

DU CERCLE DES HUIT POINTS

AU

CERCLE DES NEUF POINTS

Jean-Louis AYME

Résumé. Nous présentons trois géomètres et un enchaînement "synthétique" de leur résultat allant du parallélogramme de Pierre Varignon au cercle des neuf points de Jean Victor Poncelet en passant par le cercle des huit points de Louis Brand.
Les théorèmes cités peuvent être tous démontrés synthétiquement.

LE JÉSUIITE PIERRE (DE) VARIGNON

(1654-1722)

1. Biographie

Pierre Varignon est né à Caen en 1654.

Élève du Collège des Jésuites de Caen, puis étudiant à l'Université de cette même ville, Varignon se destine à la prêtrise. Il change brusquement d'orientation lorsqu'il croise sur son chemin, les *Éléments* d'Euclide et la *Géométrie* de Descartes.

Passionné de physique, il écrit en 1687, *Projet d'une nouvelle mécanique*, puis la *Nouvelle mécanique ou statique* dans lesquels se trouve le célèbre théorème des moments.

En 1688, il entre à l'Académie des Sciences et devient le premier professeur de mathématiques du collège Mazarin, à Paris. En 1704, il enseigne parallèlement au Collège Royal.

Il a fallu attendre 1731 pour que, de façon posthume, soit publié ses *Éléments de mathématiques* dans lesquels est exposé le "parallélogramme" qui, aujourd'hui, porte son nom.

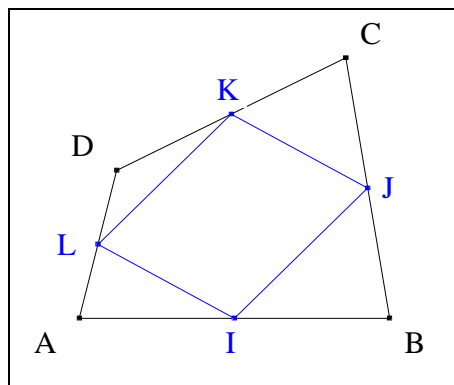
Il meurt à Paris, le 23 décembre 1722.

2. Le parallélogramme de Varignon¹

VISION

Figure :

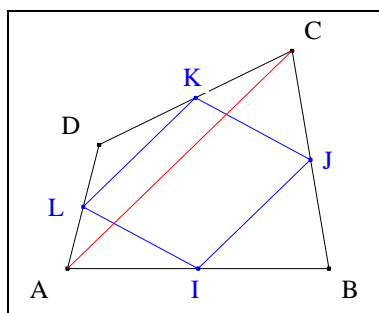
¹ Varignon P., *Éléments de mathématiques* (1731).



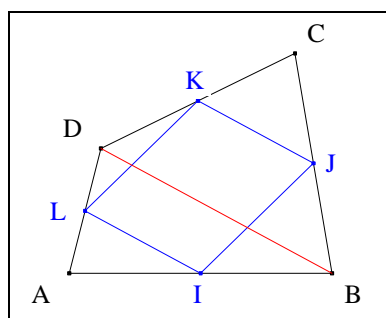
Traits : ABCD un quadrilatère
 et I, J, K, L les milieux resp. de [AB], [BC], [CD], [DA].

Donné : le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

VISUALISATION

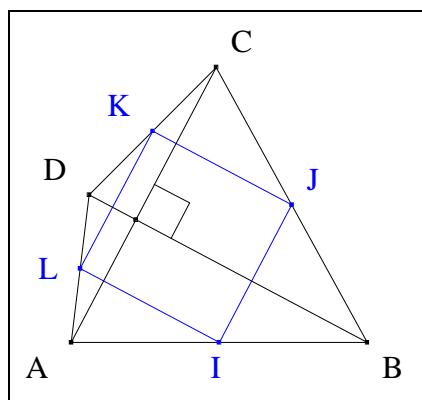


- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué (1) au triangle ACD, (KL) // (AC)
 (2) au triangle ABC, (AC) // (IJ) ;
 par transitivité de la relation //, (KL) // (IJ).



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (JK) // (IL).
- **Conclusion :** le quadrilatère IJKL ayant ses côtés opposés parallèles, est un parallélogramme.

Scolies : (1) IJKL est "le parallélogramme de Varignon de ABCD".
 (2) Un cas particulier : ABCD est orthodiagonal



- D'après 2. Le parallélogramme de Varignon", IJKL est le parallélogramme de Varignon de ABCD.
- Par hypothèse, $(AC) \perp (BD)$.
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué (1) au triangle ABC, $(AC) \parallel (IJ)$
(2) au triangle ABD, $(BD) \parallel (IL)$;
- La relation \perp étant compatible avec la relation \parallel , $(IJ) \perp (IL)$.
- **Conclusion** : IJKL ayant deux côtés consécutifs perpendiculaires, est un rectangle.

