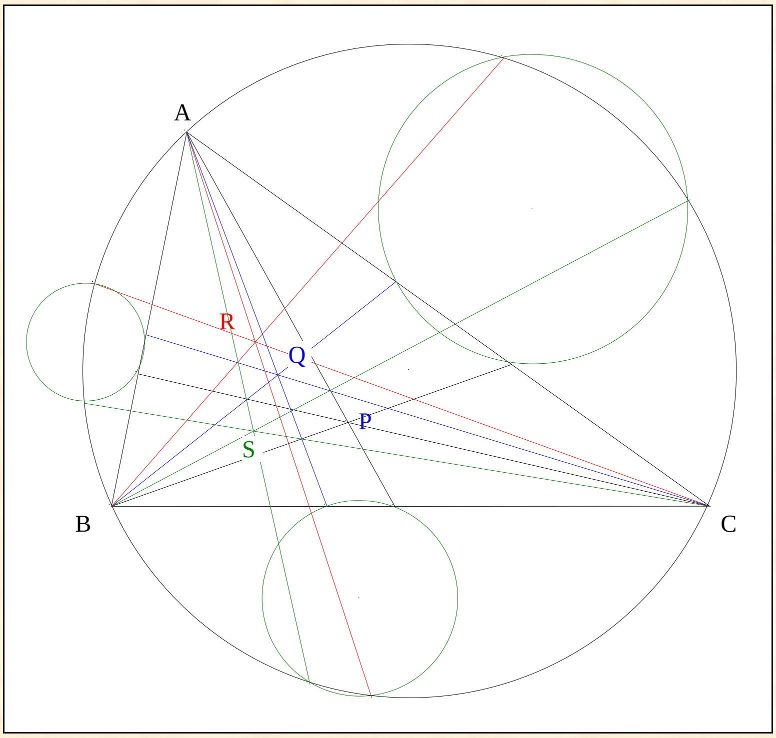
AYME's THEOREM

OU

LE THÉORÈME DES QUATRE POINTS

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'article présente un nouveau théorème dont les conséquences conduisent à des centres connus du triangle et à leur nouvelle construction, ou bien à de nouveaux centres non encore répertoriés chez ETC. Cette découverte a été rendue possible grâce aux approches particulières du regretté Juan Carlos Salazar, d'Alexey A. Zaslavsky et de Boris Mirchev, et a été suivi par Francisco Javier Garcia Capitan qui, par ses calculs, l'a vérifiée en donnant la nature géométrique du point de concours.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The article presents a new theorem with the consequences that lead to known centers of the triangle and their new construction, or well to new centers not yet listed in ETC. This discovery was made possible by the specific approaches of the late Juan Carlos Salazar, Alexey a. Zaslavsky and Boris Mirchev, and was followed by Francisco Javier Garcia Capitan who, by his calculations, has verified it by giving the geometric nature of the point of concurs.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

---

[1] Saint-Denis, Île de la Réunion (France), le 30/09/2011.

Sommaire

Dans chaque château,
il y a un donjon où réside une princesse.
La Haute Dame de ce château a ravi mon cœur
et
est devenue la source de mon inspiration.

A. PRODUIT BARYCENTRIQUE

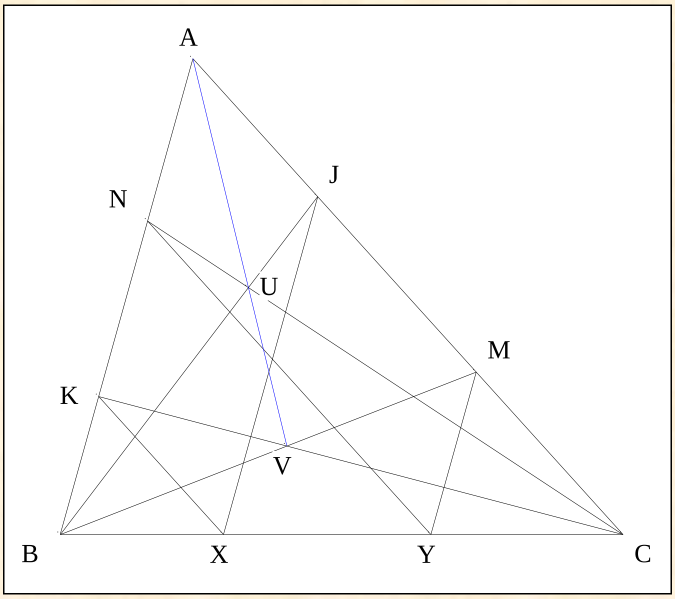
DE

DEUX POINTS

1. A-droite de Yiu

VISION

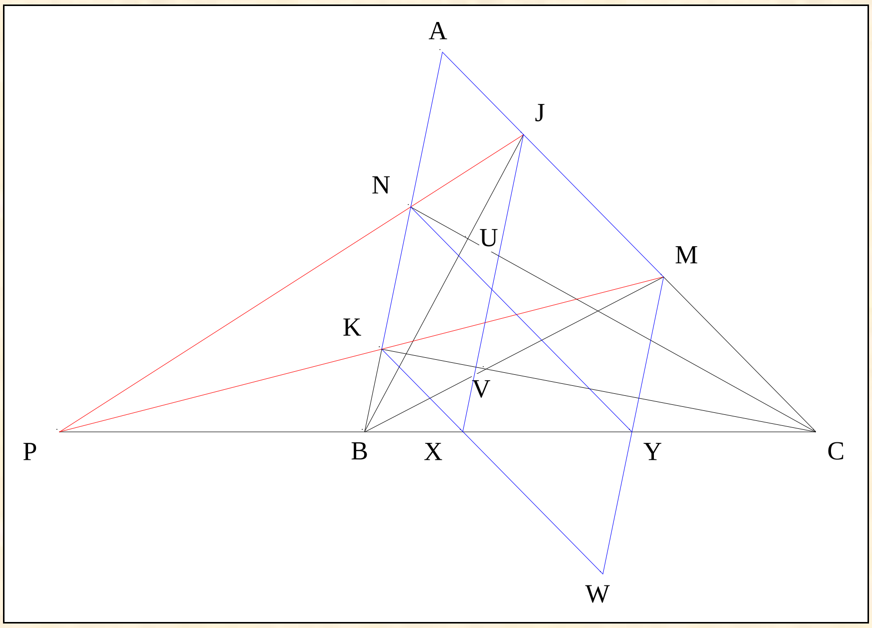
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,	
	X, Y	deux points de (BC),	
	J, K	deux points resp. de (CA), (AB)	
		tels que	le quadrilatère XJAK soit un parallélogramme,
	M, N	deux points resp. de (CA), (AB)	
		tels que	le quadrilatère YMAN soit un parallélogramme
et	U, V	les points d'intersection resp. de (BJ) et (CN), (BM) et (CK).	

Donné : A, U et V sont alignés.

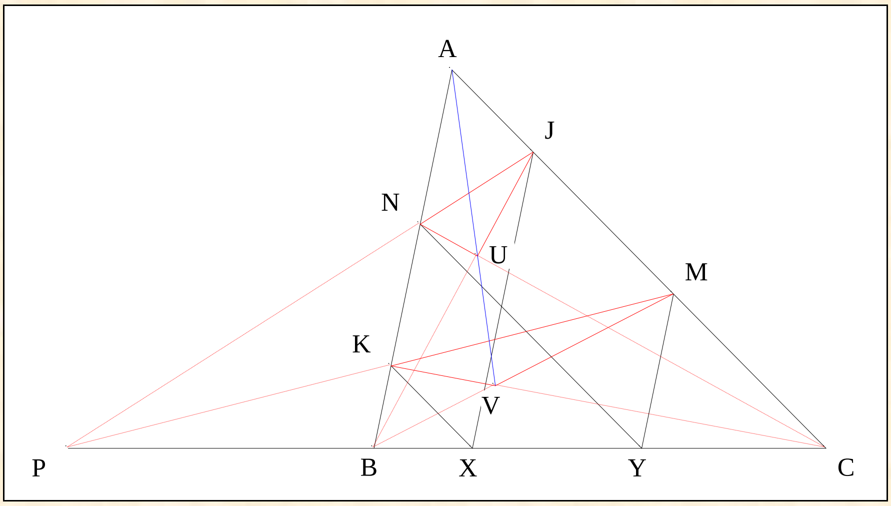
VISUALISATION



- Notons W le point d'intersection de (XK) et (YM).

- D'après "Une figure plus esthétique" [2] (Cf. **E.** Annexe **1**) appliqué au parallélogramme AKWM et à (XJ) et (YN), (XY), (KM) et (NJ) sont concourantes.

- Notons P ce point de concours.



- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [3] (Cf. **E.** Annexe **2**) appliqué aux triangles perspectifs NUJ et KVM d'axe (CBP), (NK), (UV) et (JM) sont concourantes en A.

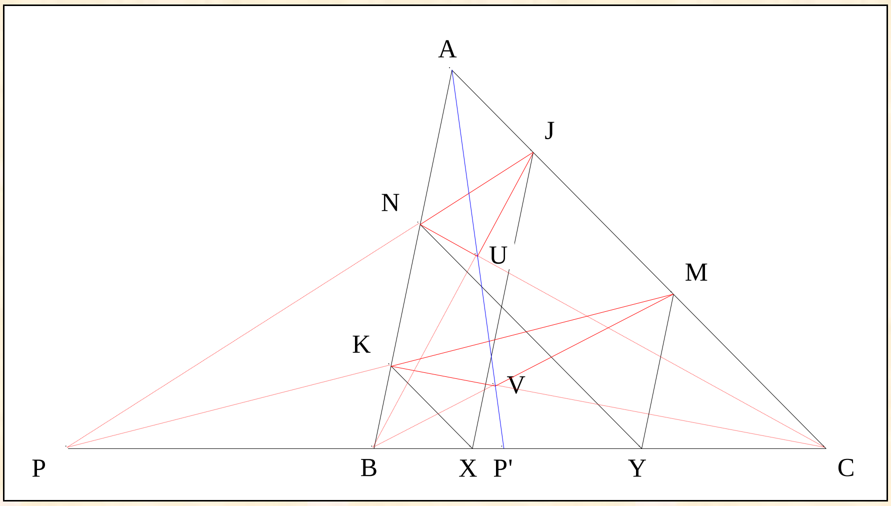
- **Conclusion :** A, U et V sont alignés.

Commentaire : l'auteur a désiré préciser un autre point sur la droite (AU).

Scolies : **(1)** terminologie

---

[2] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 21 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
[3] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 39 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons P' le point d'intersection de (AUV) et (BC).

- Par définition, nous dirons que " (AP') est la A-droite de Yiu de ABC". [4]

(2) Le quaterne (B, C, P', P) est harmonique.

