

# MIXTILINEAR (IN/EX) - CIRCLES

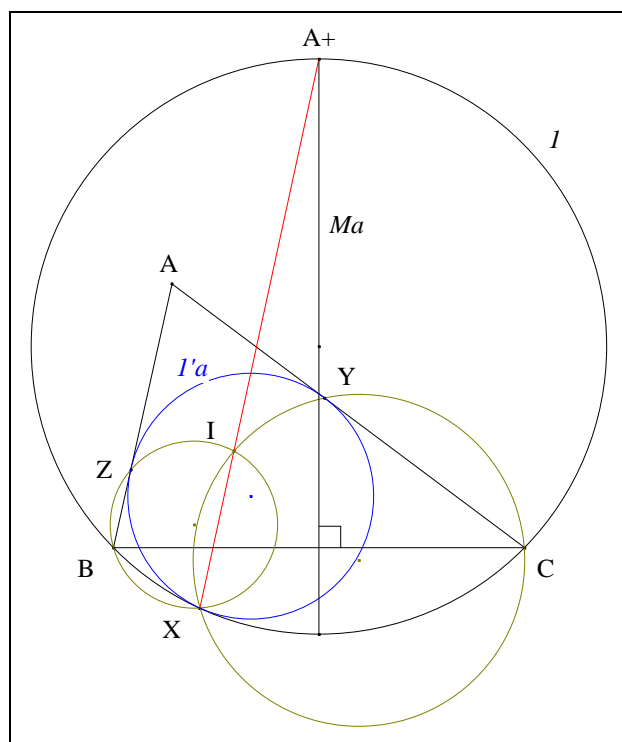
## RELATIVEMENT

À

## UN CERCLE ADJOINT D'UN TRIANGLE



Jean-Louis AYME <sup>1</sup>



### Résumé.

L'auteur présente des constructions géométriques concernant les mixtilinear (in/ex)-circles <sup>2</sup> relativement à cercle adjoint <sup>3</sup> d'un triangle. Commentaires et notes historiques accompagnent l'article. Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

### Abstract.

The author presents geometric constructions concerning the mixtilinear (in/ex)-circles relatively to an associate circle of a triangle. Comments and notes historical come with the article. The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

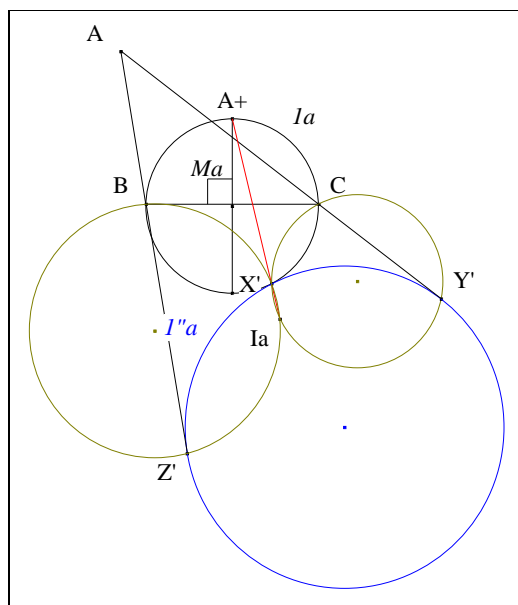
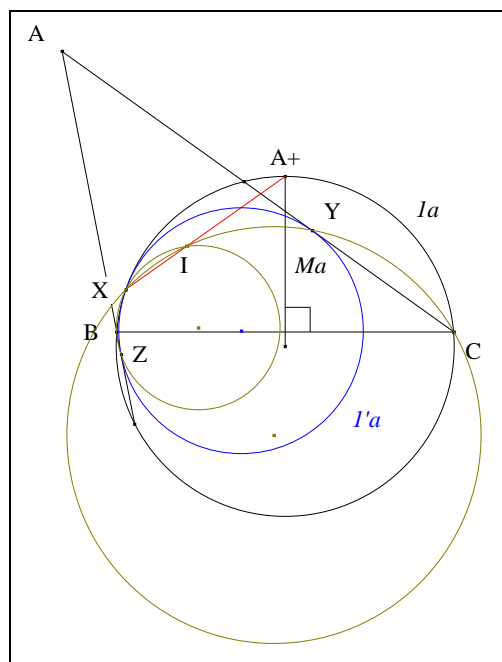
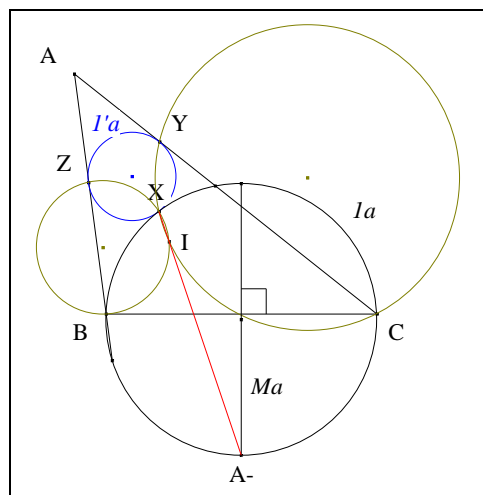
<sup>1</sup> Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 04/08/2013

