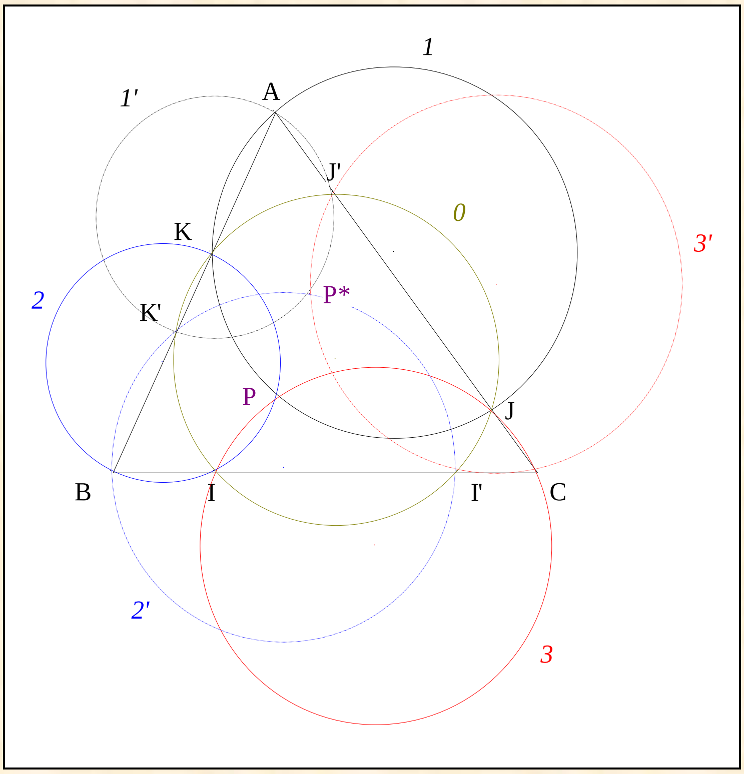
L'ÉQUIVALENCE DE DAVID F. BARROW

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur propose le résultat de David Francis Barrow amené par le cercle d'Eckart Schmidt concernant sept points. Un appendice relatant le problème **2** de l'O.I.M. de 1985 éclaire la preuve synthétique de l'auteur et une archive rappelle la démonstration de Barrow.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements. L'auteur remercie le professeur Francisco Bellot Rosado pour sa contribution à l'archive.

Abstract. The author proposes the result of David Francis Barrow led by the Eckart Schmidt's circle concerning seven points. An appendix detailing the problem of the I.M.O. 1985 illuminates the synthetic proof of the author and an archive recalled the Barrow's demonstration.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

Aknowledgment. The author thanks Professor Francisco Bellot Rosado for his contribution to the archive

---

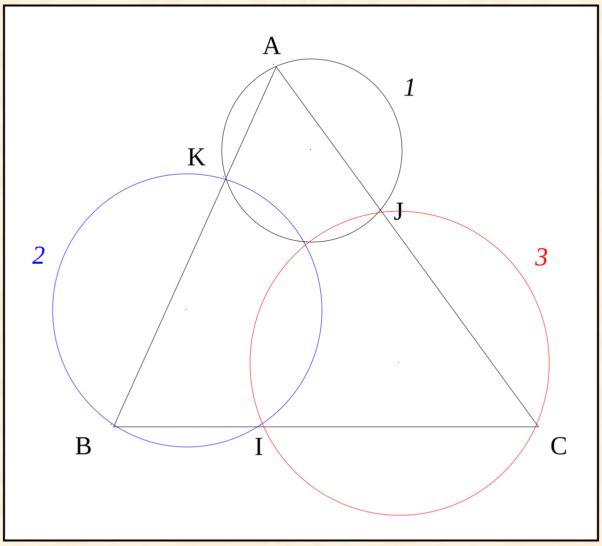
[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/10/2012.

Sommaire

A. L'ÉQUIVALENCE D'AUGUSTE MIQUEL

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	un point
	J, K	deux points resp. de (AC), (AB)
et	*1, 2, 3*	trois cercles circonscrits resp. aux triangles AJK, BKI, CIJ.

Donné : I est sur (BC) *si, et seulement si,* *1*, *2* et *3* sont concourants.

Commentaire : une preuve synthétique de cette équivalence peut être vue sur le site de l'auteur [1].

CONDITION NÉCESSAIRE

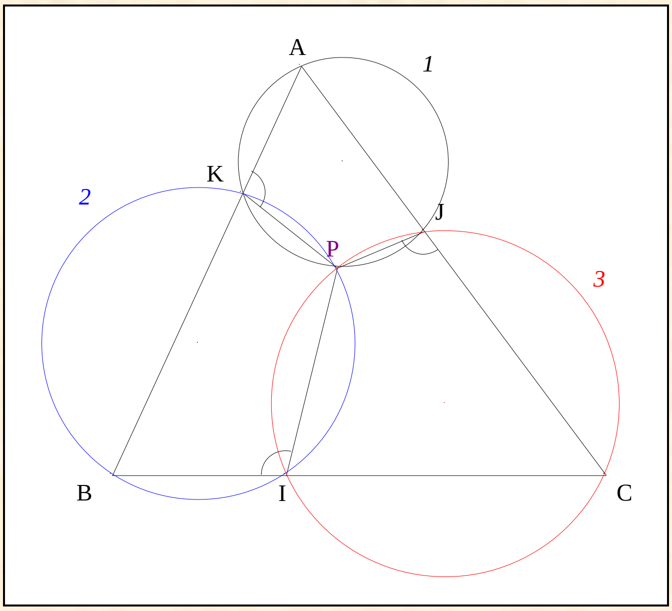
(1) le point de concours, noté P, est "le point de Miquel de ABC relativement à *1*, *2*, *3*"

(2) IJK est "le triangle de Miquel de ABC"

(3) *1*, *2*, *3* sont resp. "les A, B, C-cercles de Miquel de ABC"

(4) Trois isoclines

[1] Ayme J.-L., Auguste Mique, élève de l'institut Barbet à Paris en 1836, G.G.G. vol. **13** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



<PKA = <PIB = <PJC   à 2.Π près.

(PI), (PJ) et (PK) partant toute de P et étant également inclinées sur les droites latérales de ABC, et dans le même sens, sont trois isoclines [1] de ABC

(5) <PKA à 2.Π près est "le P-angle de Miquel de ABC"

(6) Sous ce point de vue, P est "le pivot de ABC relativement à *1*, *2*, *3* ou à IJK".

Énoncé traditionnel :

si, les sommets I, J, K d'un triangle sont situés respectivement sur les droites latérales (BC), (CA), (AB) d'un triangle ABC
alors, les cercles circonscrits aux triangles ARJ, BPK et CQI, sont concourants.

> *Given a triangle and a point marked at random on each side. If three circles be drawn, one through each vertex and the two adjacent marked points, these three circles meet in a common point.*

Note historique : ce simple résultat correspond à la "Reciproque **2**" de l'article d'Auguste Miquel [2]. Pour Miquel, il était juste un lemme pour aborder son "merveilleux pentagone". Le nom de "pivot" a été donné par l'anglais Henri Georges Forder [3] et ce résultat d'Auguste Miquel est connu aujourd'hui sous le nom du "théorème du pivot". Rappelons que très peu de géomètres contemporains de Miquel avaient réalisé que ce résultat allait devenir la source d'un grand nombre de théorèmes.

