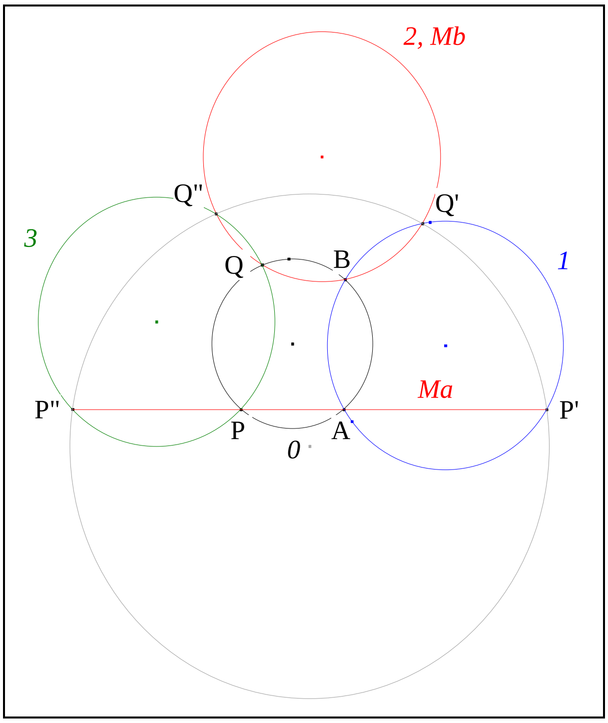
DU THÉORÈME DE REIM

AU

THÉORÈME DES SIX CERCLES

UNE PREUVE SIMPLE ET PUREMENT SYNTHETIQUE

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente une suite de généralisation consistant à remplacer chaque droite du théorème de Reim par un cercle. Cette progression permet de redécouvrir les théorèmes des trois et quatre cercles, celui des cinq cercles d'Henri Lebesgue et, en fin, celui des six cercles d'Auguste Miquel. L'article se termine par l'utile technique de l'accentuation.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents a suite of generalization by replacing each line of the Reim's theorem by a circle. This progress allows us to rediscover theorems of the three and four circles, of the five circles of Henri Lebesgue and, in the end, of the six circles of Auguste Miquel. The article ends with the useful technical of accentuation.

[1] St-Denis, Île de La Réunion (Océan Indien, France), 2008 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Sommaire

A. UN POINT DE VUE

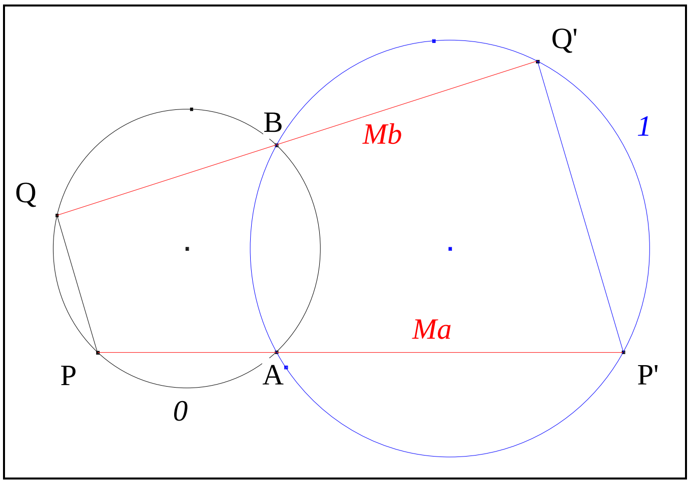
1. LE THÉORÈME DE REIM

OU

DES DEUX CERCLES

VISION

Figure :



Traits : *0*, *1* deux cercles sécants,
A, B les points d'intersection de *0* et *1*,
Ma, *Mb* deux droites passant resp. par A, B,
P, P' les seconds points d'intersection de *M*a resp. avec *0* et *1*,
et Q, Q' les seconds points d'intersection de *Mb* resp. avec *0* et *1*.