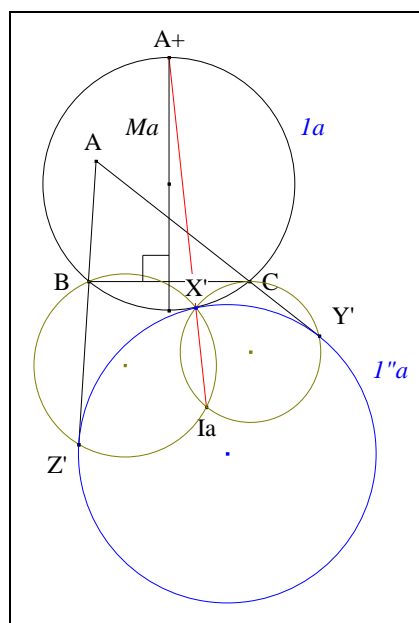
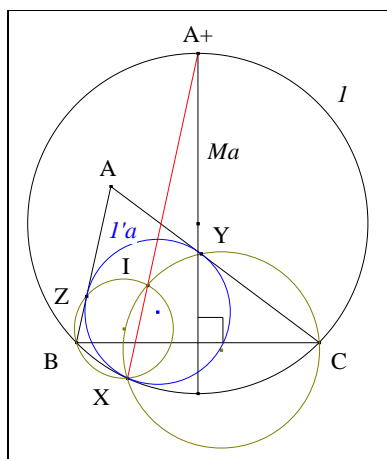
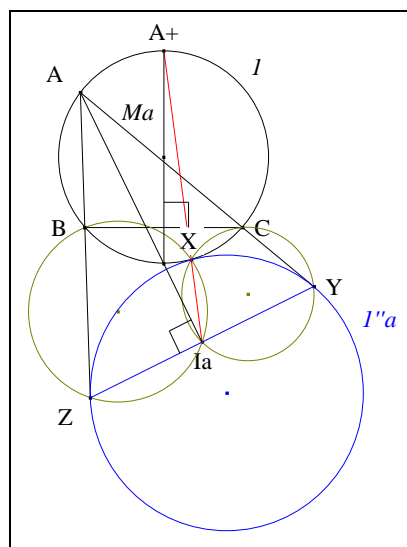
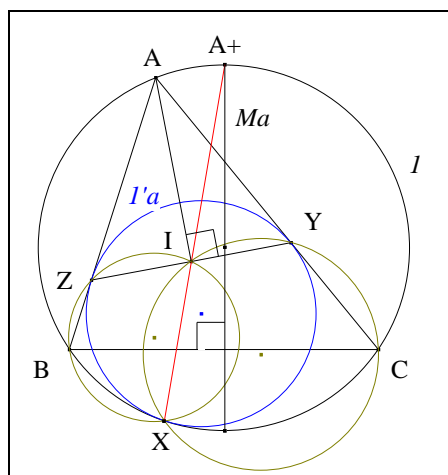
<sup>2</sup> Cercle tangent à deux "côtés" d'un triangle et à un cercle ayant pour corde le troisième côté