CONDITION SUFFISANTE

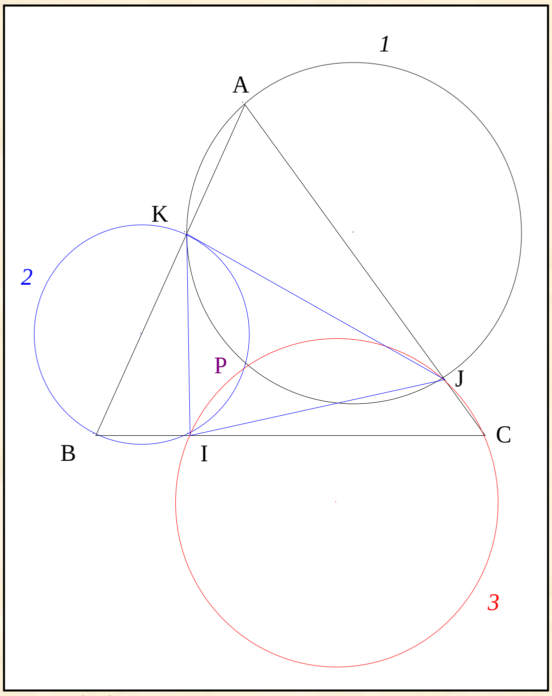
(1) La condition suffisante est "Le théorème des trois cercles concourants" et correspond au "Théorème **I**" de l'article d'Auguste Miquel [1].

---

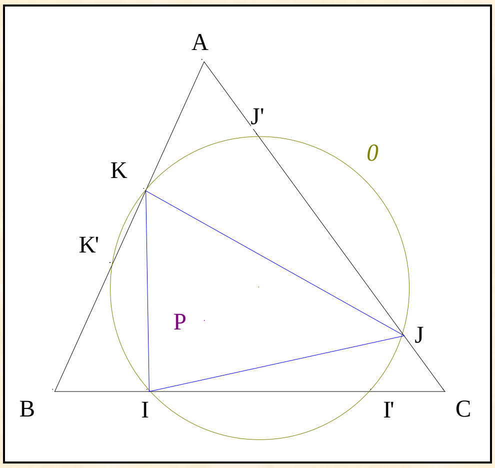
[1] Terminologie de F. G.-M.
[2] Miquel Aug., Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. **1**, **3** (Oct. 1838) 485-487.
[3] Forder H. G., *Geometry*, Hutchinson, Londres (1960) 17 ; *Higher Course Geometry*, Cambridge Press (1949)

B. LA VISION DE DAVID F. BARROW

1. En quatre figures

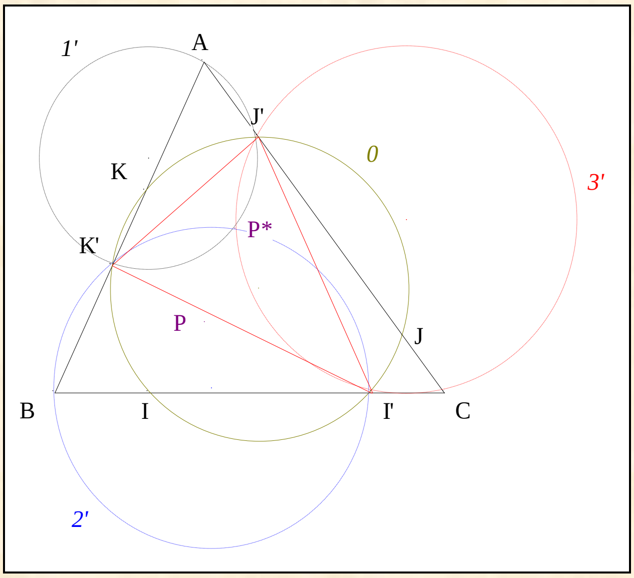


Théorème du pivot relativement au triangle IJK

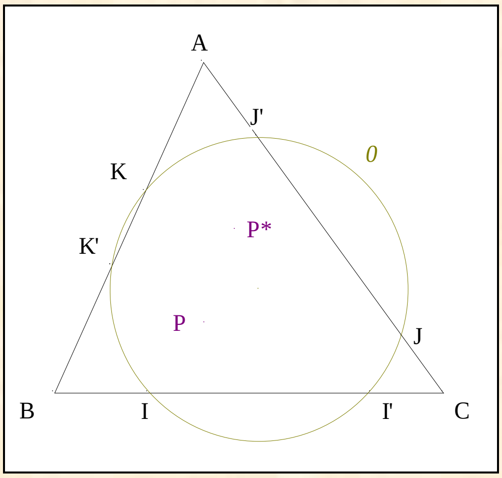


Le cercle circonscrit de IJK

[1] Miquel Aug., Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. **1**, **3** (Oct. 1838) 485-487.



Théorème du pivot relativement au triangle I'J'K'



Les pivots P et P*

Le résultat de Barrow de 1913 i.e. "le second pivot est l'isogonal du premier relativement à ABC" apparaît comme une généralisation du "pedal circle theorem" de Jean Joseph Auguste Mathieu découvert en 1865 (inverse pour isogonal).

§ III. — *Mode de conjugaison de deux points par inversion trilinéaire.*

Lorsque trois droites, issues des trois sommets d'un triangle, se coupent en un même point, il en est de même des trois droites inverses.

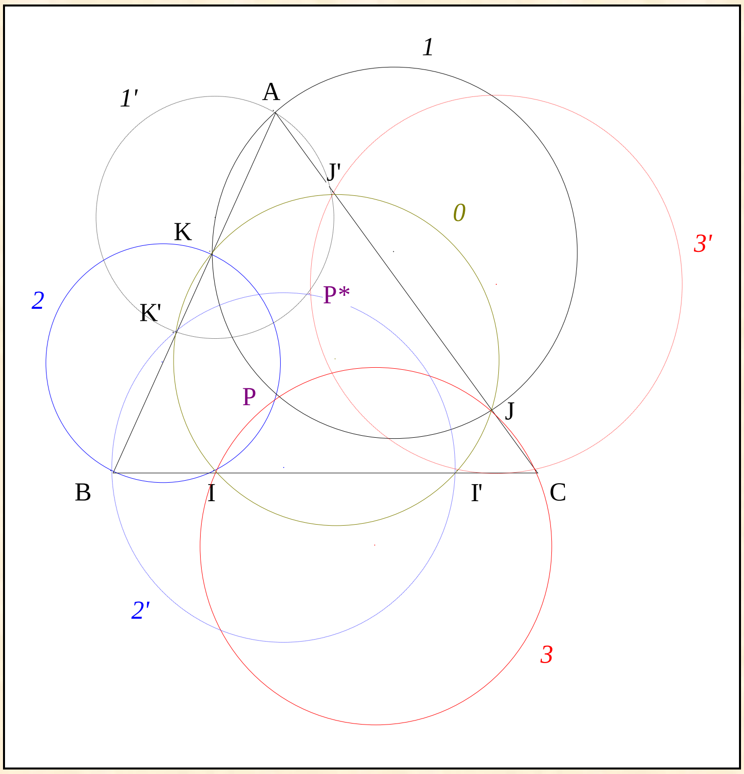
(398)

Les deux points ainsi conjugués seront nommés *points inverses.*

[1]

[1] Mathieu J. J. A., Étude de géométrie comparée, avec applications aux sections coniques *Nouvelles Annales* 2-ème série tome **4** (1865) 393-407 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

2. En une figure



Traits : ABC un triangle,
I, J, K trois points resp. de (BC), (CA), (AB),
1, *2*, *3* trois cercles circonscrits resp. aux triangles AJK, BKI, CIJ,
P le pivot de ABC relativement à *1*, *2*, *3*,
0 le cercle circonscrit au triangle IJK,
I', J', K' les seconds points d'intersection de *0* resp. avec (BC), (CA), (AB),
1', *2*', *3*' trois cercles circonscrits resp. aux triangles AJ'K', BK'I', CI'J'
et P* le pivot de ABC relativement à *1*', *2*', *3*'.

