LA DROITE D'EULER

EST

PERPENDICULAIRE

À

L'AXE ORTHIQUE

Jean-Louis AYME [1]

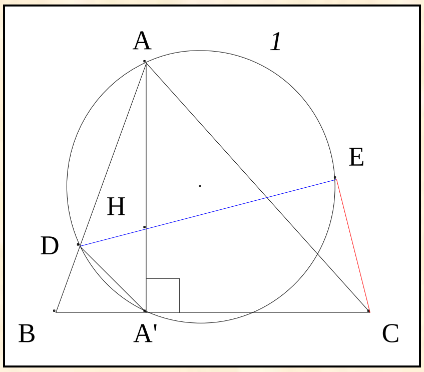
Résumé. Nous présentons une preuve purement synthétique d'un résultat d'Émile Lemoine montrant que la droite d'Euler d'un triangle est perpendiculaire à l'axe orthique de celui-ci.
Cette preuve non métrique se bâtit à partir d'un lemme "charmant" et d'un théorème "rayonnant" de Panakis qui, en se "mariant", conduisent à la généralisation d'Altshiller-Court du résultat d'Arnold. En "épousant" un point remarquable du triangle, ce dernier résultat redonne conjointement naissance à l'axe orthique et à la droite d'Euler du triangle dans la relation de perpendicularité.
Tous les résultats cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements. Ils s'adressent tout particulièrement au professeur Ercole Suppa de Teramo (Italie) qui a relu et corrigé cet article.

1. Une cévienne perpendiculaire à une droite passant par l'orthocentre

VISION

Figure :

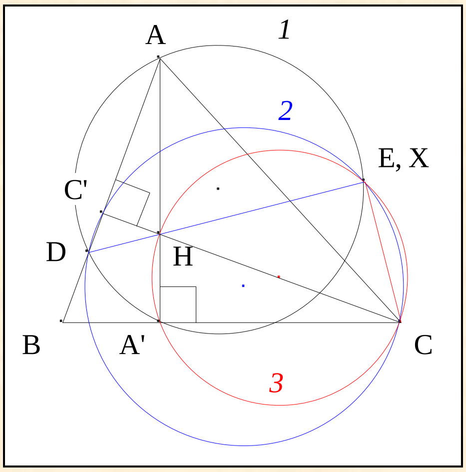


[1] Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 04/08/2013 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
A' le pied de la A-hauteur de ABC,
D un point de (AB),
1 le cercle circonscrit du triangle ADA'
et E le second point d'intersection de la droite (DH) avec *1*.

Donné : la droite (CE) est perpendiculaire à la droite (HD).

VISUALISATION



- Notons C' le pied de la C-hauteur de ABC,
  2 le cercle de diamètre [CD] passant par C'
  et *3* le cercle de diamètre [CH] passant par A'.

- D'après Miquel "Le théorème du pivot"
  appliqué au triangle AC'H avec D sur (AC'), C sur (C'H) et A' sur (AH), *1*, *2* et *3* sont concourants.

- Notons X le point de concours de ces trois cercles.

- D'après Thalès "Triangle rectangle inscrit dans un demi cercle", (DX) ⊥ (CX) et (CX) ⊥ (HX) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (DX) // (HX) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (DX) = (HX)
  ou encore les points D, H, X sont alignés ;
  en conséquence, les points X et E sont confondus.

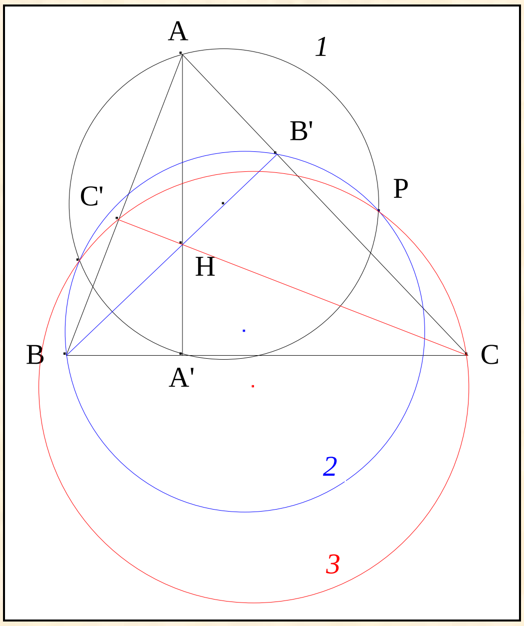
- **Conclusion :** la droite (CE) est perpendiculaire à la droite (HD).