<sup>3</sup> Cercle passant par deux sommets d'un triangle

<b>Sommaire</b>	
Récapitulation	3
<b>A.</b> Le triangle est inscrit dans un cercle	5
1. Mixtilinear in-circle	
2. Mixtilinear in-circle bis	
3. Mixtilinear ex-circle	
<b>B.</b> Le triangle pointe à l'extérieur d'un cercle adjoint	7
1. Mixtilinear in-circle	
2. Mixtilinear ex-circle	
<b>C.</b> Le triangle pointe à l'intérieur d'un cercle adjoint	10
1. Mixtilinear in-circle	
2. Mixtilinear ex-circle	

RÉCAPITULATION



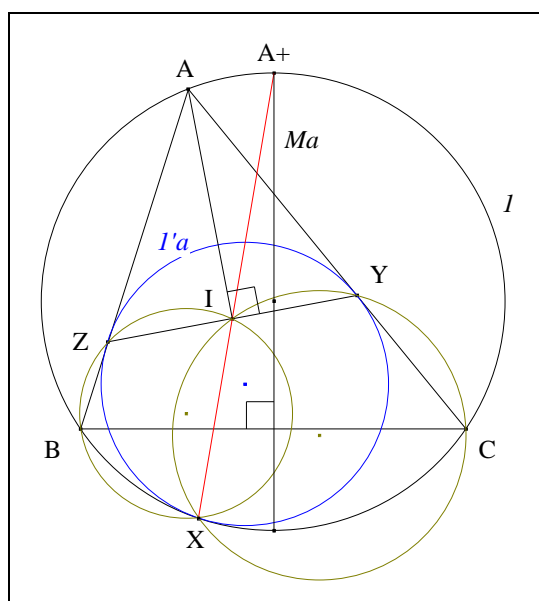


**A. LE TRIANGLE  
EST INSCRIT DANS  
UN CERCLE**

**1. Mixtilinear in-circle**

**VISION**

**Figure :**



**Traits :**

ABC	un triangle,
I	le centre de ABC,
$I$	le cercle circonscrit à ABC,
$Pa$	le demi-plan de frontière (BC) contenant A,
$Ma$	la médiatrice de [BC],
$A+$	le point de $Pa$ , intersection de $Ma$ et $I$ ,
$l'a$	le cercle tangent à (AB), (AC), intérieurement à $I$
et X, Y, Z	les points de contact de $l'a$ resp. avec $I$ , (AC), (AB).

**Donnés :**

- (1) B, I, X et Z sont cocycliques
- (2) C, I, X et Y sont cocycliques
- (3)  $A+$ , I et X sont alignés <sup>4</sup>
- (4) Y, I et Z sont alignés <sup>5</sup> et (AI) est perpendiculaire à (YZ) en I <sup>6</sup>.

**Commentaire :** cette situation géométrique qui permet de construire le mixtilinear in-circle  $l'a$ , a largement influencé celles qui vont suivre.

<sup>4</sup> Lauvernay E., *Journal de Mathématique Élémentaire*, n° 390 (1892)

Ayme J.-L., Anew mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 17-18 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>

<sup>5</sup> Longchamps (Gohierre de) G., Question 659, *Mathesis* IX (1889) 207

Ayme J.-L., Anew mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 10-12 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>

