AYME's TRICK

Jean-Louis AYME

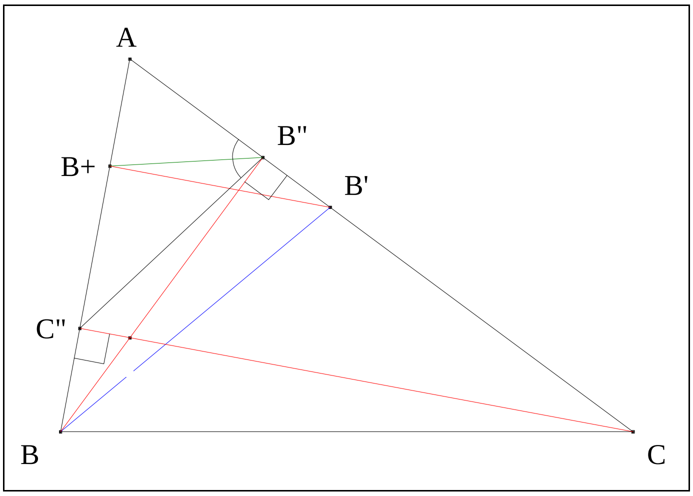
Résumé. Nous présentons le "Ayme' trick" i.e. un triangle "subtil" en perspective avec le triangle de départ, dont le centre de perspective est le point de Gray de ce dernier. Pour aller plus en avant, notons que ce "subtil" triangle tant recherché par l'auteur, lui permettra de prouver le fameux résultat de Steve Gray datant de 2001, non démontré synthétiquement à ce jour[1] et connu sous le nom de "la droite de Gray".
L'article commence par quatre lemmes conduisant à un "parallélisme observé" qui, tout naturellement, révèle trois droites concourantes au point de Gray et, par conséquent, le triangle perspectif évoqué précédemment.
Tous les théorèmes cités en annexe peuvent tous être démontrés synthétiquement.

I. QUATRE LEMMES

1. Deux perpendiculaires [2]

VISION

Figure :

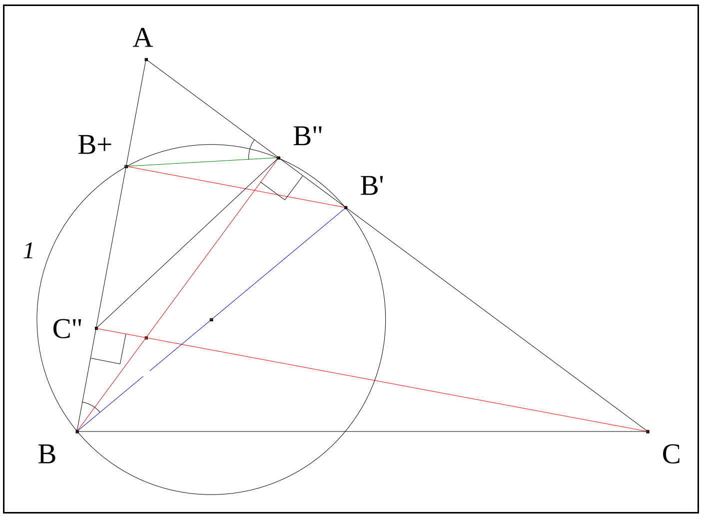


Traits : ABC un triangle,
B' le pied de la B-bissectrice intérieure de ABC,
B", C" les pieds des B, C-hauteurs de ABC
et B+ le pied de la B"-bissectrices intérieure du triangle AB"C".

[1] 28/11/2007.
[2] Ayme J.-L., Two parallels (2), *Mathlinks* (21/11/2007).

Donné : (B'B+) est perpendiculaire à (AB).

VISUALISATION



- Le quadrilatère BCB"C" étant cyclique, <CAB = <AB"C"
  il s'en suit que, <B'BA = <AB"B+ ;
  en conséquence, le quadrilatère BB'B"B+ est cyclique.

- Notons *1* ce cercle.

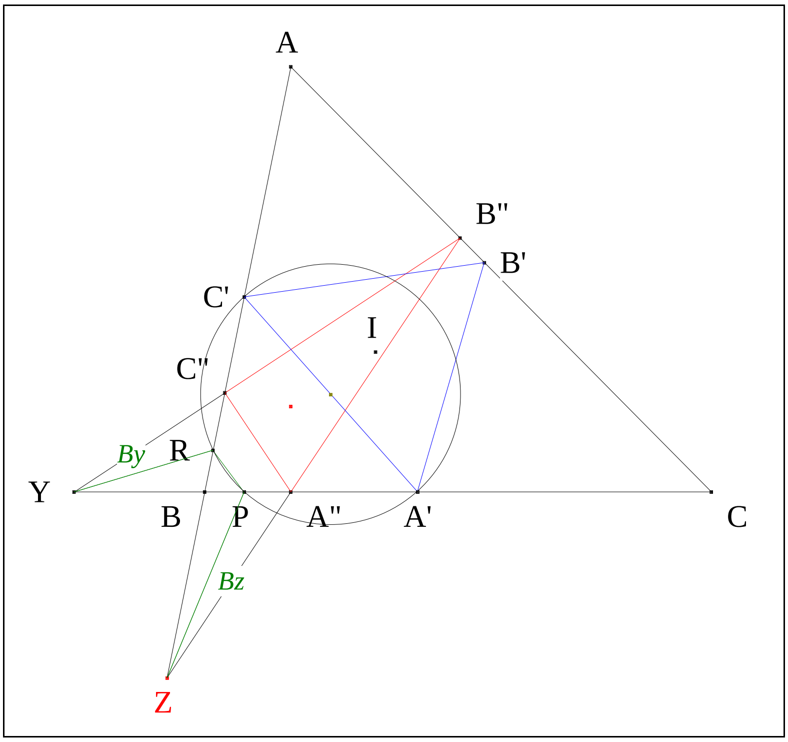
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", [BB'] est un diamètre de *1* ;
  en conséquence, (B'B+) ⊥ (AB).