LE PROFESSEUR LOUIS BRAND

(1885-1971)

1. Biographie

Louis Brand est né en 1885 à Cincinnati dans l'état de l'Ohio (États-unis).

Il obtient son Ph.D en 1917 à l'université d'Harvard sous la direction de Maxime Bôcher. Il s'est fait connaître en écrivant de nombreux livres à succès sur le calcul vectoriel. En 1937, il prend la tête du département de mathématique à l'université de Cincinnati.

Passionné par les sciences naturelles, il amasse plus d'un quart de million de spécimen de coquillages marins qu'il lègue au Muséum de Cincinnati.

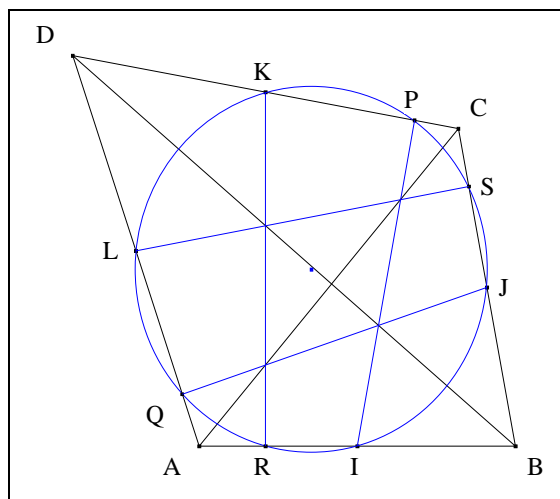
Il prend sa retraite en 1955 et décède en 1971.

2. Le cercle des huit points²

VISION

Figure :

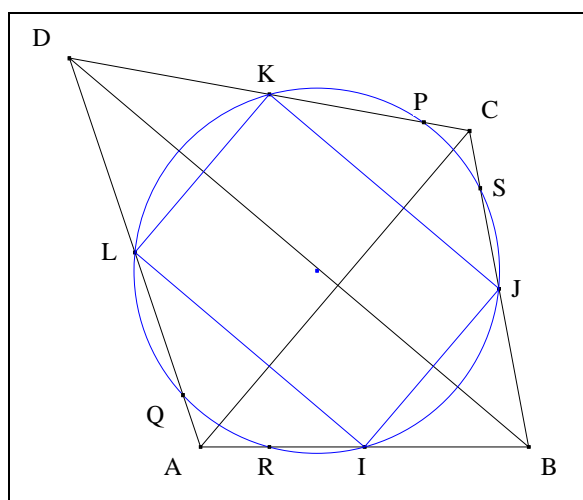
² Brand L., The Eight-Point Circle and the Nine-Point Circle, *American Mathematical Monthly* vol. 51, 2 (1944) 84-85.



Traits : ABCD un quadrilatère,
 I, J, K, L les milieux resp. de [AB], [BC], [CD], [DA],
 et P, Q, R, S les pieds des hauteurs abaissées de I, J, K, L resp. sur (CD), (DA), (AB), (BC).

Donné : ABCD est orthodiamétral *si, et seulement si,* I, J, K, L, P, Q, R, S sont cocycliques.

VISUALISATION NÉCESSAIRE ³



- D'après "Le parallélogramme de Varignon" appliqué au quadrilatère orthodiamétral ABCD, IJKL est un rectangle.
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", IJKL est inscriptible dans le cercle de diamètre [IK] ou [JL] ; il passe par P, Q, R et S.
- **Conclusion :** I, J, K, L, P, Q, R, et S sont cocycliques.

Scolie : ce cercle est "le cercle des huit points du quadrilatère orthodiamétral ABCD".

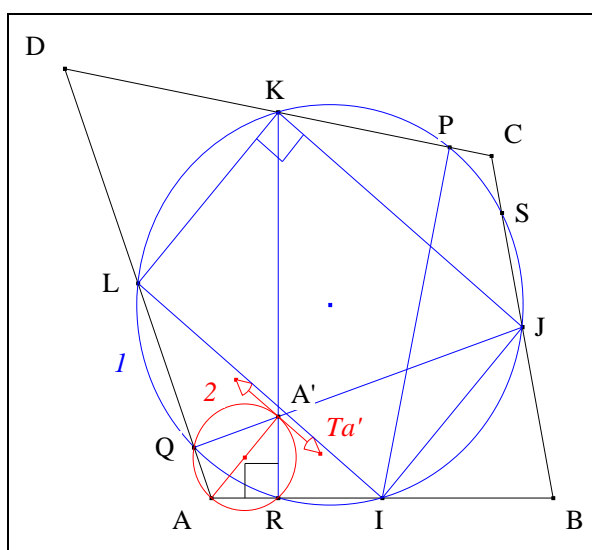
Note historique : Brahmagupta au VII-ième siècle, Jules Mathot au début du XX-ième siècle et

³ C'est le résultat de Louis Brand.

