DEUX COUPLES

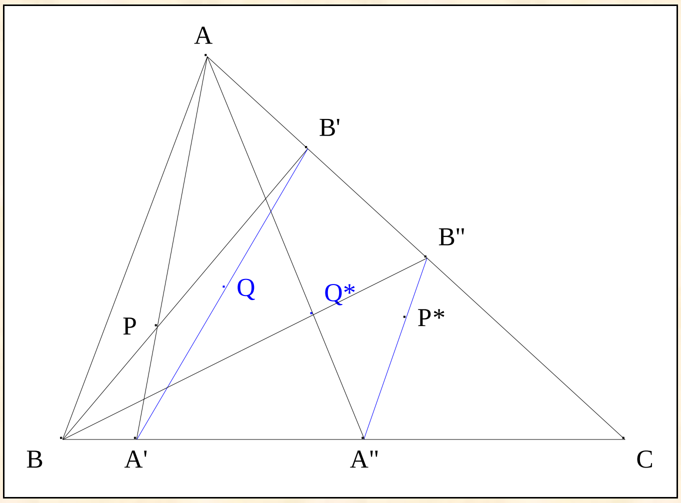
DE

POINTS ISOGONAUX

FIRST SYNTHETIC PROOF

†

Jean-Louis AYME



Résumé. L'auteur présente une preuve originale et purement synthétique d'un résultat d'Alexey Zaslavsky publié en 2004 dont un cas particulier a été présenté en 2002 au B.W.M., mais non retenu pour la 38-ième O.I.M. de Mar del Plata (Argentine) en 1997.
Pour l'auteur, Christopher J. Bradley apparaît en être à l'origine en 1994 dans *Crux Mathematicorum*.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author present an original and purely synthetic proof of an Alexey Zaslavsky's result published in 2004 including a particular case which was presented in 2002 at the B.W.M., but not selected for the 38th O.I.M. at Mar del Plata (Argentina) in 1997.
For the author, Christopher J. Bradley appears to be originally in 1994 in *Crux Mathematicorum*.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Sommaire

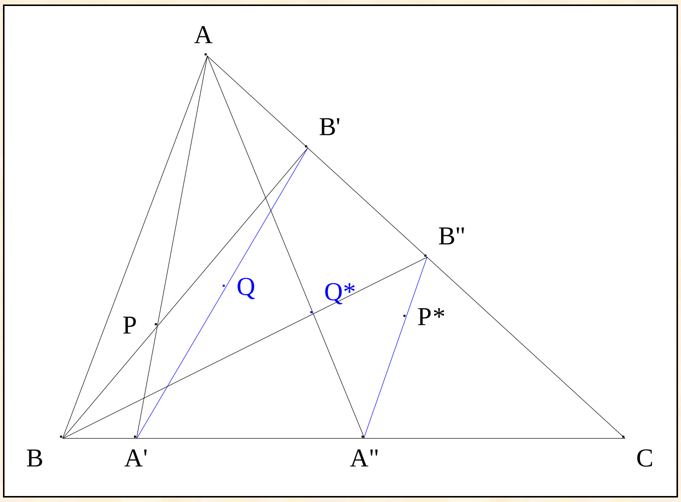
A. ALEXEY ZASLAVSKY [1]

Un géomètre russe

1. Le problème de 2004

VISION

Figure :