2. Le théorème de Panakis [2]

VISION

Figure :

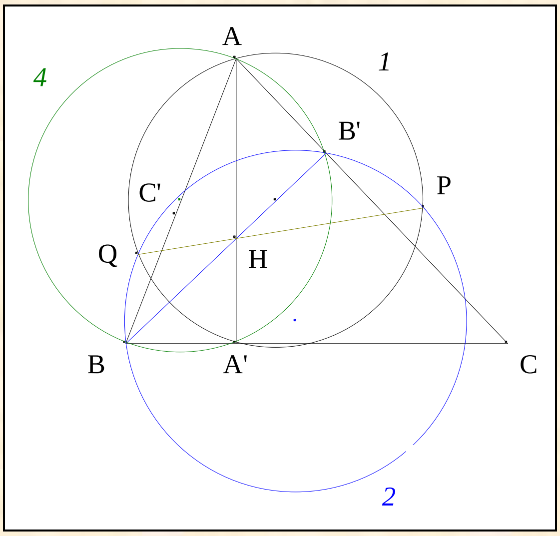
[2] Panakis I. F.



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
A', B', C' les pieds des A, B, C-hauteurs de ABC,
P un point
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits des triangles APA', BPB', CPC'.

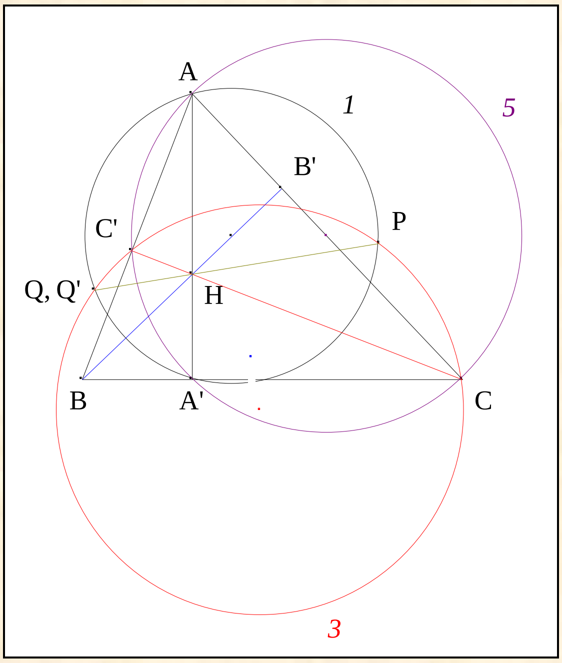
Donné : *1*, *2* et *3* se recoupent en un second point.

VISUALISATION



- Notons *4* le cercle de diamètre [AB] ; il passe par A' et B' ;
  et Q le second point d'intersection de *1* et *2*.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" appliqué à *1*, *2* et *4*, les points P, H et Q sont alignés.



- Notons 5 le cercle de diamètre [AC] ; il passe par A' et C' ;
  et Q' le second point d'intersection de *1* et *3*.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" appliqué à *1*, *3* et *5*, les points P, H et Q' sont alignés ;
  en conséquence, les points Q et Q' sont confondus.

- **Conclusion :** les cercles *1*, *2* et *3* se recoupent en un second point.

Scolie : la droite passant par les centres de ces cercles, est perpendiculaire à (HP).

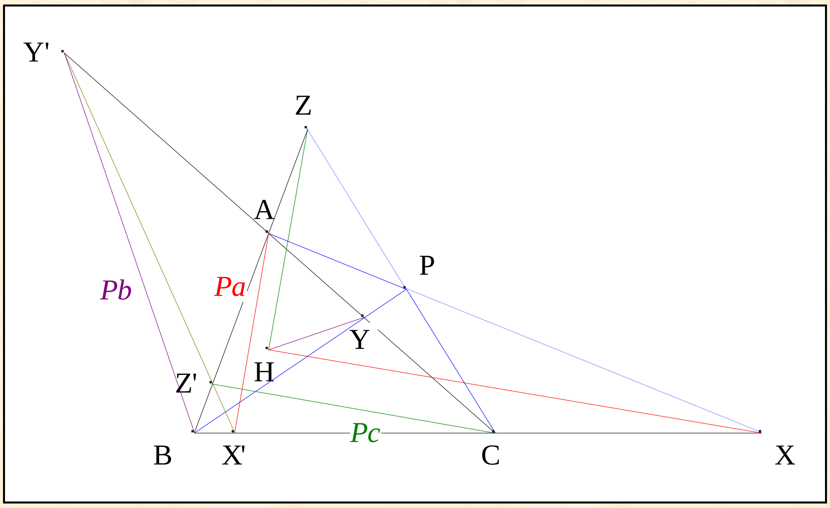
Note historique : cette visualisation s'inspire de celle de Darij Grinberg [3].