(3) Un rapport

- D'après "Le théorème de Ceva"
  appliqué à ABC et aux céviennes (AA'), (BJ) et (CN) concourantes en U,
  nous avons :

$$\frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} \cdot \frac{\overline{JC}}{\overline{JA}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = -1 \;;$$

  d'après Thalès "Rapports",

(1) $$\frac{\overline{JC}}{\overline{JA}} = \frac{\overline{XC}}{\overline{XB}}$$

(2) $$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{YC}}{\overline{YB}} \;;$$

  en conséquence,

$$\frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} = -\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{YB}}{\overline{YC}}.$$

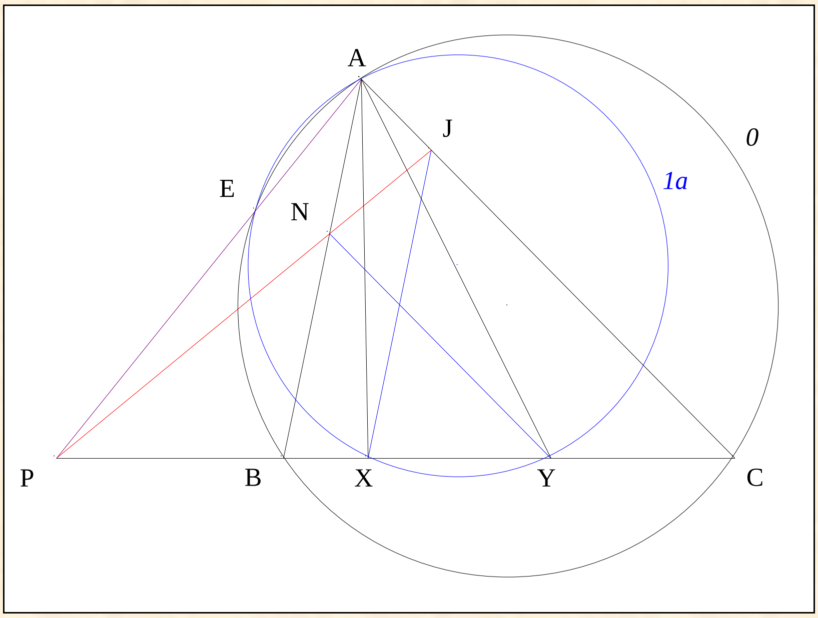
2. Sur l'axe radical

VISION

Figure :

---

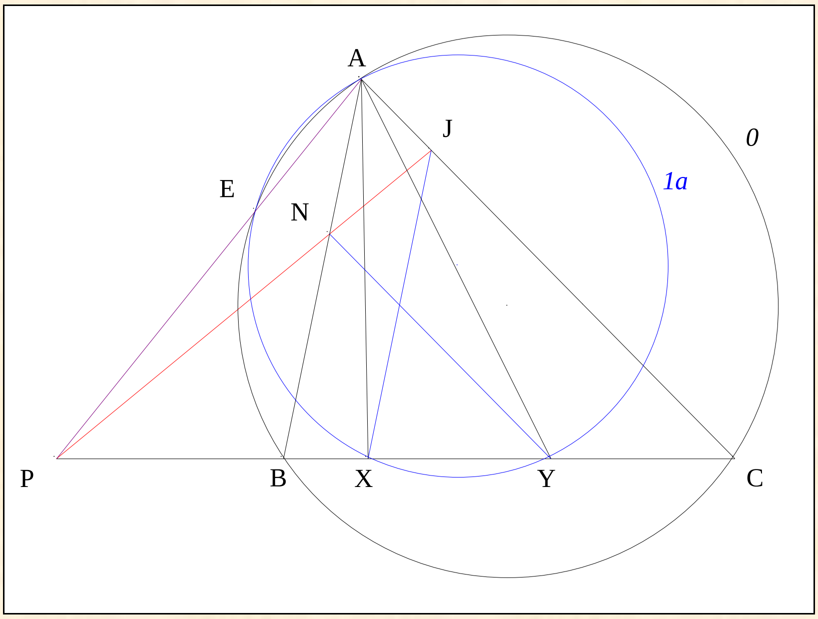
[4] Yiu P., The use of homogeneous barycentric coordinates in plane euclidean geometry, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **31** (2000) 569 – 578 ; http://math.fau.edu/yiu/barycentricpaper.pdf
Yiu P., Geometry ; http://math.fau.edu/yiu/Geometry.html



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit de ABC,
X, Y deux points de (BC),
1a le cercle circonscrit de AXY,
E le second point d'intersection de *0* et *1a*,
J le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par X avec (AC)
N le point d'intersection de la parallèle à (AC) passant par Y avec (AB)
P le point d'intersection de (JN) et (BC)

Donné : (AE) passe par P.

VISUALISATION



- D'après Thales "Rapports"

(1) $$\frac{\overline{PB}}{\overline{PX}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{PJ}}$$

(2) $\frac{\overline{PN}}{\overline{PJ}} = \frac{\overline{PY}}{\overline{PC}}$;

par transitivité de la relation =,

$\frac{\overline{PB}}{\overline{PX}} = \frac{\overline{PY}}{\overline{PC}}$;

en conséquence,

$$\overline{PB}.\overline{PC} = \overline{PX}.\overline{PY}$$

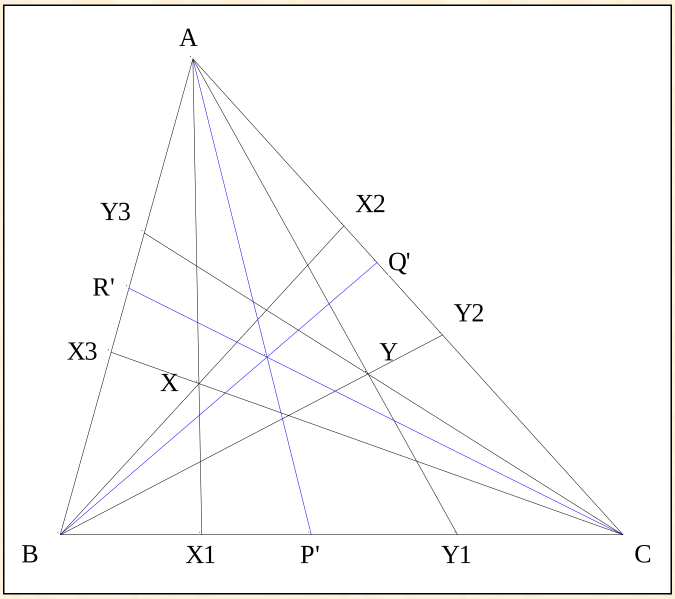
i.e. P est sur l'axe radical (AE) de *0* et *1a*.

- **Conclusion :** (AE) passe par P.

3. Produit barycentrique de deux points

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
X, Y deux points,
X1X2X3 le triangle X-cévien de ABC,
Y1Y2Y3 le triangle Y-cévien de ABC
et P', Q', R' les pieds des A, B, C-droites de Yiu de ABC.

Donné : (AP'), (BQ') et (CR') sont concourantes.

VISUALISATION

- D'après "Le théorème de Ceva"
appliqué à ABC et aux céviennes (AX1), (BX2) et (CX3) concourantes en X,

nous avons :

$$\frac{\overline{X1B}}{\overline{X1C}} \cdot \frac{\overline{X2C}}{\overline{X2A}} \cdot \frac{\overline{X3A}}{\overline{X3B}} = -1 .$$

- D'après "Le théorème de Ceva"
  appliqué à ABC et aux céviennes (AY1), (BY2) et (CY3) concourantes en Y,
  nous avons :

$$\frac{\overline{Y1B}}{\overline{Y1C}} \cdot \frac{\overline{Y2C}}{\overline{Y2A}} \cdot \frac{\overline{Y3A}}{\overline{Y3B}} = -1 .$$

- D'après **B. 1.** Scolie **3**,

(1) appliqué en P' : $\frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} = -\frac{\overline{X1B}}{\overline{X1C}} \cdot \frac{\overline{Y1B}}{\overline{Y1C}}$

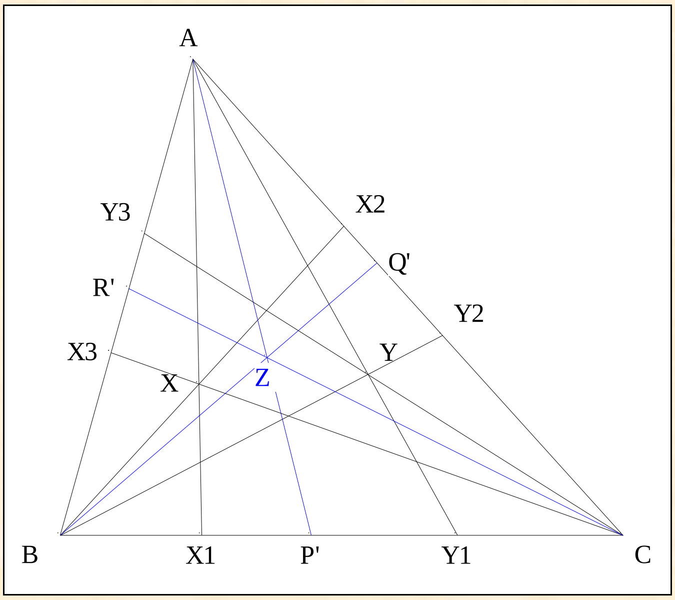
(2) appliqué en Q' : $\frac{\overline{Q'C}}{\overline{Q'A}} = -\frac{\overline{X2C}}{\overline{X2A}} \cdot \frac{\overline{Y2C}}{\overline{Y2A}}$

(3) appliqué en R' : $\frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = -\frac{\overline{X3A}}{\overline{X3B}} \cdot \frac{\overline{Y3A}}{\overline{Y3B}}$.

- Par multiplication membre à membre de ces trois dernières égalités
  et par substitution,

$$\frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} \cdot \frac{\overline{Q'C}}{\overline{Q'A}} \cdot \frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = -1 .$$

- **Conclusion :** par réciproque du "théorème de Ceva", (AP'), (BQ') et (CR') sont concourantes.



- Notons Z ce point de concours.

Scolies : **(1)** le point de vue des coordonnées barycentriques,
nous conduit à dire que

"Z est le produit barycentrique de X et Y relativement à ABC" [5].