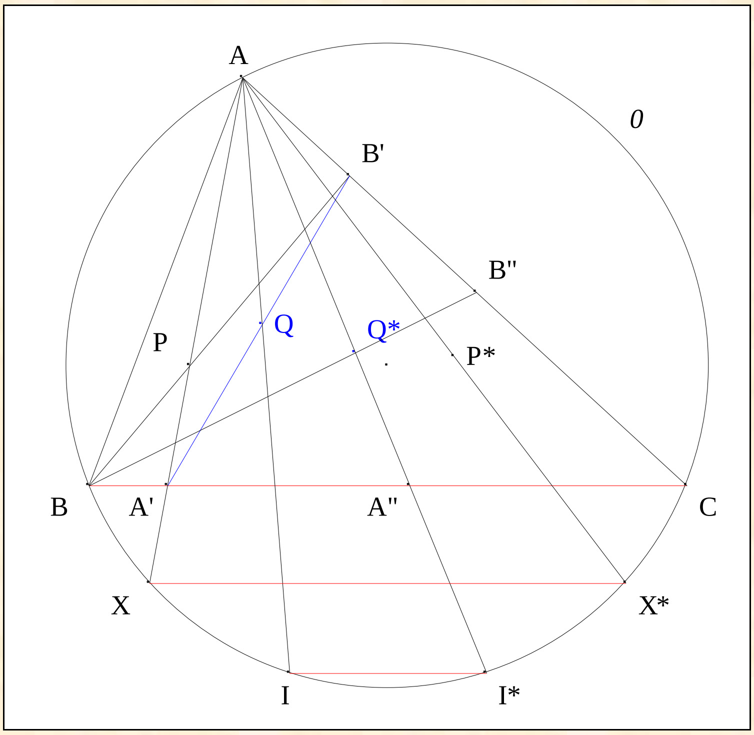
Traits : ABC un triangle,
P un points,
A', B' les pieds des céviennes (AP), (BP),
Q un point,
Q* le conjugué isogonal de Q,
A'', B'' les pieds des céviennes (AQ*), (BQ*)
et P* le conjugué isogonal de P.

Donné : *si,* Q est sur (A'B') *alors,* P* est sur (A''B'').

---

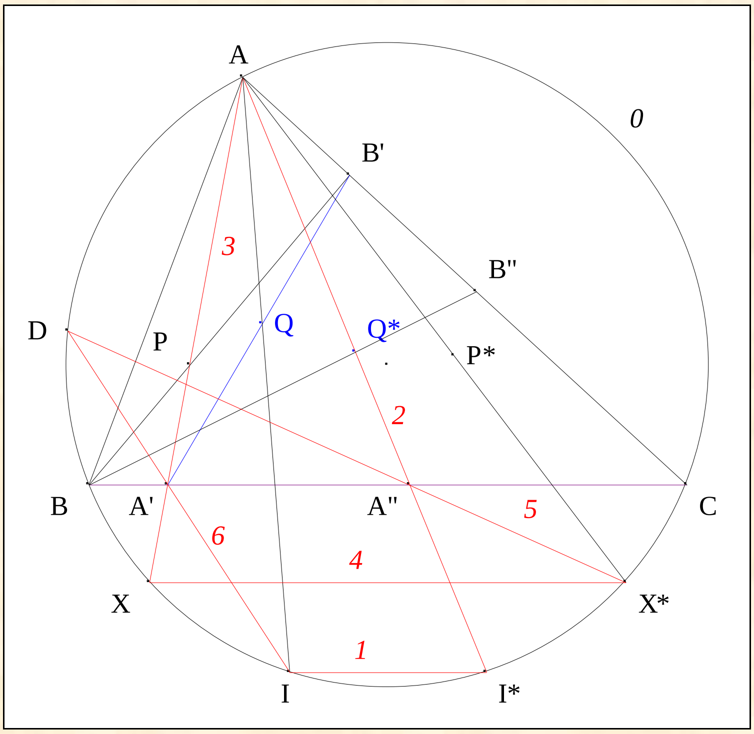
1 Zaslavsky A., Excircle and circumcircle, Message *Hyacinthos* # **9145** du 28/01/2004
Collinear, AoPS du 16/04/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=402242

VISUALISATION



- Notons $\quad$ *O* $\quad$ le cercle circonscrit à ABC,
  et $\quad$ X, X*, I, I* $\quad$ les circumtraces de (AP), (AP*), (AQ), (AQ*).

