersection de *1* et *2*,
  3 le cercle circonscrit au triangle QSY
  et V le second point d'intersection de *3* avec (AN).

---

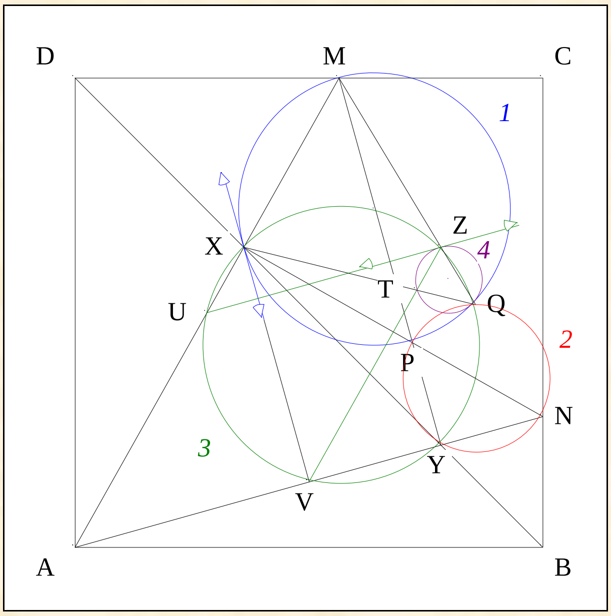
[19] Square 45°, *Mathlinks* du 03/10/2007 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=169010.

- D'après "Le théorème du pivot"
  appliqué au triangle VNX avec Y sur (VN), P sur (NX), X sur XV et avec *1*, *2* et *3* sécants en Q,
  (VX) est tangente à *1* en X.



- Notons Z le second point d'intersection de (QM) avec *1*.

- Les cercles *1* et *3*, les points de base Q et X, les moniennes (MQZ) et (XXV),
  conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (MX) // (ZV).



- Notons U le second point d'intersection de (XM) avec *3*,
  T le point d'intersection de (ZV) et (QX),
  et *4* le cercle passant par Q, Z, T.

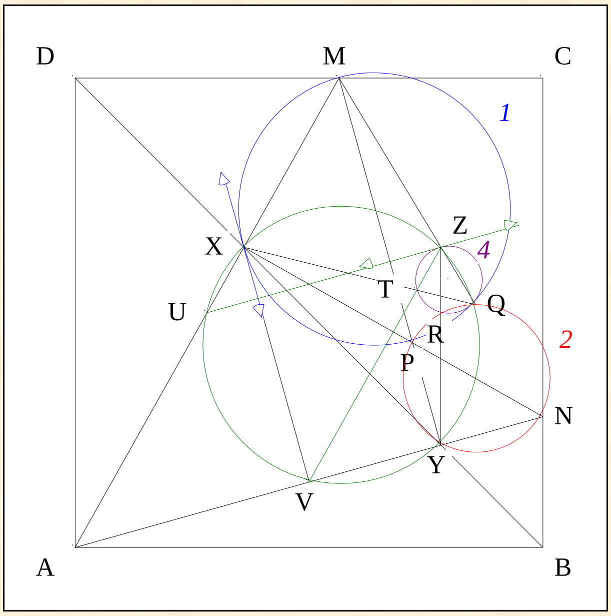
- Le cercle *1*, le point de base Q, les moniennes naissantes (MQZ) et (XQT), les parallèles (MX) et (ZT),
  conduisent au théorème de Reim ; en conséquence, *4* est tangente à *1* en Q.

- D'après "Le théorème du pivot"

appliqué au triangle ZMU avec Q sur (ZM), X sur (MU) et avec *4*, *1* et *3* sécant en Q,
(UZ) est tangente à *4* en Z.