---

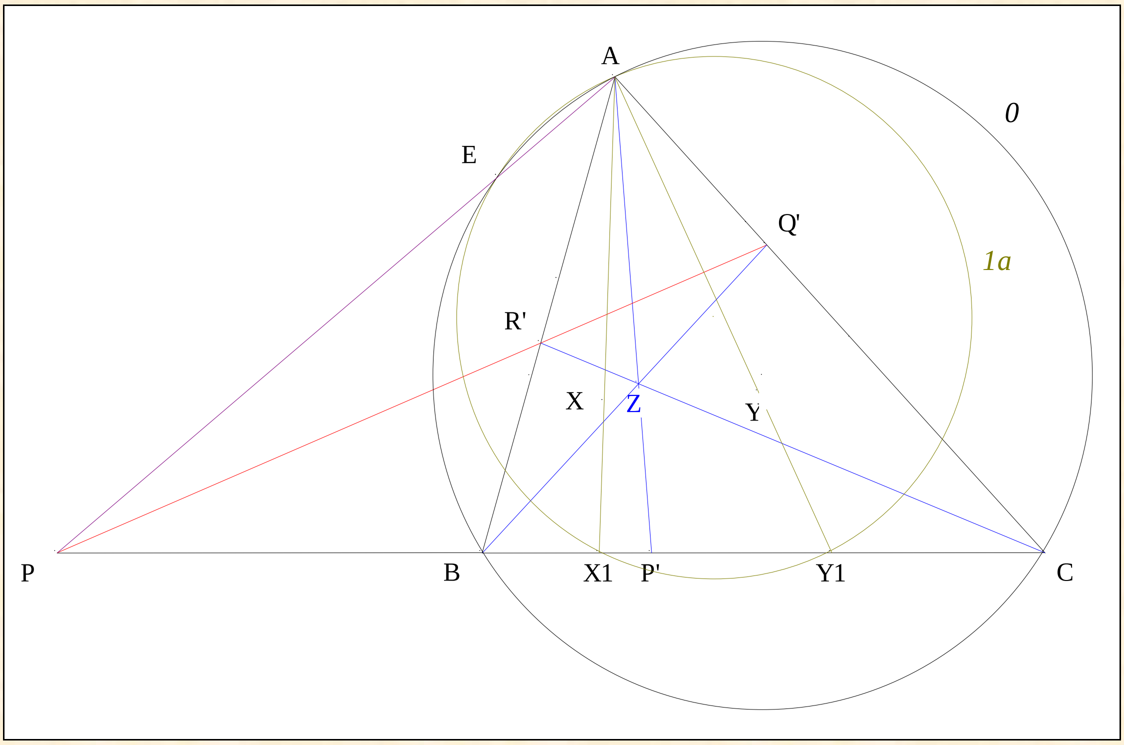
5 Yiu P., The use of homogeneous barycentric coordinates in plane euclidean geometry, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **31** (2000) 569 – 578 ; http://math.fau.edu/yiu/barycentricpaper.pdf

(2) Notation : X * Y = Z.

4. Trois points alignés

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit de ABC,
	X, Y	deux points,
	Z	le produit barycentrique de X et Y relativement à ABC,
	X1, Y1	les pieds de A-céviennes (AX), (AY) de ABC,
	1a	le cercle circonscrit de AX1Y1,
	E	le second point d'intersection de *0* et *1a*,
	P	le point d'intersection de (AE) et (BC),
et	P'Q'R'	le triangle Z-cévien de ABC.

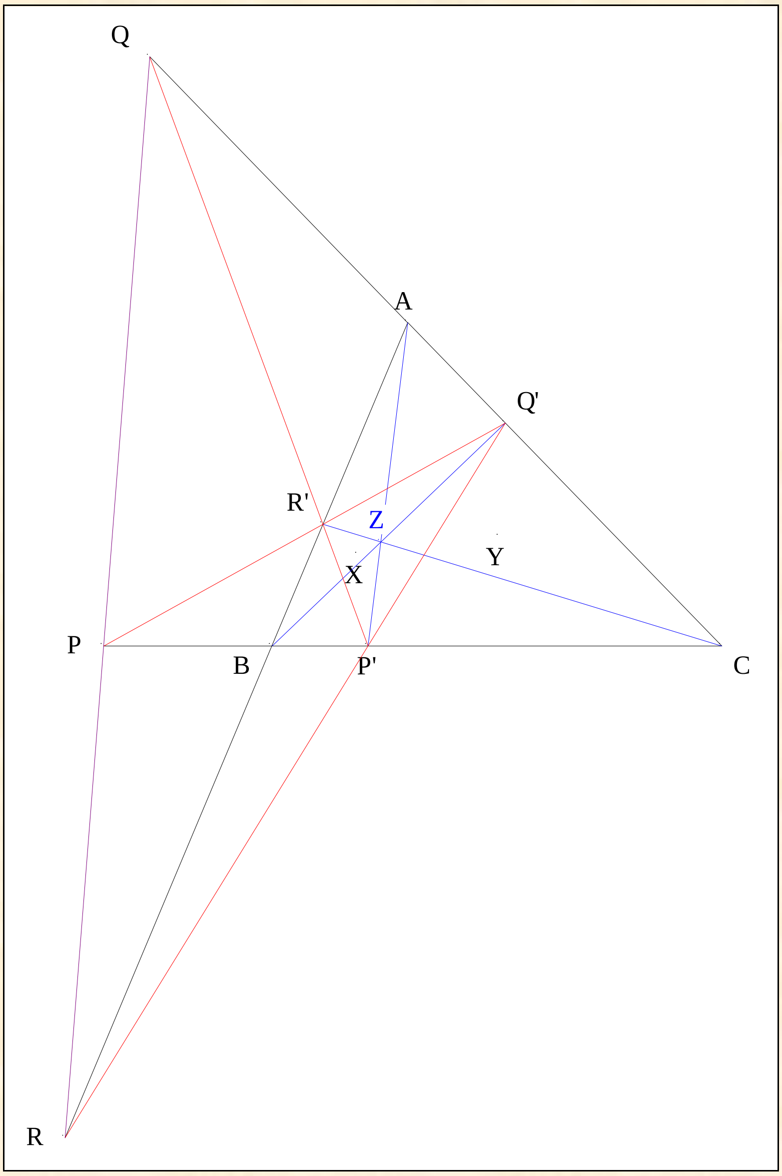
Donné : (Q'R') passe par P.

VISUALISATION

- D'après **B. 1.** Scolie **1** et **B. 2.** Axe radical, le quaterne (B, C, P', P) est harmonique.
- Notons P" le point d'intersection de (Q'R') et (BC).
- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. **E.** Annexe **3**) appliqué au quadrilatère AR'ZQ', le quaterne (B, C, P', P) est harmonique ; en conséquence, P et P" sont confondus.

- **Conclusion :** (Q'R') passe par P.

Scolies : **(1)** l'arguésienne de ABC et P'Q'R' [6]



- Notons P, Q, R les points d'intersection de (Q'R') et (BC), (R'P') et (CA), (P'Q') et (AB).

- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [7] (Cf. **E.** Annexe **2**) appliqué aux triangles perspectifs ABC et P'Q'R' de centre Z, P, Q et R sont alignés.

(2) Deux résultats

- Notons *1b*, *1c* les cercles circonscrits resp . de BX2Y2, CX3Y3
  F, G les seconds points d'intersection resp. de *0* et *1b*, *0* et *1c*.

- **Conclusion :** (BF) passe par Q et (CG) passe par R.

---

6 Ayme J.-L., Three collinear points, *Mathlinks* du 21/09/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=48&t=432462

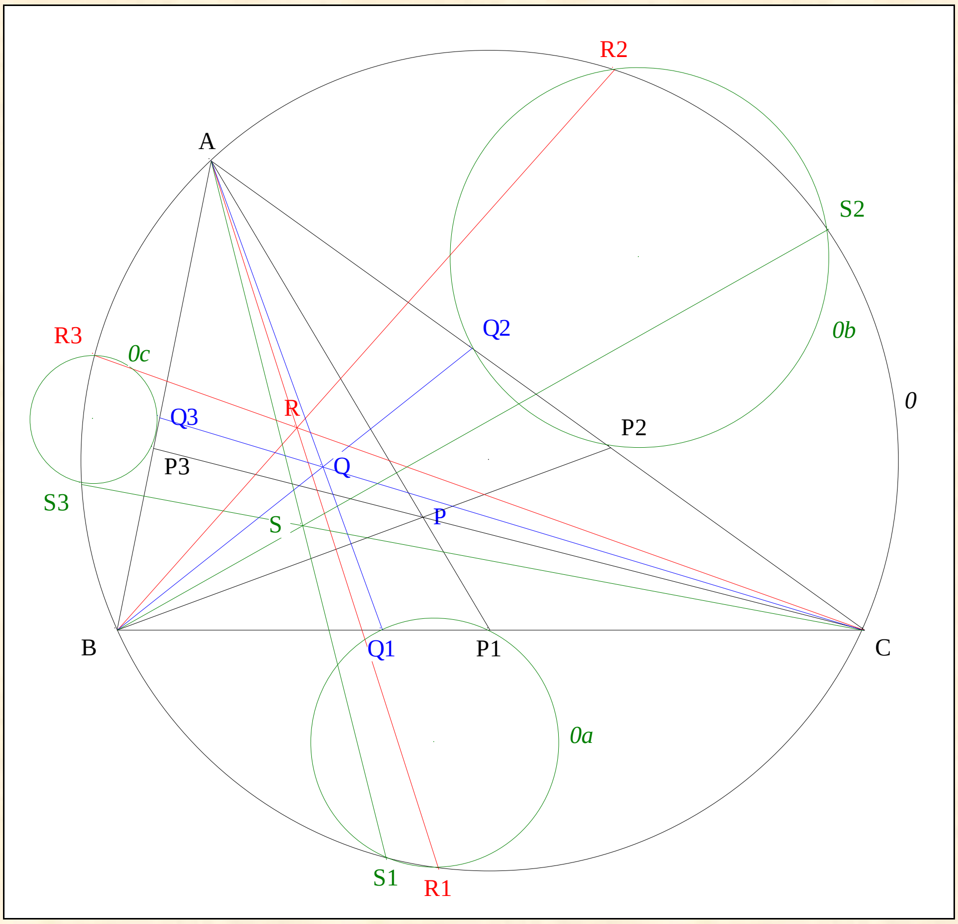
7 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 39 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

B. AYME's THEOREM

1. Le théorème

VISION

Figure :