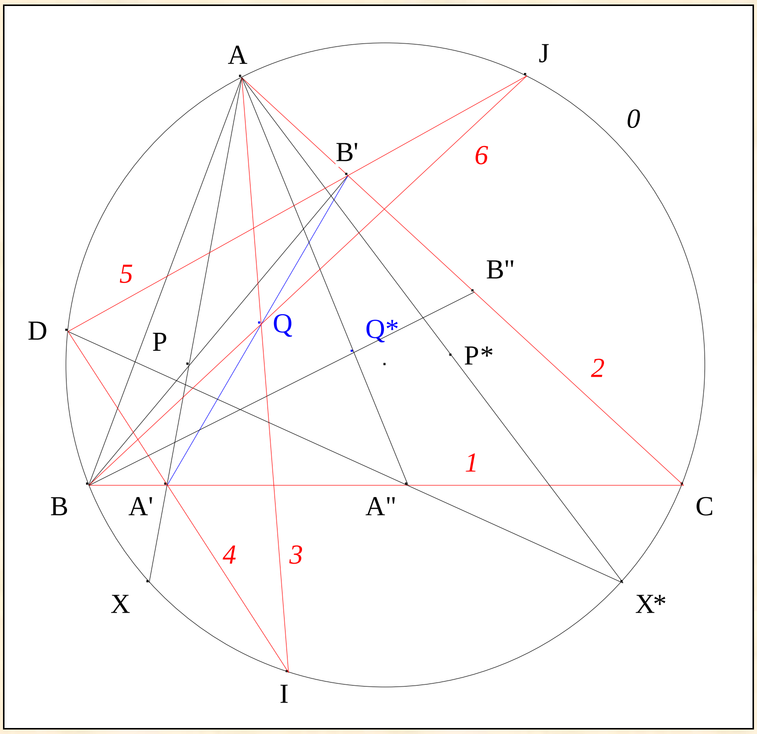
- (P, P*) et (Q, Q*) étant deux couples de points isogonaux relativement à ABC,
  (XX*), (II*) et (BA'A"C) sont parallèles entre elles.



- Notons $\quad$ D $\quad$ le point d'intersection des droites (A'I) et (A"X*).

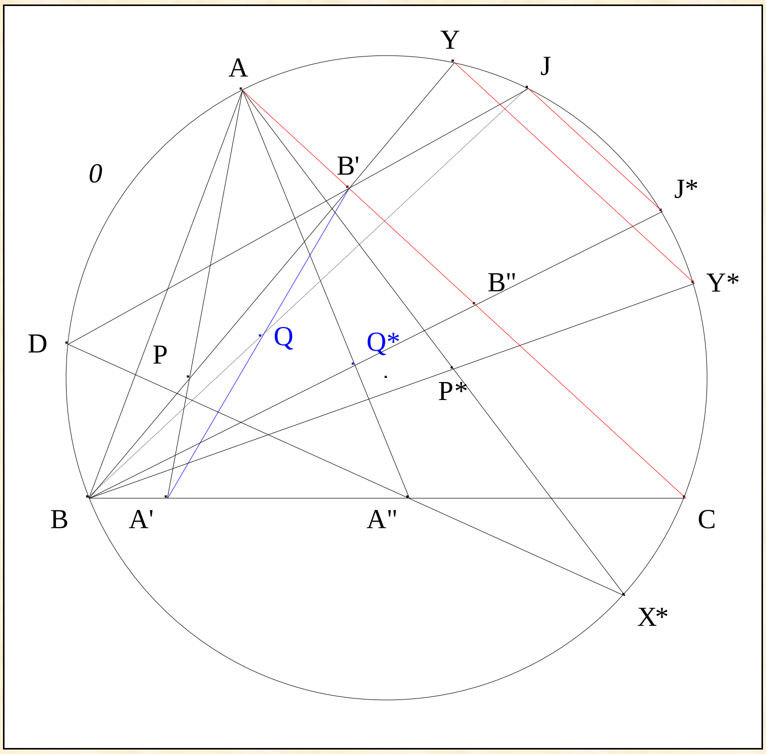
- Considérons l'hexagone I I*AXX*DI dont cinq sommets sont sur *0*.

- D'après "L'équivalence d'Aubert-M'Kensie " (Cf. Annexe **1**),
  (A"A') étant la pascale de l'hexagone I I*AXX*DI, D est sur *0*.