Donné : (PQ) est parallèle à (P'Q').

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [2]

Terminologie : **(1)** relativement à *1* et *2*

nous dirons que
* *1* et *2* sont les cercles de Reim,
* A et B sont les points de base,
* [AB] est la corde commune [3],
* *Ma* est la A-monienne, notée (PAP') [4] relativement à *1* et *2*,
* *Mb* est la B-monienne, notée (QBQ') relativement à *1* et *2*,
* (PQ) est la droite de départ
* (P'Q') est la résultante.

---

2 http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/apropos.html
3 Appelé "double-corde" chez Catalan
4 Le premier point est sur le premier cercle cité, le second point est le point de base et le troisième point est sur le second cercle cité.

(2) Relativement à *1*

nous dirons que (PAP') est une A-monienne naissante.

Scolie : ce résultat est "le théorème **0** de Reim" ou encore "le théorème des deux cercles" dans le point de vue que nous allons développer.

Énoncé traditionnel : pour tout couple de cercles de Reim et pour tout couple de moniennes,
la résultante est parallèle à la droite de départ.

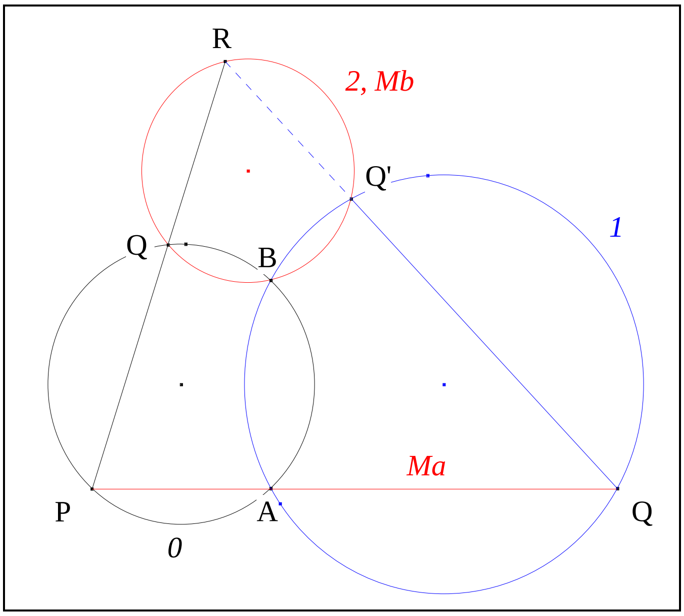
Énoncé technique : les cercles *0* et *1*, les points de base A et B, les moniennes (PAP') et (QBQ') conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (PQ) // (P'Q').

Avertissement : le théorème **0** de Reim met en jeu deux cercles, deux moniennes et une droite de départ. Dans la suite de cet article, nous avons l'intention de transformer progressivement chaque droite en un cercle afin d'en observer l'impact sur la résultante (P'Q'). Dans le paragraphe **2**, nous remplaçons *Mb* par un cercle passant par B, puis dans le **3**, la droite de départ (PQ) par un cercle passant par P et Q, puis dans le **4**, *Mb* et (PQ) comme dans **2** et **3**, et dans le **5**, *Ma* par un cercle passant par A.