3. Le théorème d'Arnold [4] généralisé par Altshiller-Court [5]

VISION

Figure :

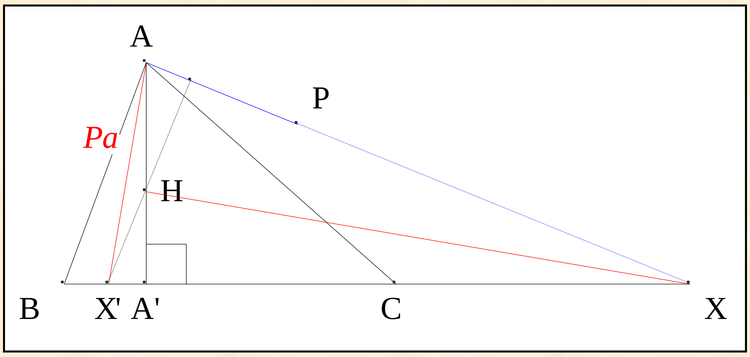
[3] Grinberg D., Message *Hyacinthos* # **6625**
[4] Arnold H. E., problem **3258**, *American Mathematical Monthly* (1926) 525
[5] Altshiller-Court N., problem 3258, *American Mathematical Monthly* vol. **35**, **4,** p. 210



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	P	un point,
	X, Y, Z	les points d'intersection de (PA) et (BC), de (PB) et (CA), de (PC) et (AB),
	*P*a, *P*b, *P*c	les A, B, C-céviennes de ABC resp. perpendiculaires à (HX), (HY), (HZ)
et	X', Y', Z'	les points d'intersection de *P*a et (BC), de *P*b et (CA), de *P*c et (AB).

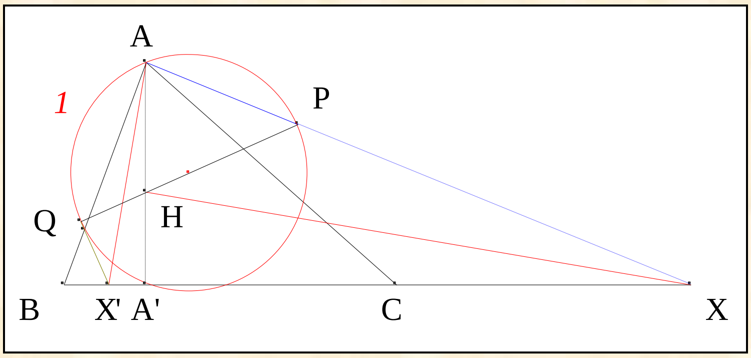
Donné : les points X', Y' et Z' sont alignés.

VISUALISATION



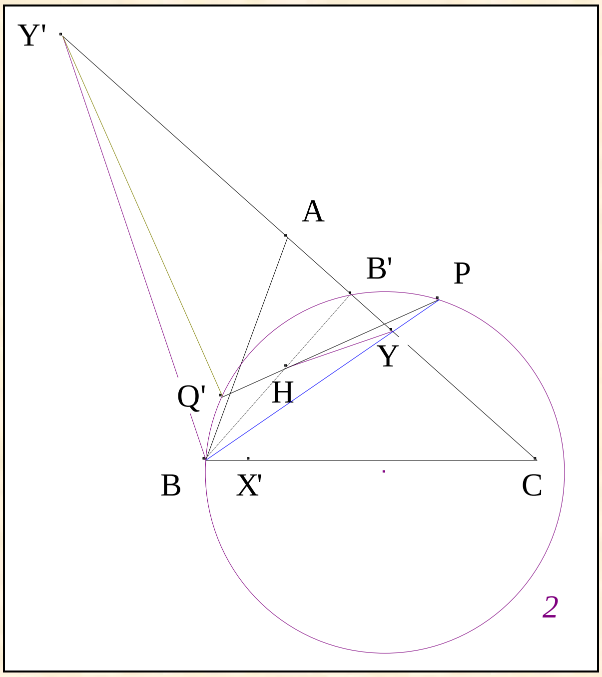
- Notons A' le pied de la A-hauteur de ABC.