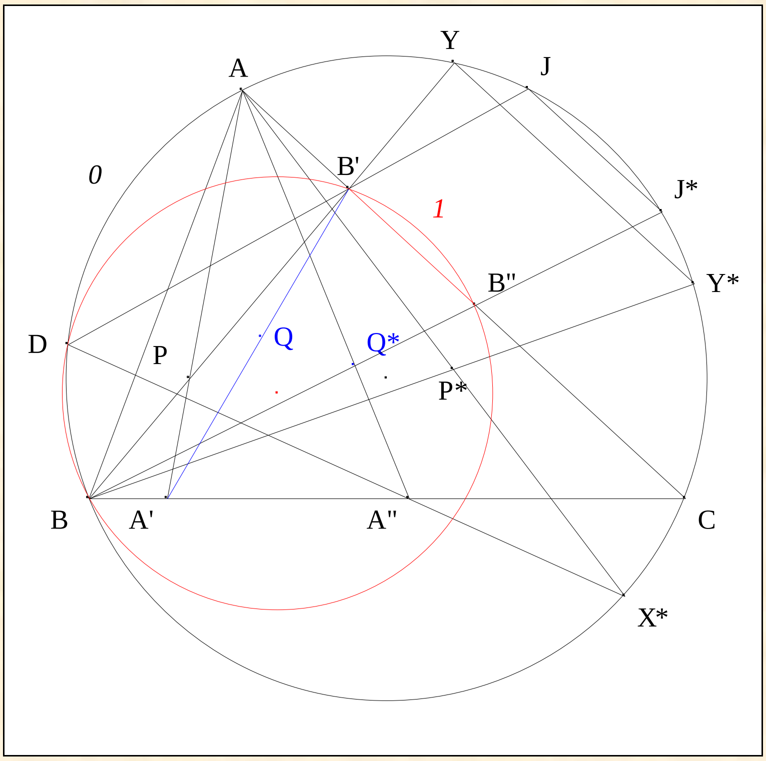
- Notons J la circumtrace de (BQ).

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe **2**),
  la pascale (A'Q) de l'hexagone cyclique BCAIDJB passe par le point d'intersection de (AC) et (DJ) i.e. par B'.



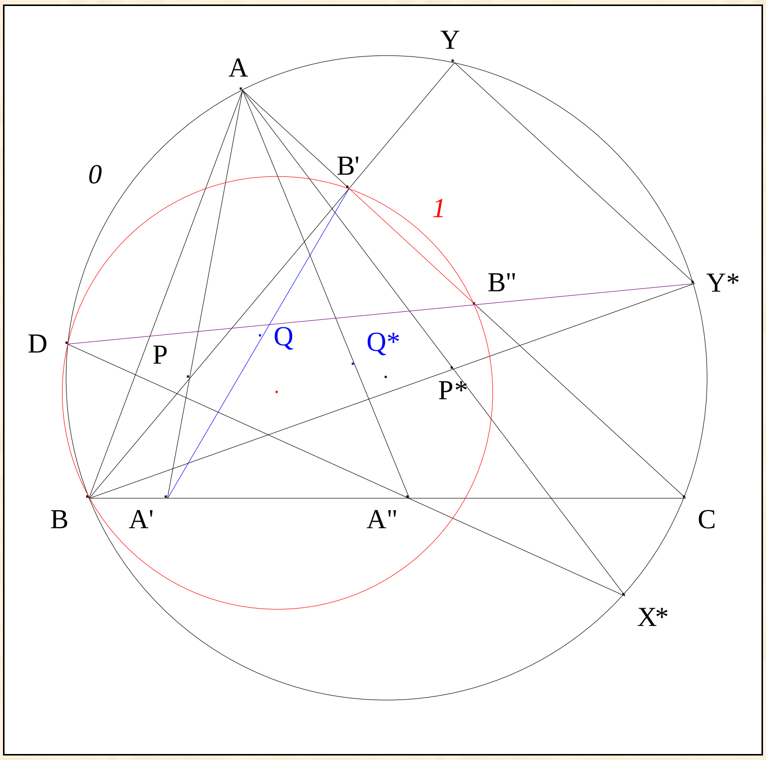
- Notons Y, Y*, J* les circumtraces de (BP), (BP*), (BQ*).

- (P, P*) et (Q, Q*) étant deux couples de points isogonaux relativement à ABC, (YY*), (JJ*) et (AB'B"C) sont parallèles entre elles.