Donné : P* est l'isogonal de P relativement à ABC. [1]

Commentaire : la preuve de David F. Barrow est présentée en **F.** Archive.

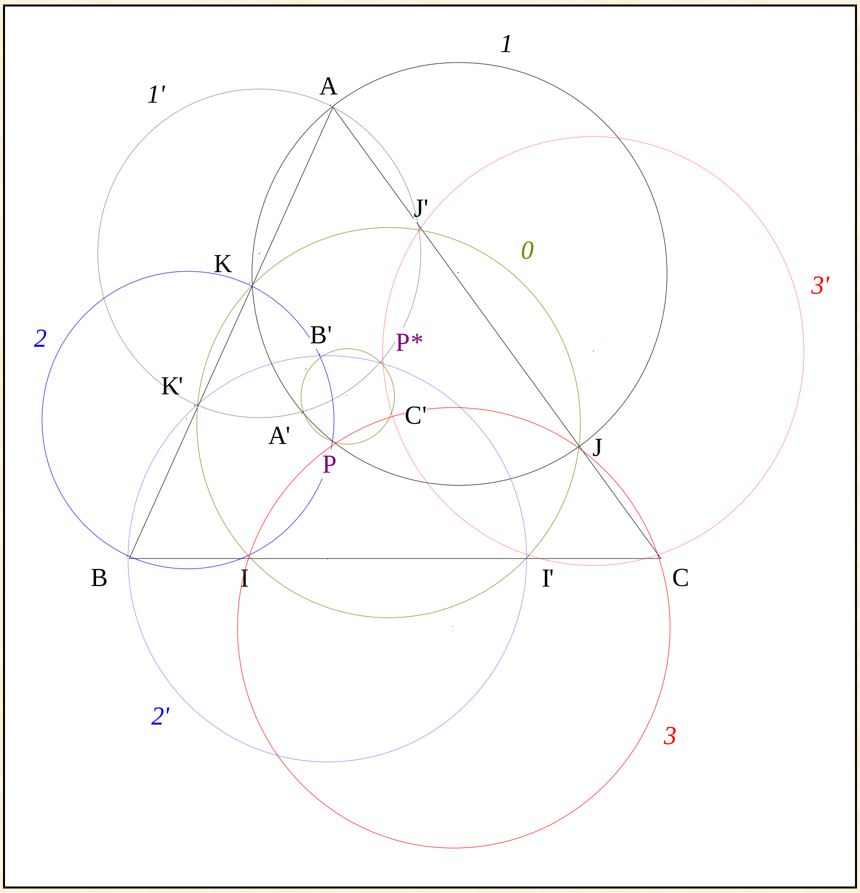
[1] Barrow D. F., A theorem about isogonal conjugates, *American Mathematical Monthly*, vol. **20**, **8** (1913) 251-252

C. LE CERCLE D'ECKART SCHMIDT

1. Le résultat

VISION

Figure :

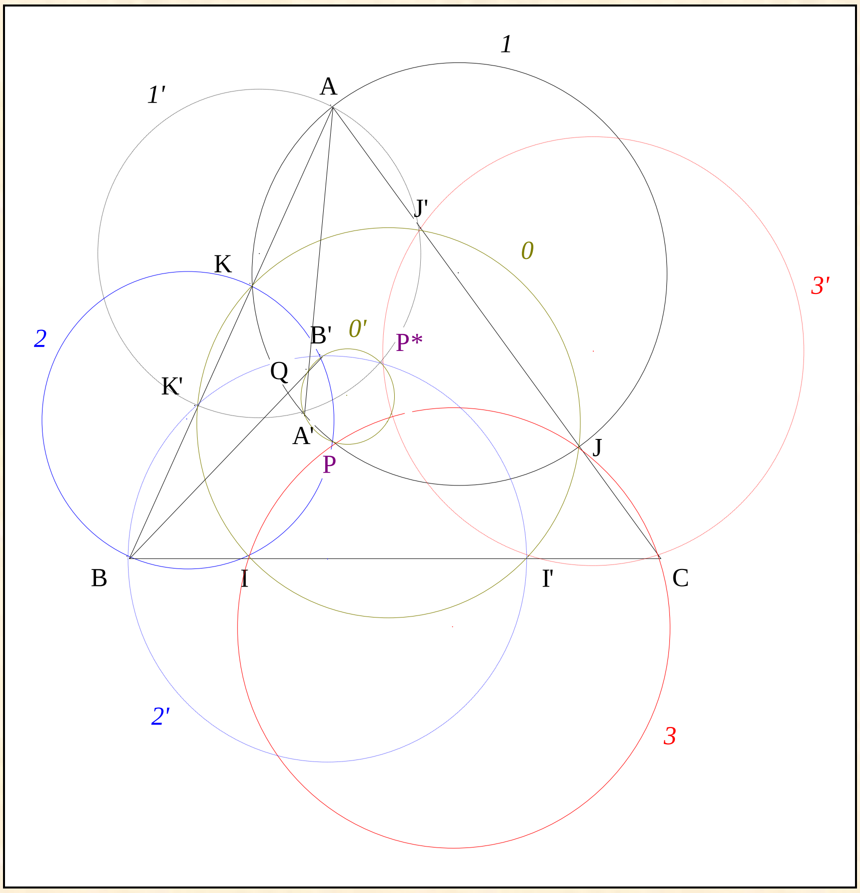


Traits : aux hypothèses et les notations précédentes, nous ajoutons
A', B', C' les seconds points d'intersection resp. de *1* et *1*', *2* et *2*', *3* et *3*'.

Donné : A', B', C', P et P* sont cocycliques .[1]

VISUALISATION

[1] Schmidt E., Circumcenters of Residual Triangles, *Forum Geométricorum* Vol. **3** (2003) 207-214 ; http://forumgeom.fau.edu/



- Notons Q le point d'intersection de (AA') et (BB').