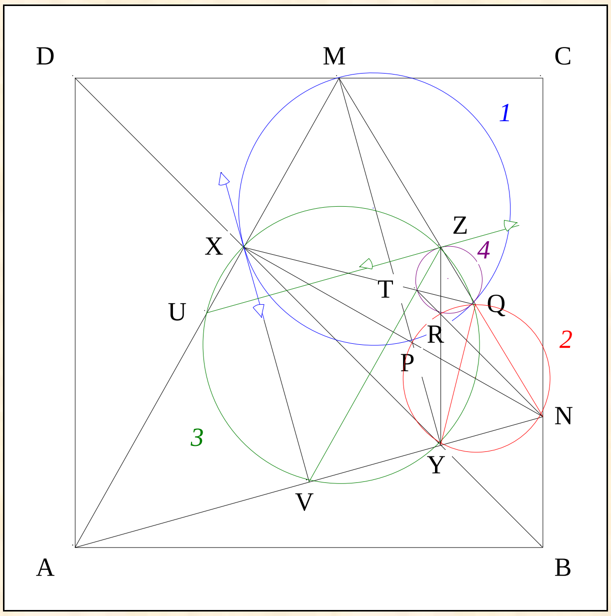
- **Scolies :** <MPX = <MQX = <ZQT = 45°.

- **Conclusion partielle :** d'après "Le théorème de la tangente", <UZV = 45°.



- Notons R le second point d'intersection de *2* et *4*.

- D'après "Le théorème du pivot"
appliqué au triangle ZMY avec Q sur (MZ), P sur (MY) et avec *4*, *1*, *2* sécant en Q,
Y, R et Z sont alignés.



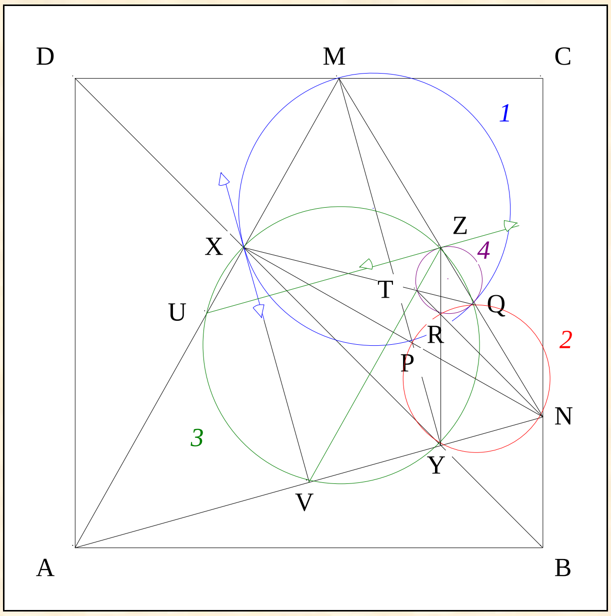
- D'après "Le théorème du pivot"
appliqué au triangle TVN avec Z sur (TV), Y sur (VN) et avec *4*, *3*, *2* sécant en Q,
N, R et T sont alignés.

- **Scolies :** **(1)** <MPX = <MQX = <ZQT = 45°

(2) <MPX = <YPN = <YQN = 45°.

- D'après "Un triangle de Möbius" appliqué à *2* et *4*,

(1) <ZQY = <TQN = <NRZ = 135°
(2) Z, Q et N sont aligné.



- Les cercles *3* et *2*, les points de base Q et Y, les moniennes (ZQN) et (UYY), conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (ZU) // (NY).