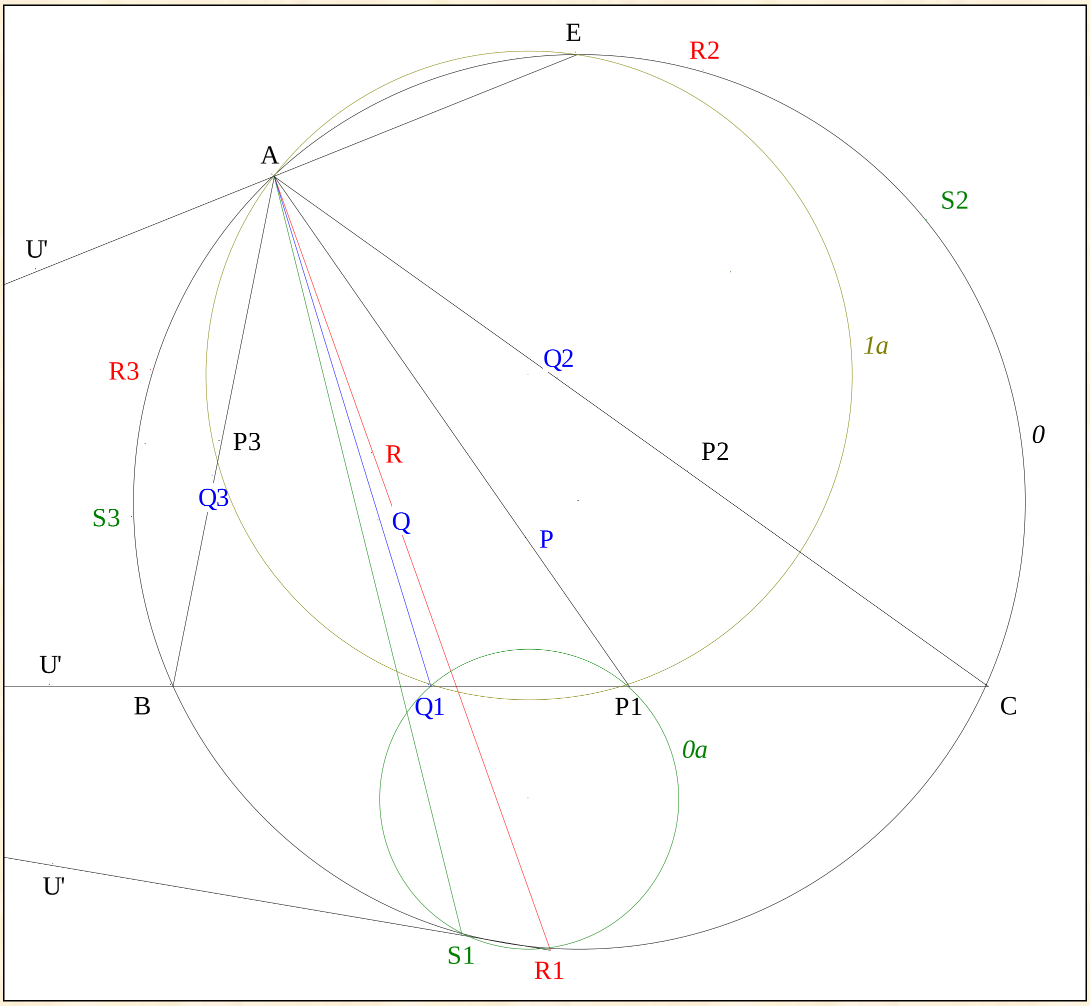


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
P, Q, R trois points,
P1P2P3 l le P-triangle cévien de ABC,
Q1Q2Q3 le Q-triangle cévien de ABC,
R1R2R3 le R-triangle circumcévien de ABC,
0a le cercle circonscrit du triangle P1Q1R1 et, circulairement *0b*, *0c*
et S1 le second point d'intersection de *0a* et *0*, et, circulairement, S2, S3.

Donné : (AS1), (BS2) et (CS3) sont concourantes.[8]

[8] Ayme J.-L., Ayme's theorem, *Les Mathématiques.net* du 26/09/2011 ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/list.php?8
Mathlinks du 26/09/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=433417

VISUALISATION



Par rapport au sommet A

- Notons *1a* le cercle circonscrit au triangle AP1Q1
  et E le second point d'intersection de *0* et *1a*.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [9] (Cf. **E.** Annexe **4**)
  appliqué à *0*, *0a* et *1a*, (P1Q1), (R1S1) et (AE) sont concourantes

- Notons U' ce point de concours.

Par rapport au sommet B

- Notons *1b* le cercle circonscrit au triangle AP2Q2
  et F le second point d'intersection de *0* et *1b*.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [10] (Cf. **E.** Annexe **4**)
  appliqué à *0*, *0b* et *1b*, (P2Q2), (R2S2) et (BF) sont concourantes

- Notons V' ce point de concours.

---

[9] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
[10] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

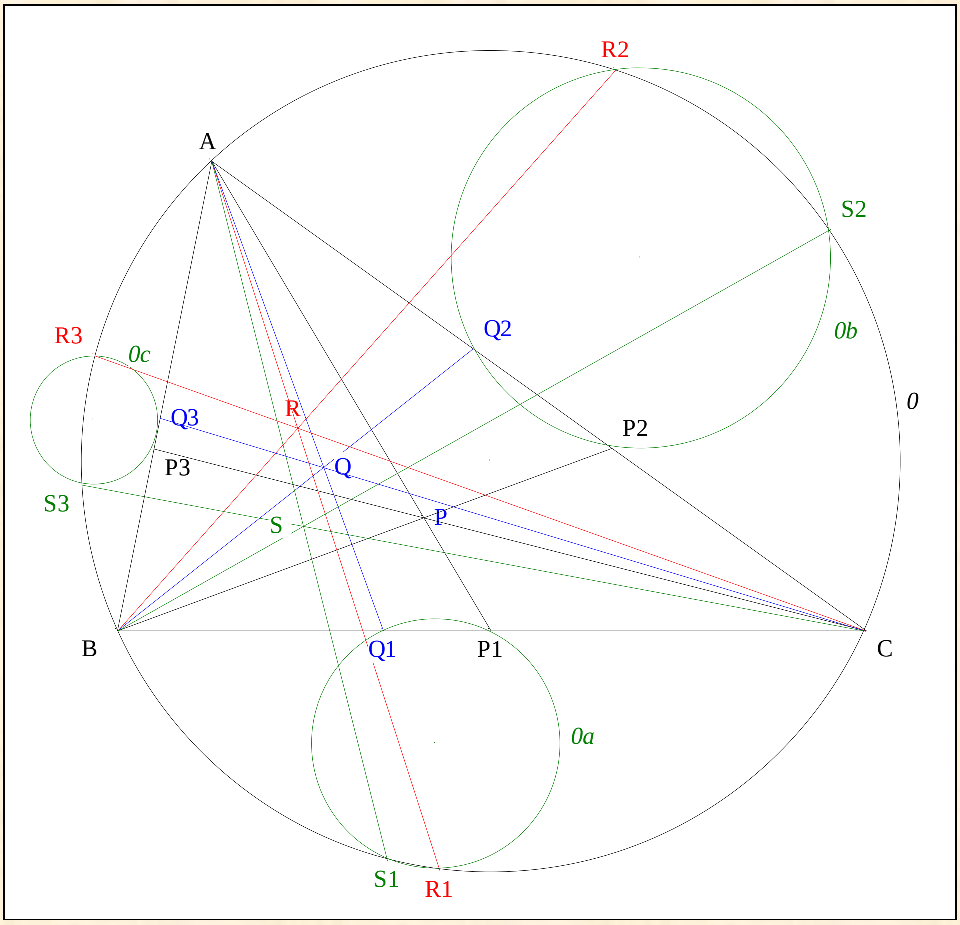
Par rapport au sommet C

- Notons *1c* le cercle circonscrit au triangle AP3Q3
  et G le second point d'intersection de *0* et *1c*.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [11] (Cf. **E.** Annexe **4**)
  appliqué à *0*, *0c* et *1c*, (P3Q3), (R3S3) et (CG) sont concourantes

- Notons W' ce point de concours.

- **Conclusion partielle :** d'après **A. 4.** Trois points alignés, scolie **1**, U', V' et W' sont alignés.



- **Conclusion :** d'après "Anonyme" [12] (Cf. **E.** Annexe **5**), (AS1), (BS2) et (CS3) sont concourantes.

- Notons S ce point de concours.

Commentaire : l'auteur n'a pas trouvé le moyen pour déterminer synthétiquement la nature géométrique de S.

---

[11] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[12] Ayme J.-L., La promesse-Le tour-Le prestige, G.G.G. vol. **4**, p. 6-12 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

2. Note historique et correspondance avec F. J. Garcia Capitan

l'auteur a pris un avis auprès du géomètre Francisco Javier Garcia Capitan, professeur de mathématiques à I.E.S. Álvarez Cubero de Priego de Cordoba (Andalousie, Espagne) qui lui a confirmé dans une communication privée, la validité du résultat ainsi que la nature géométrique de ce point de concours en recourant au calcul barycentrique, les calculs étant menés par l'assistance de l'ordinateur.
Rappelons que Francisco Garcia Capitan dirige un site de Géométrie[13] sur le web.

De : Francisco Javier García Capitán <garciacapitan@gmail.com>
À : Jean-Louis Ayme <jeanlouisayme@yahoo.fr>
Envoyé le : Mercredi 21 Septembre 2011 18h59
Objet : Re: Your advice

If you take P =(p1,p2,p3)=X(i), Q=(q1,q2,q3)=X(j), R=(r1,r2,r3)=X(k), where the indices i, j, k are those of ETC, then your point S is

S={a^2 p1 q1 r2 r3, b^2 p2 q2 r1 r3, c^2 p3 q3 r1 r2}.

De : Francisco Javier García Capitán <garciacapitan@gmail.com>
À : Jean-Louis Ayme <jeanlouisayme@yahoo.fr>
Envoyé le : Mercredi 21 Septembre 2011 19h47
Objet : Re: Re : Your advice

S is the barycentric product of P, Q and the isogonal conjugate of R.

Pour un nouveau centre

El 25 de septiembre de 2011 14:41, Jean-Louis Ayme <jeanlouisayme@yahoo.fr> escribió:
Dear Francisco,
thank again.
What is the basic example which lead to a new center?
Sincerely
Jean-Louis

[13] Pagina de Francisco Javier Garcia Capitan ; http://garciacapitan.99on.com/

DE : Francisco Javier García Capitán Dimanche 25 Septembre 2011 17h44

À : Jean-Louis Ayme

For example,

{a^5 (a^2 - b^2 - c^2) (a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 -
b^2 c^2) (a^4 - a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4),
b^5 (a^2 - b^2 + c^2) (a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 -
b^2 c^2) (a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4),
c^5 (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 -
c^4) (a^4 - a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}

is the result of apply the map to P=X(1), Q=X(3) and R=X(5)

Pout terminer, voilà quelques exemples obtenus par Francisco Javier Garcia Capitan

De : Francisco Javier García Capitán <garciacapitan@gmail.com>
À : Jean-Louis Ayme <jeanlouisayme@yahoo.fr>
Envoyé le : Mercredi 21 Septembre 2011 18h59
Objet : Re: Your advice

If you take P =(p1,p2,p3)=X(i), Q=(q1,q2,q3)=X(j), R=(r1,r2,r3)=X(k), where the indices i, j, k are those of ETC, then your point S is

S={a^2 p1 q1 r2 r3, b^2 p2 q2 r1 r3, c^2 p3 q3 r1 r2}.