- H étant le point d'intersection des A et X-hauteurs du triangle AX'X, H est l'orthocentre de AX'X ;
  en conséquence, (X'H) ⊥ (AX).



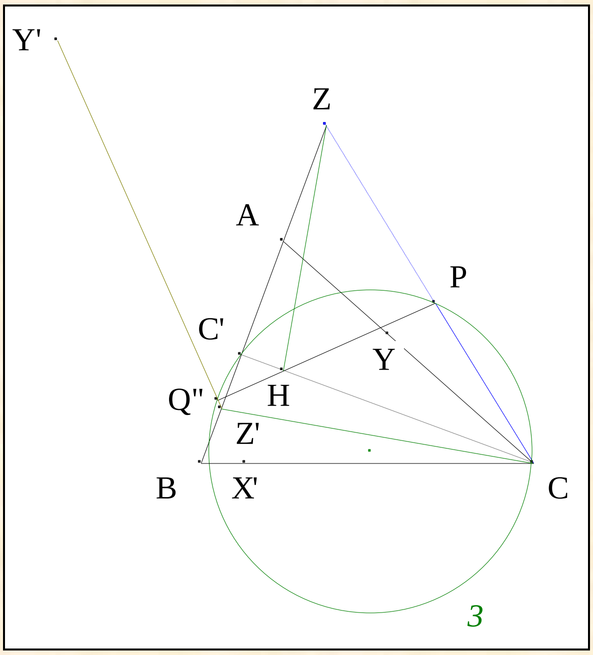
- Notons *1* le cercle passant par les points A, P, A' et Q le second point d'intersection de la droite (HP) avec *1*.

- D'après **1.** appliqué au triangle AX'X, (X'Q) ⊥ (HP).



- Notons B' le pied de la B-hauteur de ABC,
  2 le cercle passant par les points B, P, B'
  et Q' le second point d'intersection de la droite (HP) avec *2*.

- D'après **1.** appliqué au triangle BY'Y, (Y'Q') ⊥ (HP).



- Notons C' le pied de la C-hauteur de ABC,
  3 le cercle passant par les points C, P, C'
  et Q" le second point d'intersection de la droite (HP) avec *3*.

- D'après **1.** appliqué au triangle CZ'Z, (Z'Q") ⊥ (HP).

- D'après **2.**, les cercles *1*, *2* et *3* sont concourants en un second point ;
  en conséquence, les points Q, Q' et Q" sont confondus.

- **Conclusion :** les droites (X'Q), (Y'Q) et (Z'Q) étant perpendiculaires à (HP),
  les points X', Y', Z' et Q sont alignés.

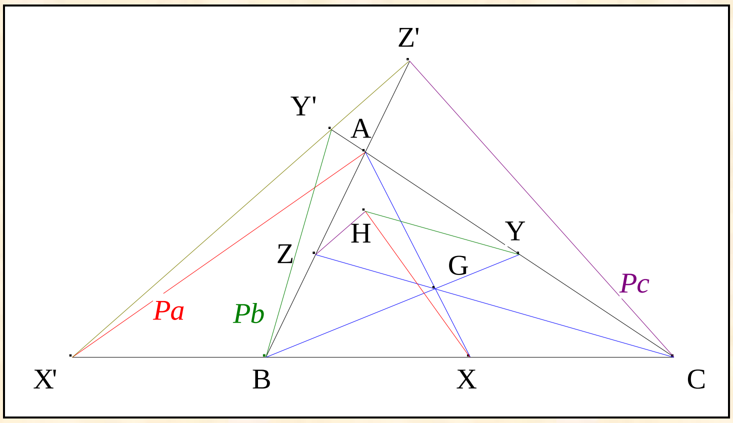
Scolie : (HP) est perpendiculaire à (X'Y'Z'Q).

Note historique : dans son problème, H. E. Arnold considérait le centre du triangle pour point P.