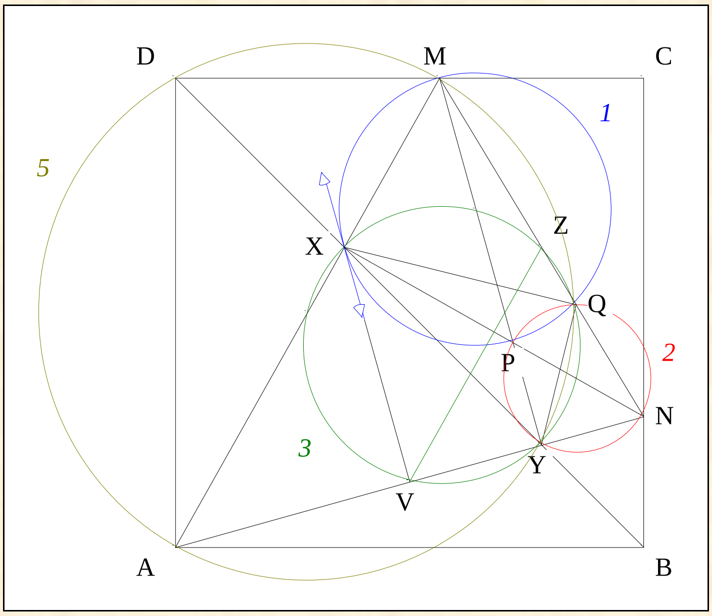
- Le quadrilatère AVZU étant un parallélogramme, <VAU = <UZV = 45°.

- **Conclusion :** *si*, <MPX = 45° *alors* <MAN = 45°.

Commentaire : ce résultat a été difficile à prouver synthétique par une voie directe.
La difficulté pour l'auteur a été de trouver le cercle *4*, la clef de la preuve.
Une preuve indirecte a été établie par Kostas Vittas.

Scolie : cinq points cocycliques [20]

[20] Ayme J.-L., Five concyclic points, *Mathlinks* du 17/11/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=378150.



- Le cercle *3*, les points de base Q et Y, les moniennes naissantes (ZQM) et (VYA), les parallèles (ZV) et (MA), conduisent au théorème **0"** de Reim ;
  en conséquence, Q, Y, M et A sont cocycliques.

- Notons *5* ce cercle.

- D'après "Un triangle de Möbius"
  appliqué à *1* et *2*, <MQY = <XQN = 135°.

- Le quadrilatère YQMD ayant deux angles opposés supplémentaires, est cyclique ;
  en conséquence, *5* passe par D.

- **Conclusion :** A, Y, Q, M et D sont cocycliques.

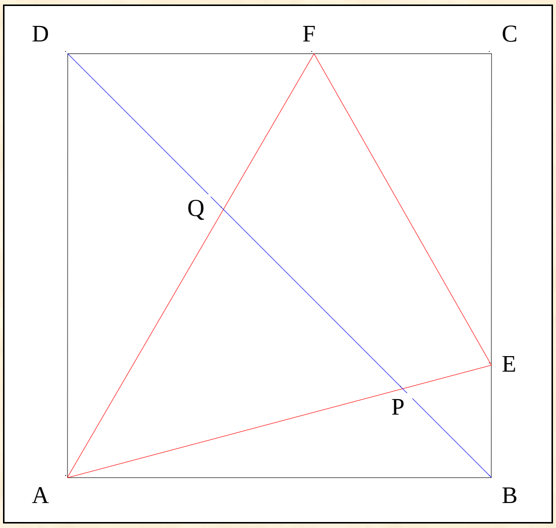
III. RÉSULTATS DE L'AUTEUR

Commentaires : certains des résultats suivants sont laissés aux bons soins des lecteurs.

1. Une construction suite à une contrainte

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	E	un point de [BC], [CD] tels que CE ≠ CF,
	P	le point d'intersection de (BD) et (AE),
	F	un point de [CD] tel que CE ≠ CF,
et	Q	le point d'intersection de (BD) et (AF).

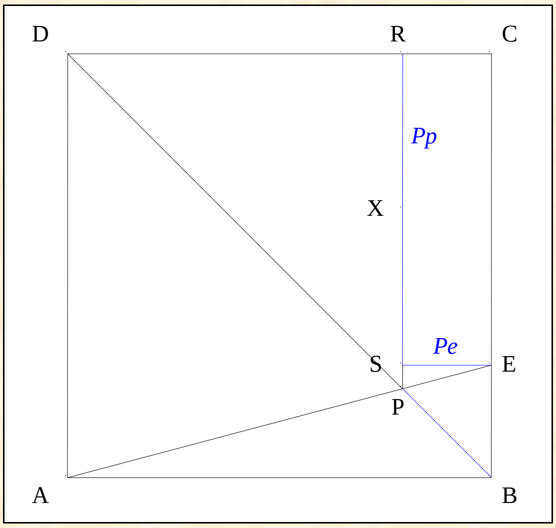
Donné : *si*, BP.CE = DQ.CF *alors*, construire la figure. [21]

Commentaire : à partir d'une contrainte sur la figure, nous proposons un algorithme de construction de celle-ci. La technique des aires développée par Euclide d'Alexandrie offre une voie...