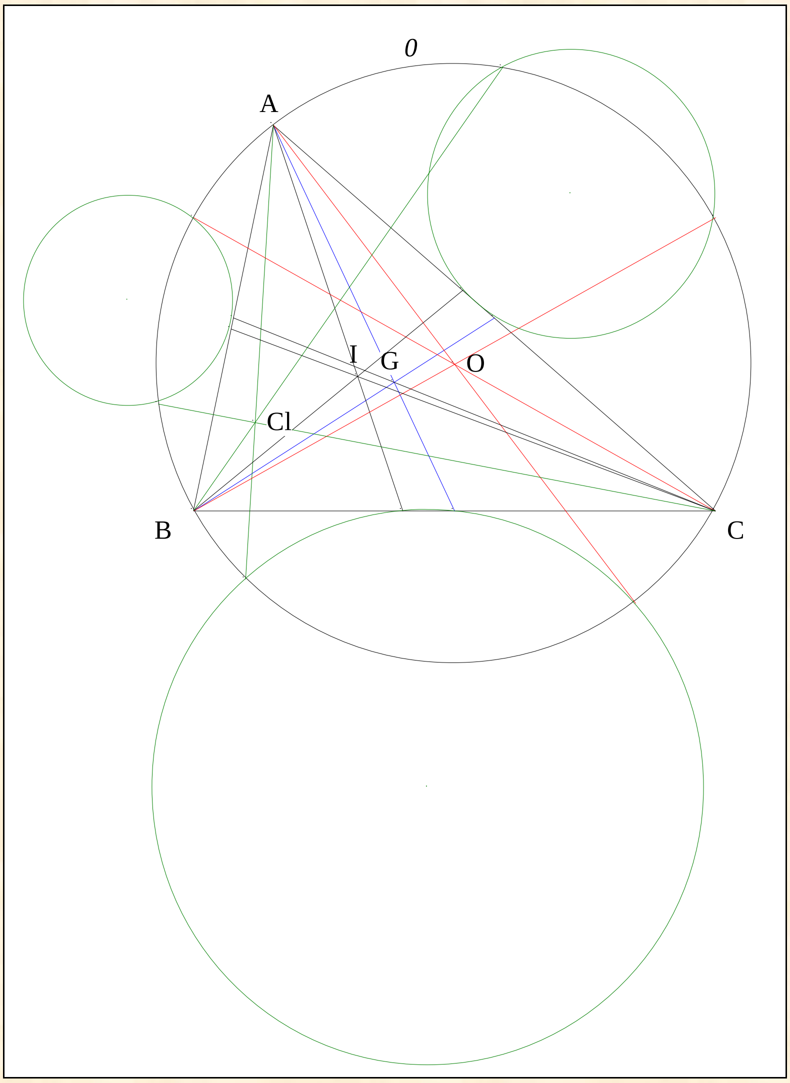
This gives a lot of points S on ETC. For example,

i	j	k	S
1	2	3	X19
1	2	4	X48
1	2	5	X2148
1	2	6	X1
1	2	7	X41
1	3	6	X48
1	4	6	X19
1	4	7	X2212
1	5	6	X1953
2	3	4	X577
2	3	5	conjugado isogonal de X324
2	3	6	X3
2	3	7	conjugado isogonal de X331
2	4	5	conjugado isogonal de X343
2	4	6	X4
2	4	7	X607
2	5	6	X5
2	6	7	X2175
3	4	5	conjugado isogonal de X311
3	4	6	X6
3	4	7	X2175
3	5	6	X216
4	5	6	X53

...

I don't know if this map is already known.

Scolie : le point de John Wentworth Clawson



X(1) = I, X(2) = G, X(3) = O, X(19) = Cl

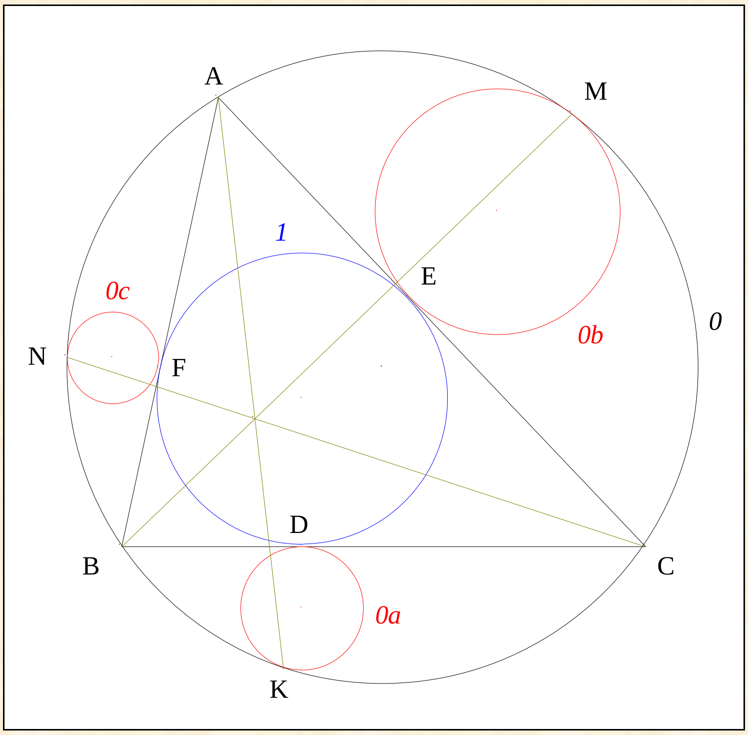
- **Conclusion :** ce résultat permet une nouvelle construction du point de Clawson.

C. QUATRE CAS PARTICULIERS

1. Juan Carlos Salazar

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit de ABC,
1 le cercle inscrit de ABC,
DEF le triangle de contact de ABC,
0a le cercle tangent intérieurement à *0* et à (BC) en D,
K le point de contact de *0a* avec *0*,
0b le cercle tangent intérieurement à *0* et à (CA) en E,
M le point de contact de *0b* avec *0*,
0c le cercle tangent intérieurement à *0* et à (AB) en F,
et N le point de contact de *0c* avec *0*.

Donné : (AK), (BM) et (CN) sont concourantes. [14]

Commentaire : la preuve peut se calquer sur celle proposée dans le cas général (Cf. **B. 1.** Le théorème) ou sur celle présentée ci-après (Cf. **C. 2.** Alexey A. Zaslavsky).

Note historique : ce problème de 2005 de Juan Carlos Salazar a été proposé au TST du Vietnam la même année mais avec une autre "concourance" à savoir celle de (KD), (ME) et (NF).

[14] three circles tangent both to the incircle and the circumcir, *Mathlinks* du 11/05/2005 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=229579

Day 1

1 Let $(I), (O)$ be the incircle, and, respectiely, circumcircle of ABC. (I) touches BC, CA, AB in D, E, F respectively. We are also given three circles $\omega_a, \omega_b, \omega_c$, tangent to $(I), (O)$ in D, K (for ω_a), E, M (for ω_b), and F, N (for ω_c).

a) Show that DK, EM, FN are concurrent in a point P;

b) Show that the orthocenter of DEF lies on OP.

[15]

245. Sea P un punto interior del triángulo ABC, siendo $A_1B_1C_1$ su triángulo ceviano. Si trazamos un círculo tangente a BC por A_1 y al circuncírculo (O) de ABC, determinamos el punto de tangencia A_2 situado en el arco que no contiene a A. De manera similar definimos los puntos B_2, C_2.

(a) Probar que AA_2, BB_2, CC_2 son concurrentes.

(b) Probar que, si P es el punto de Gergonne, A_1A_2, B_1B_2 y C_1C_2 son concurrentes.

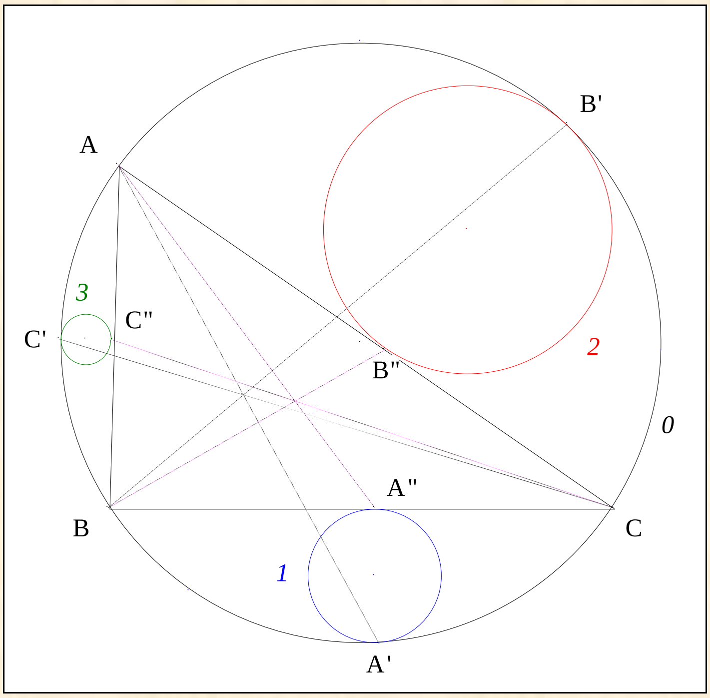
Cuestión (a): Salazar, J.C., Propuesta personal (2005)
Cuestión (b): Taller de Olimpiadas de Vietnam (2005)

[16]

2. Alexey A. Zaslavsky

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,

[15] three circles tangent both to the incircle and the circumcir, *Mathlinks* du 11/05/2005 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=229579

[16] Barroso Campos R., Trianguloscabri, http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/TC2000a2010.pdf

	0	le cercle circonscrit de ABC,
	A'B'C'	un triangle inscrit dans *0*,
	1	le cercle tangent intérieurement à *0* en A' et à (BC),
	A"	le point de contact de *1* avec (BC),
	2	le cercle tangent intérieurement à *0* en B' et à (CA),
	B"	le point de contact de *1* avec (CA),
	3	le cercle tangent intérieurement à *0* en C' et à (AB),
et	C"	le point de contact de *1* avec (AB).

Donné : (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes
si, et seulement si,
(AA"), (BB") et (CC") sont concourantes. [17]

Commentaire : l'auteur a présenté une solution synthétique [18] dans l'article intitulé "La promesse-Le tour-Le prestige".

Note historique : en 2003, Floor van Lamoen de Goes (Pays-Bas) rappelle dans un Message *Hyacinthos*[19] que la condition nécessaire a déjà été présentée sans préciser où, et signale que ce résultat peut être étendu au cas où le point de concours de (AA'), (BB') et (CC') est à l'extérieur de ABC.
Dans l'une de ses deux réponses, le russe Alexey A. Zaslavsky[20] affirme qu'il a travaillé sur cette situation cinq années auparavant.
En 2005, le regretté géomètre vénézuélien Juan Carlos Salazar (†30/03/2008) propose la condition suffisante au site web *Trianguloscabri* dirigée par Ricardo Barroso Campos[21] de Séville (Espagne). Une solution barycentrique assistée par le logiciel *Mathematica* est donnée par Francisco Javier Garcia Capitan[22].