- **Conclusion :** (B'B+) est perpendiculaire à (AB).

2. Quatre points cocycliques

VISION

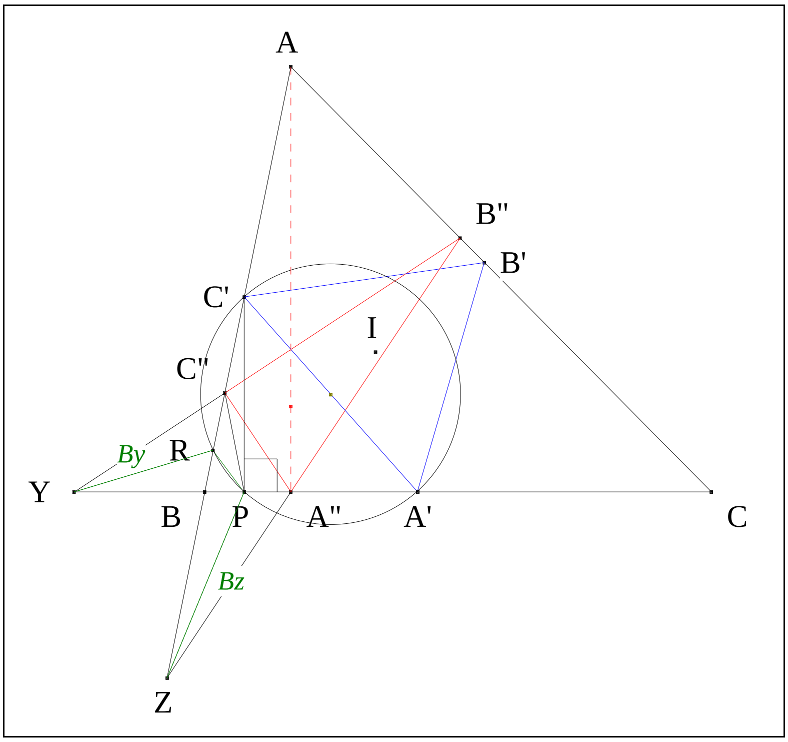
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	A'B'C'	le triangle I-cévien de ABC,
	A"B"C"	le triangle orthique de ABC,
	Y, Z	les points d'intersection resp. de (BC) et (B"C"), de (AB) et (A"B"),
	*B*y, *B*z	les bisectrices intérieures resp. de <C"YB, de <A"ZB
et	P, R	les points d'intersection resp. de *B*z et (BC), de *B*y et (AB).

Conclusion : P, R, A' et C' sont cocycliques.

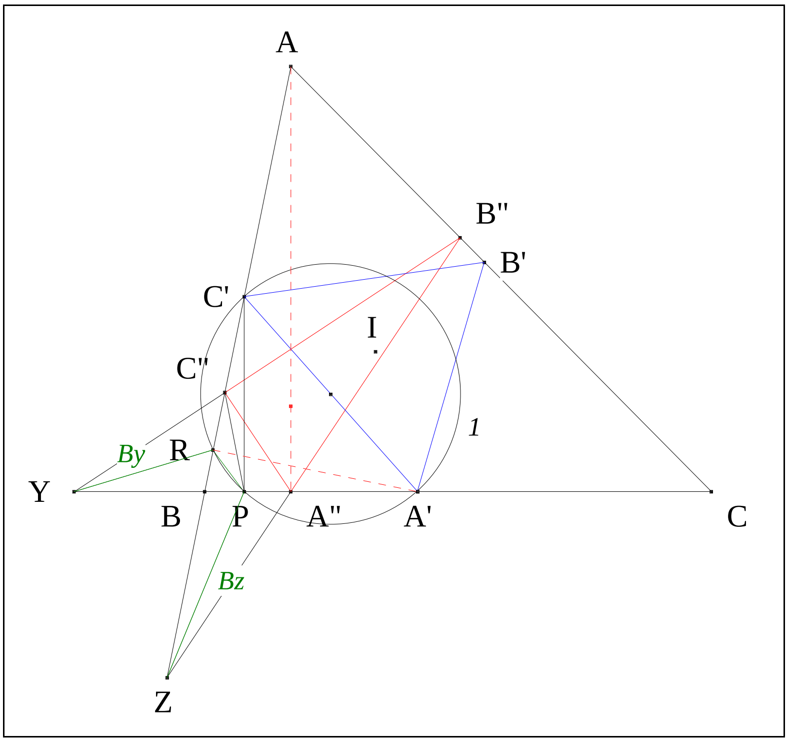
VISUALISATION



- D'après Naudé[3], (A"A) est la A"-bissectrice intérieure de A"B"C" ;
  en conséquence, (A"B) est la A"-bissectrice extérieure de A"B"C".

- Par définition, P est le centre du triangle ZA"C" ;
  en conséquence, (C"P) est la C"-bissectrice intérieure de ZA"C"
  ou encore, (C"P) est la C"-bissectrice intérieure du triangle BA"C".

- **Conclusion partielle :** d'après I.1. "Deux perpendiculaires", (C'P) ⊥ (BC).



