EQUAL INCIRCLES THEOREM

FIRST SYNTHETIC PROOF

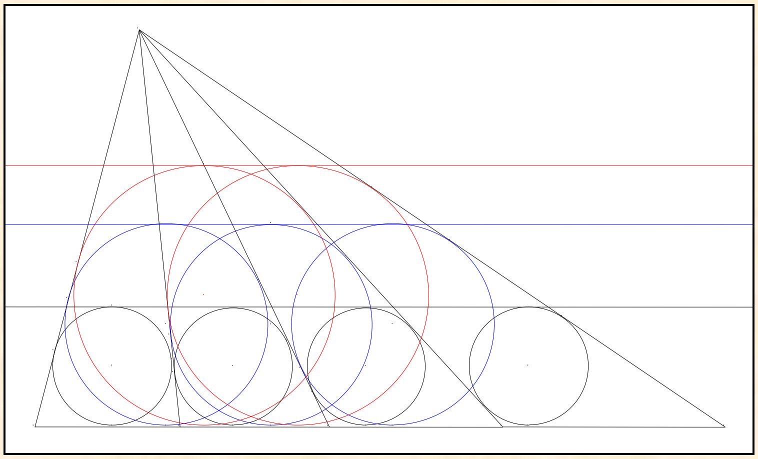
OR

MORE ON INCIRCLES

A NEW ADVENTURE

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente la première preuve synthétique du "théorème des cercles inscrits égaux" résultant d'une aventure allant d'Euclide à Jordan Tabov en passant par Henri Pitot, Jakob Steiner et Hüseyin Demir. Au passage, de remarquables situations sont étudiées et des archives illustrent qu'un travail préparatoire a été mené au Japon au XVIIIe siècle.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

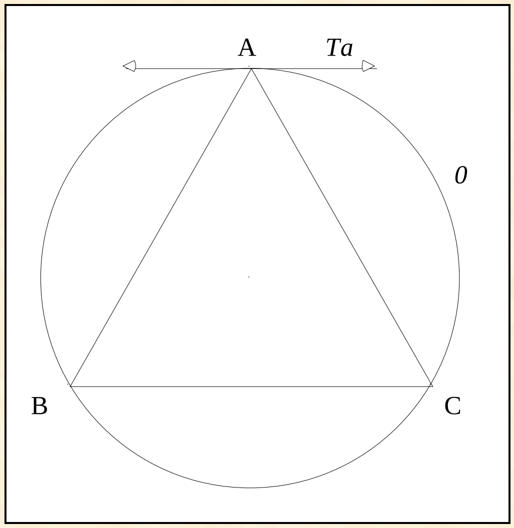
Abstract. The author presents the first synthetic proof of "Equal incircles theorem" resulting from an adventure from Euclid to Jordan Tabov, passing through Henri Pitot, Jakob Steiner and Hüseyin Demir. Remarkable situations are studied and archives illustrate that preparatory work was conducted at the Japan in the 18th century.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

[1] Saint-Denis, Île de la Réunion (France), le 10/10/2011.

Sommaire

A. EUCLIDE D'ALEXANDRIE

1. La tangente au sommet



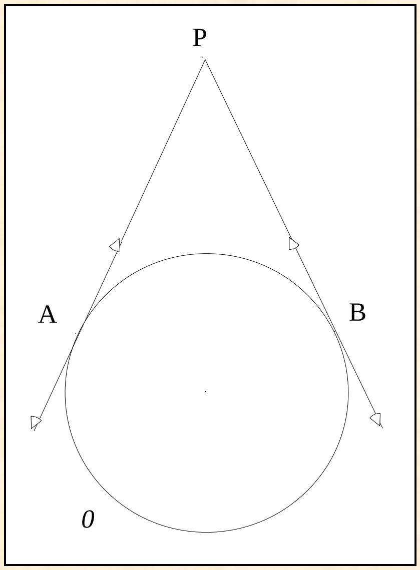
Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC
et *Ta* la tangente à *0* en A.

Donné : ABC est A-isocèle *si, et seulement si,* *Ta* est parallèle à (BC).

2. Deux tangentes égales

VISION

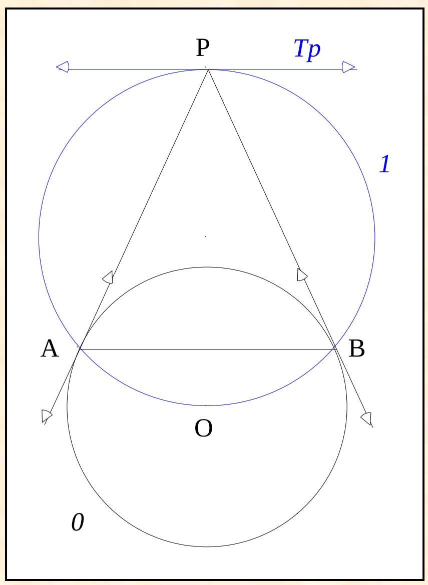
Figure :



Traits : *0* un cercle,
P un point extérieur à *0*,
et A, B les points de contact des deux tangentes à *0* menées à partir de P.

Donné : PA = PB.[2]

VISUALISATION



- Notons O le centre de *0*,
  1 le cercle de diamètre [PO] ; il passe par A, B, O ;
  et *Tp* la tangente à *0* en P.

- Les cercles *0* et *1*, les points de base A et B, les moniennes (AAP) et (BBP), conduisent au théorème **5** de Reim ; il s'en suit que (AB) // *Tp*.

[2] Conséquence de la proposition **36** du Livre **III** des *Éléments* d'Euclide.

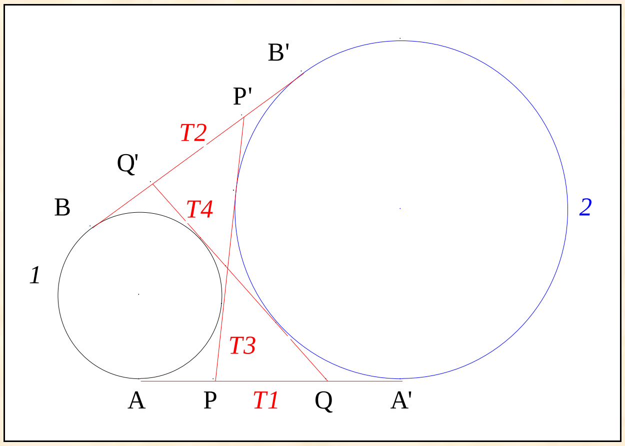
- D'après **A. 1.** La tangente au sommet, le triangle PAB est P-isocèle.

- **Conclusion :** PA = PB.

3. Quatre tangentes égales

VISION

Figure :

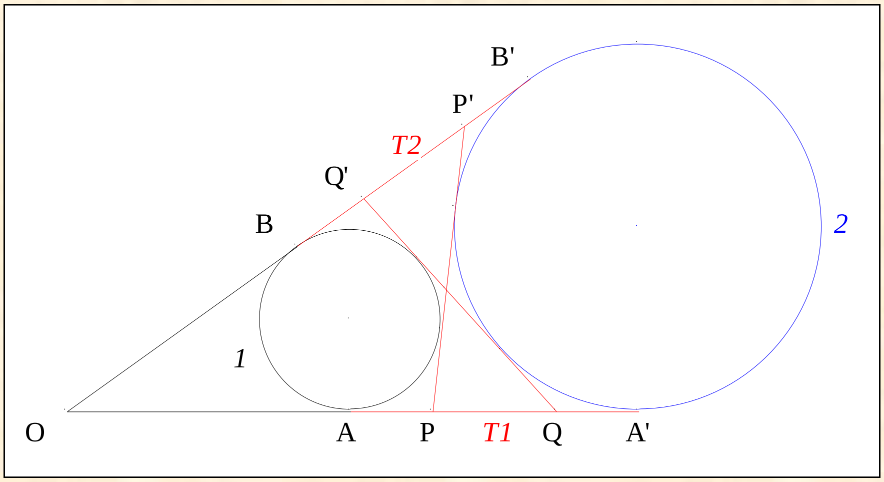


Traits :	*1*, *2*	deux cercles extérieurs l'un de l'autre,
	*T*1, *T*2	les deux tangentes communes extérieures de *1* et *2*,
	A, A', B, B'	les points de contact de *T*1, *T*2 avec *1* et *2* comme indiqués sur la figure,
	*T*3, *T*4	les deux tangentes communes intérieures de *1* et *2*,
	P, P'	les points d'intersection de *T*3 resp. avec *T*1, *T*2
et	Q, Q'	les points d'intersection de *T*4 resp. avec *T*1, *T*2.

Donné : AA' = BB' = PP' = QQ'. [3]

VISUALISATION

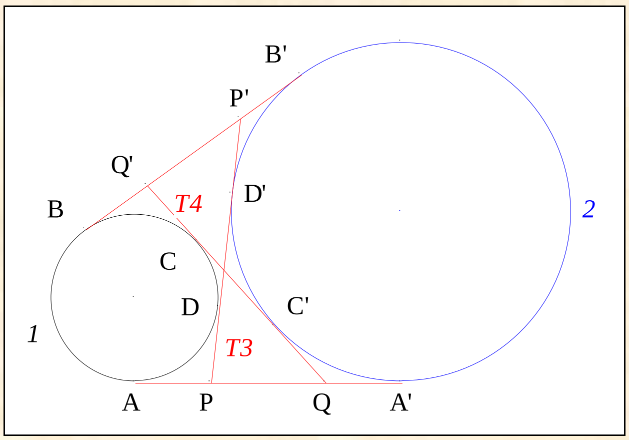
[3] Revue *Arbelos* (novembre 1984).



- Notons O le point d'intersection de (AA') et (BB').

- D'après **A. 2.** Deux tangentes égales, OA' = OB' et OA = OB.

- **Conclusion partielle :** par soustraction membre à membre, AA' = BB'.



- Notons C, C', D, D' les points de contact de *T*3, *T*4 avec *1*, *2* comme indiqués sur la figure.

- Une chasse segmentaire
  d'après **A. 2.** Deux tangentes égales, P'B = P'D et P'B' = P'D' ;
  nous avons : BB' = P'B + P'B' ;
  par substitution, BB' = P'D + P'D' ;
  par décomposition, BB' = P'D' + DD' + P'D' = DD' + 2.P'D'.

  d'après **A. 2.** Deux tangentes égales, PA' = PD' et PA = PD ;
  nous avons : AA' = AP + PA' ;
  par substitution, AA' = PD + PD' ;
  par décomposition, AA' = PD + PD + DD' = 2.PD + DD'.

  Nous avons : AA' = BB' ;
  par équivalence, 2.PD + DD' = DD' + 2.P'D' ;
  d'où, PD = P'D'.

- **Conclusion partielle :** PP' = PD + DD' + D'P' = AA' = BB'.

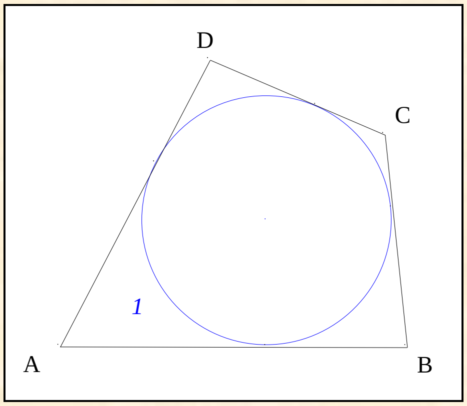
- Mutatis mutandis, nous montrerions que QQ' = AA' = BB'.
- **Conclusion :** AA' = BB' = PP' = QQ'.

B. L'INGÉNIEUR HENRI PITOT

1. Le quadrilatère de Pitot

VISION

Figure :

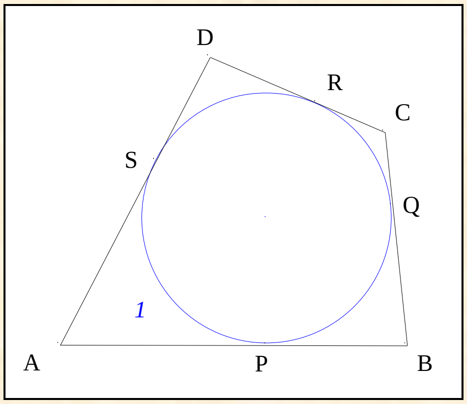


Traits : ABCD un quadrilatère convexe
et *1* un cercle,

Donné : *1* est inscrit dans ABCD *si, et seulement si,* AB + CD = BC + DA.

VISUALISATION NÉCESSAIRE [4]

[4] Pitot H., (1725)



- Notons P, Q, R S les points de contact de *1* resp. avec [AB], [BC], [CD], [DA].

- D'après **A. 2.** Deux tangentes égales,

  (1) AP = SA
  (2) PB = BQ
  (3) CR = QC
  (4) RD = DS.

- En additionnant ces égalités, membre à membre, (AP + PB) + (CR + RD) = (BQ + QC) + (DS + SA)

- **Conclusion :** AB + CD = BC + DA.

Scolies : **(1)** ABCD est "circonscriptible".

(2) Tout quadrilatère circonscriptible est dit "de Pitot".

Énoncé traditionnel :

pour tout quadrilatère de Pitot,
la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres.