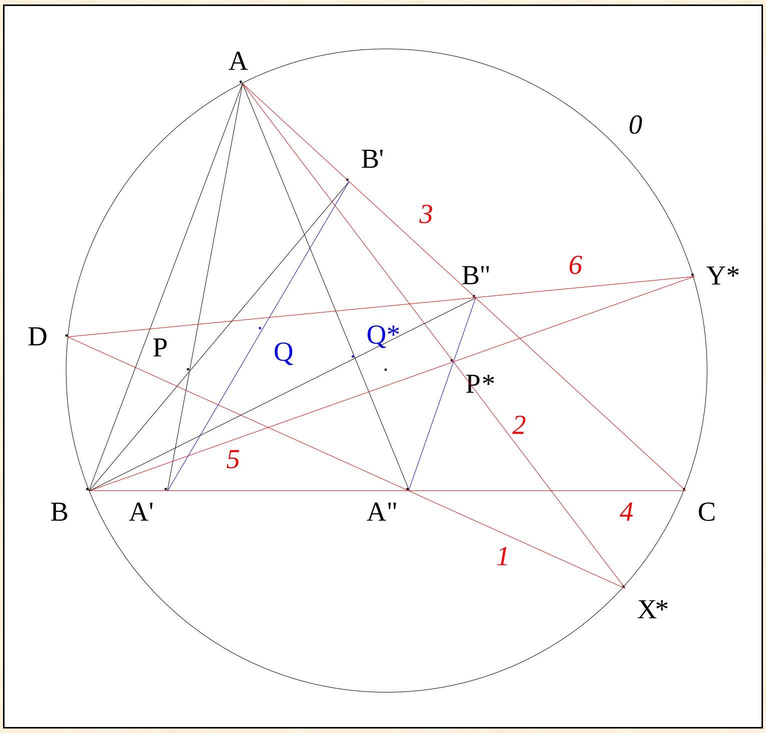


- Le cercle *0*, les points de base B et D, les moniennes naissantes (J*BB") et (JDB'), les parallèles (J*J) et (B"B'), conduisent au théorème **0"** de Reim ;
  en conséquence, B, D, B' et B" sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle.



- Les cercles *0* et *1*, les points de base B et D, la monienne (YBB'), les parallèles (YY*) et (B'B"), conduisent au théorème **0'** de Reim ;
  en conséquence, Y*, D et B" sont alignés.



- D'après Pascal "Hexagramma mysticum", (A"P*B") est la pascale de l'hexagone cyclique DX*ACBY*D.

- **Conclusion :** P* est sur (A"B").

Scolie : lorsque I et I* sont confondus, (I I*) devient la tangente en I.

2. A propos d'Alexey Zaslavsky

Alexey A. Zaslavsky est un chercheur attaché à l'institut Central Economics and Mathematics de Moscou (Russie). Il est aussi actuellement président du jury des Olympiades Internationales de Géométrie.

B. BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK[2]

OR

GERMAN NATIONAL MATHEMATICS OLYMPIAD 2002

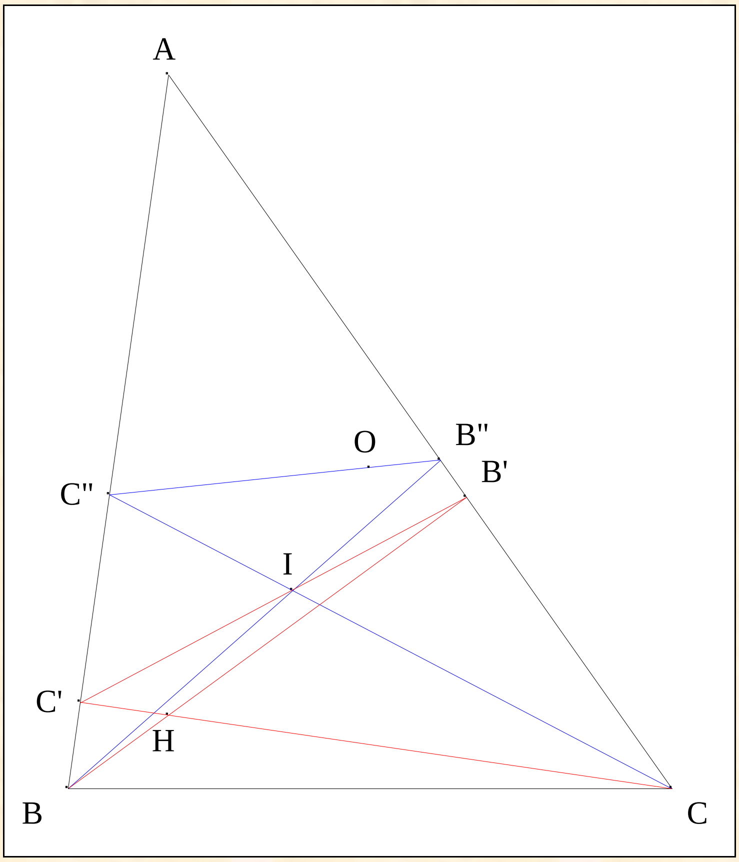
1. Le problème particulier

VISION

Figure :

---

[2] Problem **4**, B.W.M. (Bundeswettbewerb Mathematik or German National Mathematics Competition) (2002) **2** round
IMO short list 1997, problem **16** ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php?c=1&cid=17&year=1997
Collinear iff the points P, Q and O are collinear, IMO Shortlist 1997, Q**16**, AoPS du 09/08/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=1219068
Bissectors and altitudes, AopS du 01/09/2005 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=50582
Solve synthetically [I on DE ↔ O on PQ], AoPS du 13/05/2004 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=5697



Traits :	ABC	un triangle,
	B', C'	les pieds des B, C-hauteurs de A.
	I	le centre de ABC,
	B", C"	les pieds des B, C-bissectrices de ABC,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC.

Donné : I est sur (B'C') *si, et seulement si,* O est sur (B"C").

VISUALISATION NÉCESSAIRE

- I est sur (B'C').
- **Scolies :** **(1)** I est l'isogonal de I.
  (2) O est l'isogonal de H.
- **Conclusion :** d'après **A. 1.** Le problème, O est sur la droite (B"C").

VISUALISATION SUFFISANTE

- O est sur la droite (B"C").
- **Scolies :** **(1)** I est l'isogonal de I.
  (2) H est l'isogonal de O.
- **Conclusion :** d'après **A. 1.** Le problème, I est sur la droite (B'C').

2. Note historique

en 2004, Alexey A. Zaslavsky[3] propose une situation accompagnée de quatre questions. Dans sa réponse, Darij Grinberg [4] ajoute une cinquième question en précisant qu'elle est équivalente à la deuxième et rappelle que cette équivalence a fait l'objet d'un problème posé en 2002 au B.W.M. [5] et conclut en disant :

In fact, it was a very hard problem.
I was lucky enough to know the method of trilinear coordinates to solve it!.

Sur un autre site de Géométrie, Darij Grinberg précise sa pensée en indiquant:

This problem, one of the hardest classic geometry problems being given at the BWM,
has a simple solution using trilinear coordinates.
No completely synthetic solution is known to me.

De son côté, Francisco Bellot Rosado, le rédacteur en chef de la revue espagnole *Revistaoim* rappelle que ce problème a été proposé, mais non retenu pour la 38-ième O.I.M. de Mar del Plata (Argentine) en 1997.
Le 28 janvier 2004, Alexey A. Zaslavsky [6] généralise sa situation et affirme:

This can be easily proved by trilinear coordinates.

Dans sa réponse, Darij Grinberg[7] signale:

This was the same generalization I found in 2002 while I solved the problem.

3. Archives

Re: excircle and circumcircle

Dear Alexey,

In Hyacinthos message #9139, you wrote:

>> Let AX and BY are the bisectrix of triangle ABC,
>> O, R - the center and radius of its circumcircle,
>> I1, r1 - the center and radius of excircle
>> touching the sideline AB, A', B', C' - the
>> touching points of excircle with BC, CA, AB.
>> Then next conditions are equivalent:
>> 1. R=r1.
>> 2. O is in line XY.
>> 3. O is the orthocenter of A'B'C' (I suppose
>> also that A'B'C' is autopolar with respect to
>> circumcicle of ABC).
>> 4. cosA+cosB=cosC.

You can add the following equivalent condition:
5. If I is the incenter of triangle ABC, and Hb
and Hc are the feet of the altitudes from B and C,
then I lies on HbHc.