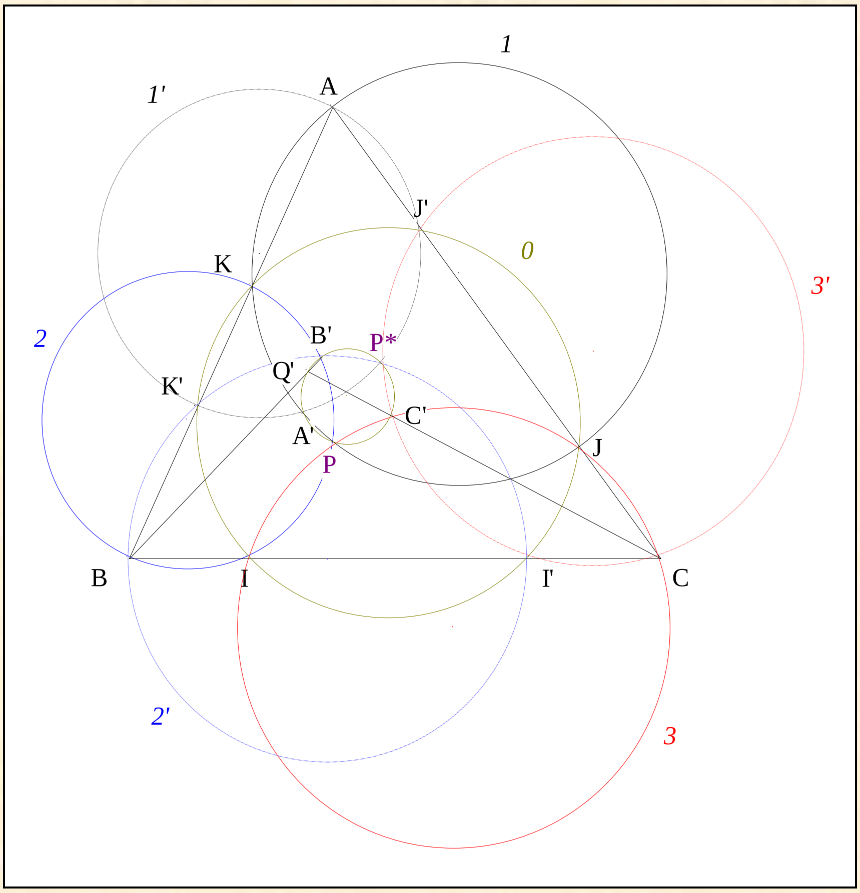
- D'après "Le M-cercle de Mannheim" [1] (Cf. Annexe **1**),
  appliqué à

  (1) *1* , *2* et Q, A', B', P et Q sont cocycliques
  (2) *1'*, *2'* et Q, A', B', P* et Q sont cocycliques ;

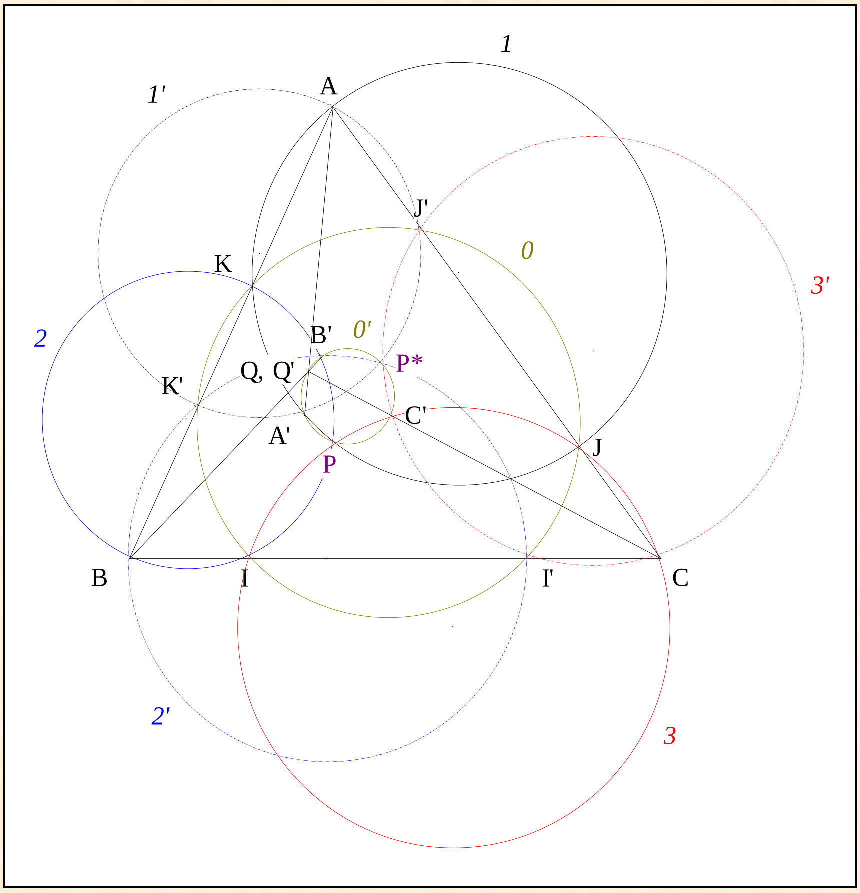
  en conséquence, A', B', P, P* et Q sont cocycliques.

- Notons *0'* ce cercle.

[1] Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim…, G.G.G. vol. **2** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons Q' le point d'intersection de (BB') et (CC').
- Mutatis mutandis, nous montrerions que B', C', P, P* et Q' sont cocycliques.



- En conséquences, **(1)** A', B', C', P, P*, Q et Q' sont sur *0'*
  (2) Q' et Q sont confondus.

- **Conclusion partielle :** (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en Q.

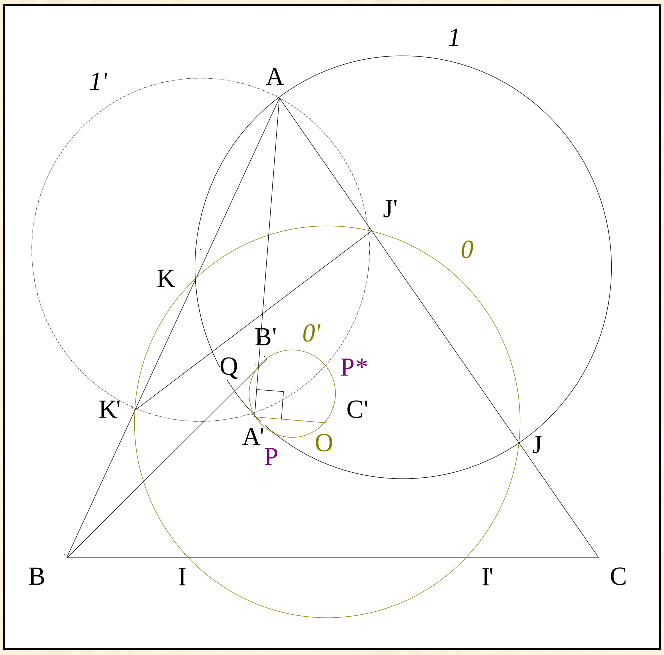
- **Conclusion :** A', B', C', P, P* et Q sont cocycliques.

Note historique : Eckart Schmidt a prouvé analytiquement ce résultat.

Scolies : **(1)** les triangles A'B'C' et ABC sont perspectifs de centre Q

(2) *0'* est "Le cercle d'Eckart Schmid de P relativement à ABC"

(3) Position du centre de *0*



- Notons O le centre de *0*.