4. La droite d'Euler est perpendiculaire à l'axe orthique [6]

VISION

Figure :

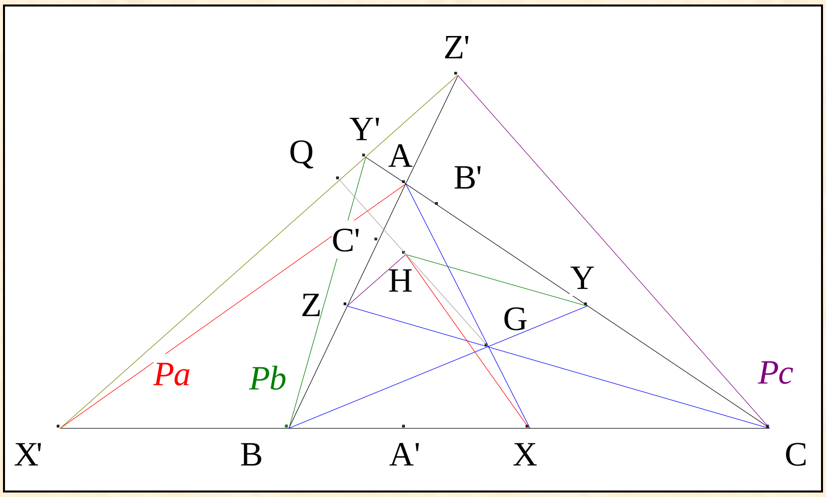


Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
G le point médian de ABC,
X, Y, Z les points d'intersection de (GA), (GB), (GC) resp. avec (BC), (CA), (AB),
*P*a, *P*b, *P*c les A, B, C-céviennes de ABC resp. perpendiculaires à (HX), (HY), (HZ)
et X', Y', Z' les points d'intersection de *P*a et (BC), *P*b et (CA), *P*c et (AB).

Donné : (X'Y'Z') est l'axe orthique de ABC.

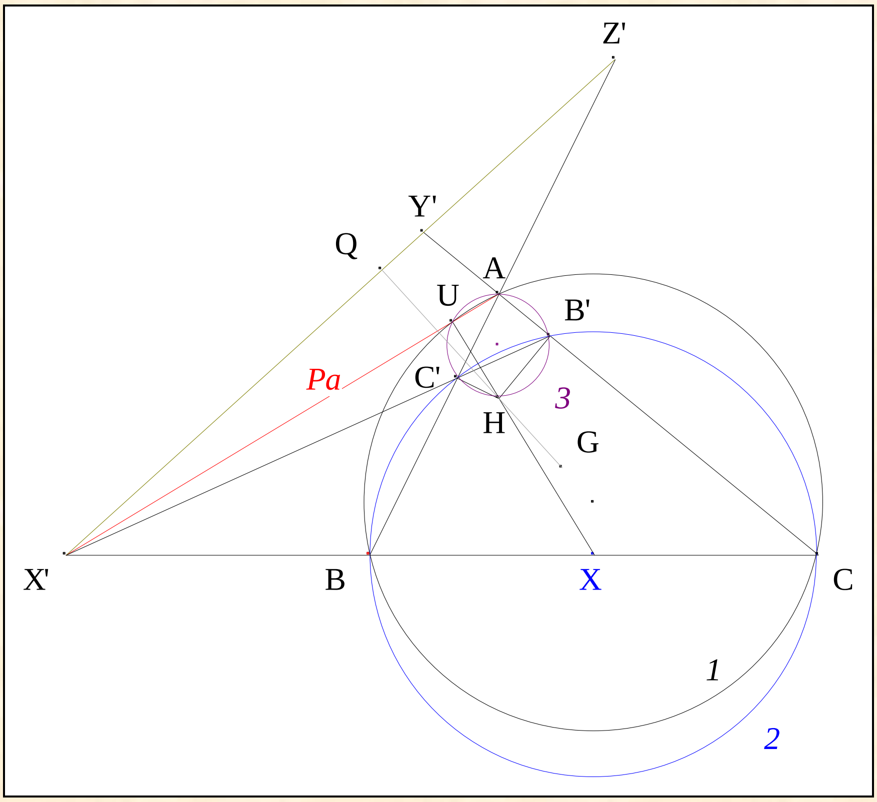
VISUALISATION

[6] Lemoine E., *Nouvelles Annales*, Question **1023** ; solution de Gambey, *Nouvelles Annales* (1872) 187 **;** Altshiller-Court N., *College Geometry*, Richmond (1936), Exercice **7**, p. 205.