The equivalence of the conditions 2. and 5. was the
subject of Problem 4 in the Bundeswettbewerb
Mathematik (German National Mathematics Olympiad)
2002, 2 round. In fact, it was a very hard problem;
I was lucky enough to know the method of trilinear
coordinates to solve it!

Sincerely,
Darij Grinberg

[8]

[3] Zaslavsky A. A., Excircle and circumcircle, Message *Hyacinthos* # **9139** du 27/01/2004
[4] Grinberg D., Excircle and circumcircle, Message *Hyacinthos* # **9141** du 27/01/2004
[5] B.W.M., problem **4**, second round
[6] Zaslavsky A. A., Excircle and circumcircle, Message *Hyacinthos* # **9145** du 28/01/2004
[7] Grinberg D., Excircle and circumcircle, Message *Hyacinthos* # **9147** du 28/01/2004
[8] Grinberg D., Excircle and circumcircle, Message *Hyacinthos* # **9141** du 27/01/2004

Re: [EMHL] Re: excircle and circumcircle

Dear Darij!
>
>The equivalence of the conditions 2. and 5. was the
>subject of Problem 4 in the Bundeswettbewerb
>Mathematik (German National Mathematics Olympiad)
>2002, 2 round. In fact, it was a very hard problem;
>I was lucky enough to know the method of trilinear
>coordinates to solve it!
>

The equivalence of 2 and 5 is a particular case of next fact. Let given a triangle ABC and a point P. A1, B1 are the common point of AP and BC, BP and AC. Q - a point in A1B1, Q' is isogonally conjugated to Q, A2, B2 are the common points of AQ' and BC, BQ' and AC. Then the point P' isogonally conjugated to P is in A2B2. This can be easily proved by trilinear coordinates.

Sincerely Alexey

[9]

In Hyacinthos message #9145, you wrote:

>> The equivalence of 2 and 5 is a particular case
>> of next fact. Let given a triangle ABC and a
>> point P. A1, B1 are the common point of AP and
>> BC, BP and AC. Q - a point in A1B1, Q' is
>> isogonally conjugated to Q, A2, B2 are the
>> common points of AQ' and BC, BQ' and AC. Then
>> the point P' isogonally conjugated to P is in
>> A2B2. This can be easily proved by trilinear
>> coordinates.

Yes, and this was exactly the same generalization
I found in 2002 when I solved the problem!

Sincerely,
Darij Grinberg

[10]

---

[9] Zaslavsky A. A., Excircle and circumcircle, Message *Hyacinthos* # **9145** du 28/01/2004

[10] Grinberg D., Excircle and circumcircle, Message *Hyacinthos* # **9147** du 28/01/2004

C. À L'ORIGINE :

CHRISTOPHER J. BRADLEY

EN 1994

1939. [1994: 108] *Proposed by Christopher J. Bradley, Clifton College, Bristol, U. K.*

Let ABC be an acute-angled triangle with circumcentre O, incentre I and orthocentre H. Let AI, BI, CI meet BC, CA, AB respectively in U, V, W, and let AH, BH, CH meet BC, CA, AB respectively in D, E, F. Prove that O is an interior point of triangle UVW if and only if I is an interior point of triangle DEF.

Solution by the proposer.

Lemma. With respect to triangle ABC as triangle of reference, suppose the internal point J has areal coordinates (k, m, n) so that $k, m, n > 0$. Let AJ, BJ, CJ meet BC, CA, AB respectively in K, M, N. Then the point P with areal coordinates (p, q, r) is internal to triangle KMN if and only if

$$q/m + r/n > p/k,$$

$$r/n + p/k > q/m,$$

$$p/k + q/m > r/n.$$

Proof. [*Editor's note by Cathy Baker.* The areas of the triangles BCJ, ACJ and ABJ are proportional to the areal coordinates of J. For a discussion of areal coordinates, see, for example, p. 218 of H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wiley (1961).]

The equation of MN is $-mnx + nky + kmz = 0$. Since m and n are positive, the point P lies on the opposite side of MN to A if and only if $-mnp + nkq + kmr > 0$, which is the first of the above conditions.