C. N. Schmall de New York en 1924, ont croisé cette remarquable situation sans l'identifier.
La dénomination de ce cercle est récente.

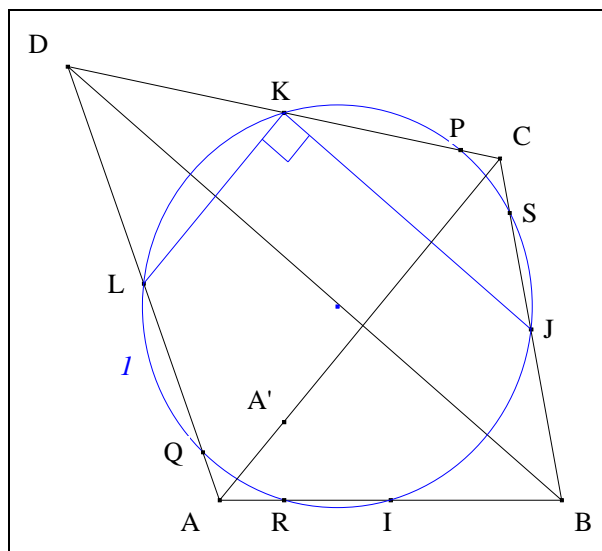
Commentaire : ce résultat de Louis Brand proposé en février 1944, est encore plus fondamental que celui concernant le cercle d'Euler.
Il est difficile de penser que les géomètres des siècles précédents soient passés à côté d'une telle situation.

VISUALISATION SUFFISANTE ⁴



- Notons I le cercle passant par I, J, K, L, P, Q, R, S
et A' le point d'intersection de (QJ) et (RK).
- D'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi cercle", A, R, A' et Q sont cocycliques.
- Notons 2 ce cercle
et Ta' la tangente à 2 en A' .
- Par définition d'une tangente, $(AA') \perp Ta'$.
- Les cercles 2 et I , les points de base Q et R, les moniennes (AQL) et (A'RK), conduisent au théorème 0 de Reim ; il s'en suit que $(AA') \parallel (LK)$.
- Les cercles 2 et I , les points de base Q et R, les moniennes (A'QJ) et (A'RK), conduisent au théorème 1 de Reim ; il s'en suit que $Ta' \parallel (JK)$.
- La relation \perp étant compatible avec la relation \parallel , $(LK) \perp (JK)$.
- D'après "Le parallélogramme de Varignon", $IJKL$ est le parallélogramme de ABCD ;
en conséquence, $IJKL$ est un rectangle.

⁴ C'est le résultat d'Alexey A. Zaslavsky.



- Rappelons que $(LK) \perp (JK)$.
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué (1) au triangle ACD, $(LK) \parallel (AC)$
(2) au triangle BCD, $(JK) \parallel (BD)$;
- La relation \perp étant compatible avec la relation \parallel , $(AC) \perp (BD)$.
- **Conclusion** : ABCD est orthodiagonal.

LE CAPITAINE DU GÉNIE JEAN VICTOR PONCELET

(1788-1867)

1. Biographie

Jean Victor Poncelet est né à Metz, en 1788.

Élève du Lycée de Metz, il entre en 1807 à l'École polytechnique où il suit les cours de géométrie de Lazare Carnot et de Gaspard Monge qui lui permettent de redécouvrir les idées de Girard Desargues. Promu officier en 1810, il rejoint l'armée de Napoléon. Fait prisonnier en 1812 durant le passage du Dniepr lors de la campagne de Russie, il est contraint de rejoindre Saratov sur la Volga où il est emprisonné. Durant les deux années de captivité où il sera "privé, comme il le dit, de toute espèce de livres et de secours, surtout distrait par les malheurs de sa patrie et les miens propres", il met au point ses idées sur les propriétés projectives des figures. De retour à Metz en 1814, il travaille en tant qu'officier de génie. Entre 1817 et 1819, il écrit un mémoire sur *La théorie générale des polaires* réciproques donnant ainsi naissance à la géométrie supérieure i.e. à la géométrie des transformations. En 1821, il prouve que le triangle orthique et médian ont le même cercle circonscrit. L'année suivante, il publie le célèbre *Traité des propriétés projectives des figures* dans laquelle il introduit des éléments imaginaires, "la droite à l'infini"...

En 1825, il devient professeur à l'École d'application de Metz qu'il quitte en 1835 pour aller à Paris, enseigner à la faculté des sciences. Nommé général, il prend le commandement de l'École polytechnique.

Il décède à Paris, en 1867.