2. LE THÉORÈME DES TROIS CERCLES

VISION

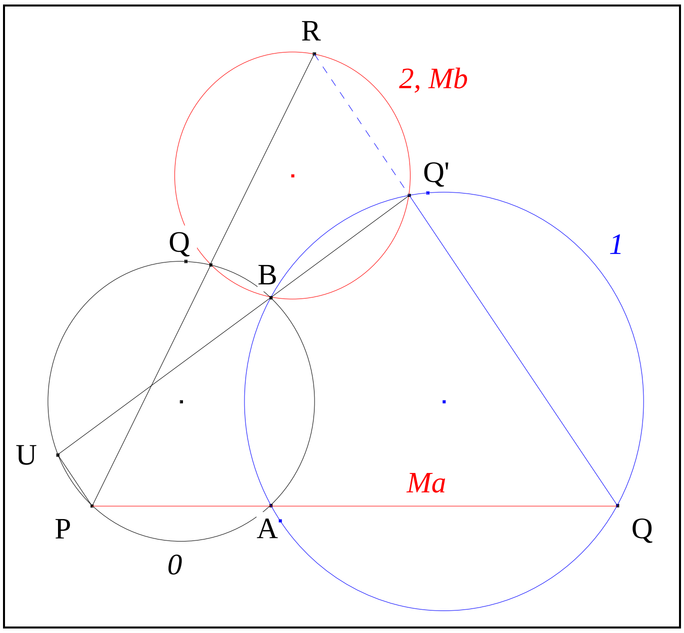
Figure :



Traits :	*0*, *1*	deux cercles sécants,
	A, B	les points d'intersection de *0* et *1*,
	Ma	une droite passant par A,
	P, P'	les seconds points d'intersection de *Ma* resp. avec *0*, *1*,
	2	un cercle passant par B,
	Q, Q'	les seconds points d'intersection de *2* resp. avec *0*, *1*
et	R	le second point d'intersection de (PQ) avec *2*.

Donné : (QQ'R) est une Q'-monienne de *1* et *2*.

VISUALISATION



- Notons U le second point d'intersection de (Q'B) avec *0*.

- les cercles *1* et *0*, les points de base B et A, les moniennes (Q'BU) et (QAP), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (Q'Q) // (PU).

- les cercles *0* et *2*, les points de base Q et B, les moniennes (PQR) et (UBQ'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (PU) // (RQ').

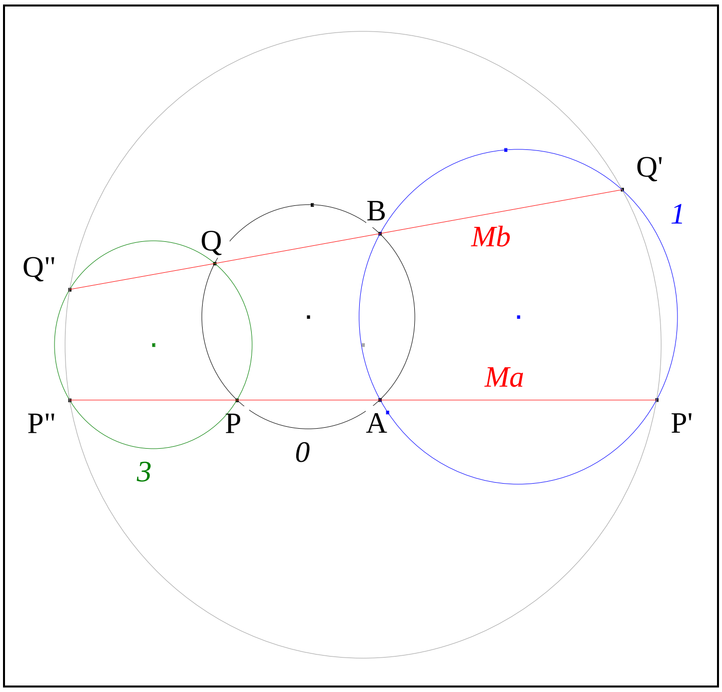
- Par transitivité de la relation //, (Q'Q) // (RQ') ;
  d'après le postulat d'Euclide, (QQ') = (RQ').

- **Conclusion :** (QQ'R) est une Q'-monienne de *1* et *2*.