VISUALISATION

---

[21] Angle in a square, AoPS du 27/09/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=555880

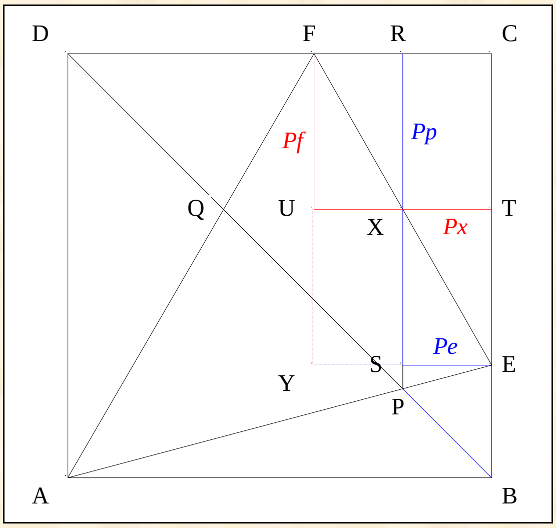


- Notons $\quad$ *Pe*, *Pp* $\quad$ les parallèles à (CD), (BC) issues resp. de E, P,
  R, S $\quad$ les points d'intersection de *Pp* resp. avec (CD), *Pe*
  et $\quad$ X $\quad$ le milieu de [RS].

- Nous avons : $\quad$ **(1)** $\quad$ [CESR] = CE.ES. [22]

  (2) $\quad$ ES = BP.cos 45°.

- **Commentaire :** considérons le théorème des parallélogrammes complémentaires [23] d'Euclide.
  La symétrie par rapport à (AC) étant exclue (CE ≠ CF), il reste celle par rapport à X.



- Notons $\quad$ F $\quad$ le symétrique de E par rapport à X
  Pf, *Px* $\quad$ les parallèles à (BC), (CD) issues resp. de F, X,
  T, U $\quad$ le point d'intersection de *Px* resp. avec (BC), *Pf*
  et $\quad$ Y $\quad$ le point d'intersection de *Pe* et *Pf*.

- D'après Euclide "**I**. Proposition **43**", $\quad$ [CESR] = [CFUT] = CF.CT = CF.FU.

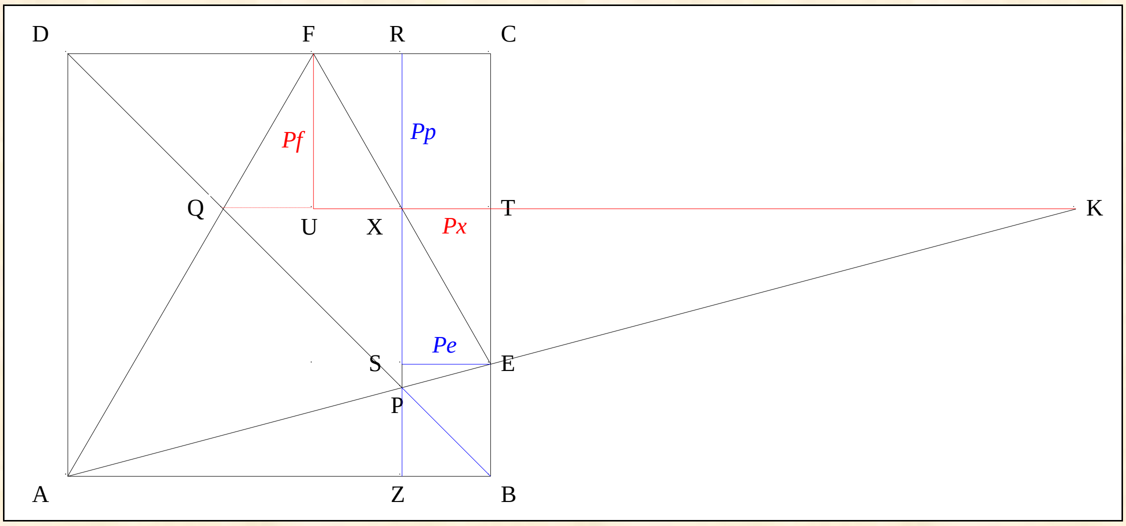
- **Scolie :** $\quad$ R et T sont les milieux resp. de [CF], [CE].