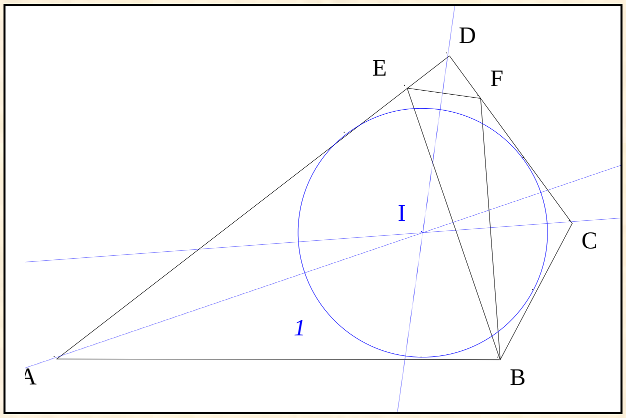
Note historique : de tels quadrilatères ont été envisagés dès le XIIIème siècle par Jordanus de Nemore, un contemporain de Léonard de Pise et un résultat significatif a été trouvé en 1725 par l'ingénieur Henri Pitot que Jacob Steiner a complété en 1846.
Rappelons que dans le film de Louis Malle, *Au revoir les enfants* (1987), Jean est au tableau noir sur lequel a été tracé un quadrilatère de Pitot...

VISUALISATION SUFFISANTE [5]

- Raisonnons par disjonction des cas.

- Premier cas : AB < AD

[5] Pitot H. (1725).



- L'égalité AB + CD = BC + DA est équivalente à AD – AB = CD – CB.

- Plaçons sur **(1)** [AD] le point E tel que AE = AD – AB
  (2) [CD] le point F tel que CF = CD – CB.

- Les triangles ABE, CFB et DEF sont isocèles resp. en A, C et D ;
  les bissectrices intérieures de ces triangles resp. en A, C et D sont resp. les médiatrices de [BE], [BF] et [EF]
  i.e. les médiatrices du triangle BFE ;
  ces médiatrices concourent au centre du cercle circonscrit de BFE.

- Notons I ce point de concours.

- I étant sur les bissectrices intérieures évoquées précédemment, est équidistant des côtés de ABCD.

- **Conclusion partielle :** *1* est inscrit dans ABCD.

- Second cas : AB $\geq$ AD.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *1* est inscrit dans ABCD.

- **Conclusion :** *1* est inscrit dans ABCD.

Énoncé traditionnel :

pour tout quadrilatère convexe,
si,la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres
alors,ce quadrilatère est de Pitot.

Note historique : cette réciproque du théorème d'Henri Pitot a été proposée[6] en 1814 comme *Question*, et résolue directement l'année suivante par J. B. Durrande[7] professeur à Cahors (Lot, Manœuvre).
La visualisation suffisante présentée est due à R. Fricke[8], mathématicien allemand de Brême et L. Gérard qui la proposa en 1904 dans la revue belge *Mathesis*.

---

6 Questions proposées, *Annales* de Gergonne **5** (1814-1815) 384.
7 Durrande J. B. (1797-1825), *Annales* de Gergonne **6** (1815-1816) 49-50.
8 Fricke R., Gérard L., *Mathesis* (1904) **13**, 2° et 67 n° 10.

Théorèmes de Géométrie.

Tout quadrilatère, plan ou gauche, rectiligne ou sphérique, dans lequel la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres côtés est circonscriptible au cercle.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 384 du V.e volume de ce recueil;

Par M. J. B. Durrande.

Théorème. *Tout quadrilatère, plan ou gauche, rectiligne ou sphérique, dans lequel la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres côtés, est circonscriptible au cercle.*

Démonstration I. Soit le quadrilatère plan ABCD (fig. 3) dans lequel on suppose

$$AB+CD=BC+AD\,. \qquad (1)$$

Soient divisés les angles A, B en deux parties égales, par des droites concourant en O. Soit joint ce point O aux sommets C et D ; et du même point soient abaissées sur les directions des côtés les perpendiculaires OE, OF, OG, OH ; l'équation (1) deviendra d'après cela

$$AE+BE+CG+DG=BF+CF+AH+DH\,. \qquad (2)$$

Les triangles-rectangles OEA, OHA qui ont l'hypothénuse commune et un angle oblique égal, par construction, sont égaux ; et il en est de même, pour de semblables raisons, des triangles rectangles OEB, OFB ; donc d'abord

$$OH=OE=OF\,; \qquad (3)$$

et ensuite

50 QUESTIONS

$$AH=AE\ , \qquad BE=BF\ . \qquad (4)$$

Au moyen des équations (4), l'équation (2) se réduit à

$$CG+DG=CF+DH\ . \qquad (5)$$

Présentement OC, OD étant l'une et l'autre hypothénuses communes de deux triangles rectangles, on doit avoir

$$\overline{OF}^2+\overline{CF}^2=\overline{OG}^2+\overline{CG}^2\ ,$$

$$\overline{OH}^2+\overline{DH}^2=\overline{OG}^2+\overline{DG}^2\ ,$$

retranchant donc, et ayant égard à l'équation (3), il viendra

$$\overline{CF}^2-\overline{DH}^2=\overline{CG}^2-\overline{DG}^2\ ,$$

ou

$$(CF+DH)(CF-DH)=(CG+DG)(CG-DG)\ ,$$

ou simplement, en vertu de (5),

$$CF-DH=CG-DG\ ,$$

ou encore en ajoutant et retranchant cette dernière à l'équation (5), transposant, réduisant et divisant par 2,

$$DG=DH\ , \qquad CG=CF\ ;$$

les deux triangles rectangles OFC, OGC sont donc égaux, ainsi que les deux triangles rectangles OHD, OGD ; on a donc

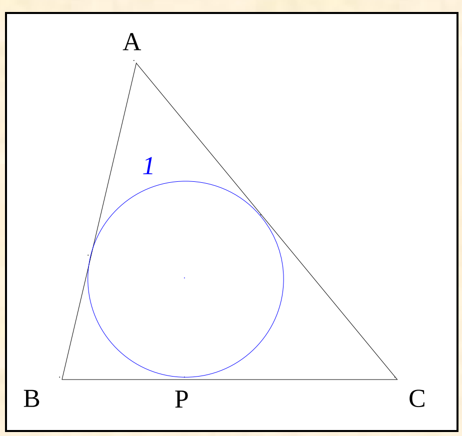
$$OG=OF=OH=OE\ ,$$

et par conséquent le cercle décrit du point O comme centre, et avec l'une quelconque de ces quatre droites pour rayon, touchera les cotes du quadrilatère aux points E, F, G, H, et lui sera en effet circonscrit. (*)

2. Le triangle de Pitot

VISION

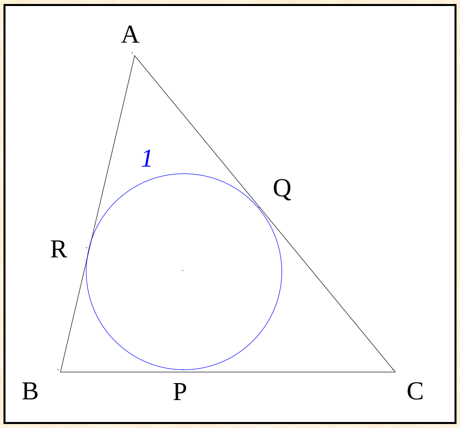
Figure :



Traits : ABC un triangle,
P un point de [BC]
et *1* un cercle tangent resp. à [AB], [AC] et passant par P.

Donné : *1* est tangent à [BC] en P *si, et seulement si,* AB + PC = AC + PB.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons Q, R les points de contact de *1* resp. avec [AC], [AB].

- D'après **A. 2.** Deux tangentes égales, **(1)** AR = AQ
  (2) RB = PB
  (3) PC = QC.

- En additionnant ces égalités, membre à membre, (AR + RB) + PC = (AQ + QC) + PB

- **Conclusion :** AB + PC = AC + PB.

Scolies : **(1)** autre formulation : BC = BR + CQ.

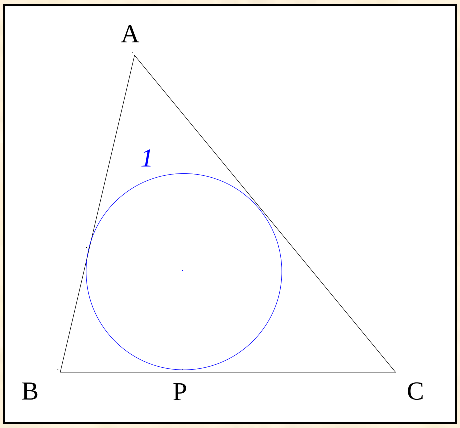
(2) Une formule remarquable

- Notons a, b, c BC, CA, AB
  et 2p le périmètre de ABC.

- D'après **A. 2.** Deux tangentes égales, 2p = 2.PB + 2b
  2.BP = 2p – 2b i.e. a – b + c ou encore BC – AC + AB.

- **Conclusion :** 2.BP = a – b + c ou encore BC – AC + AB.

VISUALISATION SUFFISANTE



- Raisonnons par l'absurde
  en affirmant que *1* n'est pas tangent à [BC] en P i.e. coupe [BC] en deux points distincts.

- Supposons que AB < AC

- Recherche de P sur [BC]
  par hypothèse, AB + PC = AC + PB ;
  par transposition, PC – PB = AC – AB ;
  par décomposition, PC + PB = BC ;

  par combinaison, 2.PB = BC – AC + AB (= a – b + c).

  d'après **B. 2.** Scolie **2**, P est l'unique point de [BC] vérifiant AB + PC = AC + PB,
  ce qui est contradictoire.

- **Conclusion :** *1* est tangent à [BC] en P.

Scolie : le lecteur pourra envisager le cas ou le cercle *1* est extérieur à ABC en modifiant l'équivalence.

Note historique :

George Szekeres[9] dans un article traitant de l'espace de Minkowski donne la preuve de Basil Rennie concernant le théorème d'Urquhart. Cette preuve est basée sur le lemme suivant :

Given a circle and two points A *and* C *outside the circle,*
the line AC *will be tangent*
if the distance AC *equals the difference between (or the sum of)*
the length of a tangent from A *and the length of a tangent from* C.

3. Une courte biographie d'Henri Pitot

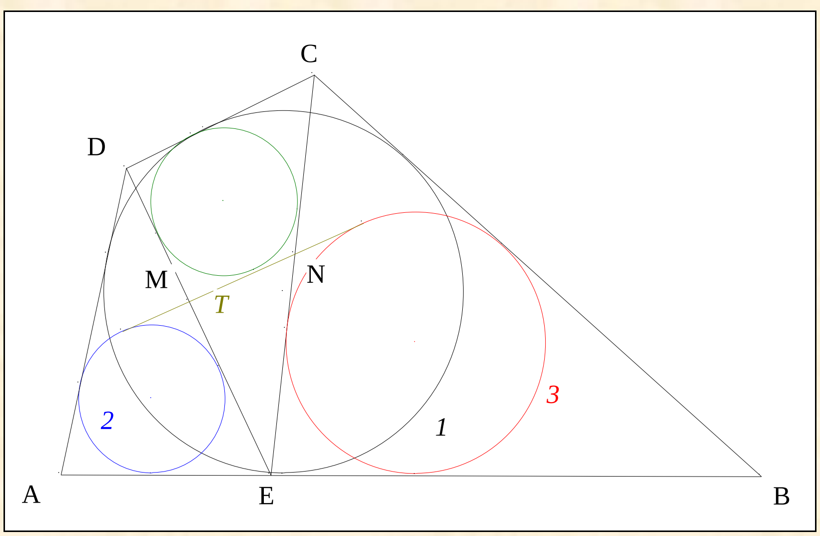
[9] Szekeres G., Kinematic geometry. M. L. Urqhart in memoriam, *J. Ausral. Math. Soc.* **8** (1968) 134-160.

Henri Pitot est né à Aramon (Gard, Manœuvre) le 29 mai 1695.
Sa formation en mathématique et en astronomie, lui permet en 1723 de devenir l'assistant du physicien Réaumur. L'année suivante, il est adjoint mécanicien à l'Académie des Sciences, puis associé mécanicien en 1727 et, en fin, pensionnaire géomètre en 1733. Ingénieur en chef des États du Languedoc en 1740, il participe à l'élargissement du Pont du Gard, à la conception de l'aqueduc Saint Clément à Montpellier en 1772, à la construction du Canal du Midi qui s'appelait à l'époque Canal du Languedoc dont il en devient le surintendant. En 1740, il devient membre de la *Royal Society*. Publiant plusieurs mémoires concernant la Géométrie, Henri Pitot est aussi un inventeur qui a mis au point le "tube de Pitot" pour mesurer la vitesse des cours d'eau.
Il décède à Aramon le 27 décembre 1771.
Aujourd'hui, le collège d'Aramon porte son nom.

4. Un quadrilatère circonscriptible

VISION

Figure :



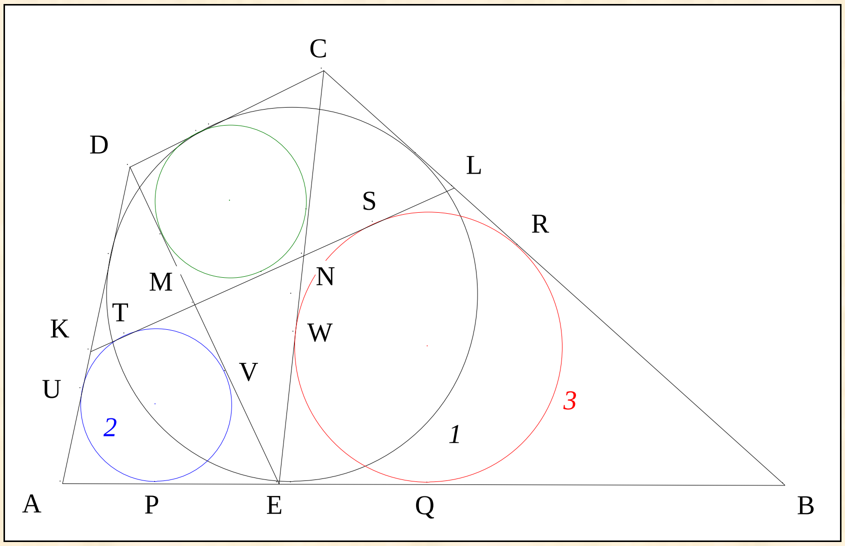
Traits : ABCD un quadrilatère circonscriptible,
1 le cercle inscrit dans ABCD,

	E	un point de]AB[,
	2, 3	les cercles inscrits des triangles ADE, CEB,
	T	la seconde tangente commune extérieure de *2* et *3*,
et	M, N	les points d'intersection de *T* resp. avec (DE), (CE).