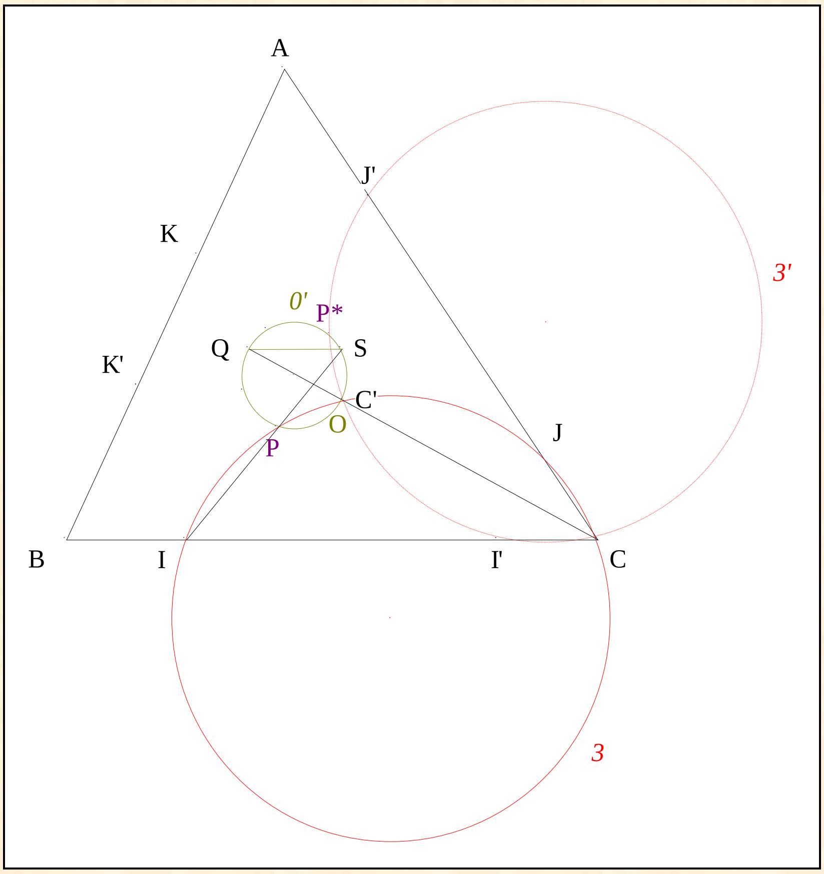
- D'après "26th I.M.O. (1985) Day **2** Problem **5**" (Cf. Appendice **1**) appliqué au triangle AJ'K' avec *0*, *1* et *1*', (OA') ⊥ (A'AQ).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (OC') ⊥ (B'BQ) (OC') ⊥ (C'CQ).

- **Conclusion :** O est sur *0'*.

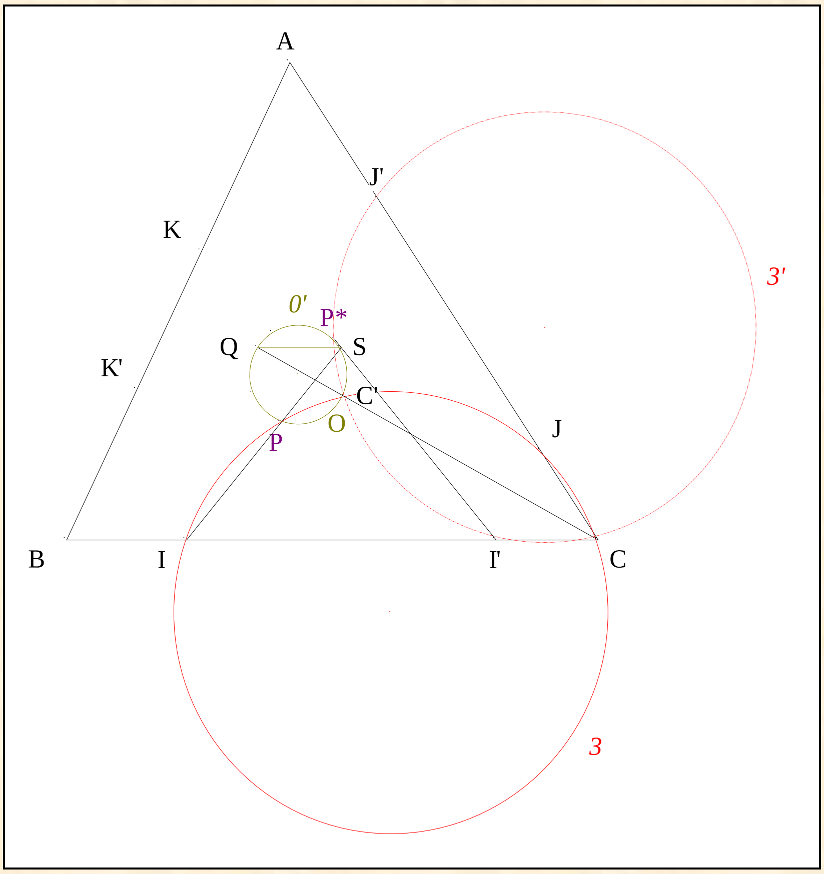
(4) (OQ) est une droite diamétrale de *0'*

(5) Les P, P*-angles de Miquel de ABC

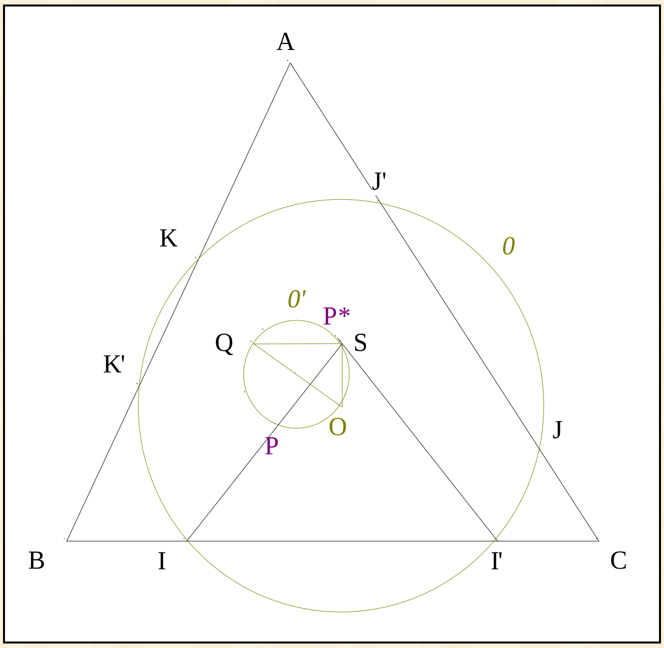


- Notons S le second point d'intersection de (PI) avec *0'*.

- Les cercles *3* et *0'*, les points de base I et C', les moniennes (IPS) et (CC'Q), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (IC) // (SQ).



- D'après **A.** L'équivalence d'Auguste Miquel appliqué au triangle SII' avec P sur (SI), C sur (II'), P*, les cercles *0'*, *3* et *3*' étant concourant en C', I', S et P* sont alignés.



- Nous avons : (II') // (SQ) et (SQ) ⊥ (SO) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (II') ⊥ (SO) ;
  en conséquence, (SO) est la S-hauteur et médiane de SII'.

- **Conclusion :** le triangle SII' est S-isocèle ou encore <PIB et <P*I'B sont supplémentaires.

(5) (P*I'), (P*J') et (P*K') partant toutes de P* et étant également inclinées sur les droites latérales de ABC, et dans le même sens, sont trois isoclines [1] de ABC.

(6) Relativement aux trois isoclines (PI), (PJ) et (PK) de ABC,
(P*I'), (P*J') et (P*K') sont trois anticlines de ABC.

2. Une courte biographie d'Eckart Schmidt

Professeur de Lycée en Allemagne, Eckart Schmidt a enseigné les Mathématiques et la Physique. Depuis dix ans, il est à la retraite et consacre une grande partie de son temps à la Géométrie. Il publie ses recherches et ses résultats en allemand dans le site [2] "Geometrie-Themen" qu'il a ouvert depuis 2003.
Il vit actuellement dans le nord de l'Allemagne à proximité de la mer Baltique et du port de Kiel (Schleswig-Holstein).