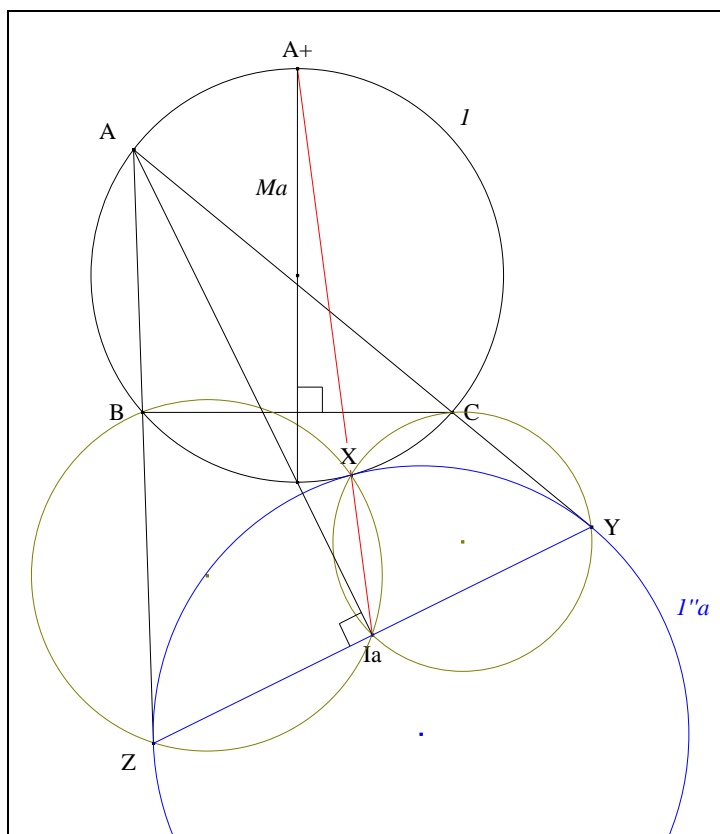
<sup>6</sup> Deprez E., *Mathesis* X (1890) 67-68.

Ayme J.-L., Anew mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. 4, p. 15-16 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>

## 2. Mixtilinear ex-circle

## VISION

Figure :



<b>Traits :</b>	ABC	un triangle,
	Ia	le A-excentre de ABC,
	I	le cercle circonscrit à ABC,
	Pa	le demi-plan de frontière (BC) contenant A,
	Ma	la médiatrice de [BC],
	A-	le point non situé dans Pa, intersection de Ma et I,
	I''a	tangent à (AB), (AC), extérieurement à I
et	X', Y', Z'	les points de contact de I''a resp. avec I, (AC), (AB).

<b>Donnés :</b>	(1)	B, Ia, X' et Z' sont cocycliques
	(2)	C, Ia, X' et Y' sont cocycliques
	(3)	A-, Ia et X' sont alignés
	(4)	Y', Ia et Z' sont alignés et (AIa) est perpendiculaire à (Y'Z') en Ia.

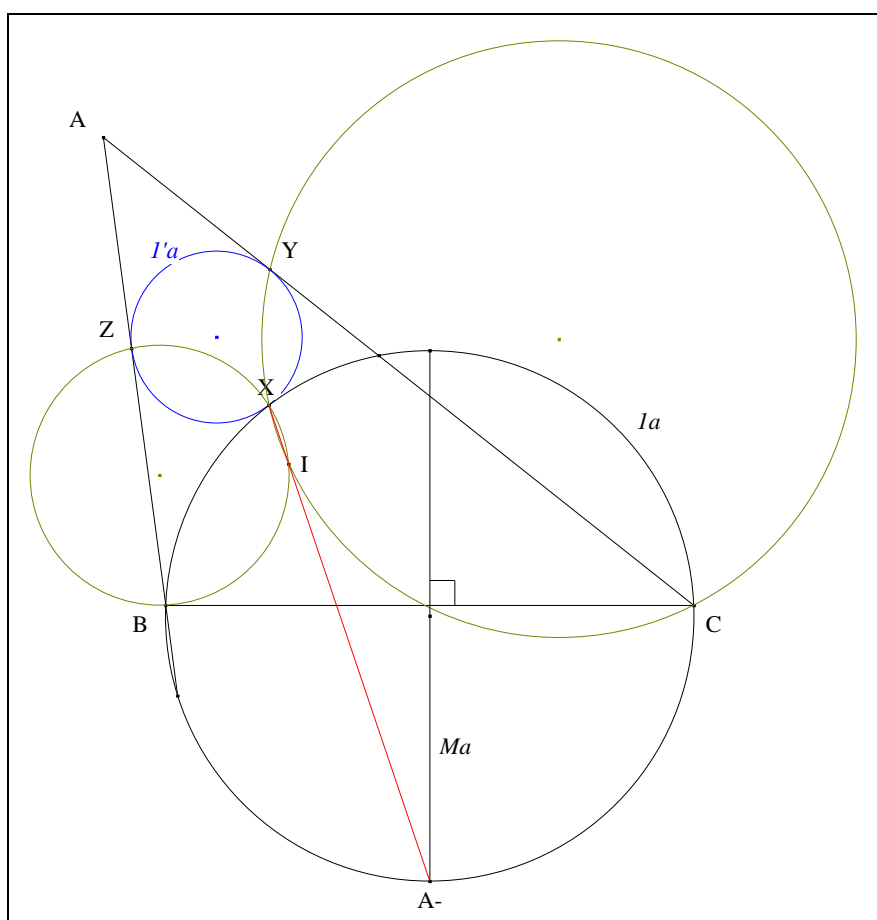
**Commentaire :** les preuves synthétiques de ces résultats se calquent sur celles de la situation précédente.