3. LE THEOREME DES QUATRE CERCLES

VISION

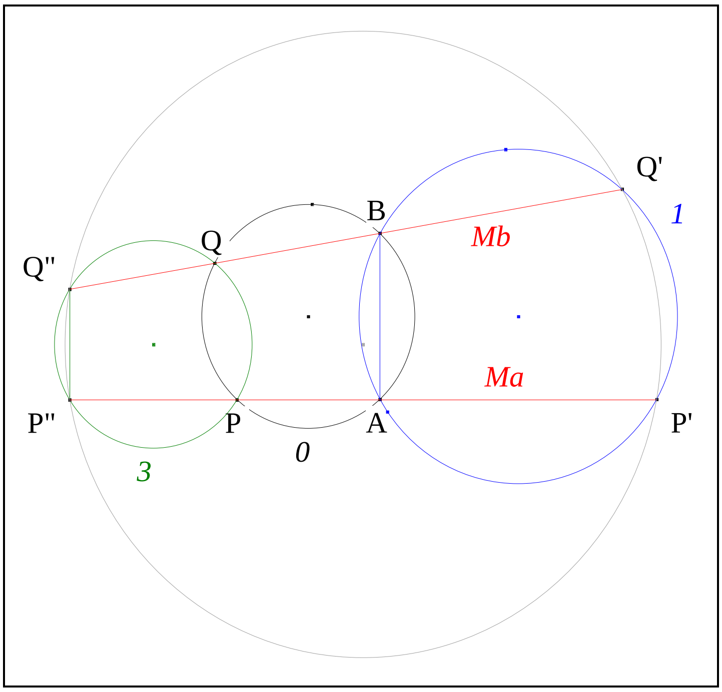
Figure :



Traits :	*0*, *1*	deux cercles sécants,
	A, B	les points d'intersection de *0* et *1*,
	Ma, *Mb*	deux droites passant resp. par A, B,
	P, P'	les seconds points d'intersection de *Ma* resp. avec *0*, *1*,
	Q, Q'	les seconds points d'intersection de *Mb* resp. avec *0*, *1*,
	3	un cercle passant par P et Q,
	P", Q"	les seconds points d'intersection de *3* resp. avec *0*, *1*,
et	R	le second point d'intersection de (PQ) resp. avec *M*a, *Mb*.

Donné : P', Q', P" et Q" sont cocycliques.

VISUALISATION



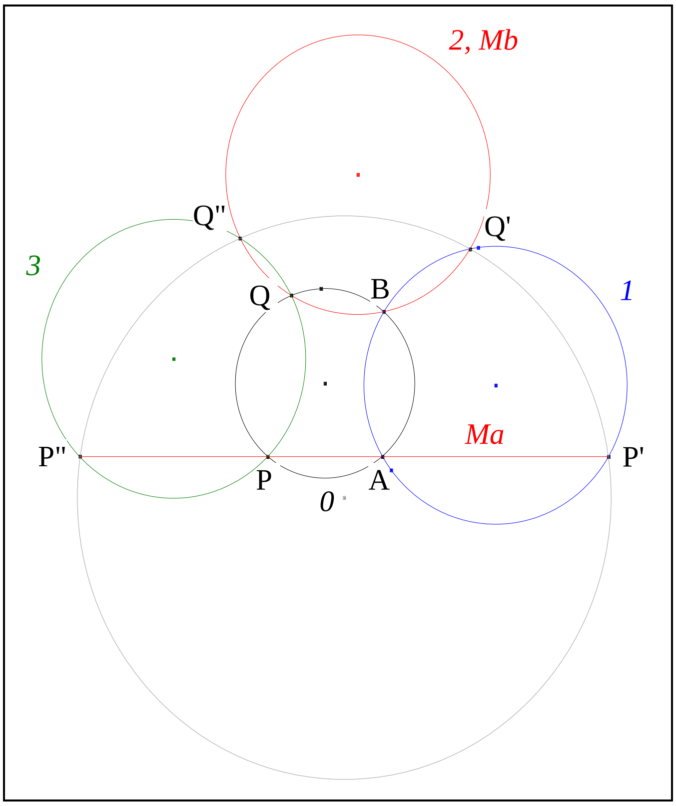
- Les cercles *0* et *3*, les points de base P et Q, les moniennes (APP") et (BQQ"), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AB) // (P"Q").