Donné : le quadrilatère CDMN est circonscriptible.

VISUALISATION

- Raisonnons par contre variance i.e. en partant de la conclusion, puis en régressant par équivalence.



- Notons K, L les points d'intersection de *T* resp. avec (AD), (BC).
  - P, Q les points de contact de *2*, *3* avec (BC),
  - T, S les points de contact de *2*, *3* avec (KL),
  - U le point de contact de *2* avec (AD),
  - R le point de contact de *3* avec (BC),
  - V le point de contact de *2* avec (DE)
  - et W le point de contact de *3* avec (CE).

- D'après **B. 1.** Le quadrilatère de Pitot
  appliqué au quadrilatère circonscriptible CDMN, CD + MN = CN + DM ;

  par addition de (MT + NS), CD + MN + MT + NS = CN + DM + MT + NS ;

  d'après **A. 2.** Tangentes égales, MT = MV et NS = NW ;

  d'où : CD + TS = CN + DM + MV + NW ;

  par addition, CD + TS = CW + DV ;

  d'après **A. 3.** Quatre tangentes égales, TS = PQ et DV = DU ;

  par substitution, CD + PQ = CW + DU ;

  d'après **A. 2.** Tangentes égales, CW = CR ;

par substitution, $CD + PQ = CR + DU$;

d'après **A. 2.** Tangentes égales, $AP = AU$ et $BQ = BR$;

par addition membre à membre, $CD + PQ + AP + BQ = CR + DU + AU + BR$;

d'où : $CD + AB = BC + AD$

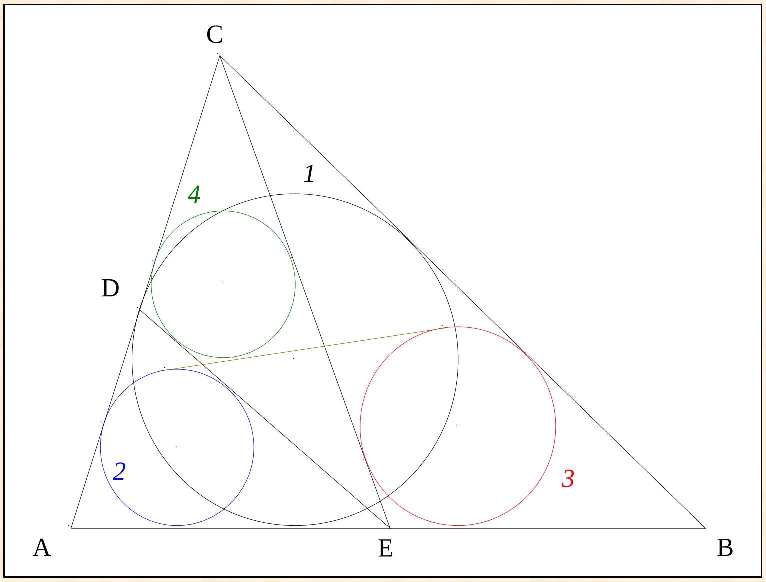
cette égalité étant vraie du fait que ABCD est circonscriptible.

- **Conclusion :** le quadrilatère CDMN est circonscriptible.

5. Une tangente commune à trois cercles

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit de ABC,
D le point de contact de *1* avec (AC),
E un point de]AB[
et *2, 3, 4* les cercles inscrits des triangles ADE, DEC, BCE.

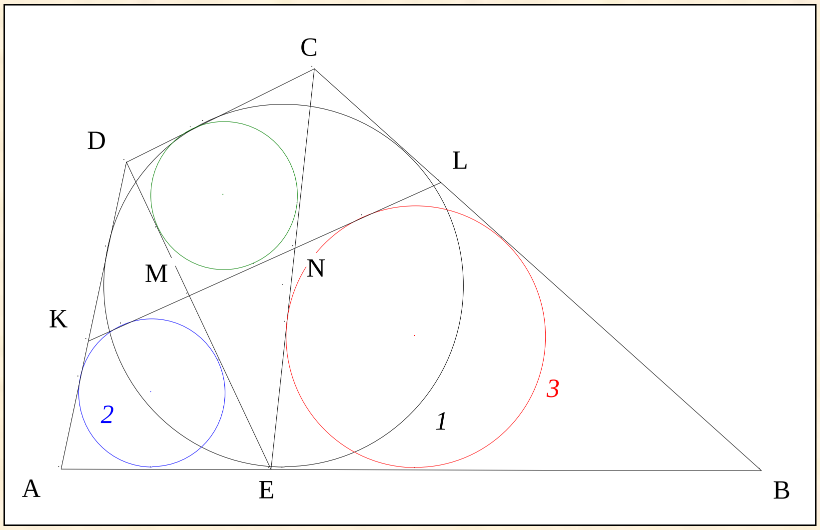
Donné : *2, 3, 4* ont une tangente commune.[10]

VISUALISATION

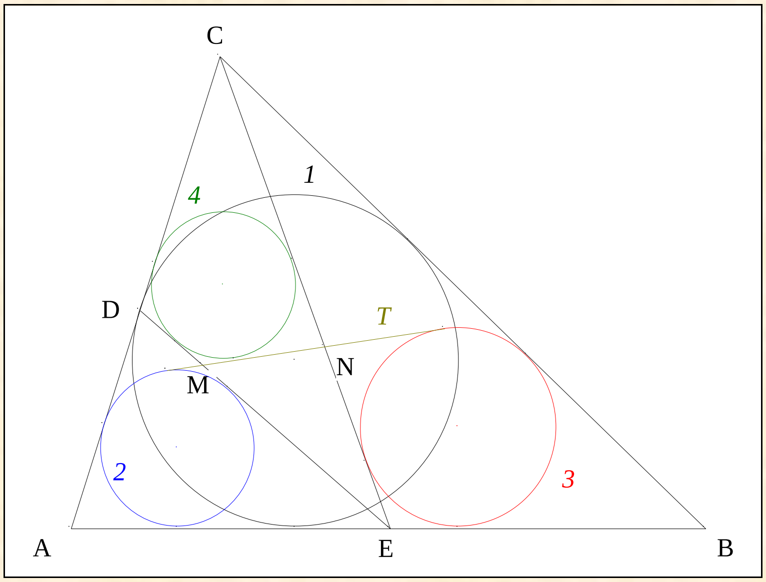
---

[10] Russie (1989) ;
van Lamoen F., incircles problem, Messages *Hyacinthos* # **2652**, **2654**, **2663** du 24/03/2001 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

- **Commentaire :** ce problème apparaît comme un cas dégénéré du problème précédent.



- Partons de **B. 1.** Un quadrilatère de Pitot.



- Lorsque D se déplace pour se positionner sur la droite (AC), D devient le point de contact de *1* avec (AC).

- Notons *T* la seconde tangente commune extérieure de *2* et *3*,
  et M, N les points d'intersection de *T* resp. avec (DE), (CE).

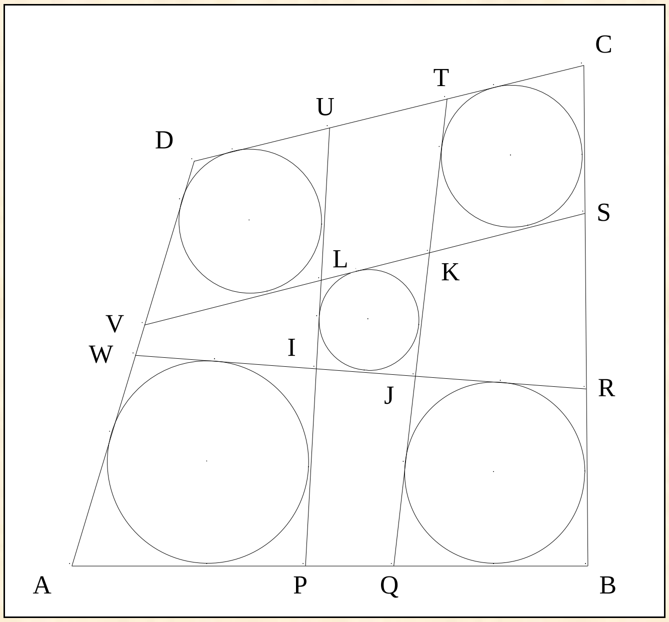
- En se référant à **B. 4.** Un quadrilatère circonscriptible,
  nous montrerions que le quadrilatère CDMN est circonscriptible.

- **Conclusion :** *2*, *3*, *4* ont une tangente commune.

C. VIKTOR PRASOLOV

VISION

Figure :

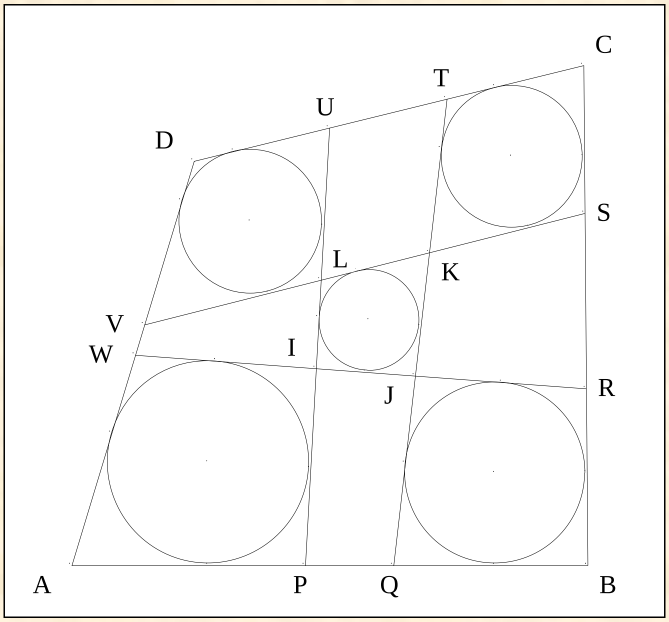


Traits :	ABCD	un quadrilatère non convexe et non croisé,
	P, Q	deux point de [AB],
	R, S	deux point de [BC],
	T, U	deux point de [CD],
	V, W	deux point de [DA]
et	I, J, K , L	les points d'intersection comme indiqués sur la figure.

Donné : *si*, les quadrilatères APIW, BRJQ, CTKS, DULV, IJKL sont circonscriptibles
alors, ABCD est circonscriptible.[11]

VISUALISATION

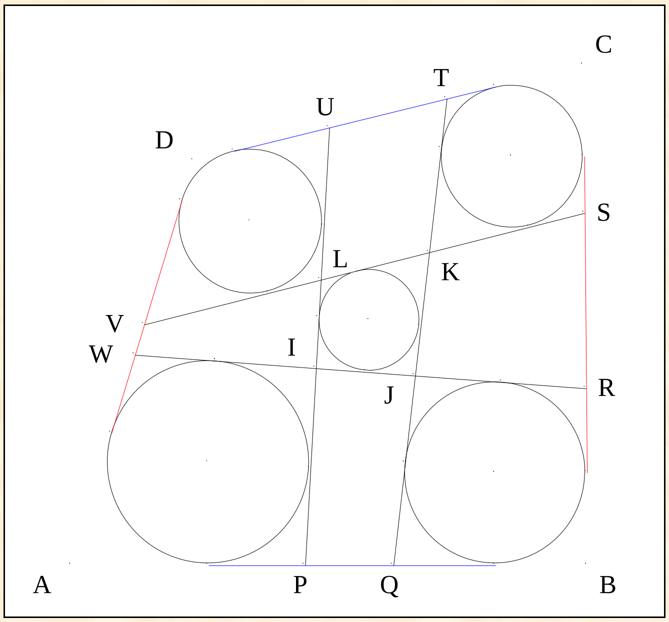
[11] Prasolov V., Problems in plane and solid Geometry, translated and edited by Dimitry Leites, problem 3.8 p. 59, solution p. 67 ; http://students.imsa.edu/~tliu/Math/planegeo.pdf



- Raisonnons par contre variance et équivalence logique

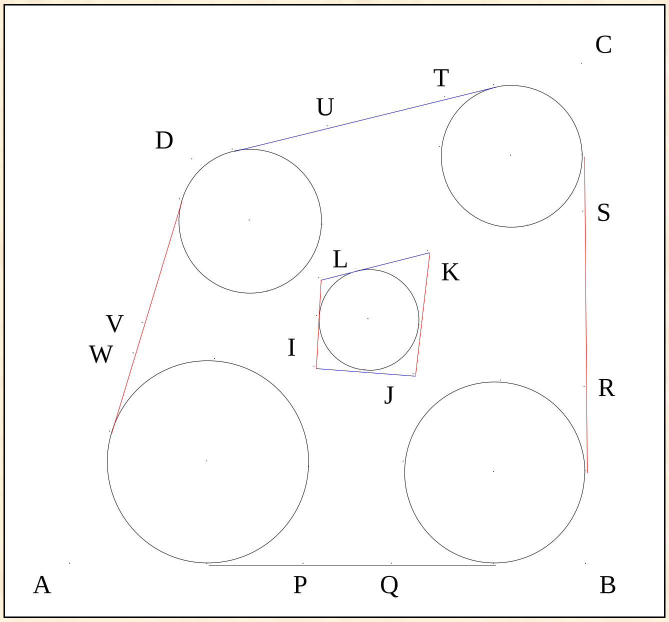
* D'après **B. 1.** Le quadrilatère de Pitot,

ABCD est circonscriptible ⬄ AB + CD = BC + DA.