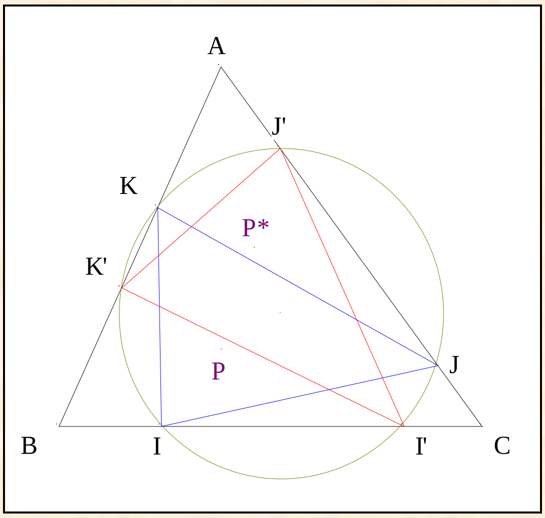
---
[1] Terminologie de F. G.-M.
[2] http://eckartschmidt.de/

D. L'ÉQUIVALENCE DE DAVID F. BARROW

1. L'équivalence

VISION DOUBLE

Figure :



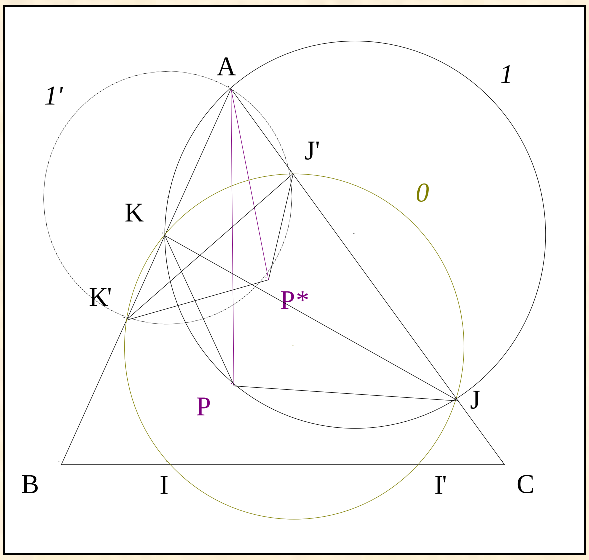
Traits : ABC un triangle,
IJK, I'J'K' deux triangles inscrits dans ABC,
P le point de Miquel associé à IJK
et P* le point de Miquel associé à I'J'K'.

Donné : I, J, K, I', J' et K' sont cocycliques
si, et seulement si,
P et P* sont deux points isogonaux de ABC.

Commentaire : nous garderons par la suite les hypothèses et les notations présentées en **B. 2.** qui conduisent à cette figure.

VISUALISATION NÉCESSAIRE [1]

[1] Barrow D. F., A theorem about isogonal conjugates, *American Mathematical Monthly*, vol. **20**, **8** (1913) 251-252



- **Commentaire :** montrons que (AP) et (AP*) sont deux A-isogonales de ABC.

- Une chasse angulaire :

  * d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <P*AJ' = <P*K'J' ;
  * d'après "La relation de Chasles", <P*K'J' = <P*K'A + <AK'J' ;
  * par une autre écriture, <AK'J' = <KK'J' ;
  * d'après **C.** scolie **4**, <P*K'A = <AJP :
  * par substitution, <P*K'J' = <AJP + <KK'J' ;
  * d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <KK'J' = <KJJ' ;
  * par une autre écriture, <KJJ' = <KJA ;
  * par substitution et commutation, <P*K'J' = <KJA + <AJP ;
  * d'après "La relation de Chasles", <P*K'J' = <KJP :
  * d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <P*K'J' = <KAP.

- **Conclusion partielle :** (AP) et (AP*) sont deux A-isogonales de ABC.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BP) et (BP*) sont deux B-isogonales de ABC
  (CP) et (CP*) sont deux C-isogonales de ABC.

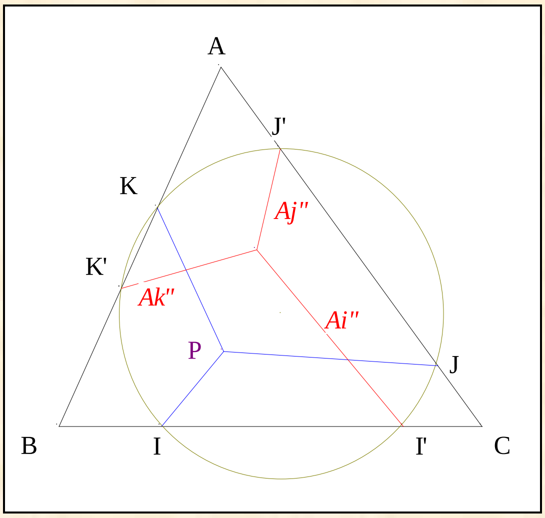
- **Conclusion :** par définition, P et P* sont deux points isogonaux de ABC.

Énoncé traditionnel :

> *Given a triangle $A_1A_2A_3$ and a circle cutting each side in two points, P_1, P_1'; P_2, P_2'; P_3, P_3', where P_i and P_i' are on the side opposite A_i. If a point P be located as the common intersection of the three circles through the three sets of points $P_iA_jP_k$; and a point P' as the common intersection of three circles through $P_i'A_jP_k'$; then P and P' are isogonal conjugates.*

Note historique : dans son article, David F. Barrow affirme qu'il doit exister une preuve élégante de son Résultat et avoue ne pas l'avoir pas trouvée.

VISUALISATION SUFFISANTE



- Notons *0* le cercle circonscrit à IJK,
  I", J", K" les seconds points d'intersection de *0* resp. avec (BC), (CA), (AB)
  et *Ai*", *Aj*", *Ak*" les anticlines de (PI), (PJ), (PK) passant resp. par I", J", K" relativement à ABC.

- Raisonnons par l'absurde en affirmant que I' et I", J' et J", K' et K" sont resp. distincts.

- D'après **C.** scolie **5** et **6**, *Ax*", *Ay*" et *Az*" sont concourantes.

- Notons P" ce point de concours.

- D'après **C.**, P" est l'isogonal de P ;
  en conséquences, **(1)** P" et P* sont confondus
  (2) I' et I", J' et J", K' et K" sont confondus, ce qui est contradictoire.

- **Conclusion :** I, J, K, I', J' et K' sont cocycliques.

Énoncé traditionnel : pout tout un point non situé sur le cercle circonscrit d'un triangle,

si, on mène trois isoclines à partir de ce point
et trois anticlines à partir de l'isogonal de ce point

alors, les six points d'intersection sur les côtés du triangle sont cocycliques.

2. Une courte biographie de David F. Barrow

David Francis Barrow est né à Athens (Louisiane, États-Unis) en 1888.
Il est le fils de David Crenshaw Barrow Jr. connu aussi sous le nom de "Uncle Dave" qui, à cette époque, était professeur de mathématiques à l'Université de Géorgie (États-Unis). Après avoir été élève du lycée d'Athens, il est étudiant en 1906 à l'université et obtient en 1910 son diplôme de fin d'étude. Il poursuit son cursus à l'Université d'Harvard (Connecticut, États-Unis) pour obtenir une maîtrise en 1911 et un doctorat en 1913. Ses études postdoctorale, l'amène à Turin (Italie) et en d'autres lieux.
A son retour d'Europe, il épouse Mary Frances Arnold de Philomath (Géorgie, États-Unis) et obtient un poste à l'université du Texas de 1914 à 1916. Au cours de l'année 1917-18, il est instructeur au Sheffield Scientific School.
En 1918, il est appelé dans les services armés où il travaille au bureau de l'aviation et est libéré à la fin des hostilités de la première guerre mondiale.
En 1920, il commence à enseigner à l'Université de Géorgie comme Associate Professor de mathématiques, puis est nommé professeur en 1923, puis chef du département durant la brève période de 1944 à 1945. Il prend sa retraite en 1956.