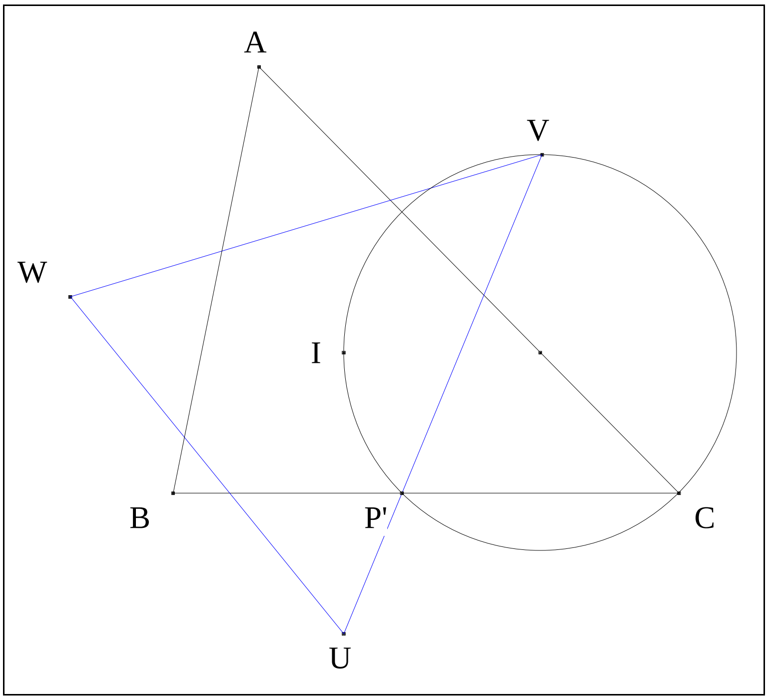
[3] Naudé P., *Miscellana Besolinensia* 5 (1737) 17.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que, (A'R) ⊥ (AB).
- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", P, R, A' et C' sont cocycliques.
- Notons *1* ce cercle ; il a pour diamètre [A'C'].

3. Quatre autres points cocycliques

VISION

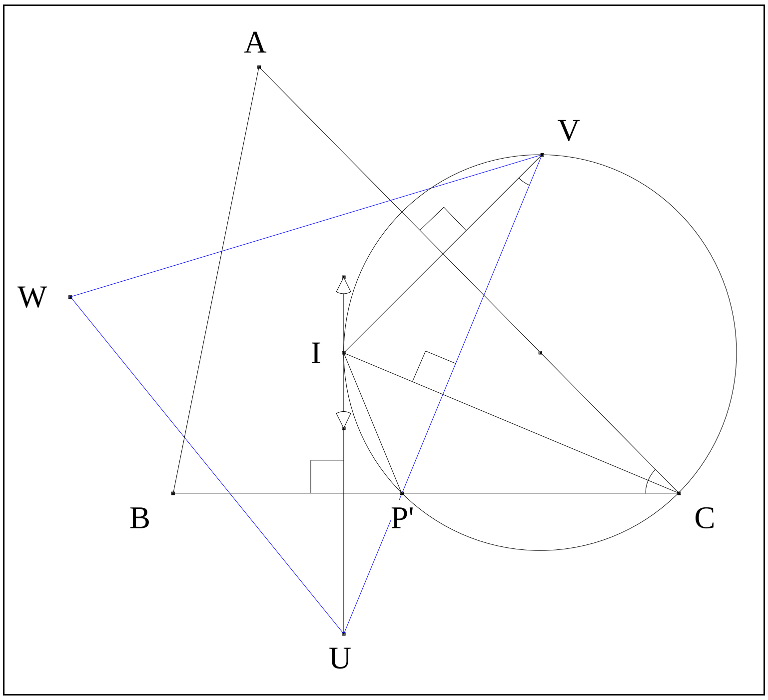
Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
U, V, W les symétriques de I resp. par rapport à (BC), (CA), (AB)
et P' le point d'intersection de (UV) et (BC).

Donné : P', V, I et C sont cocycliques.

VISUALISATION

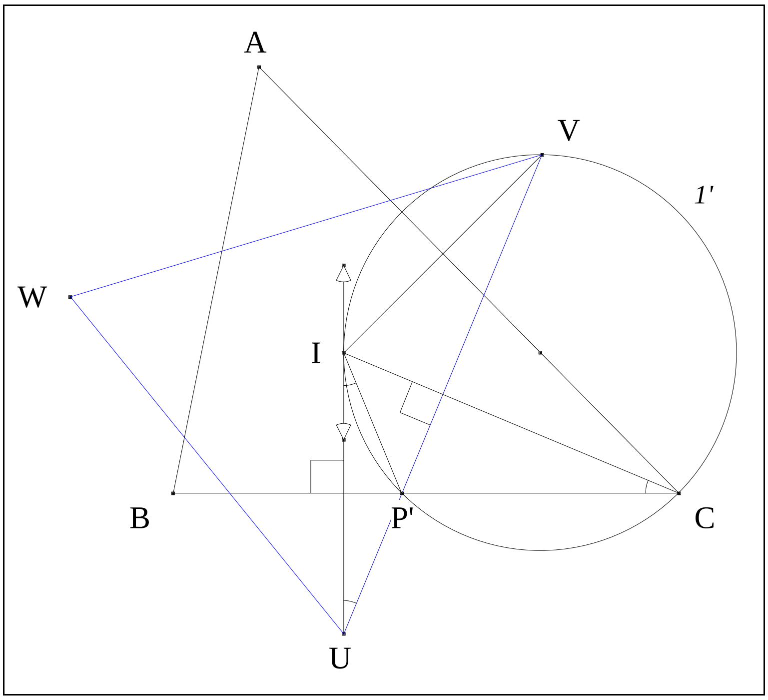


- **Scolies :** **(1)** UVW est le triangle de Gray de ABC
  (2) (IU) ⊥ (BC) et (IV) ⊥ (CA)
  (3) (CI) ⊥ (UV).

- Une chasse angulaire :
  d'après le théorème "Angles à côtés perpendiculaires", <IVP' = <ACI ;
  par hypothèse, <ACI = <ICP' ;
  par transitivité de la relation =, <IVP' = <ICP'.

- **Conclusion :** d'après le théorème de l'angle inscrit, P', V, I et C sont cocycliques.