**B. LE TRIANGLE  
POINTE  
À L'EXTERIEUR  
D'UN CERCLE ADJOINT**

**1. Mixtilinear incircle**

**VISION**

**Figure :**



<b>Traits :</b>	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	$I_a$	un cercle passant par B, C tel que A en soit à l'extérieur,
	$P_a$	le demi-plan de frontière (BC) contenant A,
	$M_a$	la médiatrice de [BC],
	A-	le point non situé dans $P_a$ , intersection de $M_a$ et $I_a$ ,
	$I'a$	le cercle de $P_a$ tangent à (AB), (AC), $I_a$
et	X, Y, Z	les points de contact de $I'a$ resp. avec $I_a$ , (AC), (AB).

**Donnés :** (1) B, I, X et Z sont cocycliques <sup>7</sup>

<sup>7</sup> O.M. Inde (2001) problème 2  
Ayme J.-L., Un remarquable résultat de Vladimir Protasov, G.G.G. vol. 2, p. 2-4 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>

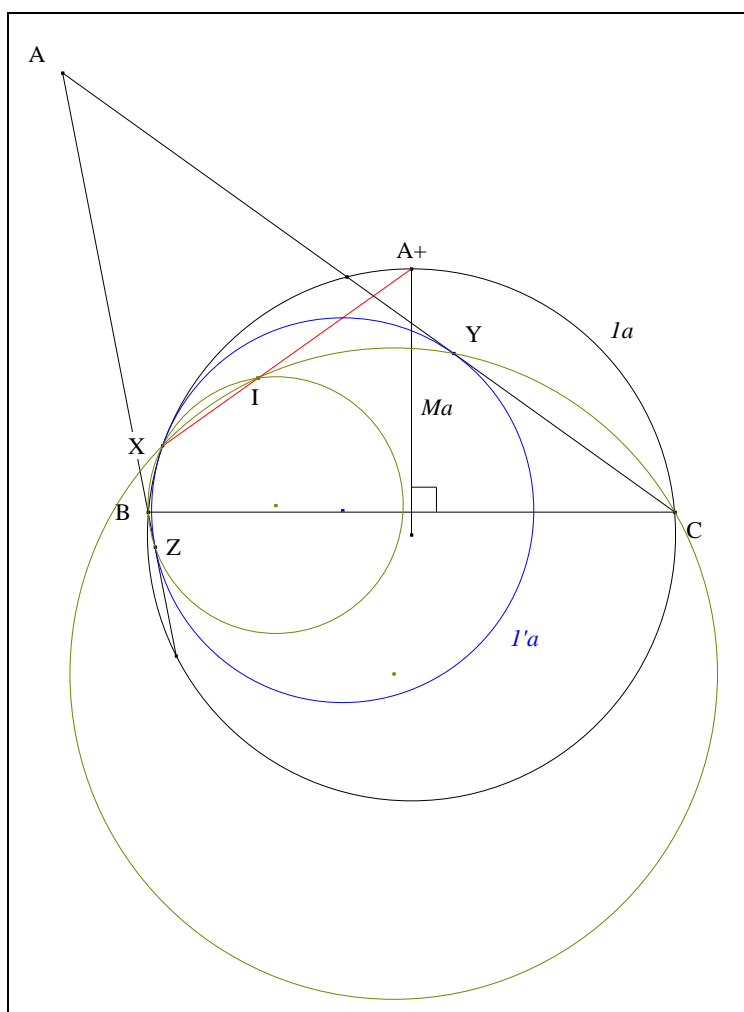
- (2) C, I, X et Y sont cocycliques  
 (3) A-, I et X sont alignés<sup>8</sup>.