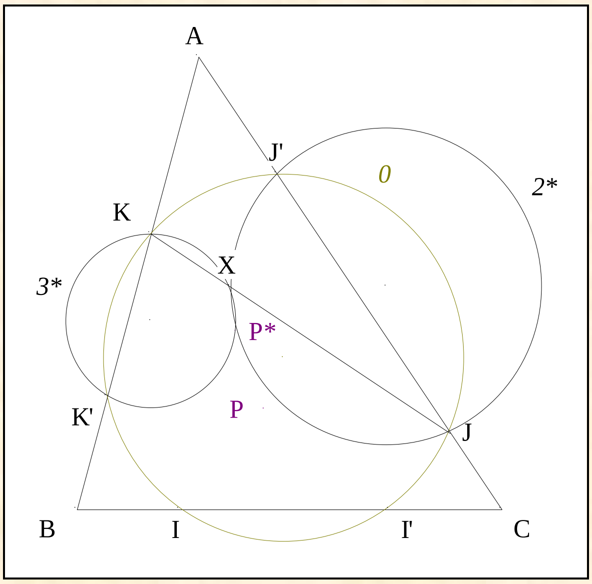
He was well liked as a teacher,
inheriting his father's enjoyment of helping students solve problems.
He wrote a paper "Can a robot calculate the table of logarithms? ",
previewing a subject of major interest following the advent of the electronic computer.

Il décède en 1970.

3. Un exercice

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et les notations précédentes, nous ajoutons
2, 3** les cercles circonscrits resp. aux triangles P*JJ', P*KK'
et X le second point d'intersection de *2** et *3**.

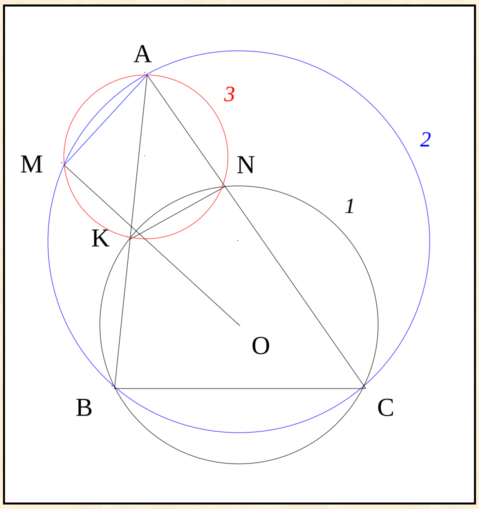
Donné : K, X et J sont alignés.

E. APPENDICE

1. 26th I.M.O. (1985) Day 2 Problem 5

VISION

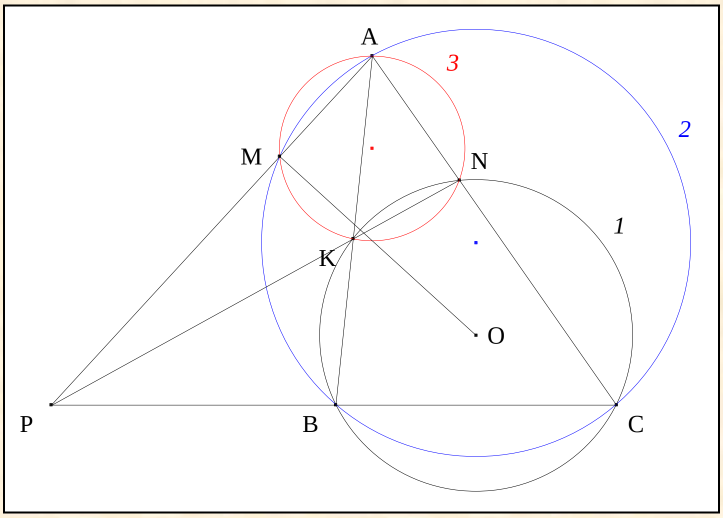
Figure :



Traits : ABC un triangle non isocèle,
1 un cercle passant par B et C,
O le centre de *1*,
K, N les seconds points d'intersection de *1* resp. avec [AB], [AC],
2, 3 les cercles circonscrits resp. aux triangles ABC, AKN
et M le second point d'intersection de *2* et *3*.

Donné : (OM) est perpendiculaire à (AM).[1]

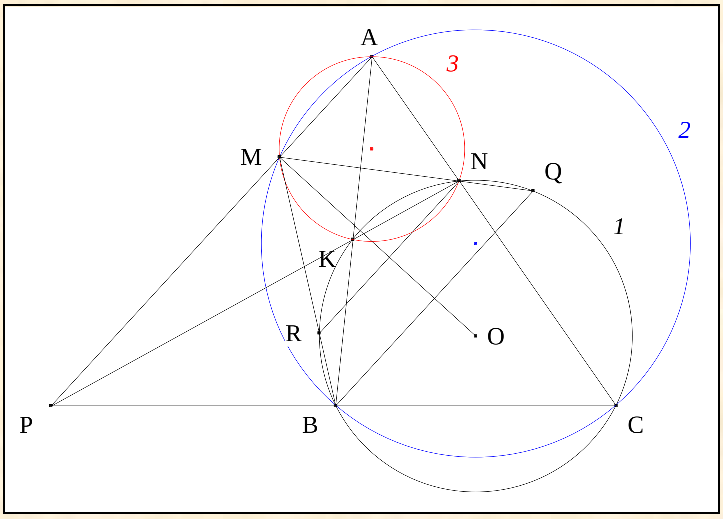
VISUALISATION



[1] Circle center O passes through the verices A and C, *Mathlinks* du 11/11/2005 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=60787&start=0.

- Notons P le point d'intersection de (KN) et (BC).

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [1], (AM) passe par P.



- Notons Q, R les seconds points d'intersection resp. de (MN), (MB) avec *1*.

- Les cercles *1* et *3*, les points de base K et N, les moniennes (BKA) et (QNM), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BQ) // (AM).

- Les cercles *2* et *1*, les points de base B et C, les moniennes (ACN) et (MBR), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AM) // (NR) ;
  par transitivité de la relation //, (BQ) // (NR).

- Le trapèze BQNR étant inscriptible dans le cercle *1*, est isocèle ;
  en conséquence, le triangle MBQ et M-isocèle

- D'après le théorème de la médiatrice, (OM) ⊥ (BQ) ;
  nous avons : (BQ) // (AM) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (OM) ⊥ (AM).

- **Conclusion :** (OM) est perpendiculaire à (AM).

Scolies : **(1)** M est le point de Miquel-Wallace de ABC et de la ménélienne (PNK)

(2) Les diagonales (BN) et (QR) se coupent sur (AO).[2]

---

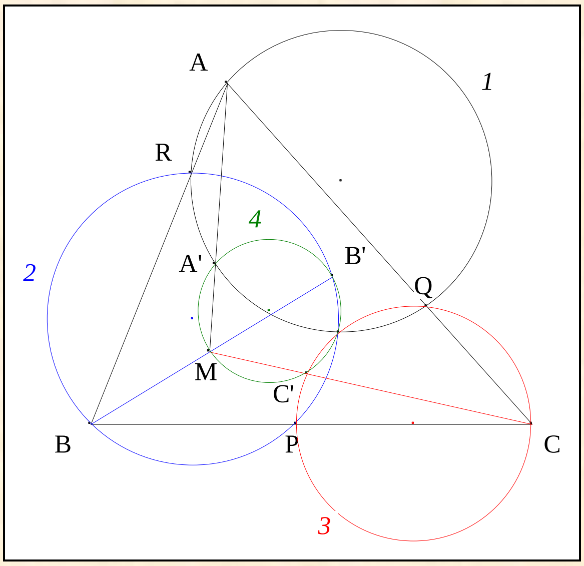
[1] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.
[2] Trapèze complet.