* D'après **A. 2.** Deux tangentes égales,

la somme des segments bleus est égal à la somme des segments rouges.



*　D'après **A. 3.** Quatre tangentes égales,

la somme des nouveaux segments bleus est égal à la somme des nouveaux segments rouges.

*　D'après **A. 2.** Deux tangentes égales,

la somme des petits segments bleus est égal à la somme des petits segments rouges
car le quadrilatère IJKL est circonscriptible.

Commentaire : l'auteur ayant eu tardivement connaissance de cette généralisation n'a pu la prendre en considération dans cet article ce qui aurait pu l'alléger…

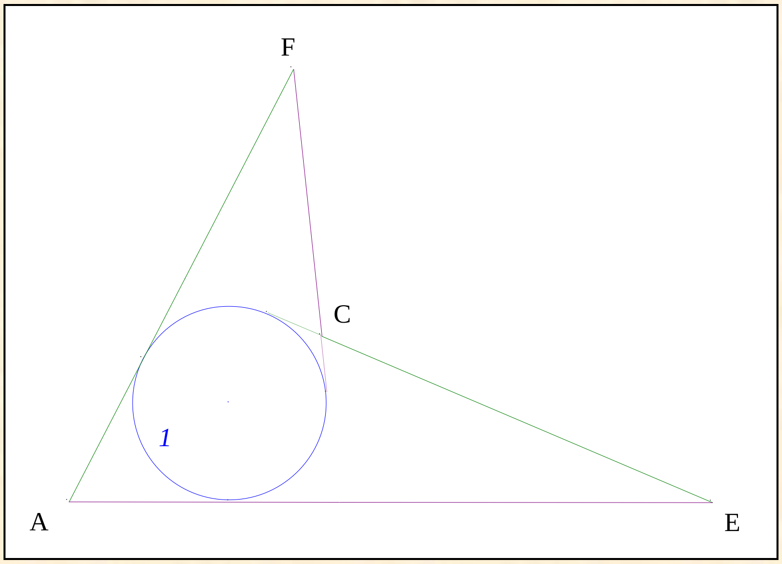
D. JAKOB STEINER [12]

1. Quadrilatères de Pitot

VISION "NON CROISÉE"

Figure :

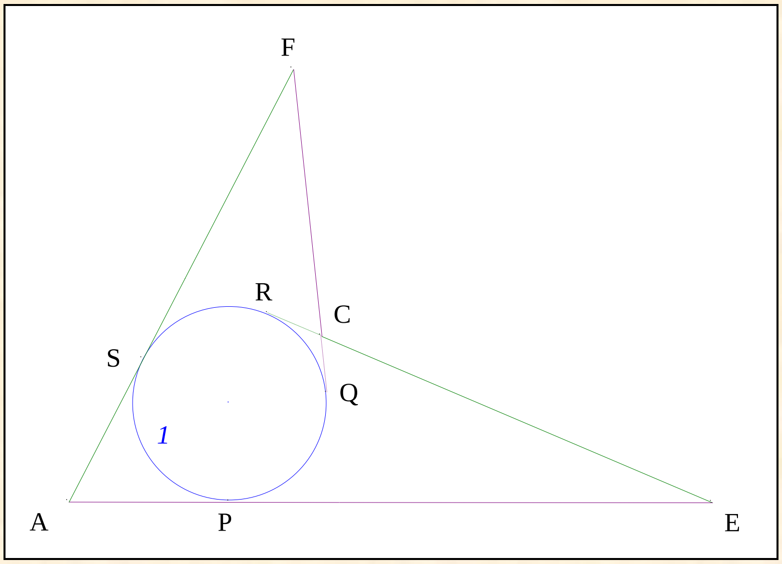
[12] Steiner J., über das dem Kreise umgeschriebene Viereck , *Journal de Crelle* **32** (1846) 305-310.



Traits : AECF un quadrilatère non convexe et non croisé,
et *1* un cercle.

Donné : *1* est inscrit dans AECF *si, et seulement si*, AE + CF = EC + FA.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons P, Q, R S les points de contact de *1* resp. avec [AE], (CF), (CE), [AF].

- D'après **A. 1.** Deux tangentes égales,
  (1) AP = SA
  (2) EP = ER
  (3) FQ = FS
  (4) CQ = CR.

- Calculons **(1)** + **(2)** + **(3)** – **(4)**, (AP + EP) + (FQ – CQ) = (SA + FS) + (ER – CR).

- **Conclusion :** AE + CF = EC + FA.

Scolies : **(1)** AECF est "circonscriptible".

(2) Tout quadrilatère circonscriptible non croisé est dit "de Pitot".

(3) Nous retrouvons la condition nécessaire de **B. 1.** Le quadrilatère de Pitot.

Énoncé traditionnel :

pour tout quadrilatère,
si, ce quadrilatère est de Pitot
alors, la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres.

Archive :

> *„Jedes Viereck, bei welchem entweder die Summe irgend zweier Seiten gleich ist der Summe der beiden übrigen, oder die Differenz irgend zweier Seiten gleich ist der Differenz der beiden übrigen, ist allemal einem Kreise umgeschrieben."* Und umgekehrt: *„Bei jedem dem Kreise umgeschriebenen Viereck ist, in Betracht je zweier Seiten, entweder ihre Summe oder ihr Unterschied, beziehlich, gleich der Summe oder dem Unterschiede der beiden andern Seiten."*

VISUALISATION SUFFISANTE

- La visualisation est la même qu'en **B. 2.** Le quadrilatère de Pitot.

Scolie : nous retrouvons la condition suffisante de **B. 1.** Le quadrilatère de Pitot.

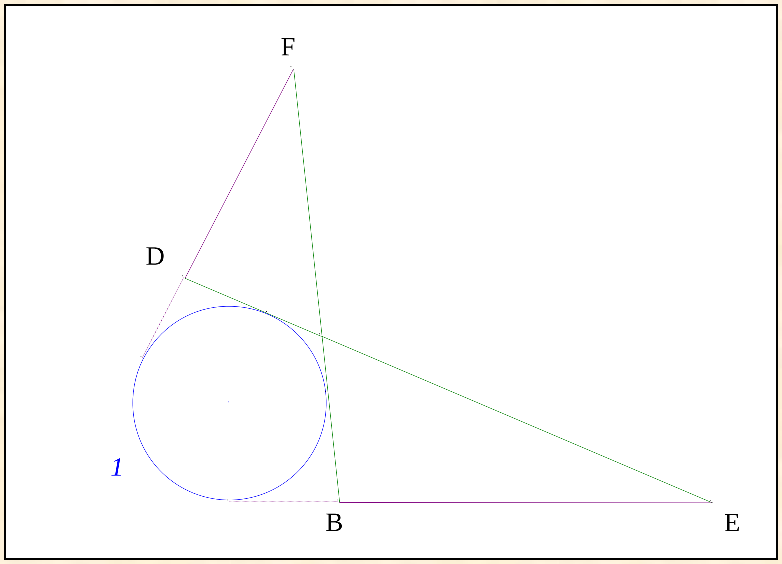
Énoncé traditionnel :

pour tout quadrilatère,
si, la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres
alors, ce quadrilatère est de Pitot.

2. Quadrilatères de Steiner

VISION "CROISÉE"

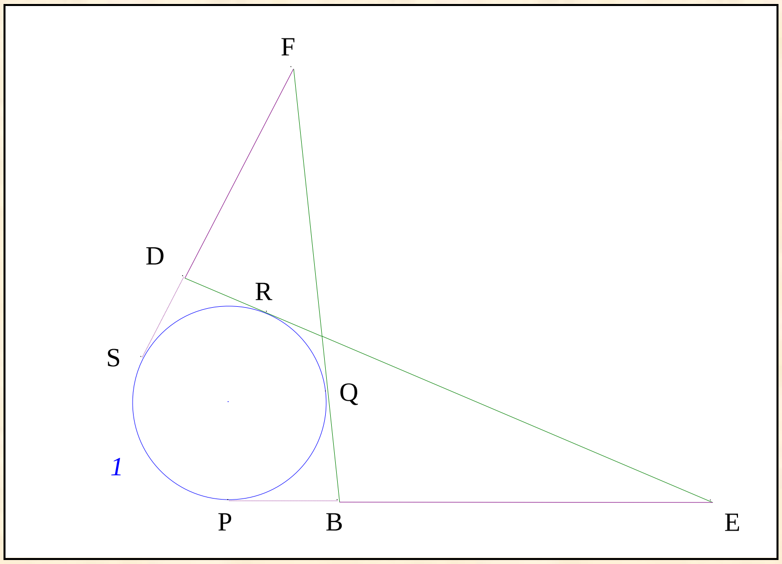
Figure :



Traits : BEDF un quadrilatère non convexe et croisé tel que BF < DE,
A, C les points d'intersection resp. de (BE) et (DF), de (BF) et (ED),
et *1* un cercle.

Donné : *1* est inscrit dans BEDF *si, et seulement si,* BE – DF = ED – FB.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons P, Q, R S les points de contact de *1* resp. avec (BE), (BF), (DE), (DF).

- D'après **A. 1.** Deux tangentes égales, **(1)** EP = ER
  (2) BP = BQ
  (3) FS = FQ
  (4) DS = DR.

- Calculons **(1) – (2)** – **(3)** + **(4)**, (EP – BP) – (FS – DS) = (ER + DR) – (BQ + FQ).
- **Conclusion :** BE - DF = ED – FB.

Scolies : **(1)** BEDF est "circonscriptible".

(2) Tout quadrilatère circonscriptible et croisé est dit "de Steiner".

Énoncé traditionnel :

pour tout quadrilatère croisé,
si, ce quadrilatère est de Steiner
alors, la différence de deux côtés opposés est égale à la différence des deux autres.

Archive :

„Jedes Viereck, bei welchem entweder die Summe irgend zweier Seiten gleich ist der Summe der beiden übrigen, oder die Differenz irgend zweier Seiten gleich ist der Differenz der beiden übrigen, ist allemal einem Kreise umgeschrieben." Und umgekehrt: *„Bei jedem dem Kreise umgeschriebenen Viereck ist, in Betracht je zweier Seiten, entweder ihre Summe oder ihr Unterschied, beziehlich, gleich der Summe oder dem Unterschiede der beiden andern Seiten."*

(367)

29. *Sur le quadilatère circonscrit au cercle ; par* M. le professeur J. Steiner ; 305–310.

On lit dans les traités de Géométrie qu'un quadrilatère n'est circonscriptible à un cercle que lorsque les *sommes* des côtés opposés sont égales ; cette proposition est défectueuse et incomplète, et ne se rapporte qu'au quadrilatère convexe. Voici l'énoncé complet : Tout quadrilatère dans lequel la somme des deux côtés quelconques est égale à la somme des deux autres, ou dans lequel la différence des deux côtés quelconques est égale à la différence des deux autres, est circonscriptible à un cercle, et réciproquement. Discussion des divers cas.
[13]

[13] Baltzer R., *Nouvelles Annales* 1re série **8** (1849) 367 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

VISUALISATION SUFFISANTE

- La visualisation est la même qu'en **B. 2.** Le quadrilatère de Pitot.

Énoncé traditionnel :

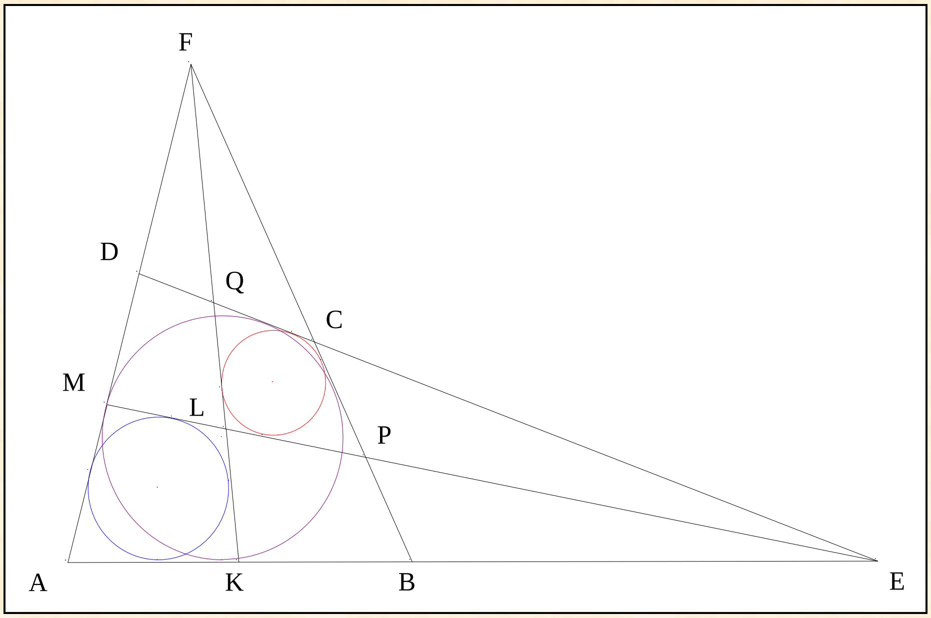
pour tout quadrilatère croisé,
si, la différence de deux côtés opposés est égale à la différence des deux autres
alors, ce quadrilatère est de Steiner.