- **Conclusion :** le cercle *1*, les points de base P' et Q', les moniennes naissantes (AP'P") et (BQ'Q"), les parallèles (AB) et (P"Q"), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, P', Q', P" et Q" sont cocycliques.

4. LE THÉORÈME DES CINQ CERCLES [5]

VISION

Figure :

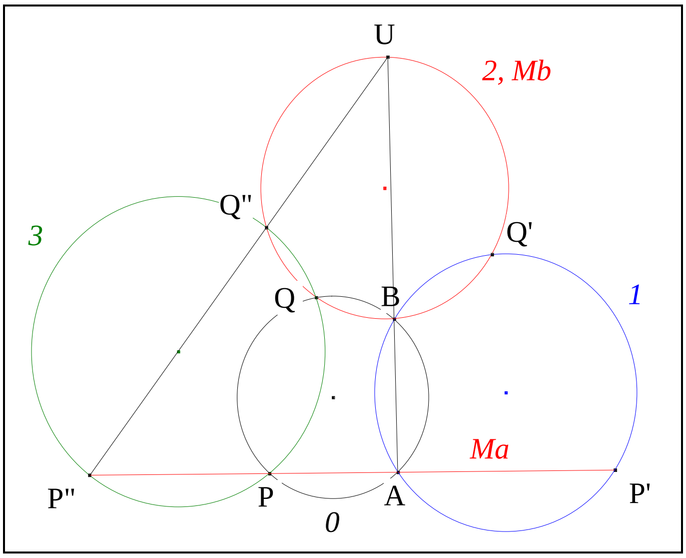


Traits :	*0*, *1*	deux cercles sécants,
	A, B	les points d'intersection de *0* et *1*,
	Ma	une droite passant par A,
	P, P'	les seconds points d'intersection de *Ma* resp. avec *0*, *1*,
	2	un cercle passant par B,
	Q, Q'	les seconds points d'intersection de *2* resp. avec *0*, *1*,
	3	un cercle passant par P et Q,
et	P'', Q''	les seconds points d'intersection de *3* resp. avec *Ma* et *2*.

Donné : P', Q', P'' et Q'' sont cocycliques.

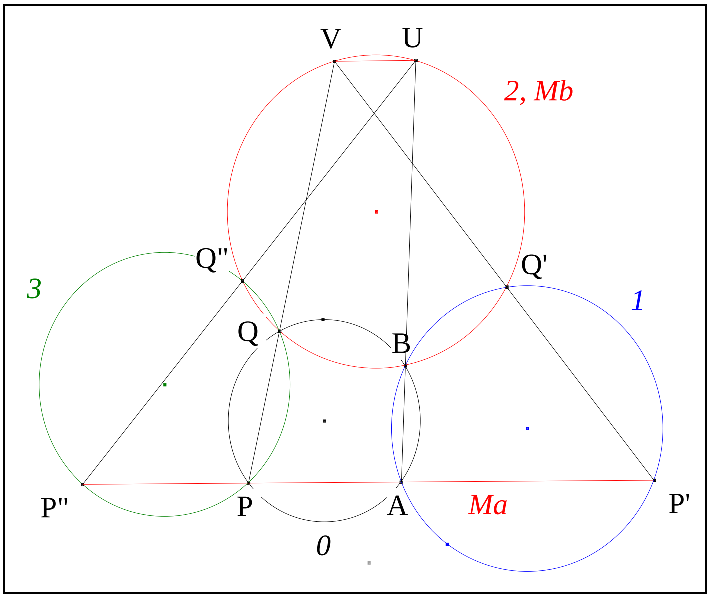
VISUALISATION

5 Lebesgue H. L., Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1916) ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0



- Notons I le second point d'intersection de (BP'') avec *2*.