Scolies : **(1)** une tangente

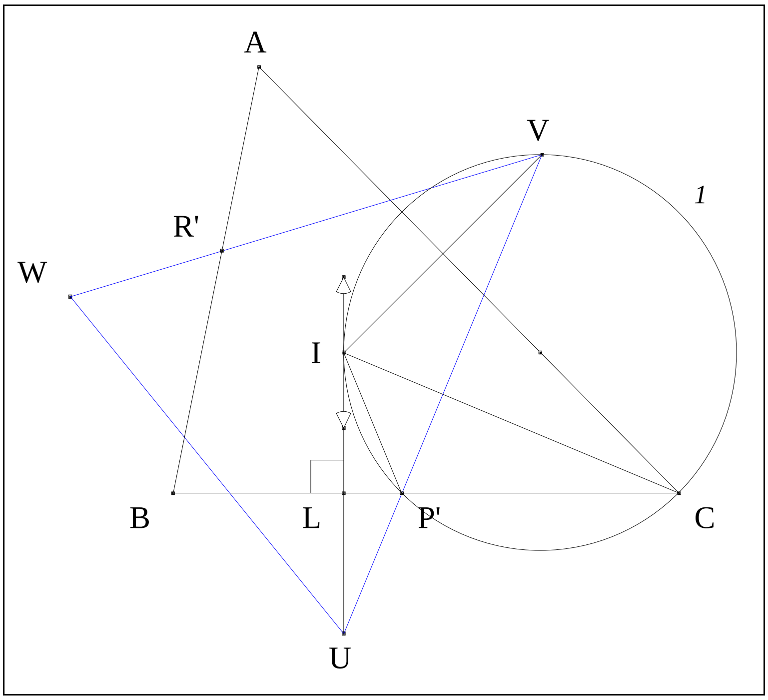


- Notons $1'$ ce cercle.

- Une chasse angulaire :
  par symétrie d'axe (BC), <UIP' = <P'UI ;
  d'après le théorème "Angles à côtés perpendiculaires", <P'UI = <ICP' ;
  par transitivité de la relation =, <UIP' = <ICP'.

- **Conclusion :** d'après le théorème de la tangente, (IU) est la tangente à $1'$ en I.

(2) Une relation métrique



- Notons L le point d'intersection de (IU) et (BC).

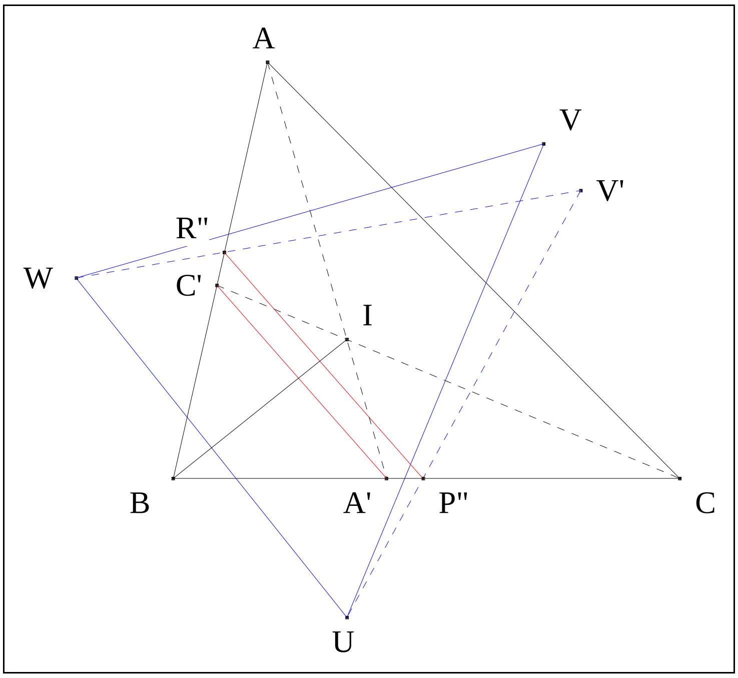
- **Conclusion :** par définition de la puissance d'un point par rapport à un cercle, $LI^2 = LP'.LC$.

Commentaire : cette relation métrique permet de positionner P'.

4. Deux autres parallèles [4]

VISION

Figure :

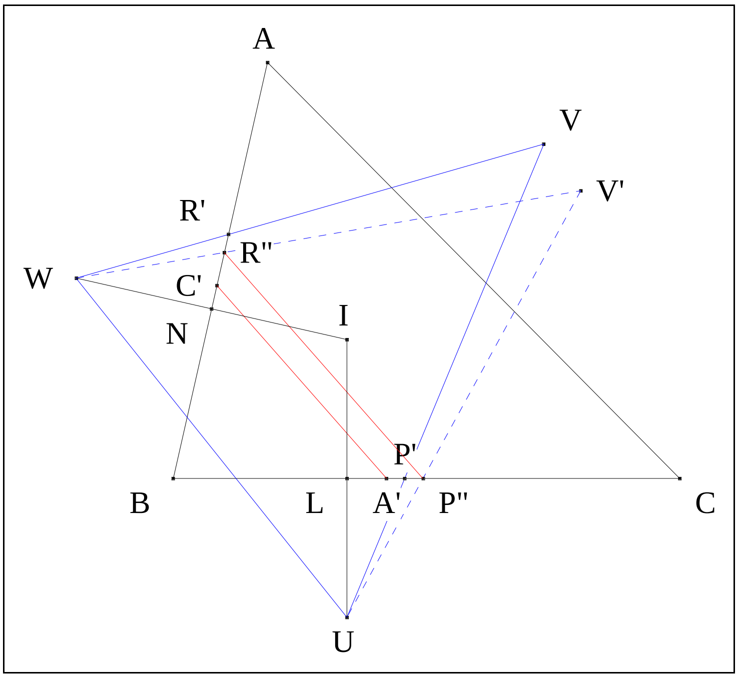


Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	A'B'C'	le triangle I-cévien de ABC,
	UVW	le triangle de Gray de ABC,
	V'	le symétrique de V par rapport à (BI),
et	P", R"	les points d'intersection resp. de (UV') et (BC), de (WV') et (AB).

Donné : (P"R") est parallèle à (A'C').