E. HUSEYIN DEMIR

1. Le troisième cercle de Demir

VISION

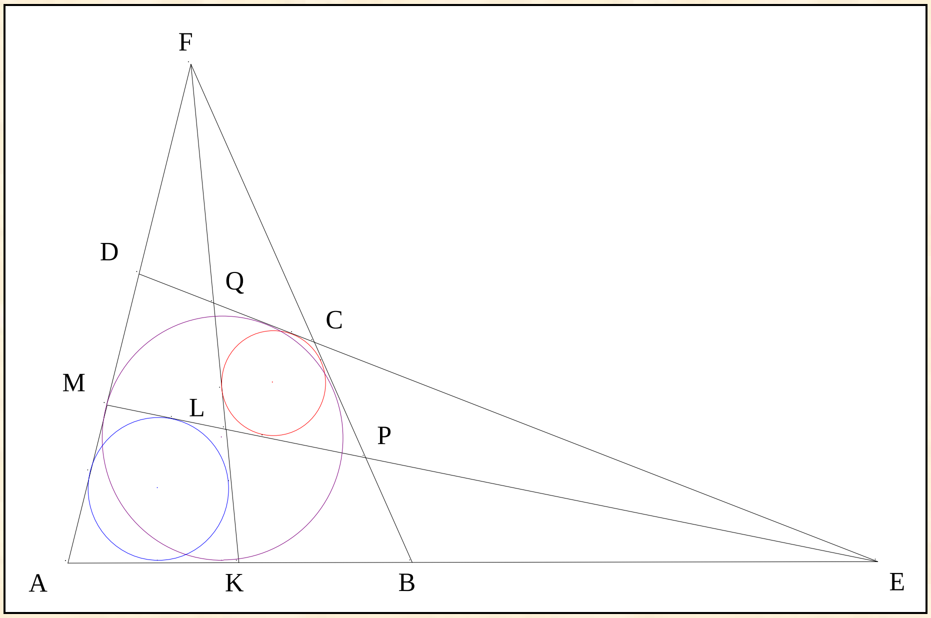
Figure :



Traits :	ABCD	un quadrilatère convexe,
	E, F	les points d'intersection de (AB) et (CD), de (BC) et (AD),
	De, *Df*	deux droites passant resp. par E, F,
	P, M	les points d'intersection de *De* resp. avec (BC), (AD),
	K, Q	les points d'intersection de *Df* resp. avec (AB), (CD)
et	L	le point d'intersection de *De* et *Df*.

Donné : *si*, AKLM est circonscriptible
LPCQ est circonscriptible *alors*, ABCD est circonscriptible. [14]

VISUALISATION



- D'après **D. 1.** Quadrilatères non convexes de Steiner
  appliqué
  (1) au quadrilatère circonscriptible AELF AE + LF = EL + FA
  (2) au quadrilatère circonscriptible LECF LE + CF = EC + FL.

- Par addition de **(1)** et **(2)**, AE + CF = FA + EC.

- D'après **D. 1.** Quadrilatères non convexes de Steiner, le quadrilatère AECF est circonscriptible.

- **Conclusion :** le quadrilatère ABCD est circonscriptible.

Scolies : **(1)** mutatis mutandis, nous montrerions que

si, KBPL est circonscriptible
MLQD est circonscriptible *alors*, ABCD est circonscriptible.

(2) Mutatis mutandis, nous montrerions que

si, AKLM est circonscriptible
ABCD est circonscriptible *alors*, LPCQ est circonscriptible.

Énoncés traditionnels : *si*, deux des trois quadrilatères AKLM, LPCQ et ABCD
sont circonscriptibles

[14] Demir H., More on incircles, *Mathematics Magazine* **62** (1989) 107-114.

alors, le troisième l'est aussi ;

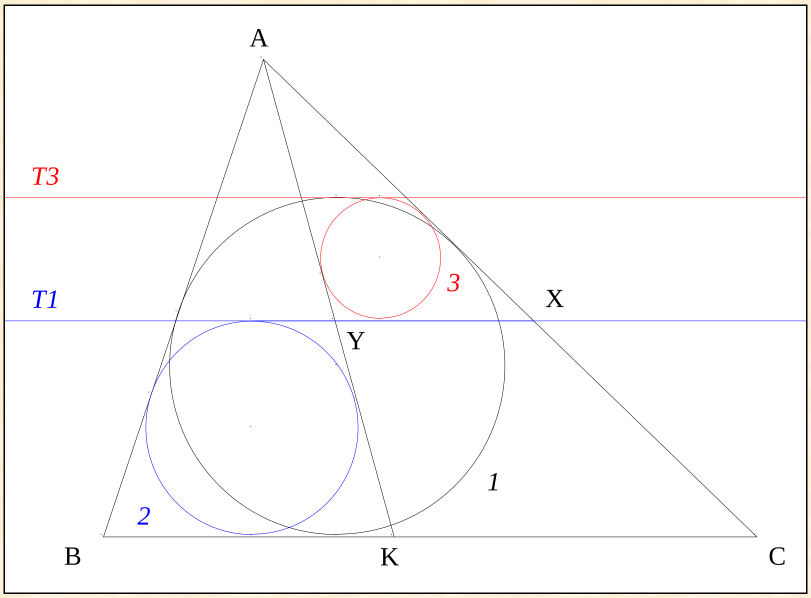
si, deux des trois quadrilatères KBPL, MLQD et ABCD sont circonscriptibles

alors, le troisième l'est aussi.

2. Un exercice d'Olympiade

VISION

Figure :

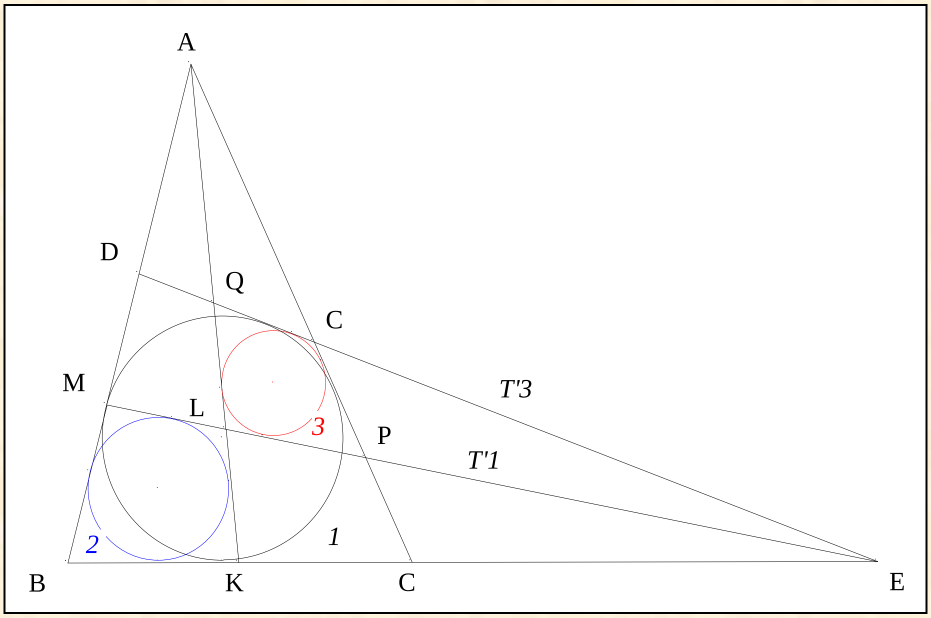


Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit de ABC,
	K	un point de [BC],
	2	le cercle inscrit de ABK,
	T1	la tangente à *1* parallèle à (BC)
	X, Y	les points d'intersection de *T1* resp. avec (AC), (AK),
	3	le cercle inscrit du triangle AXY
et	*T3*	la tangente à *3* parallèle à (BC).

Donné : *T3* est tangente à *1*.[15]

VISUALISATION

[15] A problem on Geometry (Olympiad), Messages *Hyacinthos* # **16262**, **16269**, **16273** du /04/2008 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/



- Raisonnons par l'absurde en affirmant que *T3* n'est pas tangente à *1*.

- Notons *T'3* la seconde tangente commune extérieure à *1* et *3*, distincte de (AC),
  E le point d'intersection de *T'3* et (BC),
  T'1 la seconde tangente à *3* passant par E, distincte de *T'3*,
  et L, M les points d'intersection de *T'1* resp. avec (AK), (AB).

- **Scolie :** *T'1* est distincte de *T1*.

- D'après **E. 1.** Le troisième cercle de Demir, le quadrilatère BKLM est circonscriptible ;
  en conséquence, *2* étant tangent à trois côtés, est tangent à (LM).

- *2* et *3* ayant trois tangentes communes intérieures, notre hypothèse est fausse.

- **Conclusion :** *T3* est tangente à *1*.

Note historique : Nikolas Dergiades[16] a proposé en 2008 une solution métrique de ce problème et ajoute

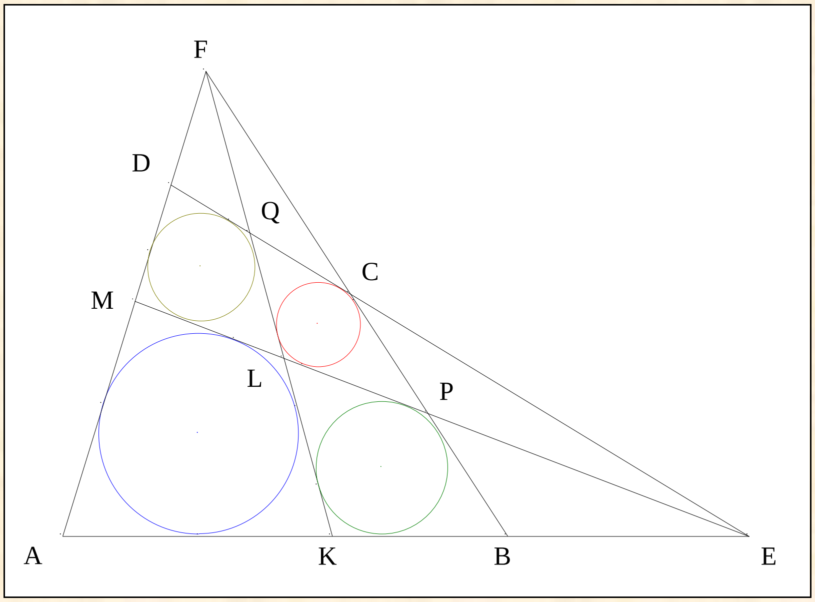
It would be nice to have a synthetic proof.

3. Le quatrième cercle de Demir

VISION

Figure :

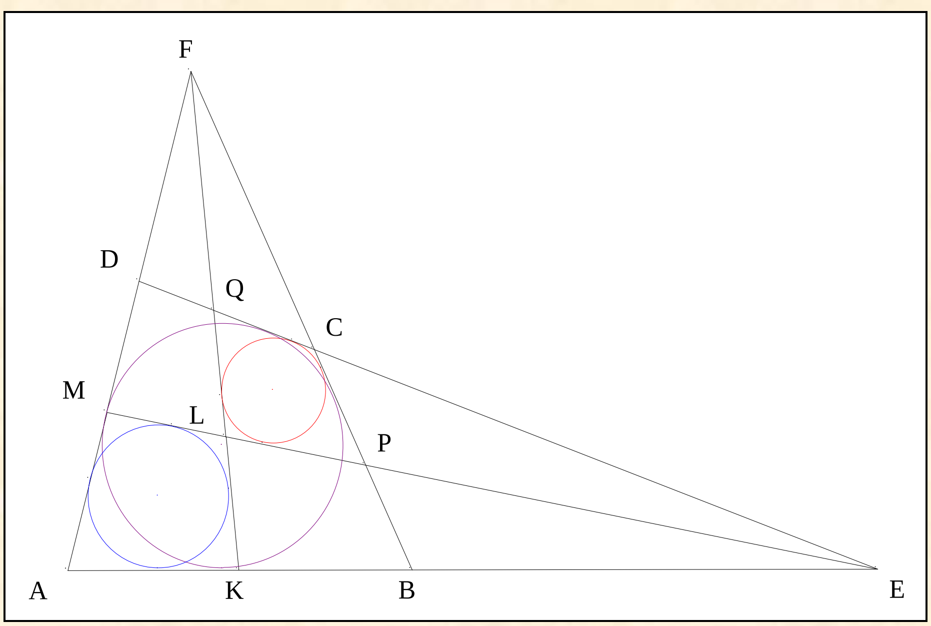
[16] Dergiades N., Alteration to the message **16262**, Messages *Hyacinthos* # **16273** du 11/04/2008 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
E, F les points d'intersection resp. de (AB) et (CD), de (BC) et (AD),
De, *Df* deux droites passant resp. par E, F,
P, M les points d'intersection de *De* resp. avec (BC), (AD),
K, Q les points d'intersection de *Df* resp. avec (AB), (CD)
et L le point d'intersection de *De* et *Df*.