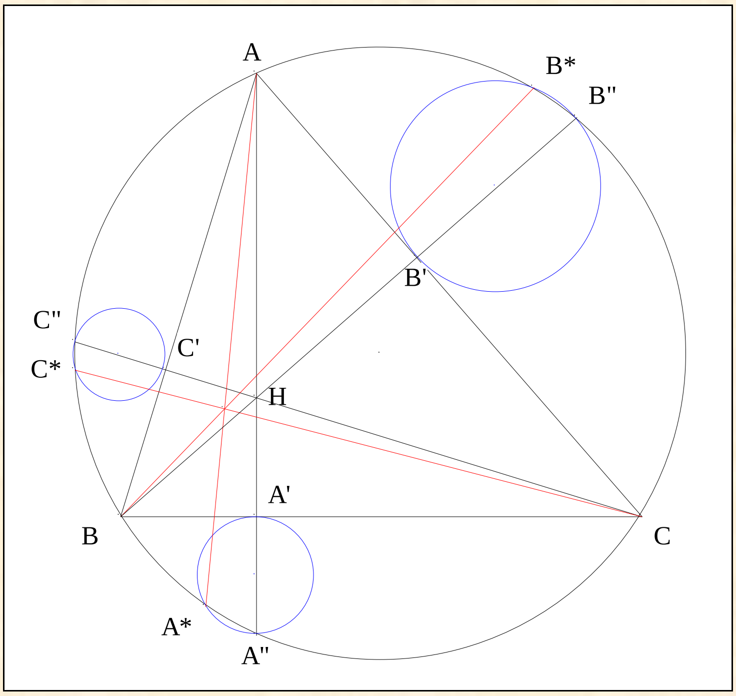
3. Borislav Mirchev

VISION

Figure :

---

[17] Ayme J.-L., La promesse-Le tour-Le prestige, G.G.G. vol. **4** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
[18] Ayme J.-L., La promesse-Le tour-Le prestige, G.G.G. vol. **4** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
[19] Lamoen (van) F., Message *Hyacinthos* # **7819** du 08/09/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/7819.
[20] Zaslavsky A. A., Messages *Hyacinthos* # **7822**, **7823** du 09/09/2003. http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/7822.
[21] problème **245** ; http:/www.personal.us.es/rbarrosso/trianguloscabri/
[22] http://garciacapitan.auna.com/problemas/sol245garcap

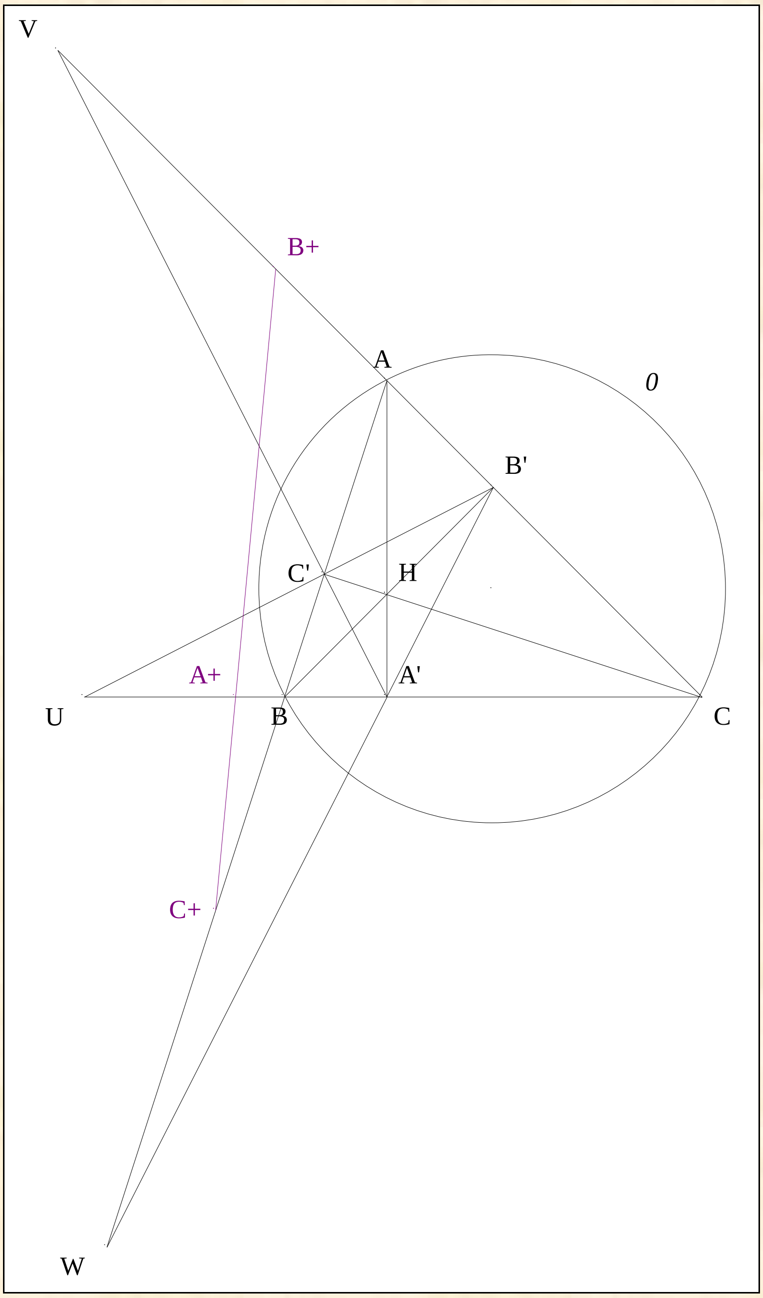


Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
A'B'C' le triangle orthique de ABC,
A"B"C" le triangle circumorthique de ABC,
1a, *1b*, *1c* les cercles de diamètre resp. [A'A"], [B'B"], [C'C"]
et A*, B*, C* les seconds points d'intersection resp. de *1a*, *1b*, *1c* avec *0*.

Donné : (AA*), (BB*) et (CC*) sont concourantes.[23]

VISUALISATION

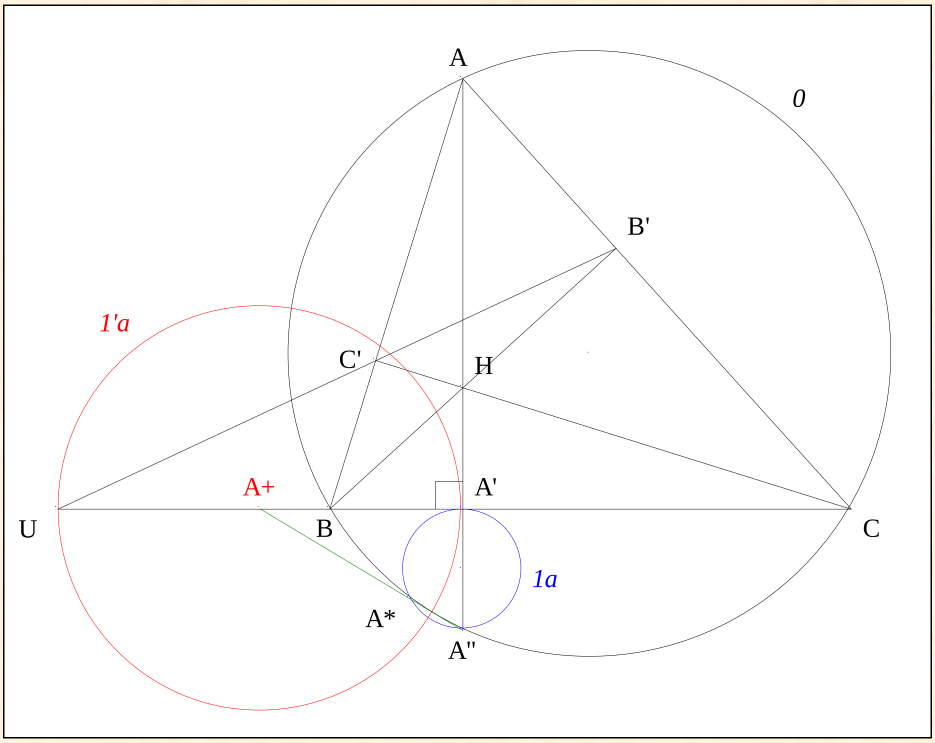
[23] Mirchev B., Heights property, *Mathlinks* du 15/09/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=48&t=431280



- Notons U, V, W les points d'intersection de (B'C') et (BC), (C'A') et (CA), (A'B') et (AB),
  et A+, B+, C+ les milieux resp. de [A'U], [B'V], [C'W].

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. **E.** Annexe **3**)
  appliqué **(1)** au quadrilatère AC'HB', le quaterne (B, C, A', U) est harmonique
  (2) au quadrilatère BA'HC', le quaterne (C, A, B', V) est harmonique
  (3) au quadrilatère CB'HA', le quaterne (A, B, C', W) est harmonique.

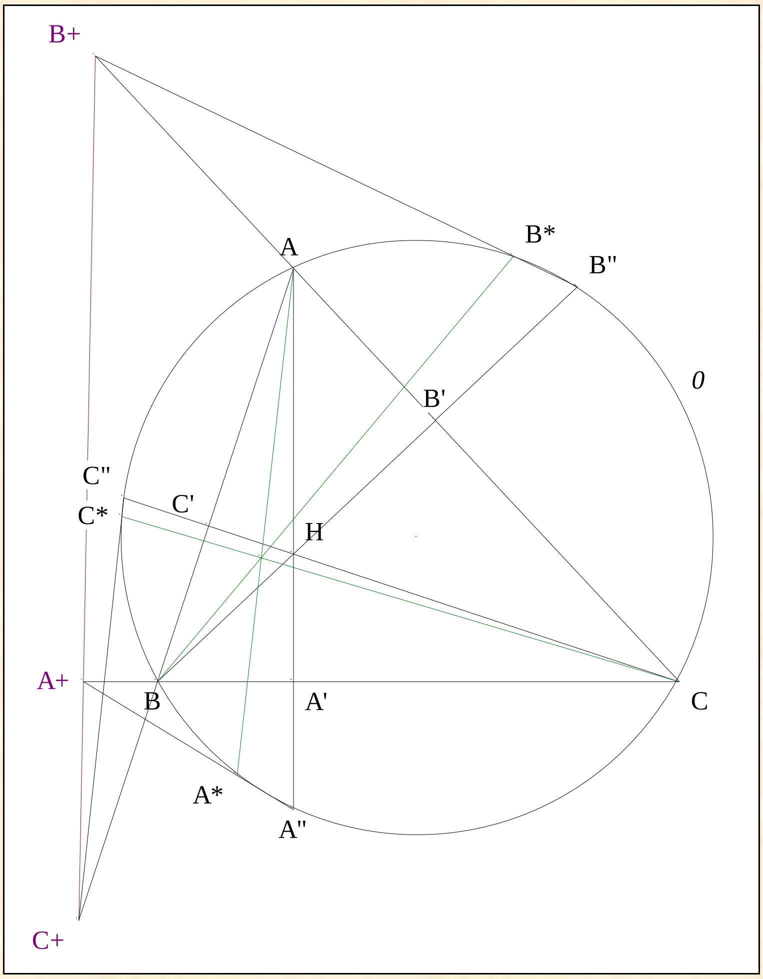
- **Conclusion partielle :** d'après "Trois milieux alignés" (Cf. **D.** Appendice **1**),
  A+, B+ et C+ sont alignés.