VISUALISATION

[4] Ayme J.-L., Two Parallels (3), *Mathlinks* (24/09/2007).



- Notons P', R' les points d'intersection resp. de (UV) et (BC), de (WV) et (AB).
  L, N les points d'intersection resp. de (IU) et (BC), de (IW) et (AB),
  a, b, c les longueurs resp. de [BC], [CA], [AB]
  p le demi périmètre de ABC
  et r le rayon du cercle inscrit à ABC.

- D'après le théorème de la bissectrice, **(1)** $\frac{A'B}{A'C}=\frac{c}{b}$ d'où $BA'=\frac{ab}{b+c}$

  (2) $\frac{C'B}{C'A}=\frac{a}{b}$ d'où $BC'=\frac{ac}{a+b}$.

- D'après I. 3. Quatre autres points cocycliques, scolie 2, r^2 = LP'.LC ;
  par symétrie d'axe (BC), r^2 = NR".LC.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que r^2 = LP".NA.

- **Scolies :** **(1)** r^2 = [(p-a).(p-b).(p-c)]/p
  (2) 2p = a + b + c.

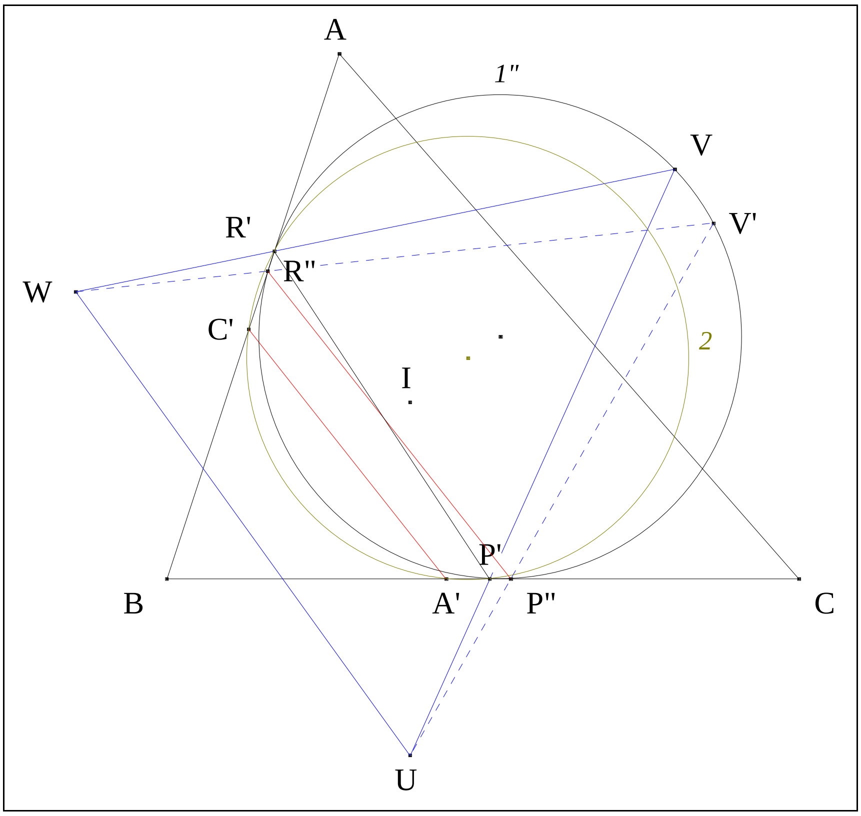
- Un calcul segmentaire : BP" = BL + LP" ;
  par symétrie d'axe (BC), BP" = BL + NR' ;
  BP" = (p-b) + r^2/(p-a)
  par factorisation, BP" = [(p-b)/p].[p+p-c]
  i.e. BP" = [(p-b)/p].[a+b].

- Mutatis mutandis, nous montrerions que BR" = [(p-b)/p].[b+c].

- D'où : $\frac{BA'}{BC'}=\frac{BP''}{BR''}$.

- **Conclusion :** d'après le théorème de Thalès, (P"R") est parallèle à (A'C').

Scolie : quatre points cocycliques



- Par construction, P' et R" sont symétriques par rapport à (BI)
  R' et P" sont symétriques par rapport à (BI).

- Le quadrilatère P'P"R'R" étant un trapèze isocèle, est cyclique.

- Notons *1"* ce cercle.

- **Conclusion :** le cercle *1"*, les points de base P' et R', les moniennes naissantes (P"P'A') et (R"R'C'), les parallèles (P"R") et (A'C'), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, P', R', A' et C' sont cocycliques.

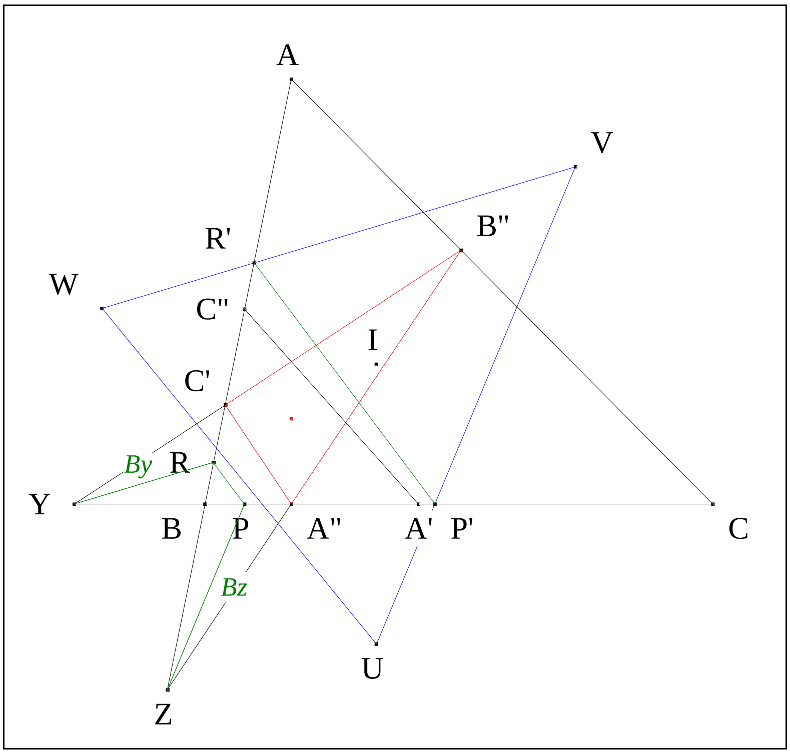
- Notons *2* ce cercle.