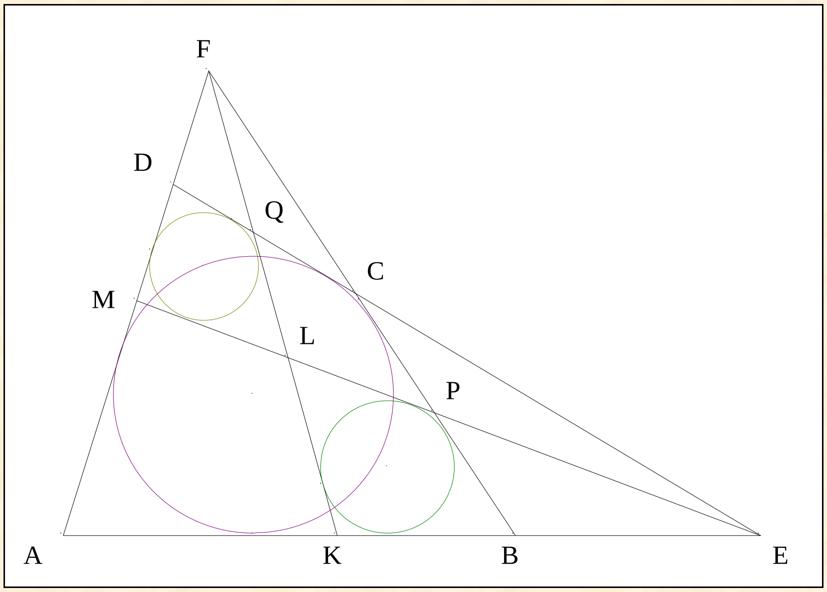
Donné : *si*, AKLM, KBPL et PCQL sont circonscriptibles
alors, QDML est circonscriptible. [17]

VISUALISATION



[17] Demir H., More on incircles, *Mathematics Magazine* **62** (1989) 107-114.

- D'après **E. 1.** Le troisième cercle de Demir
  appliqué aux quadrilatères circonscriptibles AKLM et PCQL, le quadrilatère ABCD est circonscriptible.



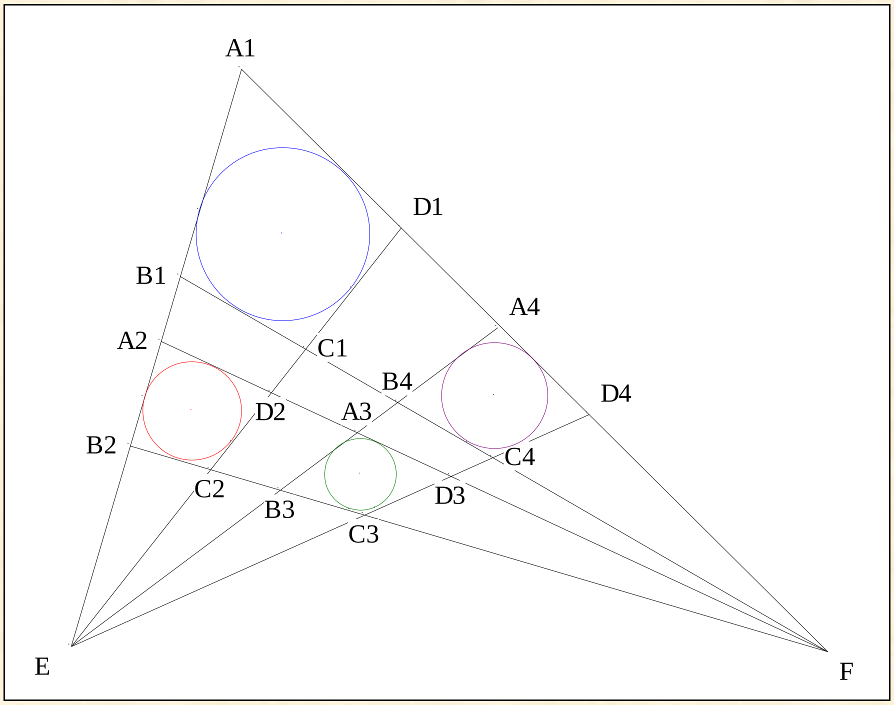
- **Conclusion :** d'après **D. 1.** Le troisième cercle de Demir
  appliqué aux quadrilatères circonscriptibles ABCD et KBPL,
  le quadrilatère QDML est circonscriptible.

Énoncé traditionnel : *si,* trois des quatre quadrilatères AKLM, KBPL, PCQL et QDML sont circonscriptibles
alors, le quatrième l'est aussi.

4. Une généralisation du quatrième cercle de Demir

VISION

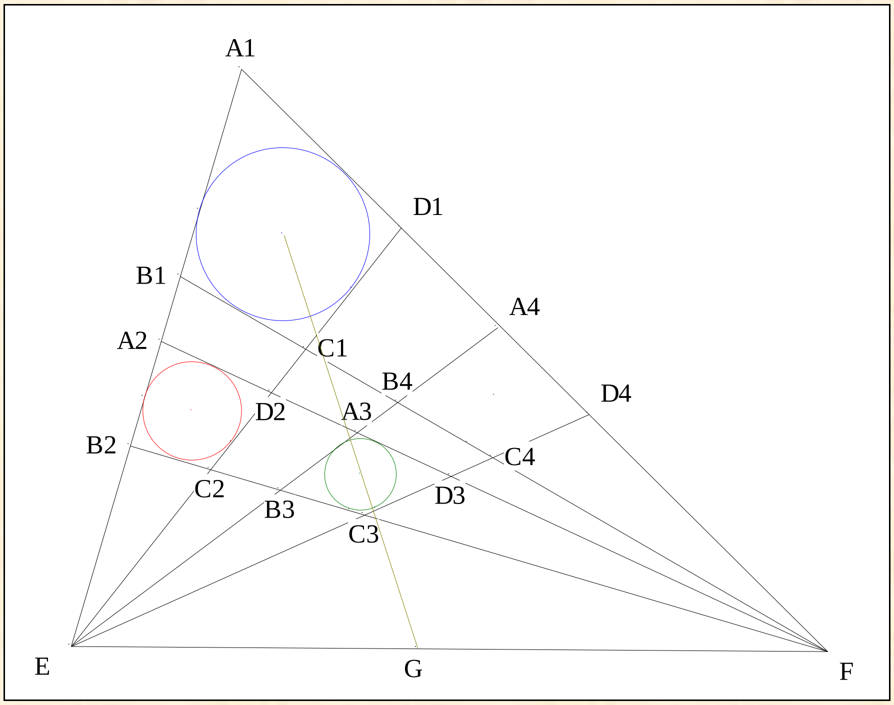
Figure :



Traits :	A1EF	un triangle,
	B1, A2, B2	trois points sur [A1E] comme indiqué sur la figure,
	D1, A4, B4	trois points sur [A1F] comme indiqué sur la figure,
	C1, D2, C2	les points d'intersection de (ED1) resp. avec (FB1), (FA2), (FB2),
	B4, A3, B3	les points d'intersection de (EA4) resp. avec (FB1), (FA2), (FB2)
et	C4, D3, C3	les points d'intersection de (ED4) resp. avec (FB1), (FA2), (FB2).

Donné : *si,* les quadrilatères A1B1C1D1, A2B2C2D2, A3B3C3D3 sont circonscriptibles
alors, le quadrilatère A4B4C4D4 est circonscriptible.

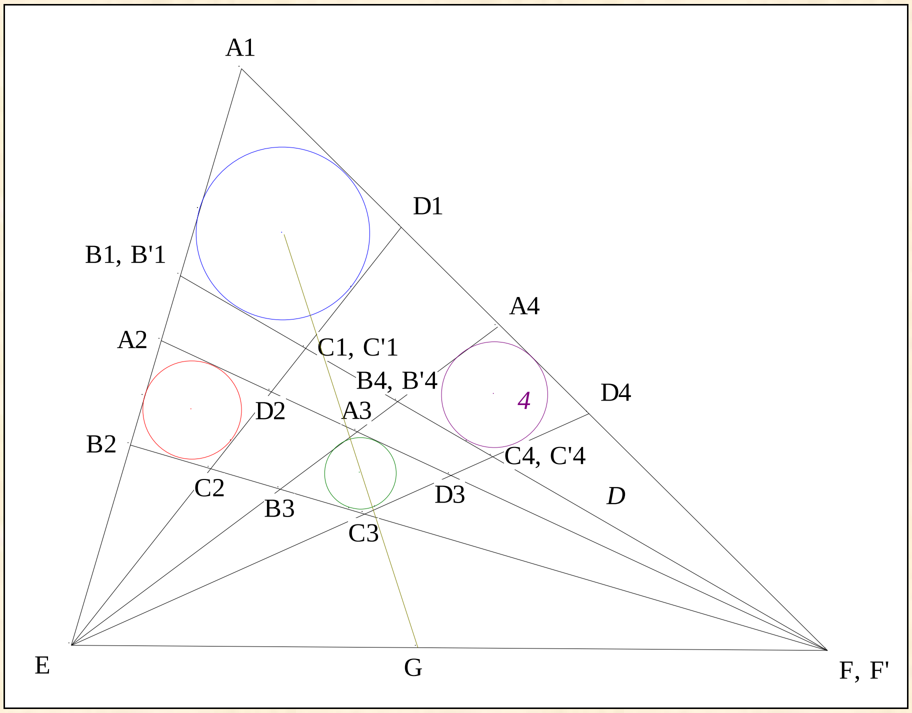
VISUALISATION



- **Scolies :** E est le centre externe d'homothétie des cercles bleu et rouge
  F est le centre externe d'homothétie des cercles rouge et vert.

- Notons G le centre externe d'homothétie des cercles bleu et vert.

- D'après "La droite de d'Alembert" (Cf. Annexe **1**)
  appliqué aux cercles bleu, rouge et vert, E, F et G sont alignés.



- Raisonnons par l'absurde en affirmant que le quadrilatère A4B4C4D4 n'est pas circonscriptible.

- Notons *4* le cercle mauve inscrit du triangle ED4A4,
  D la seconde tangente commune extérieure aux cercles bleu et mauve,
  B'1 le point d'intersection de *D* et [A1E],
  F' le point d'intersection de *D* et (A1D1).
  et C'1, B'4, C'4 les points d'intersection de (F'B'1) resp. avec (ED1), (EA4), (ED4).

- **Scolie :** le quadrilatère A4B'4C'4D4 est circonscriptible.

- D'après "La droite de d'Alembert" (Cf. Annexe **1**)
  appliqué aux cercles bleu, vert et mauve, E, F' et G sont alignés ;
  en conséquence, F et F' sont confondus ;
  il s'en suit que B'1 et B1 sont confondus
  en conséquence, le quadrilatère A4B4C4D4 est circonscriptible ce qui est contradictoire.

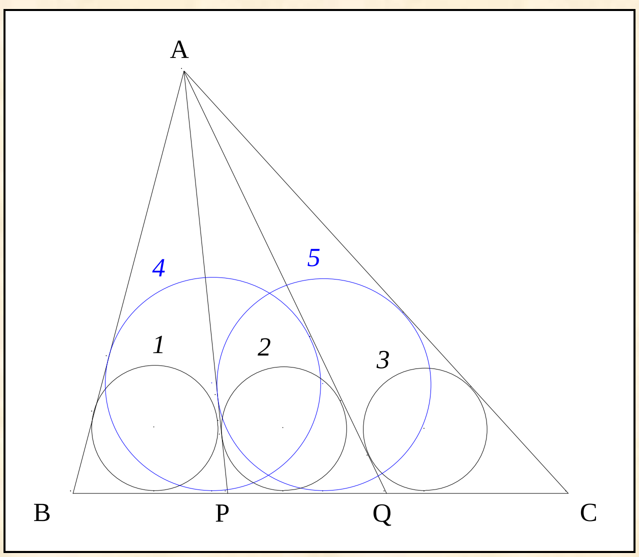
- **Conclusion :** le quadrilatère A4B4C4D4 est circonscriptible.

Énoncé traditionnel : *si,* trois des quatre quadrilatères A1B1C1D1, A2B2C2D2, A3B3C3D3, A4B4C4D4 sont circonscriptibles
alors, le quatrième l'est aussi.

5. Five-Circle theorem

VISION

Figure :

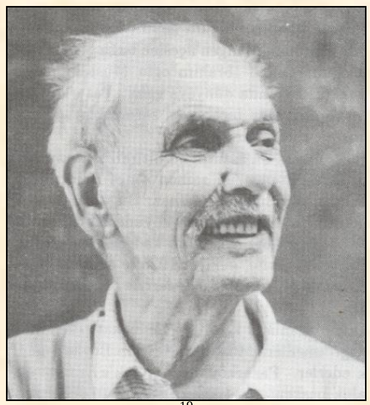


Traits : ABC un triangle,
P, Q deux points de [BC],
1, 2, 3 les cercles inscrits resp. des triangles ABP, APQ, AQC
et *4, 5* les cercles inscrits resp. des triangles ABQ, APC.

Donné : *1, 2* et *3* sont égaux *si, et seulement si,* *4* et *5* sont égaux. [18]

Note historique : ce résultat présenté dans son premier article de 1986, Huseyin Demir résoud métriquement ce résultat et demande une approche synthétique.
Dans le second article écrit avec Cem Tezer en 1989, Huseyin Demir présente la démonstration synthétique qui est exposée en **E. 1.** The Four-Circle Theorem montrant au passage que l'hypothèse [*2* est égal à *1*] est redondante.

6. Une courte note sur Huseyin Demir



[19]

Une présentation de Hüseyin Demir a été faite en 1995 suite à son décès dans *Mathematics World* en langue turque par le géomètre Cem Tezer du Middle East Technical University d'Ankara où travaillait durant une longue période H. Demir. Cet article relate la vie, la personnalité, les relations, les points de vue et la liste des publications de Hüseyin Demir.