**Commentaire :** les preuves synthétiques de ces résultats se calquent sur celles de la situation **A. 1.**

## 2. Mixtilinear in-circle bis

### VISION

**Figure :**



<b>Traits :</b>	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	Ia	un cercle passant par B, C tel que A en soit à l'extérieur,
	Pa	le demi-plan de frontière (BC) contenant A,
	Ma	la médiatrice de [BC],
	A+	le point situé dans Pa, intersection de Ma et Ia,
	I'a	le cercle de Pa tangent à (AB), (AC), Ia
et	X, Y, Z	les points de contact de I'a resp. avec Ia, (AC), (AB).

<sup>8</sup>

Protassov V., problème n° 162, APMEP (1995?) 510-512  
 Ayme J.-L., Un remarquable résultat de Vladimir Protasov, G.G.G. vol. 2, p. 6-7 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>



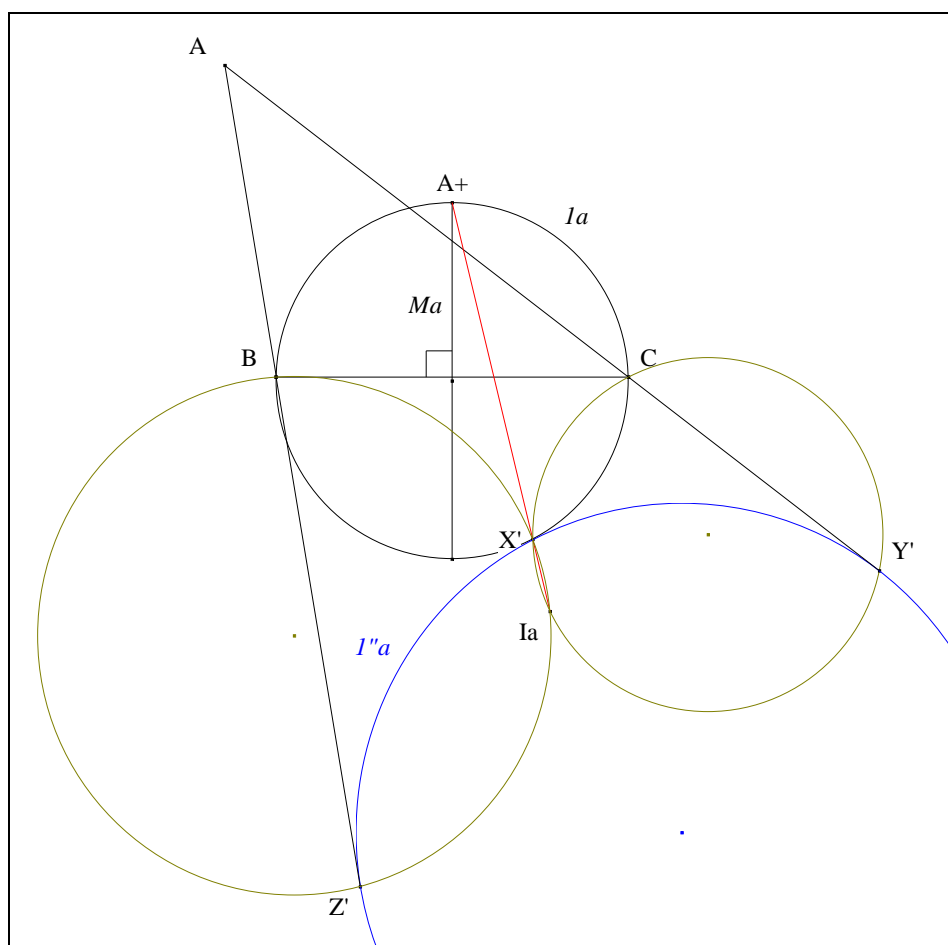
- Donnés :**
- (1) B, I, X et Z sont cocycliques <sup>9</sup>
  - (2) C, I, X et Y sont cocycliques
  - (3) A+, I et X sont alignés <sup>10</sup>.