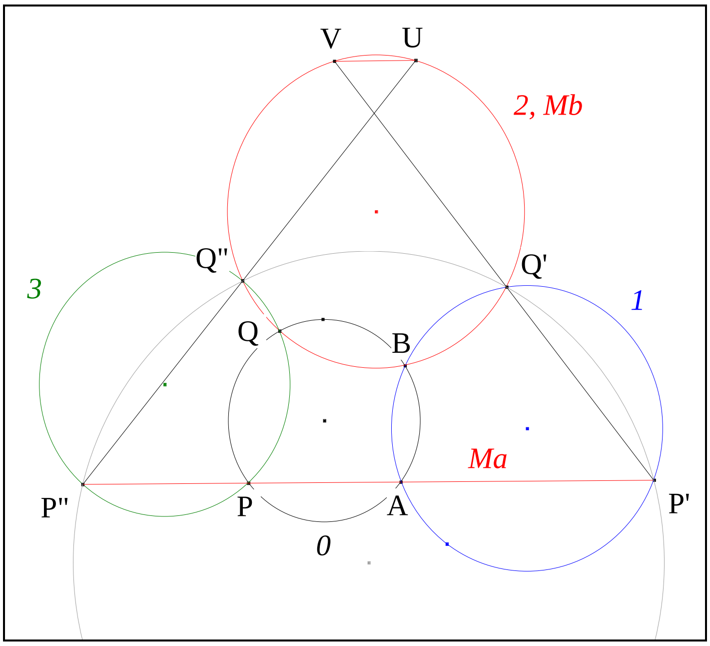
- D'après **2.** Le théorème des trois cercles, appliqué à *0*, *2* et *3*, (ABU) est une B-monienne de *0* et *2*.



- Notons V le second point d'intersection de la droite (P'Q') avec *2*.

- D'après 2. Le théorème des trois cercles, appliqué à *0*, *1* et *2*, (PQV) est une Q-monienne de *0* et *2*.

- Les cercles *2* et *0*, les points de base B et Q, les moniennes (UBA) et (VQP), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (UV) // (AP) i.e. à (P''P').

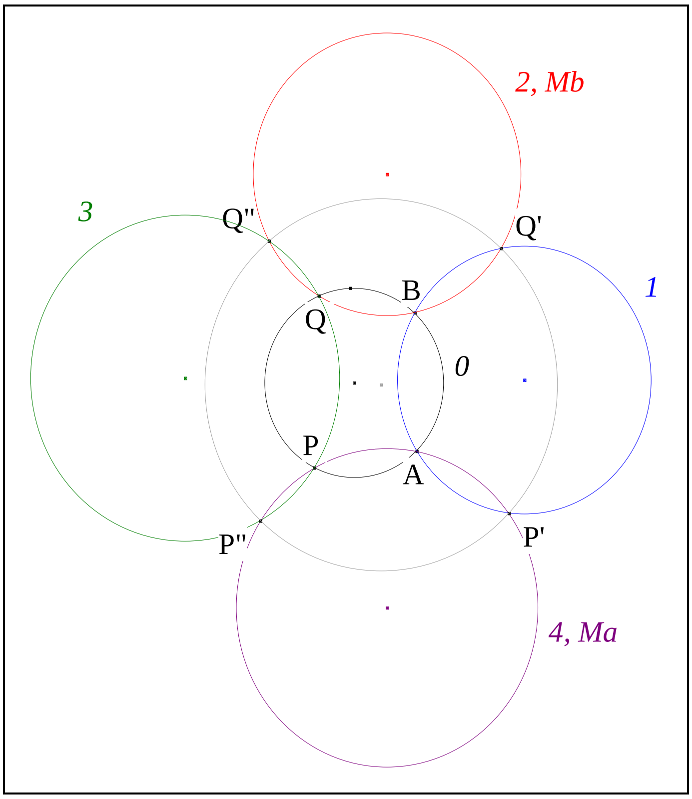


- **Conclusion :** le cercle *2*, les points de base Q" et Q', les moniennes naissantes (UQ"P") et (VQ'P'), les parallèles (UV) et (P"P'), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, P', Q', P" et Q" sont cocycliques.