---

22 $\quad$ [CESR] représente l'aire du rectangle CESR

23 $\quad$ Euclide, *Éléments*, Livre **I**, proposition **43** ; http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI43.html

- **Commentaire :** pour retrouver la condition imposée, montrons que *Px* passe par Q.



- Notons Z, K les points d'intersection resp. de *Pp* et (AB), *Px* et (AE),
  et a, x les longueurs resp. de AB, BE.

- Par projection de BP, PZ = ES.

- Par "harmonicité" appliqué au trapèze ABED, 1/PZ = 1/a + 1/x ;
  en conséquence, ES = (ax)/(a+x).

- Notons k le produit QA/QF . XF/XE . KE/KA.

- Évaluons k :

  * QA = a , QF = CD – CF = AB – 2.CR = AB – 2.ES

  * XF = XE

  * KE/KA = ET/BT

  * ET = 1/2 . (BC – BE) , BT = BE + ET

  * k = 1.

- D'après "le théorème de Ménélaüs"
  appliqué au triangle AFE et à la ménélienne *Px*, *Px* passe par Q et FU = DQ.cos 45°.

- Nous avons :

  * [CESR] = [CFUT]

  * CE.ES = CF.FU

  * CE. BP.cos 45° = CF. DQ.cos 45°

  * CE. BP = CF. DQ i.e. la relation imposée.

- **Conclusion :** algorithme de la construction

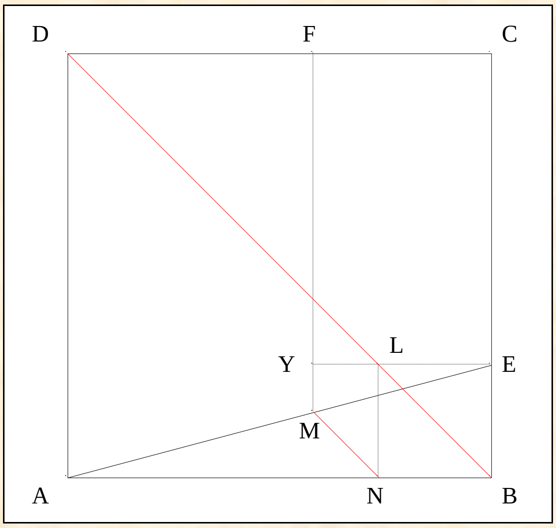
  1. ABCD un carré
  2. E un point de [BC]
  3. P le point d'intersection de (AE) et (BD)
  4. *Pe*, *Pp* les parallèles à (CD), (BC) issues resp. de E, P

5. R, S les points d'intersection de *Pp* resp. avec (CD), *Pe*
6. X le milieu de [RS]
7. F le symétrique de E par rapport à X
8. Q le point d'intersection de (AF) et (BD).

2. Parallèle à une diagonale d'un carré

VISION

Figure :



Traits : ABCD un carré,
E, F deux points resp. de [BC], [CD] tels que CE ≠ CF,
Y le point tel que le quadrilatère ECFY soit un rectangle,
L, M les points d'intersection resp. de (BD) et (EY), (AE) et (FY),
et N le pied de la perpendiculaire à (AB) issue de L.