II. LE PARALLÉLISME OBSERVÉ [5]

VISION

Figure :

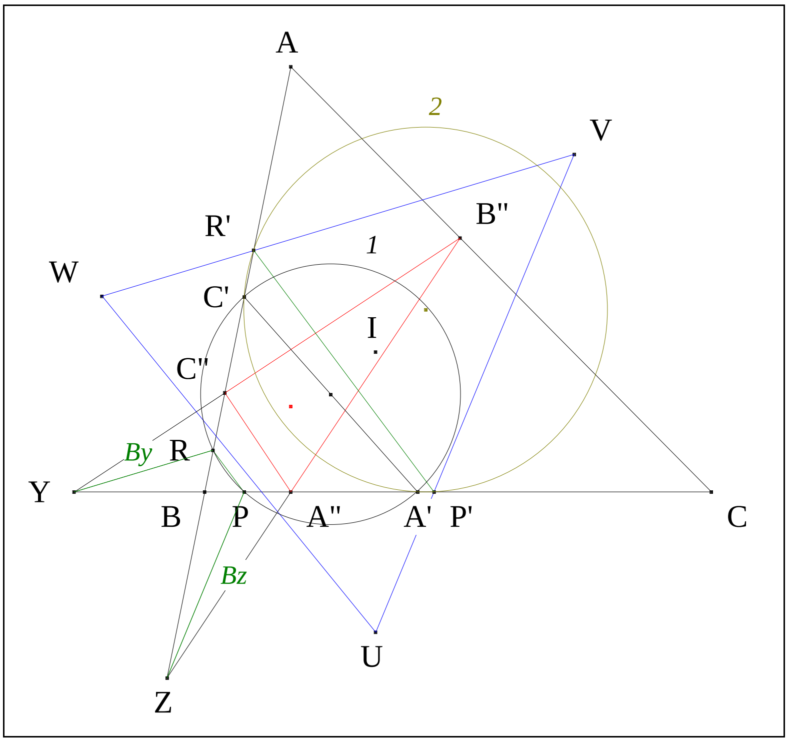
[5] Ayme J.-L., Two parallels, *Mathlinks* (21/11/2007).



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	A'B'C'	le triangle I-cévien de ABC,
	UVW	le triangle de Gray de ABC,
	P', R'	les points d'intersection resp. de (UV) et (BC), de (WV) et (AB),
	A"B"C"	le triangle orthique de ABC,
	Y, Z	les points d'intersection resp. de (BC) et (B"C"), de (AB) et (A"B"),
	*B*y, *B*z	les bisectrices intérieures resp. de <C"YB, <A"ZB
et	P, R	les points d'intersection resp. de *B*z et (BC), de *B*y et (AB).

Donné : (PR) est parallèle à (P'R').

VISUALISATION



- D'après I. 2. Quatre points cocycliques, P, R, A' et C' sont cocycliques ;

- Notons *1* ce cercle.

- D'après I. 4. Deux autres parallèles, scolie, P', R', A' et C' sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle.

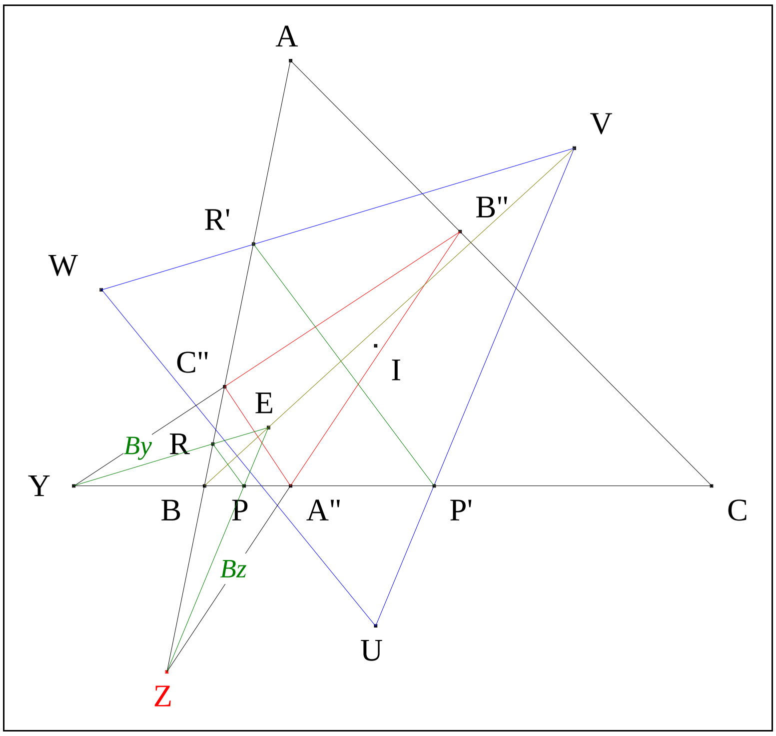
- **Conclusion :** les cercles *1* et *2*, les points de base A' et C', les moniennes (PA'P') et (RC'R'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (PR) est parallèle à (P'R').

III. UN ALIGNEMENT REMARQUABLE [6]

VISION

Figure :

[6] Ayme J.-L., Help, Message *Hyacinthos* # 15493 du 05/09/2007; Three lines concurrent, *Mathlinks* (20/09/2007).