F. JORDAN B. TABOV

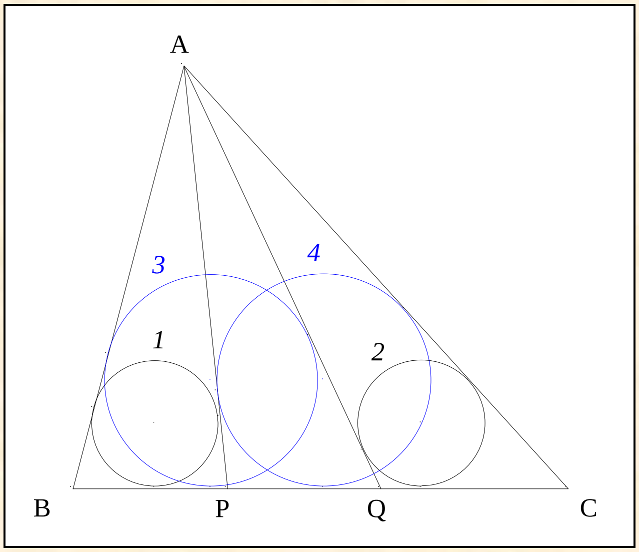
1. The Four-Circle Theorem

VISION

Figure :

[18] Demir H., Incircles within, *Mathematics Magazine* **59** (1986) 77-83 ;
Demir H., Tezer C., More on incircles, *Mathematics Magazine* **62** (1989) 107-114.

[19] Cette photo de H. Demir a fait l'objet de la page couverture de *Mathematics World* en 1995.

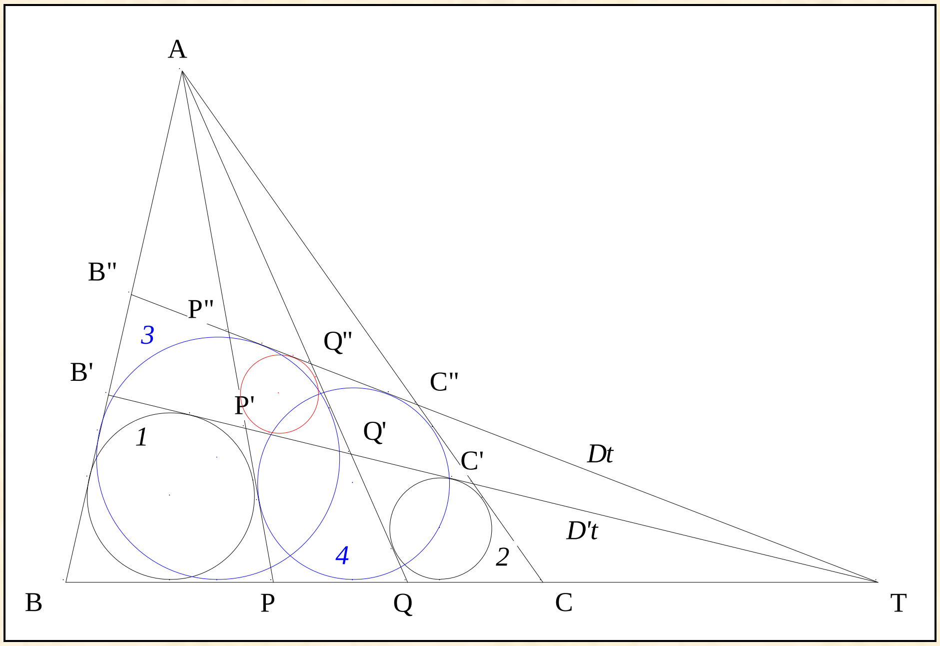


Traits : ABC un triangle,
P, Q deux points de [BC],
1, *2* les cercles inscrits resp. des triangles ABP, AQC
et *3*, *4* les cercles inscrits resp. des triangles ABQ, APC.

Donné : *1* et *2* sont égaux *si, et seulement si* *3* et *4* sont égaux. [20]

VISUALISATION NÉCESSAIRE

- Raisonnons par contraposition : *si*, *3* et *4* sont inégaux *alors*, *1* et *2* sont inégaux.



[20] Tabov Jordan B., Anote on the Five-Circle Theorem, *Mathematics Magazine* **63** (April 1990) 92-94 ; http ://mathdl.maa.org/images/cms_upload/Tabov06556250.pdf

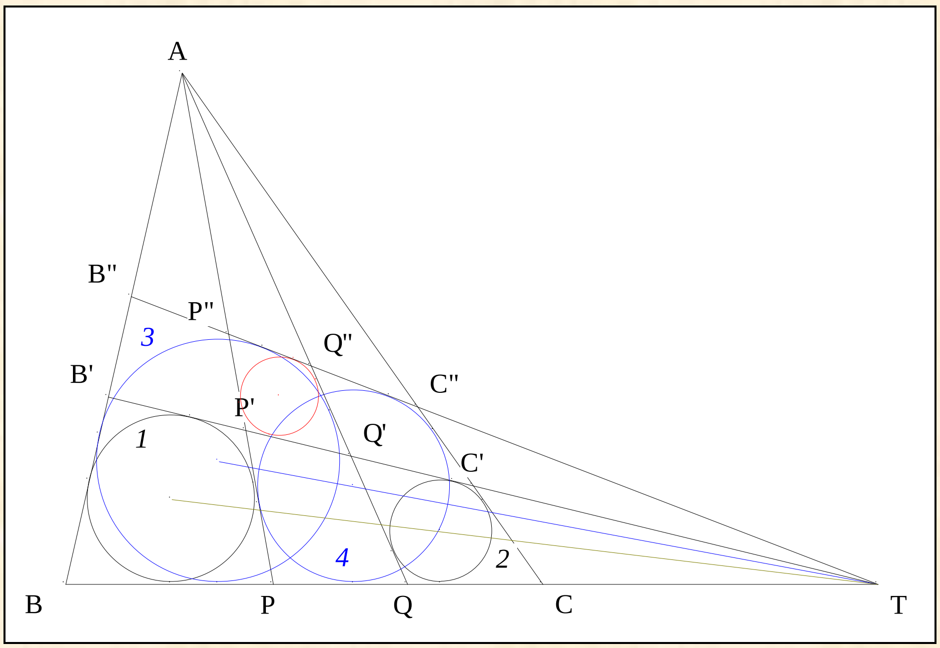
- Notons T le centre externe d'homothétie de *3* et *4*,
  Dt la seconde tangente commune extérieure de *3* et *4*,
  B", C" les points d'intersection de *Dt* resp. avec (AB), (AC),
  P", Q" les points d'intersection de *Dt* resp. avec (AP), (AQ),
  D't la seconde tangente à *1* issue de T,
  B', C' les points d'intersection de *D't* resp. avec (AB), (AC)
  et P', Q' les points d'intersection de *D't* resp. avec (AP), (AQ).

- D'après **E. 1.** Le troisième cercle de Demir,
  les quadrilatères BQQ"B" et BPP'B' étant circonscriptible,
  le quadrilatère P'Q'Q"P" est circonscriptible.

- D'après **E. 1.** Le troisième cercle de Demir,
  les quadrilatères P'Q'Q"P" et PCC"P" étant circonscriptible,
  le quadrilatère QCC'Q' est circonscriptible.

- **Conclusion :** *1* et *2* admettant T pour centre d'homothétie, sont inégaux.

Scolie :



- **Conclusion :** les droites des centres de *1* et *2*, de *3* et *4* passent par T.

VISUALISATION SUFFISANTE

- Raisonnons par contraposition : *si*, *1* et *2* sont inégaux *alors*, *3* et *4* sont inégaux.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que *3* et *4* sont inégaux.

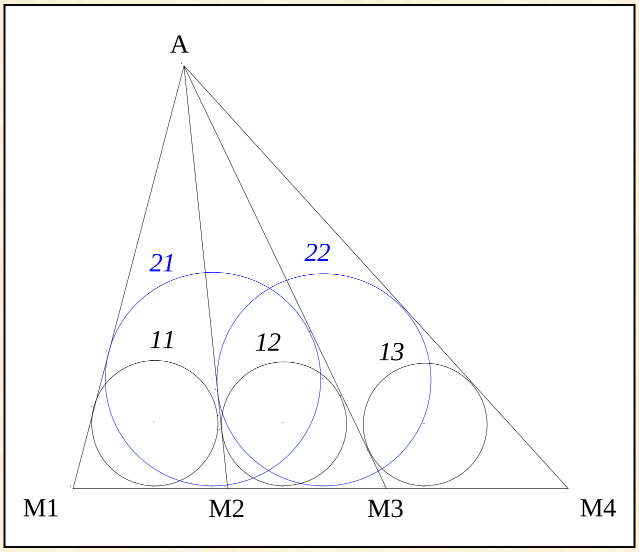
Commentaire : "The Four-Circle Theorem" est une généralisation du "Five-Circle Theorem".
Cette généralisation sera le "moteur" de l'hypothèse d'hérédité de la récurrence que nous envisageons en **F.** The equal incircles theorem.
Une preuve peut être envisagée à partir de **D. 2.** Un exercice d'Olympiade.

Note historique : ce résultat est démontré métriquement en 1990 par Jordan B. Tabov, professeur à l'Institut mathématiques de Sofia (Bulgarie).

G. EQUAL INCIRCLES THEOREM

VISION

Figure :



Simulation avec n = 4

Traits :

	A	un point,	
	n	un naturel supérieur ou égal à 4,	
	$M_1, \ldots, M_n$	une suite de points alignés,	
	k	un naturel de [1, n-2],	c'est un niveau
	i	un naturel de [1, n-k],	
	Δ_i^{i+k}	le triangle M_iAM_{i+k}	
et	k_i	le cercle inscrit de Δ_i^{i+k} tel que les 1_i soient égaux.	

Donné : $\forall$ n ≥ 4, $\forall$ k = 1, 2,.., n-2, $\forall$ i = 1,.., n-k, les k_i sont égaux. [21]

[21] Wells D., *Curious and Interesting Geometry*, Penguin Books (1991)
Bogomolny A., Equal incircles theorem, Cut-the-knot ;
http://www.cut-theknot.org/Curriculum/Geometry/AdjacentIncircles.shtml

VISUALISATION

- **Scolie :** les 1_i sont les cercles du "premier niveau",
  2_i sont les cercles du "deuxième niveau",
  …
  k_i sont les cercles du "i-ème niveau"

  …
  $(n\text{-}2)_i$ sont les cercles du "(n-2)-ème niveau".

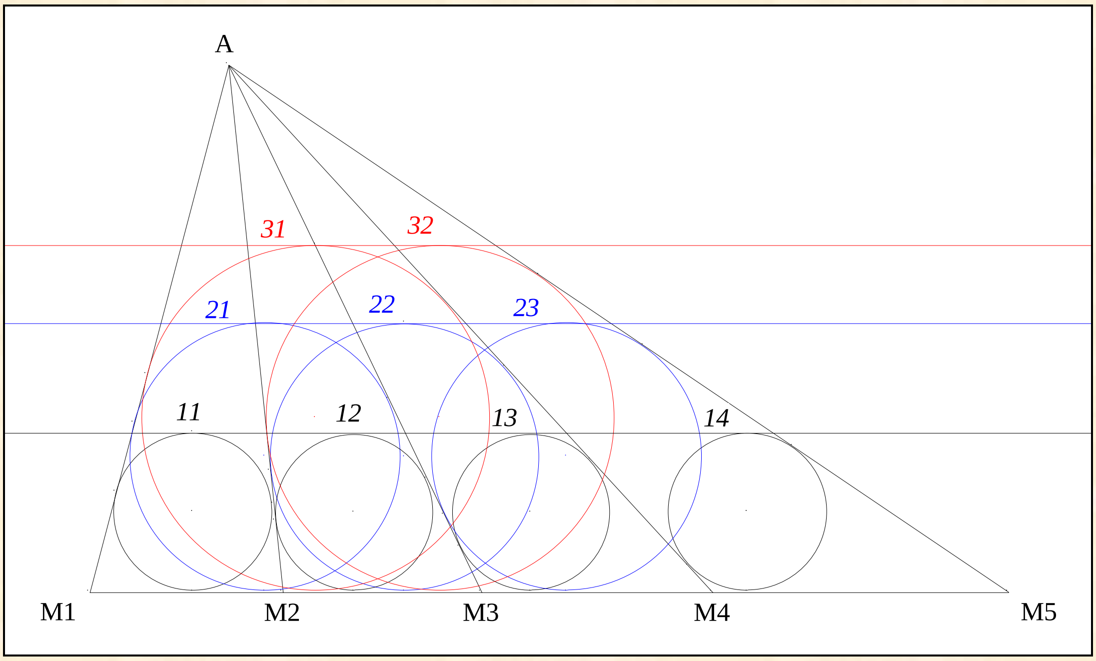
- Raisonnons par récurrence.

- Notons *P*(n) la fonction propositionnelle [$\forall$ k = 1, 2,.., n-2, $\forall$ i = 1,.., n-k, les k_i sont égaux].

- **Hypothèse de départ :** *P*(4) est vraie. (Cf. **F. 1.** The Four-Circle Theorem).

- **Hypothèse d'hérédité :** au rang n, P(n) est vraie ;

  au rang (n+1)



Simulation du passage du rang 4 au rang 5

* Considérons les cercles égaux *12* et *14* ;
d'après **F. 1.** The Four-Circle Theorem, *22* et *23* sont égaux ;
en conséquence, *21*, *22* et *23* sont égaux.

* Considérons les cercles égaux *21* et *23* ;
d'après **F. 1.** The Four-Circle Theorem, *31* et *32* sont égaux.

* **Commentaire :** pour le passage du rang 4 au rang 5, "The Four-Circle Theorem" apparaît comme le "moteur" de l'hypothèse d'hérédité et cette simulation nous permet d'envisager l'allure de la preuve à mener dans le cas du passage de n à (n+1).

* N'ayant aucune contrainte sur le choix de n,

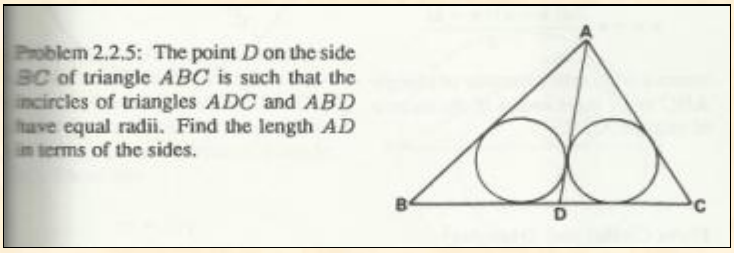
la proposition $[\forall\ n \geq 4, \quad P(n) \rightarrow P(n+1)]$ est vraie.