Now P is internal to triangle KMN if and only if it is on the opposite side of MN to A, on the opposite side of NK to B and on the opposite side of KM to C. So the three inequalities are necessary and sufficient. □

In the given problem, we have

the areal coordinates of I proportional to $(\sin A, \sin B, \sin C)$,

the areal coordinates of H proportional to $(\tan A, \tan B, \tan C)$,

and

the areal coordinates of O proportional to

$$(\sin A \cos A, \sin B \cos B, \sin C \cos C).$$

Using the lemma with $J \equiv I$, $P \equiv O$ and again with $J \equiv H$ and $P \equiv I$ gives in both cases the three inequalities

$$\cos B + \cos C > \cos A,$$

$$\cos C + \cos A > \cos B,$$

$$\cos A + \cos B > \cos C.$$

The required result follows.

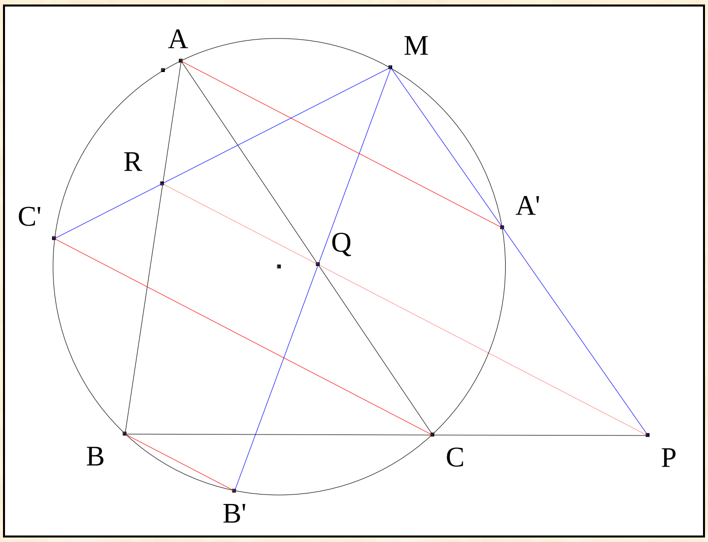
No other solutions were received.

[11]

[11] Bradley C. J., Solution Problem **1939**, *Crux Mathematicorum* 1995/03, p. 105-106

D. ANNEXE

1. L'équivalence d'Aubert-M'Kensie

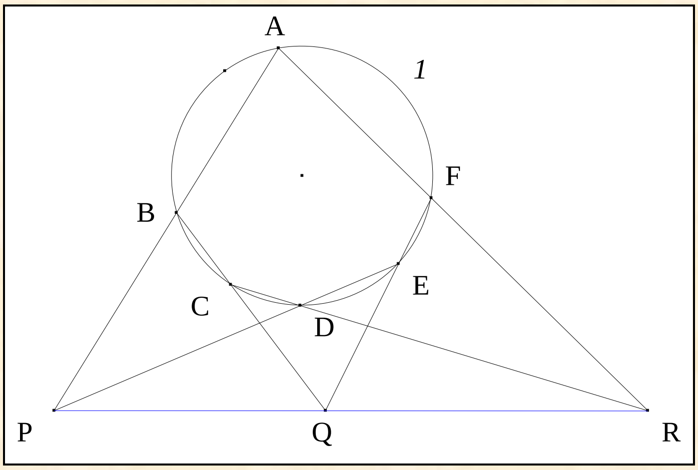


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
A', B', C' trois points de *0* tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient parallèles,
M un point,
et P, Q, R les point d'intersection de (MA') et (BC), (MB') et (CA), (MC') et (AB).

Donné : M est sur *0* *si, et seulement si,* (PQR) est une ménélienne de ABC, parallèle à (AA').

Scolie : la visualisation nécessaire est de Paul Aubert[12] et suffisante de M'Kensie [13].

2. Hexagramma mysticum[14]



Traits : *1* un cercle,

[12] Aubert P., Généralisation du problème de Pascal donnant neuf points en ligne droite, *Nouvelles Annales* (1899)
[13] M'Kensie, *Journal de Mathématiques Spéciales* de Longchamps (1887) 201
[14] Pascal B.

	ABCDEF	un hexagone tels que les points A, B, C, D, E soient sur *1*,
et	P, Q, R	les points d'intersection des droites (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si,* les points P, Q et R sont alignés.