**Commentaire :** les preuves synthétiques de ces résultats se calquent sur celles de la situation **A. 1.**

### 3. Mixtilinear ex-circle

#### VISION

**Figure :**



- Traits :**
- |               |   |
|---------------|---|
| ABC           | un triangle,  |
| $I_a$         | le A-excentre de ABC,   |
| $I_a$         | un cercle passant par B, C tel que A en soit à l'extérieur,     |
| $P_a$         | le demi-plan de frontière (BC) contenant A,                     |
| $M_a$         | la médiatrice de [BC],  |
| A+            | le point de $P_a$ , intersection de $M_a$ et $I_a$ ,            |
| $I''_a$       | le cercle, non situé dans $P_a$ , tangent à (AB), (AC), $I_a$ , |
| et X', Y', Z' | les points de contact de $I''_a$ resp. avec $I_a$ , (AC), (AB), |

<sup>9</sup> O.M. Inde (2001) problème 2

Ayme J.-L., Un remarquable résultat de Vladimir Protasov, G.G.G. vol. 2, p. 2-4 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>

<sup>10</sup> Protasov V., problème n° 162, APMEP (1995?) 510-512

Ayme J.-L., Un remarquable résultat de Vladimir Protasov, G.G.G. vol. 2, p. 6-7 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>

- Donnés :**
- (1) B,  $I_a$ ,  $X'$  et  $Z'$  sont cocycliques
  - (2) C,  $I_a$ ,  $X'$  et  $Y'$  sont cocycliques
  - (3)  $A^+$ ,  $I_a$  et  $X'$  sont alignés.

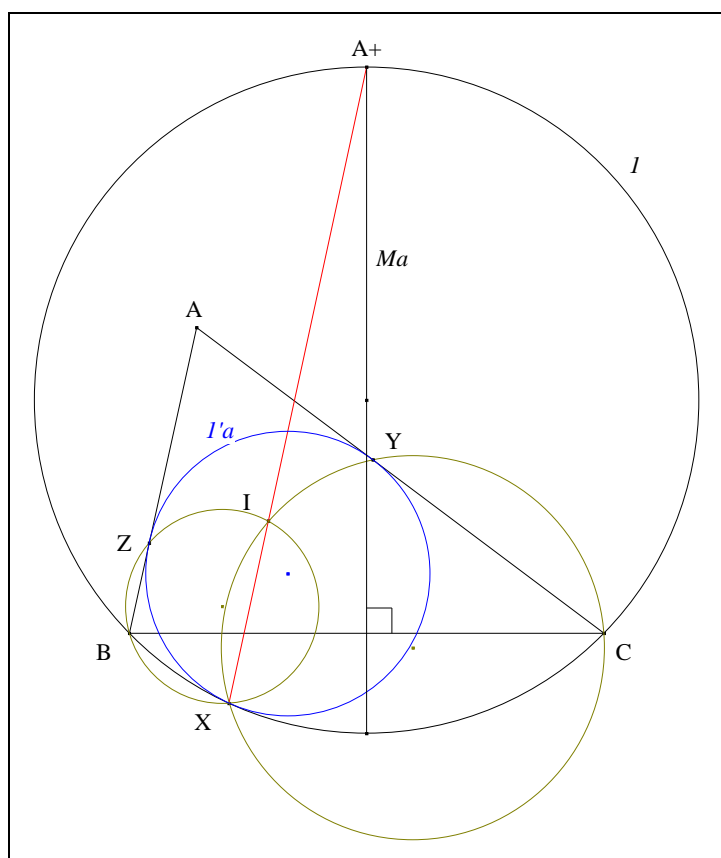
**Commentaire :** les preuves synthétiques de ces résultats se calquent sur celles de la situation **A. 2.**

**C. LE TRIANGLE  
POINTE  
À L'INTERIEUR  
D'UN CERCLE ADJOINT**

**1. Mixtilinear in-circle**

**VISION**

**Figure :**



- Traits :**
- |       |   |
|-------|---|
| ABC   | un triangle,  |
| I     | le centre de ABC,   |
| $I_a$ | un cercle passant par B, C tel que A en soit à l'intérieur, |
| $P_a$ | le demi-plan de frontière (BC) contenant A,                 |

	$Ma$	la médiatrice de $[BC]$ ,
	$A^+$	le point de $Pa$ , intersection de $Ma$ et $Ia$ ,
	$I'a$	le cercle de $Pa$ tangent à $(AB)$ , $(AC)$ , $Ia$
et	$X, Y, Z$	les points de contact de $I'a$ resp. avec $Ia$ , $(AC)$ , $(AB)$ .