- **Conclusion :** d'après le théorème de récurrence, la proposition $[\forall\ n \geq 4, \quad P(n)]$ est vraie.

Commentaire : dans la rubrique AdjacentIncircles du site *cut-the-knot* d'Alexander Bogomolny[22], celui-ci écrit

I do not know of an elegant proof of that theorem.

Note historique : ce résultat apparaît sans preuve et sans référence en 1991 chez David Wells[23] dans *Curious and Interesting Geometry*.
En 2004, Ross Honsberger[24] examine ce problème et le considère à tort comme une généralisation d'un San Gaku de 1897 gravé sur une tablette de la Prefecture de Chiba[25].


Problem 2.2.5: The point D on the side BC of triangle ABC is such that the incircles of triangles ADC and ABD have equal radii. Find the length AD in terms of the sides.

[26]

Notons que ce San Gaku est déjà répertorié dans le livre de Teisi Fujita[27] datant de 1781 et qu'il ne correspond pas au problème au regard de la question posée. Peut-être du point de vue de la forme de la figure…

Cependant, le résultat est une conséquence et une généralisation d'un théorème publié en 1986 par le Turc Hüseyin Demir. En 1990, Jordan B. Tabov affirme

si, ma preuve n'est pas élégante, alors la généralisation l'est.

Une preuve métrique est publiée par Claudio Bernardi et Angela Drei du lycée *Torricelli* de Faenza près de Ravenne (Émilie-Romagne, Italie) dans la revue *Archimède* [28].

Le 10 août 2009, les professeurs Yves Martin et Domique Tournès[29] de l'université de la Réunion (France) proposent à nouveau une preuve métrique.
En écho, Gery Huvent[30] professeur en classes préparatoires PCSI au lycée Faidherbe de Lille (France) en donne, une semaine après, une preuve à l'aide des fonctions hyperboliques. Le 31 août 2009, Yves Martin et Domique Tournès [31] en donne une

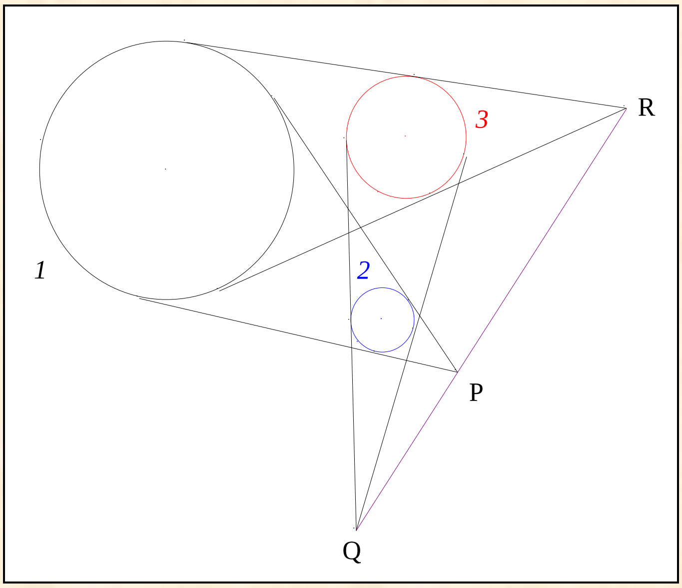
---

22 Bogomolny A., *cut-the-knot* ; http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/AdjacentIncircles.shtml
23 Wells D., *Curious and Interesting Geometry*, Penguin Books (1991)
24 Honsberger R., *Mathematical Delights*, section **17**, MAA (2004)
25 Akira Hirayama, Chiba (1970) published by Naritasan Shiryokan.
26 Fukagawa H., Pedoe D., Japanese Temple Geometry Problems, # **2.2.5.**, no solution given, The Charles Babbage Research Center, Winnipeg (1989) ;
Unger J. M., *A collection of Sangaku problems*, Problem **8**, **9**, **12**, **24** (16/10/2011) ;
http://people.cohums.ohio-state.edu/unger26/Sangaku.pdf
27 Teisi Fujita (1734-1807), *Seiyo Sanpo* (1781), *Mathematical Detailed* vol. **3**.
28 Drei A., *cut-the-knot* ; http://www.cut-the-knot.org/triangle/EqualIncirclesTheorem.shtml ;
Bernardi C., Drei A., Un problema da discutere, *Archimède* **2** (2010).
29 Martin Y. et Tournès D., Démonstrations élémentaires et aspect dynamique du théorème des cercles inscrits égaux (10/08/2009) ; http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/spip.php?article148
30 Huvent Gery, Le théorème des cercles inscrits égaux par la trigonométrie hyperbolique (16 et 24/08/2009) ;
http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/spip.php?article152
http://gery.huvent.pagesperso-orange.fr/sangaku/tcie_v2.pdf
31 Martin Y. et Tournès D., Nouvelle preuve du théorème des cercles inscrits égaux et considérations didactiques (31/08/2009)

nouvelle preuve.

H. ANNEXE

1. La droite de d'Alembert [32]



Traits : *1*, *2*, *3* trois cercles deux à deux extérieurs
et P, Q, R les points d'intersections des tangentes communes extérieures de *1* et *2*, de *2* et *3*, de *3* et *1*.

Donné : P, Q et R sont alignés.

---

[32] http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/spip.php?article155
Chasles M., Note **VI**, *Aperçu historique* (1837) 293.

I. ARCHIVES

PRÉMICES

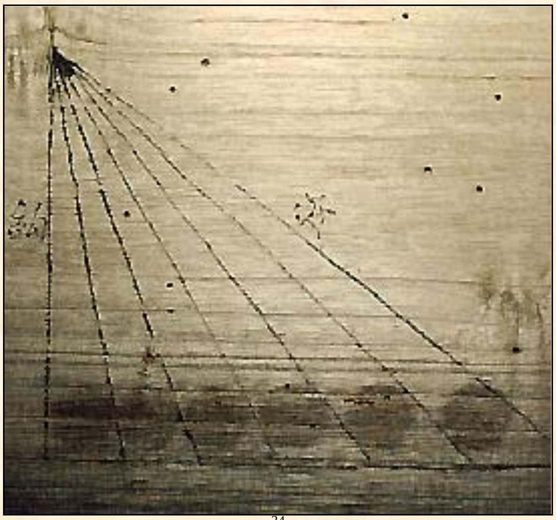
DU

EQUAL INCIRCLES THEOREM

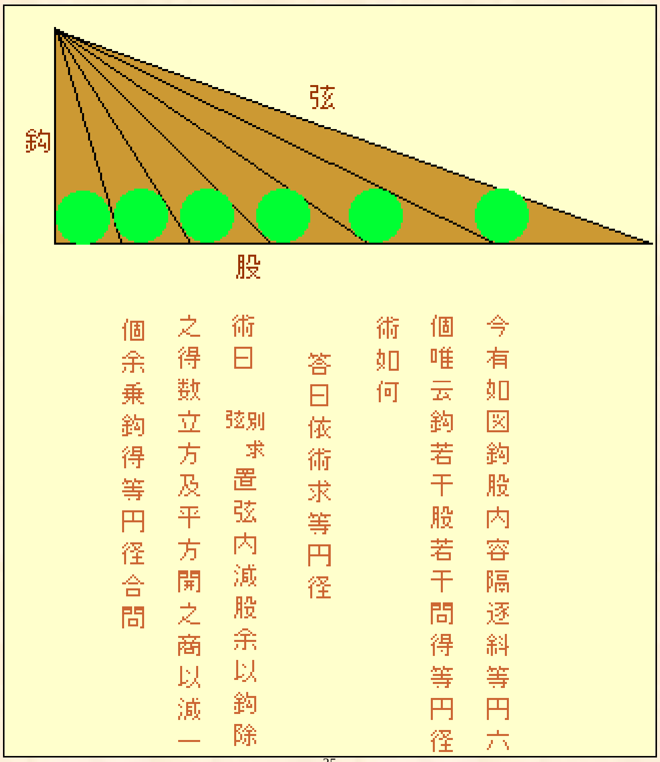
Je remercie tout particulièrement Douglas Rogers de l'Université d'Hawaï (États-Unis) de m'avoir communiqué les références suivantes qu'il a puisées sur le site du Dr. Kotera Hiroshi et d'autres. Actuellement, il enseigne à l'Université des Sciences de Tokyo (Japon), institution qui a succédé à l'Académie de Physique où Sawayama Kazuburo professait après avoir enseigné les élèves-officiers de l'Académie militaire.

[33]

[33] Tablette votive du Hachiman Shrine datant de 1810 dans *Gunma-ken* ; http://www.wasan.earth.linkclub.com/gunma/yahata1.html



[34]

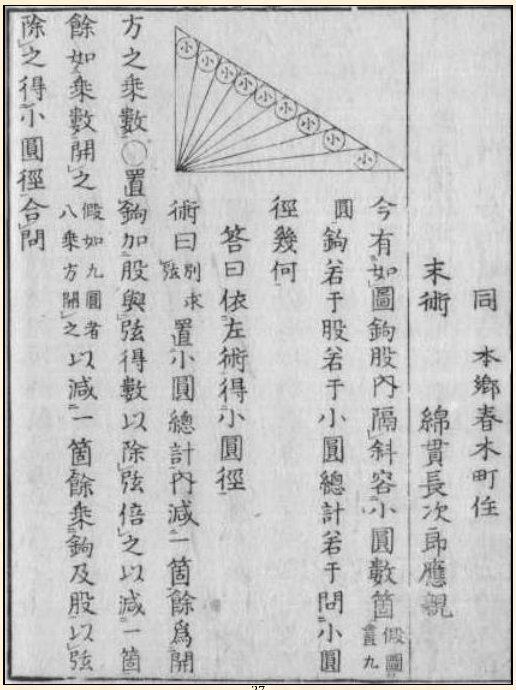


[35]

34 Reproduction du 6eme sangaku de la tablette votive précédente ; http://www.wasan.earth.linkclub.com/gunma/yahatabig1.html

35 Solution en japonais, à la manière du Brahmapoutre Jojutsu ; http://www.wasan.earth.linkclub.com/gunma/yahatasol.html

36



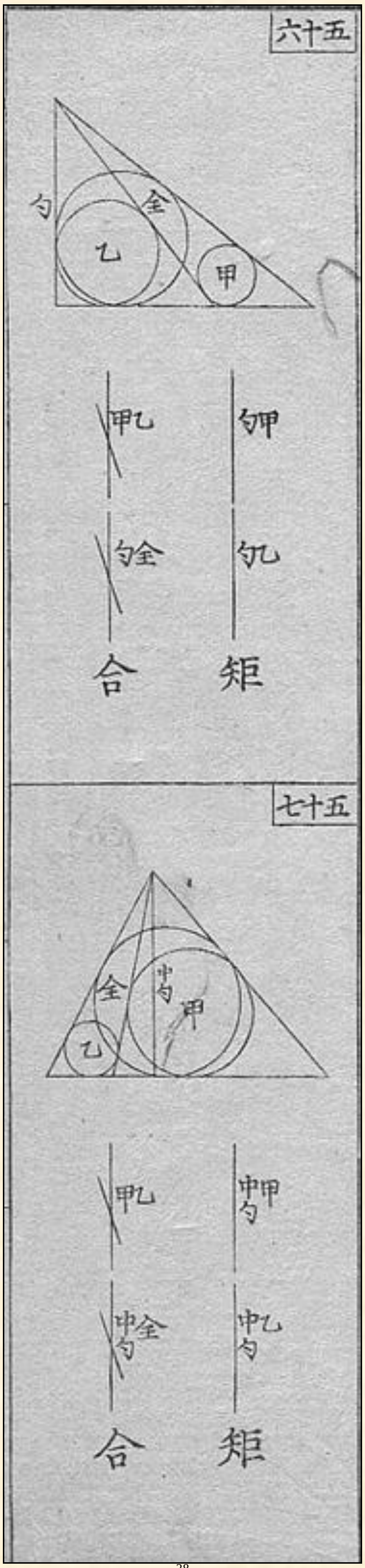
同　本郷春木町住
末術　綿貫長次郎應親
今有如圖鈎股內隔斜容小圓數箇假圖畫九
圓鈎若干股若干小圓總計若干問小圓
徑幾何
答曰依左術得小圓徑
術曰別求弦置小圓總計內減一箇餘爲開
方之乘數○置鈎加股與弦得數以除弦倍之以減一箇
餘如乘數開之假如九圓者八乘方開之以減一箇餘乘鈎及股以弦
除之得小圓徑合問

37

---

36 Tablette votive du Takasago Shrine, problème moderne de Hyogo-ken pour un triangle obtusangle ; http://www.wasan.earth.linkclub.com/hyogo/takasago.html

37 Nine circles in a right triangle p. 72 of the first fascicle of Fujita Kagen's pioneering collection of Sangaku problems, Shinpeki Sanpo (Mathematical Problems Exhibited at Temples, 1789) ; http://www.wasan.earth.linkclub.com/jinpeki/jinpeki37.html



38

This type of problem is covered by the general formulae #56 (right triangles) and #57 (scalene triangles) Sanpo Jojutsu (1841/1842?) ; http://www.wasan.earth.linkclub.com/jojutu/jojutu.html
You will see #56 at the top left, with #57 below it ; http://www.wasan.earth.linkclub.com/jojutu/jojutu11.html