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	UVW	le triangle de Gray de ABC,
	P', R'	les points d'intersection resp. de (UV) et (BC), de (WV) et (AB),
	A"B"C"	le triangle orthique de ABC,
	Y, Z	les points d'intersection resp. de (BC) et (B"C"), de (AB) et (A"B"),
	By, *Bz*	les bisectrices intérieures resp. de <C"YB, <A"ZB,
	P, R	les points d'intersection resp. de *Bz* et (BC), de *By* et (AB),
et	E	le point d'intersection de *By* et *Bz*.

Donné : B, E et V sont alignés.

VISUALISATION

- D'après "Deux bissectrices d'un quadrilatère cyclique" (Cf. Annexe 1), *By* ⊥ (AI) ;
  A étant le centre du cercle circonscrit au triangle IVW, (AI) ⊥ (VW) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, *By* // (VW).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *Bz* // (UV).

- D'après II. Le parallélisme observé, (PR) // (P'R').

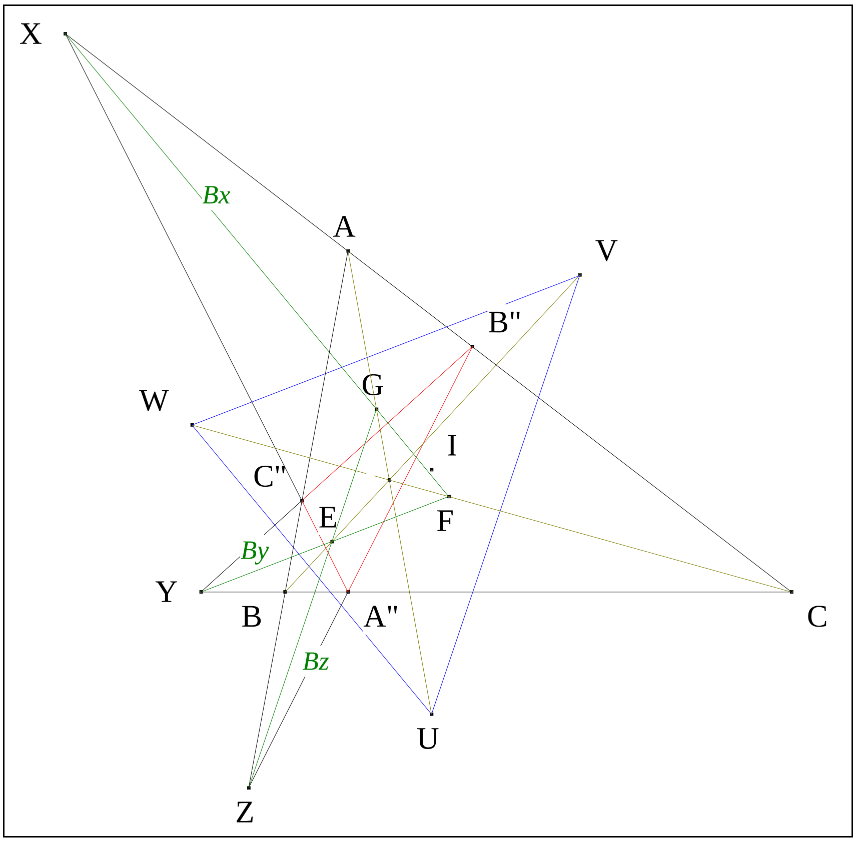
- **Scolie :** (PP') et (RR') sont concourantes en B

- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 2) appliqué aux triangles homothétiques PER et P'VR', B, E et V sont alignés.

IV. AYME's TRICK

VISION

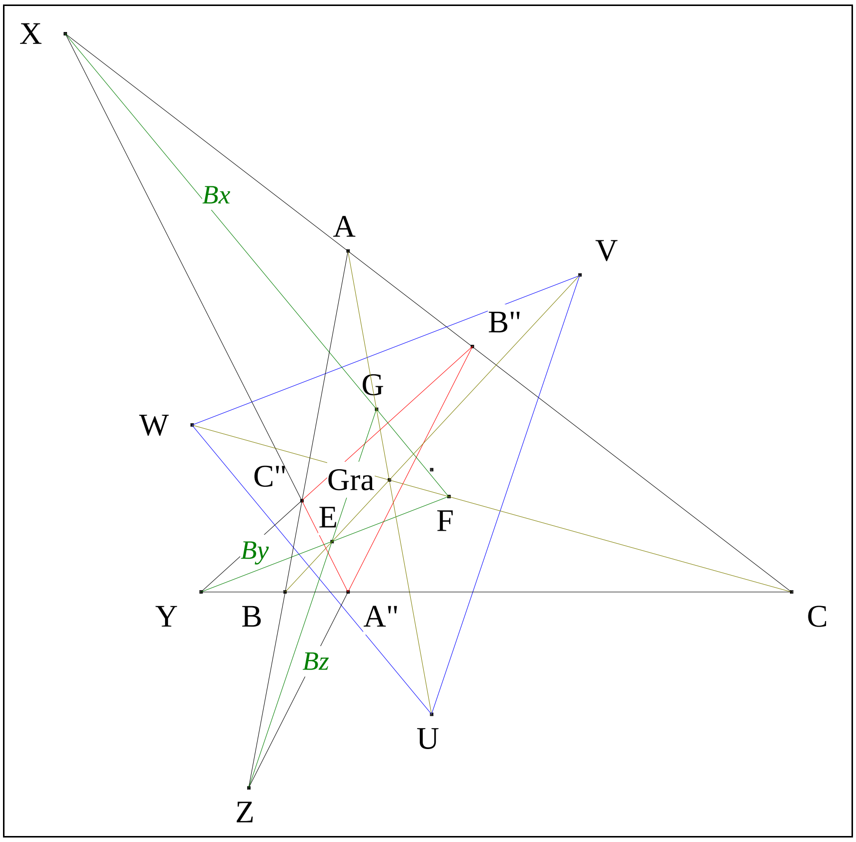
Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
UVW le triangle de Gray de ABC,
A"B"C" le triangle orthique de ABC,
X, Y, Z les points d'intersection resp. de (A"C") et (AC), de (BC) et (B"C"), de (AB) et (A"B"),
*B*x, *B*y, *B*z les bisectrices intérieures resp. de <C"XA, de <C"YB, de <A"ZB
et E, F, G les points d'intersection resp. de *B*y et *B*z, de *B*y et *B*x, de *B*x et *B*z,

Donné : les triangles GEF et ABC sont en perspective.