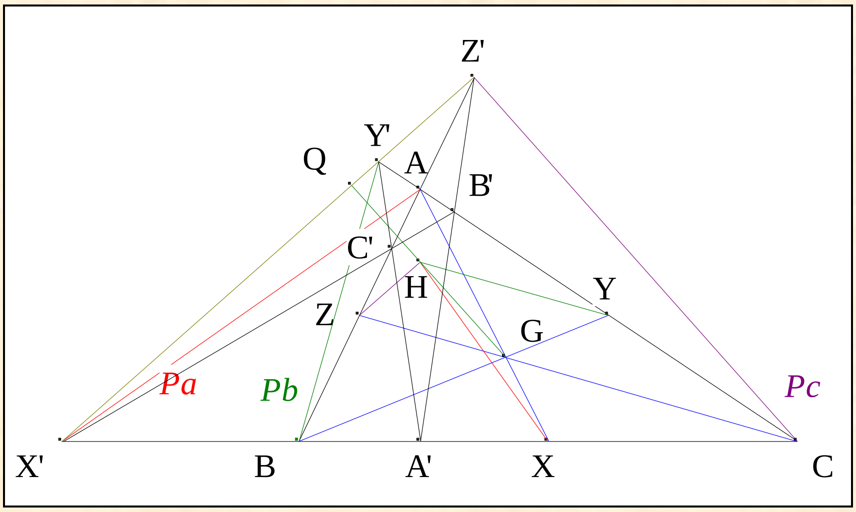
- Notons A', B', C' les pieds des A, B, C-hauteurs de ABC.
  et Q le point d'intersection des droites (HG) et (X'Y'Z').

- D'après **3. scolie**, (HG) ⊥ (X'Y'Z'Q).



- Notons U le point d'intersection des droites (HX) et (AX'),
  1 le cercle circonscrit à ABC,
  2 le cercle de diamètre [BC] ; il passe par B' et C' ;
  et *3* le cercle de diamètre [AH] ; il passe par B', C', U.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" appliqué à *1*, *2*, *3*, la droite (B'C') passe par X'.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que la droite (C'A') passe par Y'
  la droite (A'B') passe par Z'.

- **Conclusion :** (X'Y'Z') étant l'axe de la perspective de ABC et de son triangle orthique A'B'C', est, par définition, l'axe orthique de ABC.

Scolies :

(1) par définition, (GH) est la droite d'Euler de ABC.

(2) La droite d'Euler d'un triangle est perpendiculaire à l'axe orthique de ce triangle.

(3) Le point Q, intersection de la droite d'Euler et de l'axe orthique d'un triangle, est répertorié sous X_{468} chez ETC et est appelé "point d'Evans de ABC" par Adrian Oldknow [7].

Note historique : commençons par rappeler l'exercice **7** proposé par Nathan Altshiller-Court

Show that
(a) the three circles determined by a given point P and the ends of the altitudes of a given triangle have a second point of intersection P' in common ;
(b) if P coincides with the centroid of the triangle, P' lie on the orthic axis.

Dans un message *Hyacinthos*, Darij Grinberg [8] parlant de cet exercice disait :
"A quite excercise. I know of an ugly proof".

5. Commentaires

pour commencer, rappelons les noms de deux géomètres qui se sont intéressés à cette question à savoir John Griffiths [9] en 1865, Émile Lemoine en 1872, Dorina et Marius Mitrea [10] récemment.
Les deux premières solutions sont basées sur le concept de "puissance d'un point par rapport à un cercle", et la dernière a recours au théorème de Sondat démontré vectoriellement.
Rappelons que l'auteur [11] a proposé dernièrement une preuve originale du théorème de Sondat reposant sur le concept de puissance.
La preuve purement synthétique présentée dans cet article se distingue par son originalité, des précédentes.

---

7 Oldknow A., The Euler-Gergonne-Soddy Triangle of a Triangle, American Mathematical Monthly vol. **103**, **4** (1996) 319-329
8 Grinberg D., Arnold theorem, Message *Hyacinthos* # **6625** du 28/02/2003
9 Griffiths J., *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1865) 322 ; *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1884) 345
10 Mitrea D., Mitrea M., A generalization of a theorem of Euler, *American Mathematical Monthly* (January 1994)
11 Ayme J.-L., *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica* (Espagne) **27** (2007)