- Notons *1'a* le cercle de diamètre [A'U].

- **Conclusion partielle :** *1'a* étant orthogonal à *0* et *1a*, A+ est sur l'axe radical de *0* et *1a*
  i.e. A+ est sur (A*A").

- Mutatis mutandis, nous montrerions que B+ est sur (B*B")
  C+ est sur (C*C").



- **Conclusion :** d'après "Anonyme" [24] (Cf. **E.** Annexe **5**), (AA*), (BB*) et (CC*) sont concourantes.

4. Commentaire et présentation de Borislav Mirchev

ces trois problèmes précédents ont permis à l'auteur de trouver son résultat et de présenter un géomètre bulgare qui anime souvent la partie "Geometry Open Questions" du site *Art of Problem Solving* [25].

[24] Ayme J.-L., La promesse-Le tour-Le prestige, G.G.G. vol. **4**, p. 6-12 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

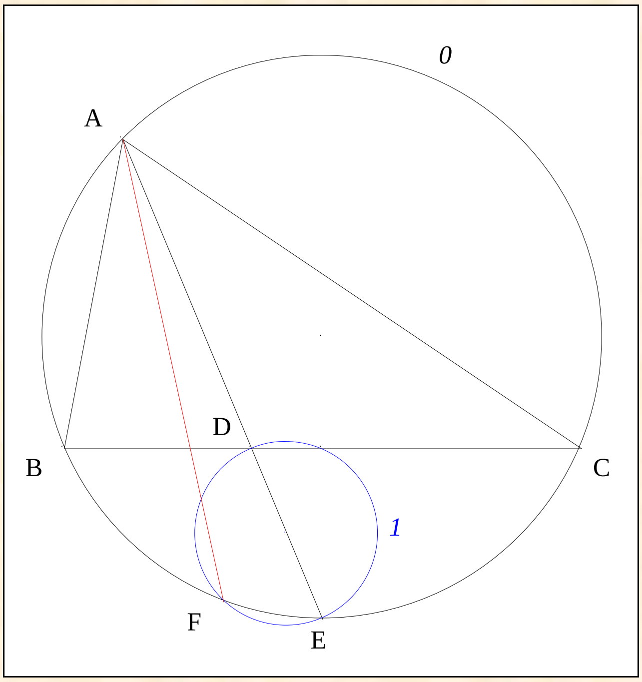
[25] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewforum.php?f=4

"I was born in 17.05.1980 in Vratza (Bulgaria). Till 18 years I lived in my home town - Roman (Bulgaria/district Vratza). I finished High-School *Vasil Levski* in my home town with maximal possible score. When I was at the high-school I have two hours weekly mathematics and I participated in some math Olympiads ; my best result was 5-6 place in Regional Round for district Vratza in 1998.
At the beginning I hated the math from all my heart especially multiplying of numbers, dividing them and working with fractions as well as first degree equations. But in 1995, I saw very beautiful problems in Bulgarian Second Round math Olympiad since 1995 I like math very much.
I entered University of National and World Economy in Sofia with highest possible score and now I have Master Degree in Informatics with excellent result. I had worked in Bulgarian State Reserve, Ministry of Economy as well Overgas and many Bulgarian and International Software Development Companies (Hebrew, English, French) as a Software Developer for a while I had worked as a QA, school teacher and tech support and I participated in some university research projects. My hobby is math and from time to time I'm posting on mathforums and Bulgarian math magazines and propose problems for math competitions. I also like chess playing and many other things..." [26]

5. From a Russia Olympiad

VISION

Figure :

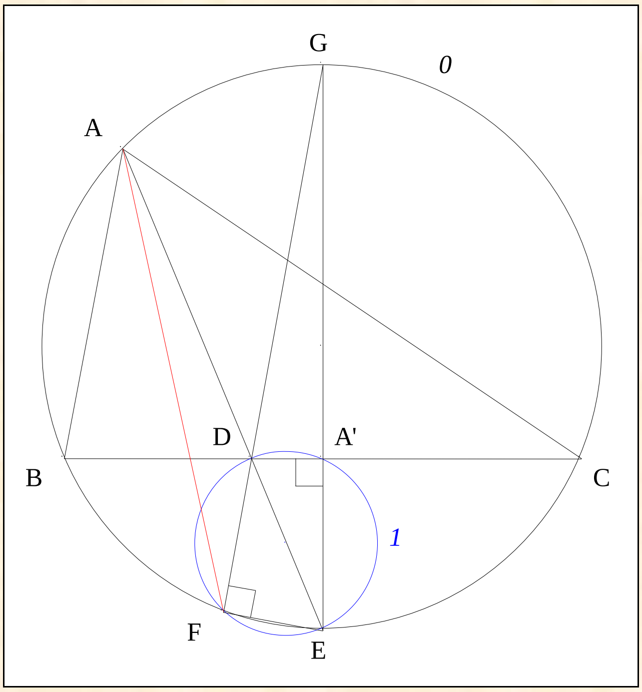


Features : ABC a triangle,
D the foot of the A-internal angle bisector of ABC,
0 the circumcircle of ABC,
E the second point of intersection of AD with *0*,
1 the circle with diameter DE,
and F the second point of intersection of *1* and *0*,

Given : AF is the A-symmedian of ABC.[27]

[26] Communication de Borislav Mirchev.
[27] Symmedian line, All Russian Olympiad - Problem **9.2**, **10.2**, *Art of Problem Solving* (10/05/2009) ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=276014.

VISUALIZATION

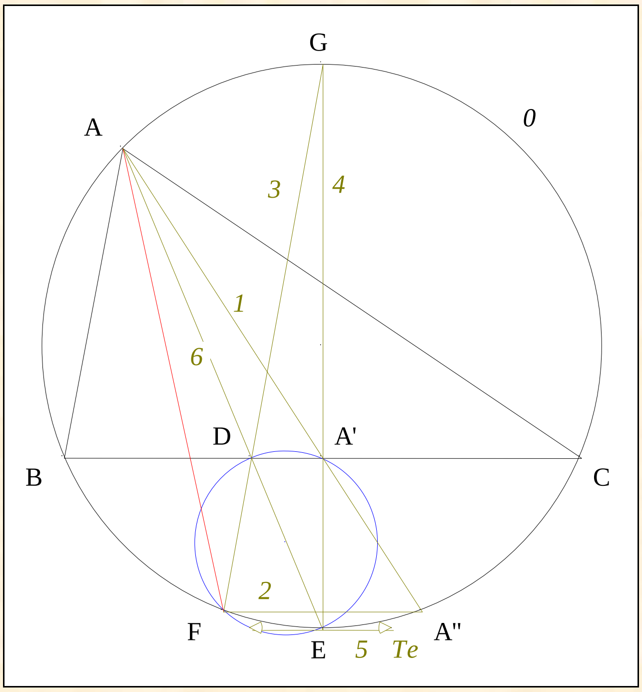


- Note A' the midpoint of the segment BC.

- **Remarks :** **(1)** E is the second A-perpoint of ABC
  (2) *1* goes through A'
  (3) FE ⊥ FD.

- Note G the first A-perpoint of ABC.

- According to "Triangle inscriptible in a half circle", F, D and G are collinear.



- Note A'' the second intersection of AA' with *0* and *Te* the tangent to *0* at E.

- **Remarks :** **(1)** *Te* // A'D
  (2) AA" is the A-median of ABC.

- According to a converse of the Pascal's theorem
  applied to the cyclic hexagon AA"FGE *Te* A,
  A'D being the pascalian parallel to *Te*, A"F // DA' i.e. A"F // BC.

- According to **A. 4.**, AF is the symmetric of AA" wrt AE.

- **Conclusion :** by definition, AF is the A-symmedian of ABC.

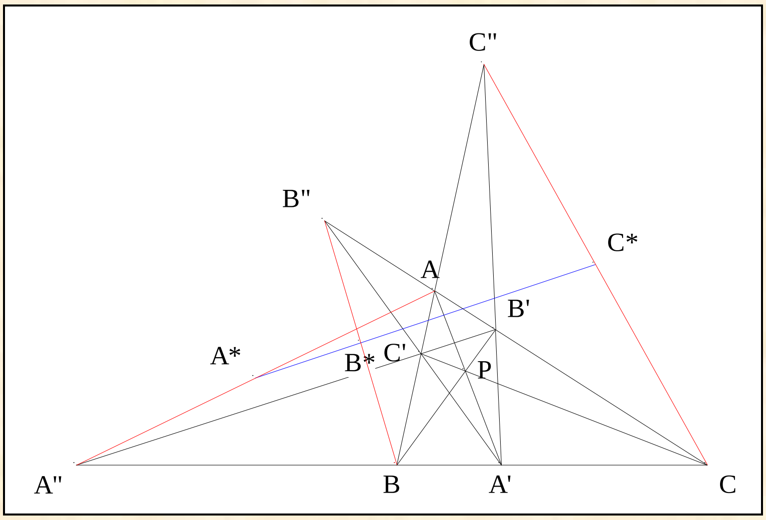
Remark : a similar problem has been posted on *Mathlinks*.[28]

D. APPENDICE

1. Trois milieux alignés

VISION

Figure :

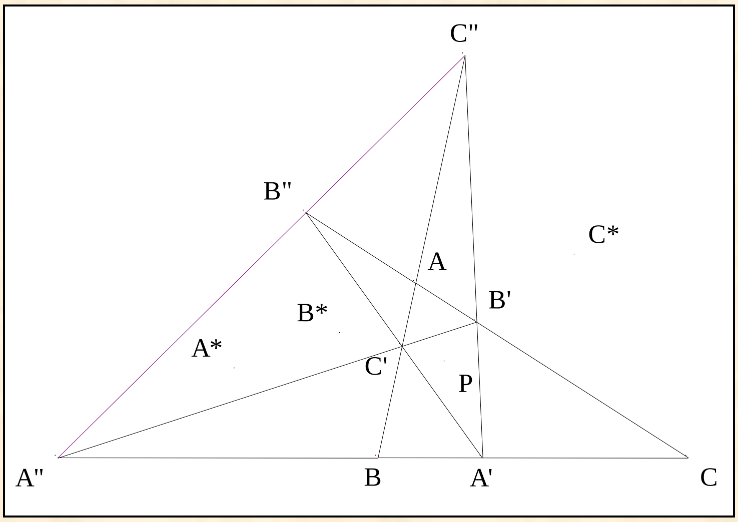


Traits : ABC un triangle,
P un point,
A'B'C' le triangle P-cévien de ABC
A", B", C" les points d'intersection de (B'C') et (BC), de (C'A') et (CA), de (A'B') et (AB)
et A*, B*, C* les milieux de [AA"], [BB"], [CC"].