VISUALISATION



- D'après III. Un alignement remarquable, **(1)** A, G et U sont alignés
  (2) B, E et V sont alignés
  (3) C, F et W sont alignés.

- D'après "Le point de Gray" (Cf. Annexe 3), (AU), (BV) et (CW) sont concourantes.

- Notons Gra ce point de concours.

- **Scolie :** Gra est le point de Gray de ABC.

- **Conclusion :** les triangles GEF, UVW et ABC sont en perspective de centre Gra.

Commentaire : ce résultat subtil que l'auteur a nommé le "Ayme's trick" va lui permettre de montrer que la droite de Gray d'un triangle est parallèle à la droite d'Euler de celui-ci.

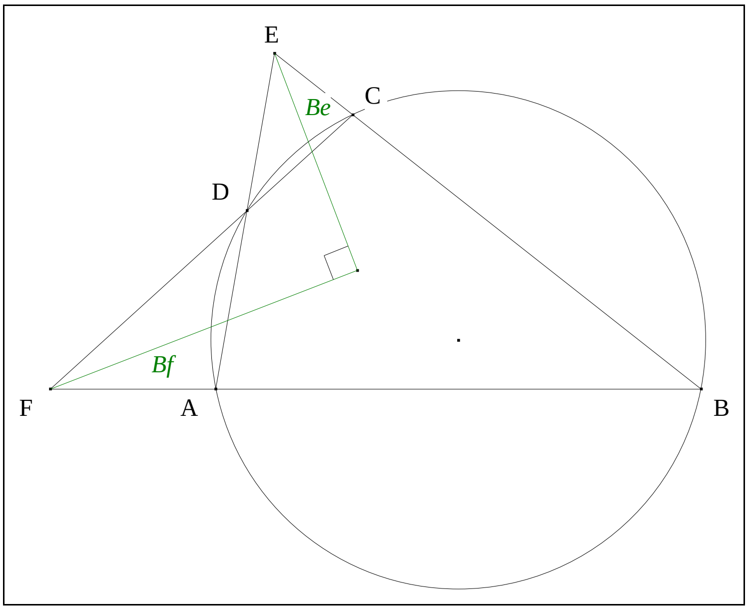
Scolie : les triangles GEF et UVW sont homothétiques.

ANNEXE

1. Deux bissectrices d'un quadrilatère cyclique[7]

---

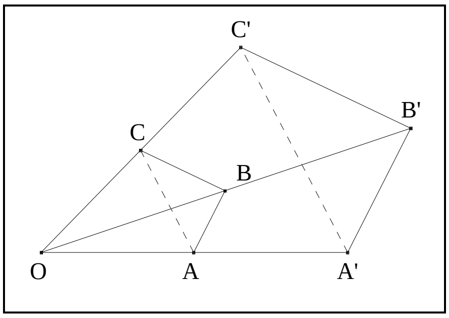
[7] *Exercices de Géométrie*, 6th ed., 1920, Rééditions Jacques Gabay (Gabay reprint), Paris (1991) Théorème 69 I, p. 252.



Traits :		ABCD	un quadrilatère cyclique,
		E, F	les points d'intersection resp. de (AD) et (BC), de (AB) et (CD),
	et	*B*e, *B*f	les bissectrices intérieures resp. de <AEB, de <BFC.

Donné : *B*e est perpendiculaire à *B*f.

2. Le théorème faible de Desargues

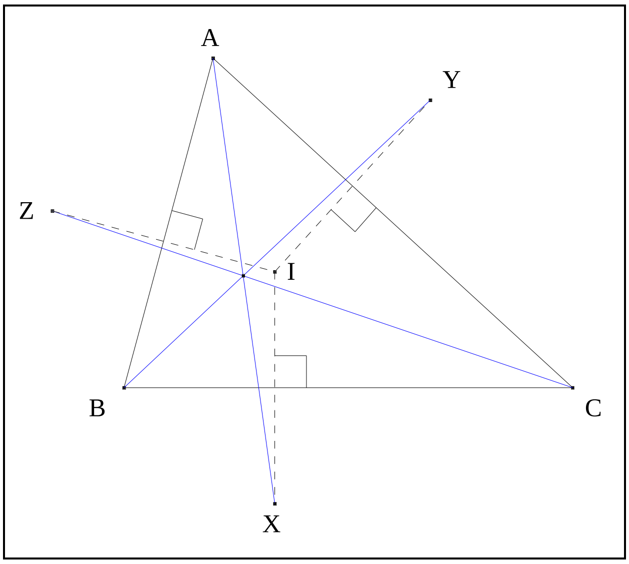


Traits : ABC un triangle,
et A'B'C' un triangle tel que
(1) (AA') et (BB') soient concourantes en O
(2) (AB) soit parallèle à (A'B')
(3) (BC) soit parallèle à (B'C')

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si*, (AC) est parallèle à (A'C').

3. Le point de Gray[8]

[8] Grinberg D., Gray point X(79) and X(80), Message *Hyacinthos* # 6491 du 19/09/2001 ;
Ayme J.-L., G.G.G. vol. 3.



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC
et	X, Y, Z	les symétriques de I par rapport aux droites (BC), (CA), (AB).

Donné : (AX), (BY), (CZ) sont concourantes.