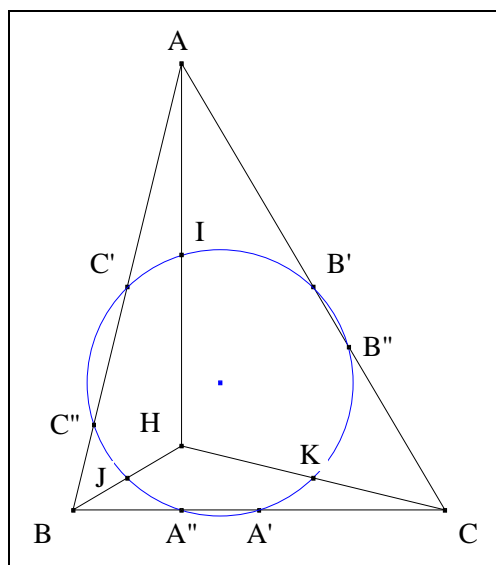
2. Le cercle des neuf points⁵

⁵

Brianchon C. J., Poncelet J. V., *Annales de Gergonne* 11 (1820-21) 215, théorème 9.

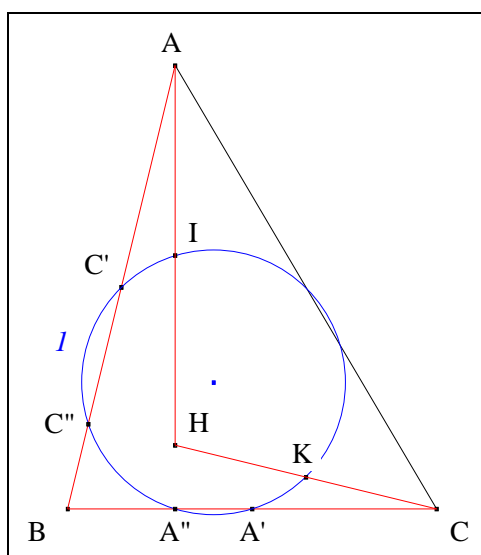
VISION

Figure :



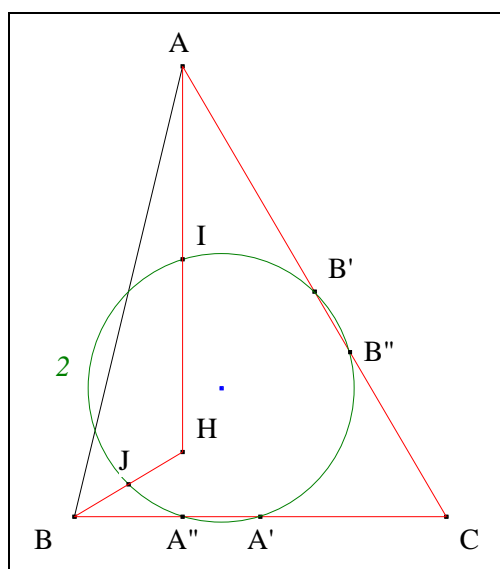
Traits : ABC un triangle,
 A', B', C' les milieux resp. de [BC], [CA], [AB],
 H l'orthocentre de ABC,
 I, J, K les points d'Euler de ABC
 et A'', B'', C'' les pieds des A, B, C-hauteurs de ABC.

Donné : A', B', C', I, J, K, A'', B'', C'' sont cocycliques.

VISUALISATION ⁶

- D'après Brand "Le cercle des huit points" appliqué au quadrilatère orthodiagonal ABCH, C', A', K, I, C'', A'' sont cocycliques.
- Notons I ce cercle.

⁶ Brand L., The Eight-Point Circle and the Nine-Point Circle, *American Mathematical Monthly* vol. 51, 2 (1944) 84-85.



- D'après Brand "Le cercle des huit points" appliqué au quadrilatère orthodiagonal AHBC, I, J, A', B', A'', B'' sont cocycliques.
- Notons 2 ce cercle.
- I et 2 ayant trois points communs A', A'' et I, sont confondus.
- **Conclusion** : A', B', C', I, J, K, A'', B'' et C'' sont cocycliques.

Solie : ce cercle est "le cercle des neuf points de ABC".

Énoncé traditionnel : dans un triangle, les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et les milieux des segments qui joignent les sommets au point de concours des hauteurs, sont situés sur un même cercle.

Commentaire : le cercle des huit points de Louis Brand apparaît ici comme une généralisation du cercle des neuf points de Jean Victor Poncelet.

Note historique : c'est Étienne Bobillier qui dénomma ainsi ce dernier cercle en 1832. Cette appellation sera par la suite reprise par Olry Terquem⁷ et aussi par Mention⁸.

⁷ Terquem O., *Nouvelles Annales* **1** (1842) 198.

⁸ Mention, *Nouvelles Annales* **9** (1850).