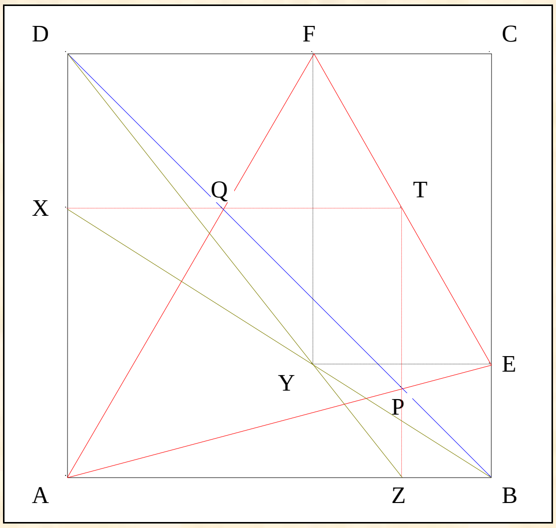
Donné : *si*, EF = BE + DF *alors*, (MN) est parallèle à (BD). [24]

3. Intersection en un sommet d'un rectangle

VISION

Figure :

[24] Ayme J.-L., Two parallels, AoPS du 01/07/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=595974



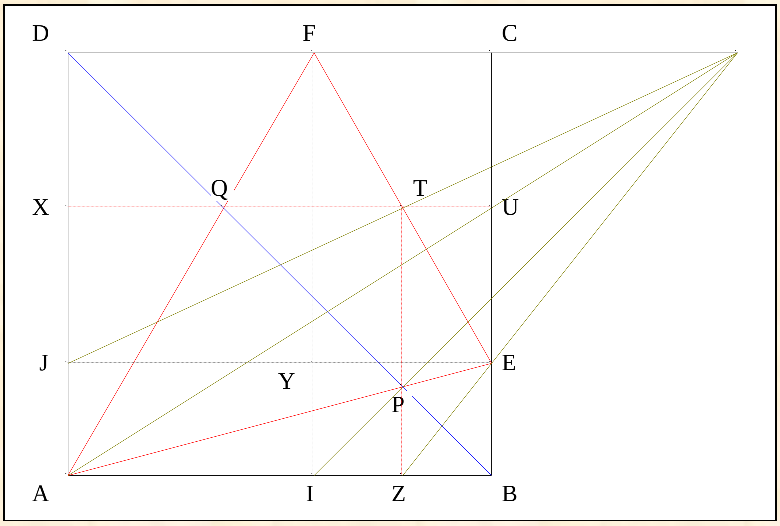
Traits : ABCD un carré,
E, F deux points resp. de [BC], [CD] tels que CE ≠ CF,
P, Q le point d'intersection de (BD) resp. avec (AE), (AF)
Y le point tel que le quadrilatère ECFY soit un rectangle,
X, Z les pieds des perpendiculaires à (AD), (AB) issues de P
et T le point d'intersection de (XQ) et (BZ).

Donné : T est le milieu de [EF] *si, et seulement si*, Y est sur (BX) et (DZ). [25]

4. Intersection sur un côté d'un carré

VISION

Figure :



Traits : ABCD un carré,
E, F deux points resp. de [BC], [CD] tels que CE ≠ CF,
P, Q le point d'intersection de (BD) resp. avec (AE), (AF)

---

25 Ayme J.-L., Intersection on the vertex of a rectangle, AoPS du 01/07/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=595978

	Y	le point tel que le quadrilatère ECFY soit un rectangle,
	X, Z	les pieds des perpendiculaires à (AD), (AB) issues resp. de Q, P
	T, U	les points d'intersection de (XQ) resp. avec (PZ), (BC)
et	I, J	les points d'intersection resp. de (FY) et (AB), (EY) et (AD).

Donné : *si*, T est sur (EF) *alors*, (EZ), (PI), (AU) et (TJ) concourent sur (CD). [26]

[26] Ayme J.-L., Intersection on a side of a square, AoPS du 02/07/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewforum.php?f=46