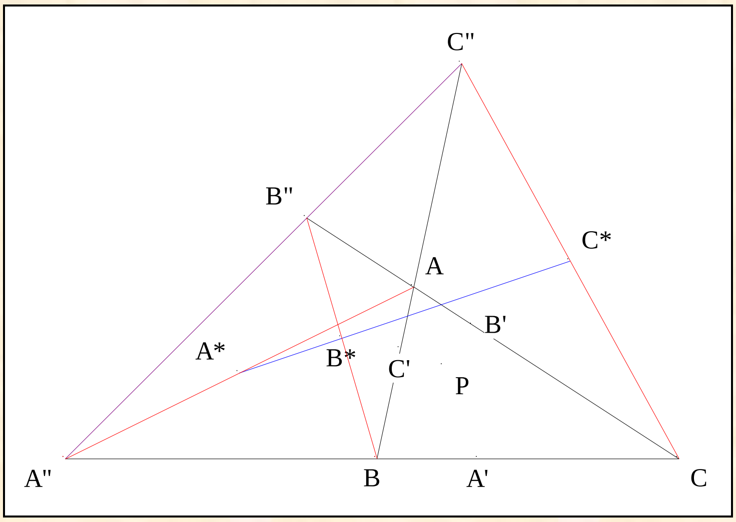
Donné : A*, B* et C* sont alignés.

[28] Symmedian property, *Mathlinks* (14/03/2009) ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=264538.

VISUALISATION



- **Scolie :** (A"B"C") est la polaire trilinéaire de P.

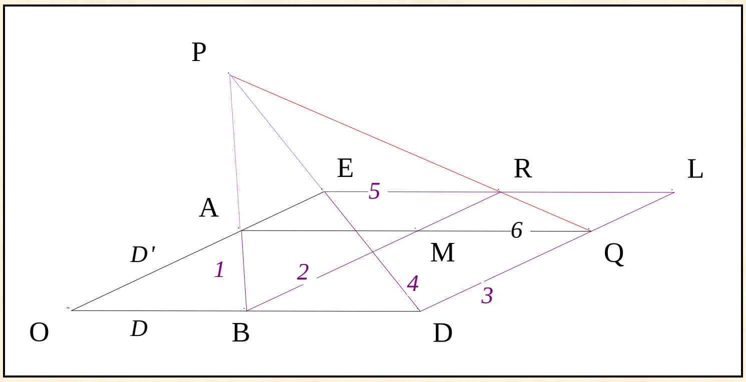


- **Conclusion :** d'après "La ponctuelle de Gauss"[29] appliqué au quadrilatère complet A"BAB", A*, B* et C* sont alignés.

[29] Ayme J.-L., La droite de Gauss et la droite de Steiner, G.G.G. vol. **4** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

E. ANNEXE

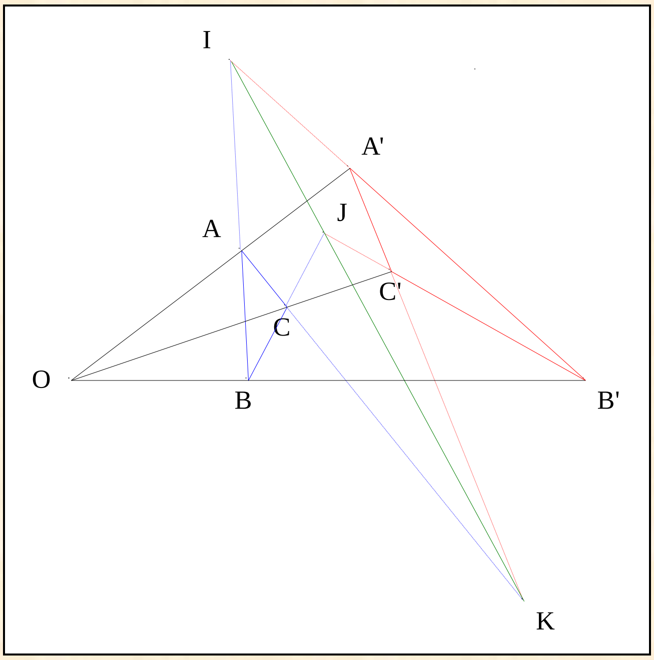
1. Une figure plus esthétique [30]



Traits : ODLE un parallélogramme,
M un point,
B, R les points d'intersection de la parallèle à (OE) resp. avec (OD), (LE),
et A, Q les points d'intersection de la parallèle à (OD) resp. avec (OE), (DL).

Donné : (AB), (DE) et (QR) sont concourantes ou parallèles.

2. Le théorème des deux triangles [31]



Traits : ABC un triangle,
A'B'C' un triangle tel que (AA') et (BB') soient concourantes,
O ce point de concours,
I, J, K les points d'intersection de (AB) et (A'B'), (BC) et (B'C'), (CA) et (C'A').

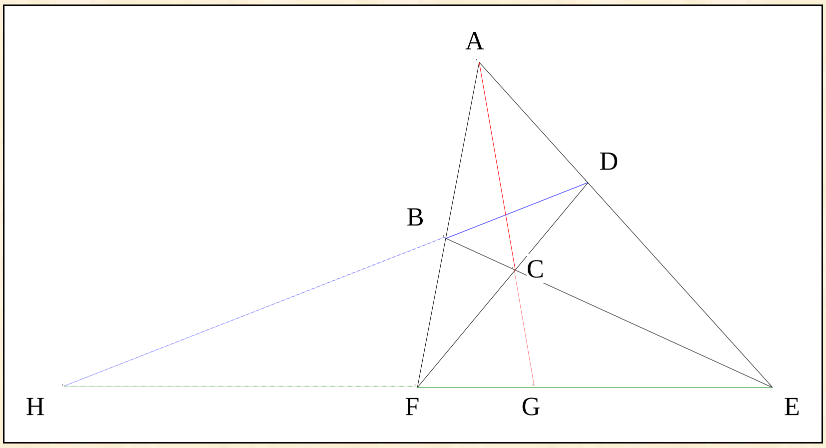
Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* I, J et K sont alignés.

---

30 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 21 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

31 Bosse A., *Perspective et de la Coupe des pierres* (1648).

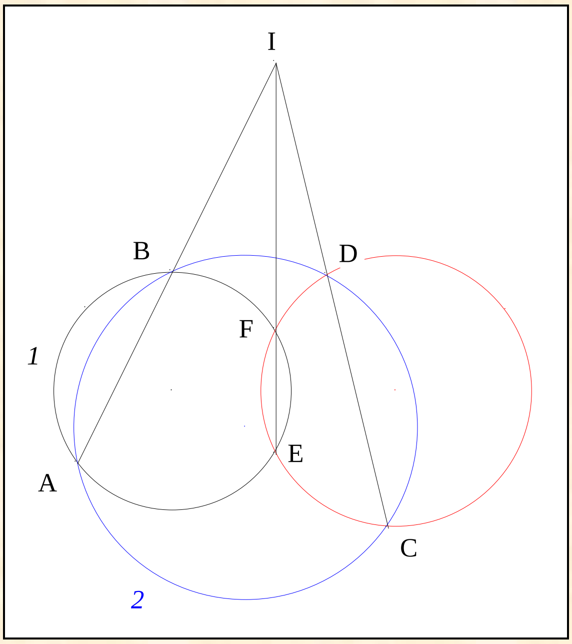
3. Diagonales d'un quadrilatère complet [32]



Traits : ABCD un quadrilatère,
E, F les points d'intersection resp. de (AD) et (BC), de (AB) et (CD),
et G, H le point d'intersection resp. de (AC) et (EF), de (BD) et (EF).

Donné : le quaterne (E, F, G, H) est harmonique.

4. Le théorème des trois cordes [33]



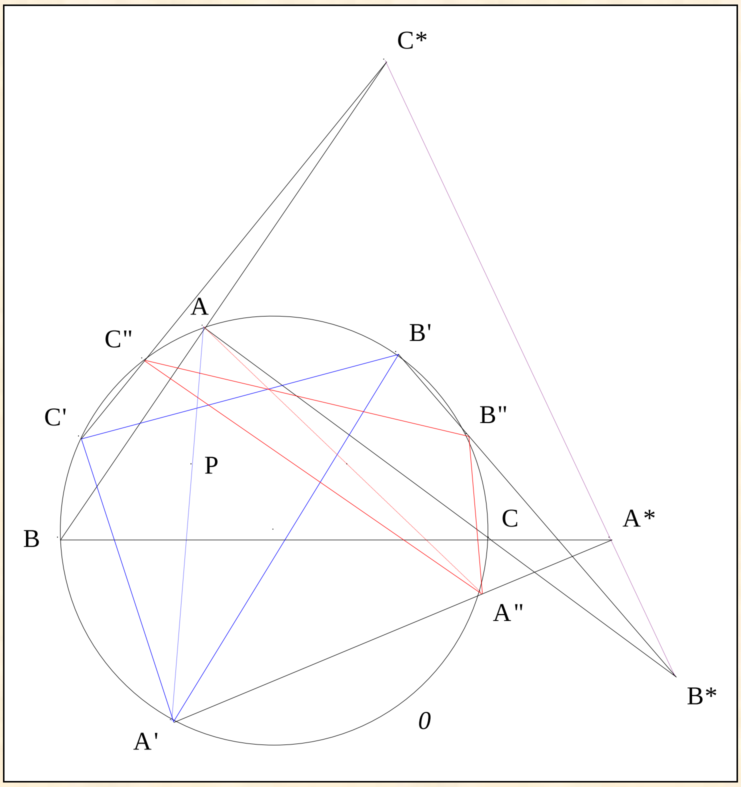
Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
C, D deux points de *2*,
E, F deux points de *1*
et I le point d'intersection de (AB) et (CD).

Donné : C, D, E et F sont cocycliques *si, et seulement si,* (EF) passe par I.

---

[32] Pappus, *Collections*, Livre **7**, proposition **131**.
[33] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

5. Anonyme



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit de ABC,
P un point,
A'B'C' le triangle P-circumcévien de ABC,
A", B", C" trois points de *0*,
A*, B*, C* le point d'intersection de (A'A") et (BC), de (B'B") et (CA), de (C'C") et (AB).

Donné : (AA"), (BB"), (CC") sont concourantes
si, et seulement si,
A*, B* et C* sont alignés.