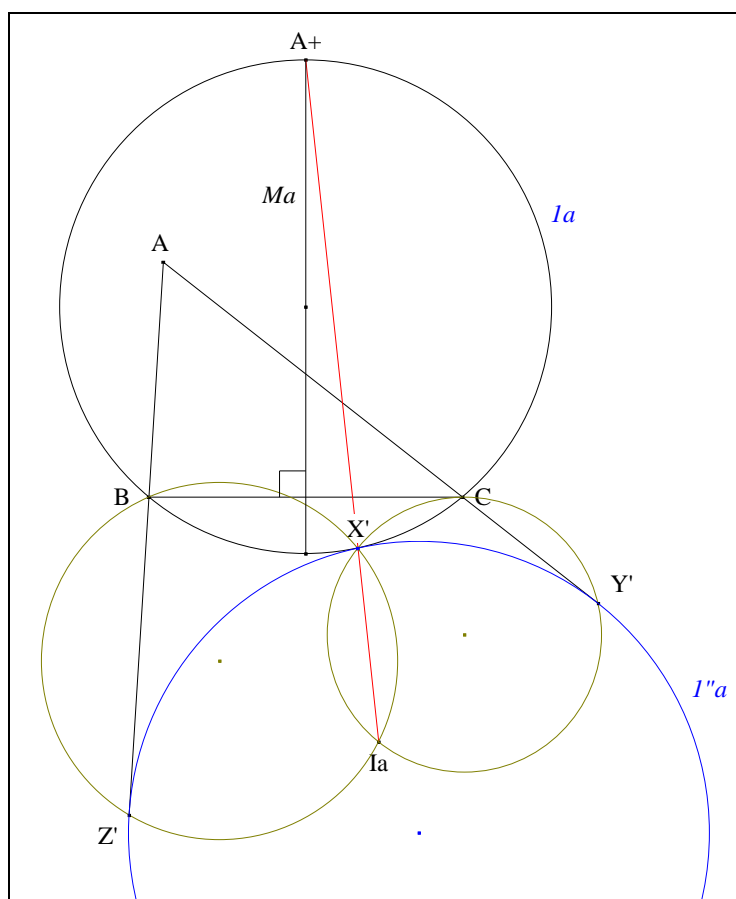
- Donnés :**
- (1)  $B, I, X$  et  $Z$  sont cocycliques
  - (2)  $C, I, X$  et  $Y$  sont cocycliques
  - (3)  $A^+, I$  et  $X$  sont alignés.

**Commentaire :** les preuves synthétiques de ces résultats se calquent sur celles de la situation **A. 1.**

## 2. Mixtilinear ex-cercle

### VISION

**Figure :**



<b>Traits :</b>	$ABC$	un triangle,
	$Ia$	le A-excentre de $ABC$ ,
	$Ia$	un cercle passant par $B, C$ tel que $A$ en soit à l'extérieur,
	$Pa$	le demi-plan de frontière $(BC)$ contenant $A$ ,
	$Ma$	la médiatrice de $[BC]$ ,
	$A^+$	le point de $Pa$ , intersection de $Ma$ et $Ia$ ,
	$I'a$	le cercle, non situé dans $Pa$ , tangent à $(AB)$ , $(AC)$ , $Ia$ ,
et	$X', Y', Z'$	les points de contact de $I'a$ resp. avec $Ia$ , $(AC)$ , $(AB)$ ,

- Donnés :**
- (1) B, Ia, X' et Z' sont cocycliques
  - (2) C, Ia, X' et Y' sont cocycliques
  - (3) A+, Ia et X' sont alignés.

**Commentaire :** les preuves synthétiques de ces résultats se calquent sur celles de la situation **A. 2.**