F. ANNEXE

1. Le M-cercle de Mannheim

VISION

Figure [1] :



Traits :	ABC	un triangle,
	P, Q, R	trois points de [BC], [CA], [AB],
	1, *2*, *3*	les cercles circonscrits aux triangles ARQ, BPR, CQP,
	A', B', C'	trois points resp. de *1*, *2*, *3*,
	4	le cercle passant par A', B', C'
et	M	le point d'intersection de (AA') et (BB')

Donné : (CC') passe par M *si, et seulement si,* *4* passe par M.

---

[1] Sharygin I. a choisi cette figure pour la jaquette de son livre *Problemas de geometria*, Editions Mir. (1986) Moscou.

G. ARCHIVE [1]

A THEOREM ABOUT ISOGONAL CONJUGATES.

By DAVID F. BARROW, Harvard University.

As an introduction let us recall two well-known theorems of elementary plane geometry:

THEOREM I. *Given a triangle $A_1A_2A_3$ (Fig. 1) and any point P not a vertex, join P to the three vertices and reflect each of the three lines thus drawn in the bisector of the angle at the corresponding vertex. The three reflected lines will meet in a point P', called the isogonal conjugate of P.*

THEOREM II. *Given a triangle and a point marked at random on each side. If three circles be drawn, one through each vertex and the two adjacent marked points, these three circles meet in a common point.*

[2]

252 A THEOREM ABOUT ISOGONAL CONJUGATES

We propose to prove a new theorem:

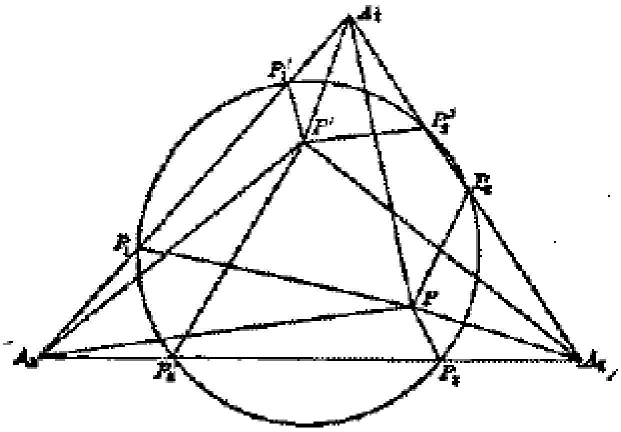


FIG. 1.

THEOREM III. *Given a triangle $A_1A_2A_3$ (Fig. 2) and a circle cutting each side in two points, P_1, P_1'; P_2, P_2'; P_3, P_3', where P_i and P_i' are on the side opposite A_i. If a point P be located as the common intersection of the three circles through the three sets of points $P_iA_jP_k$; and a point P' as the common intersection of three circles through $P_i'A_jP_k'$; then P and P' are isogonal conjugates.*

---

1 Comminiqué par le professeur Francisco Bellot Rosado

2 Barrow D. F., A theorem about isogonal conjugates, *American Mathematical Monthly*, vol. **20**, **8** (1913) 251-252

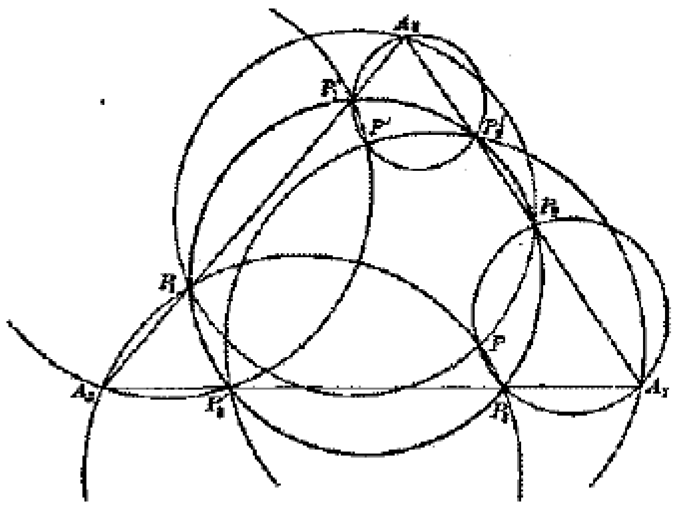


FIG. 2.

Lemma. Let P and P' be isogonal conjugates with regard to the triangle $A_1A_2A_3$ (Fig. 1).

Choose three points P_1, P_2, P_3, one on each side of the triangle, so that

$$\measuredangle PP_1A_3 = \measuredangle PP_2A_1 = \measuredangle PP_3A_1 = \theta$$

and choose three other points P_1', P_2', P_3', one on each side, and such that

$$\measuredangle P'P_1'A_3 = \measuredangle P'P_2'A_1 = \measuredangle P'P_3'A_2 = \theta$$

where θ is any angle. Then we can show that these six chosen points all lie on a circle.

From the similar triangles PA_1P_3 and $P'A_1P_2'$

$$\frac{A_1P_3}{A_1P} = \frac{A_1P_2'}{A_1P'}$$

and from similar triangles PA_1P_2 and $P'A_1P_3'$

$$\frac{A_1P_3'}{A_1P'} = \frac{A_1P_2}{A_1P}$$

Multiply these two equations together, canceling denominators.

$$A_1P_3 \times A_1P_3' = A_1P_2 \times A_1P_2'.$$

Hence P_2, P_2', P_3 and P_3' are four concyclic points. In like manner P_1, P_1', P_3, P_3', and also P_2, P_2', P_1, P_1' are concyclic. This gives us, apparently, three circles on each of which lie four of the six points. Now the sides of the triangle are the three radical axes of these circles taken two at a time. All three circles cannot be distinct because these three radical axes do not concur in a point. Hence at least two circles coincide, and so all six points are concyclic.

Observe also that by the construction of Fig. 1

$$\measuredangle PP_iA_j + \measuredangle PP_kA_j = 180°$$

and so P, P_i, A_j, P_k are concyclic. Therefore P is the point where the three circles $P_iA_jP_k$ meet. Similarly P' is the intersection of the three circles $P_i'A_jP_k'$.

We get the proof of Theorem III as follows:

Suppose we start with the triangle $A_1A_2A_3$; put down a circle cutting its sides in points P_1, P_1'; P_2, P_2'; P_3, P_3'; and locate P as the point common to the three circles $P_iA_jP_k$. Then the lemma shows that the isogonal conjugate of P lies on each of the three circles $P_i'A_jP_k'$; and since only one point does this, then the isogonal conjugate of P is that point.

If we interchange two of the points that lie an a side, say P_1 and P_1', we get a new pair of isogonal conjugates. Evidently four different pairs of isogonal conjugates can be obtained in this way, all determined by the same given circle cutting the sides. If each pair of isogonal conjugates be connected by a straight line and the perpendicular bisectors of these four lines be erected; then these four bisectors all meet in the center of the given circle. The only proof of this, which I have been able to devise, is rather tedious; but doubtless a simple and elegant proof exists.

If the given circle is tangent to one side of the triangle, but cuts the other two in distinct points, then it determines only two pairs of isogonal conjugates. If it be tangent to two sides it determines but one pair of isogonal conjugates. If it be an inscribed or escribed circle it determines one self-conjugate point, its center.