5. LE THÉORÈME DES SIX CERCLES [6]

VISION

Figure :



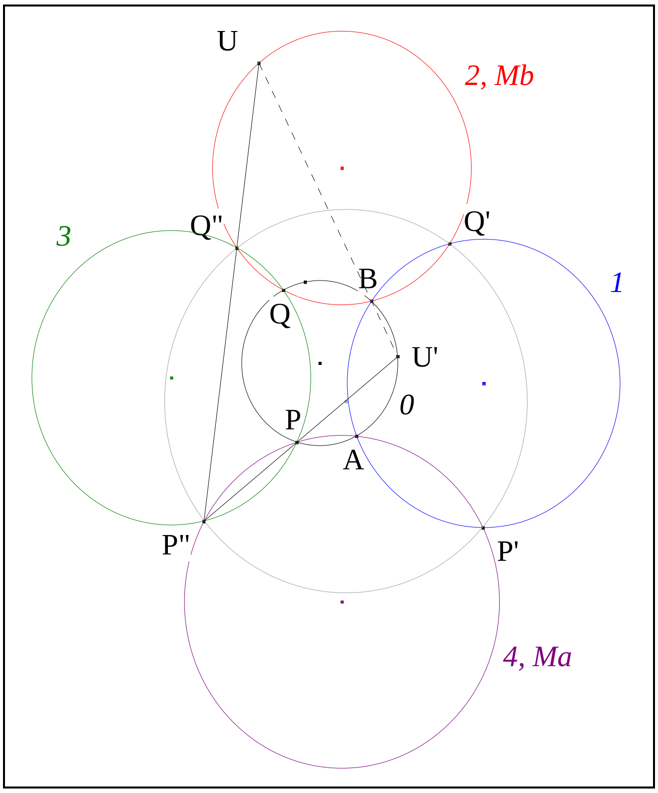
Traits :	*0*, *1*	deux cercles sécants,
	A, B	les points d'intersection de *0* et *1*,
	2	un cercle passant par B,
	Q, Q'	les seconds points d'intersection de *2* resp. avec *0* et *1*,
	4	un cercle passant par A,
	P, P'	les seconds points d'intersection de *4* resp. avec *0* et *1*,
	3	un cercle passant par P et Q,
et	P", Q"	les seconds points d'intersection de *3* resp. avec *4* et *2*.

Donné : P', Q', P" et Q" sont cocycliques.

VISUALISATION

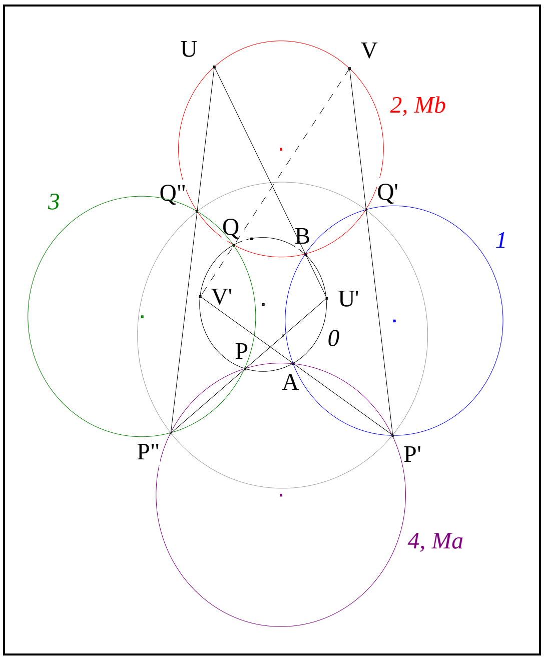
---

[6] Miquel A., Mémoire de Géométrie, *Journal de Liouville*, vol. **X** (1844) 347



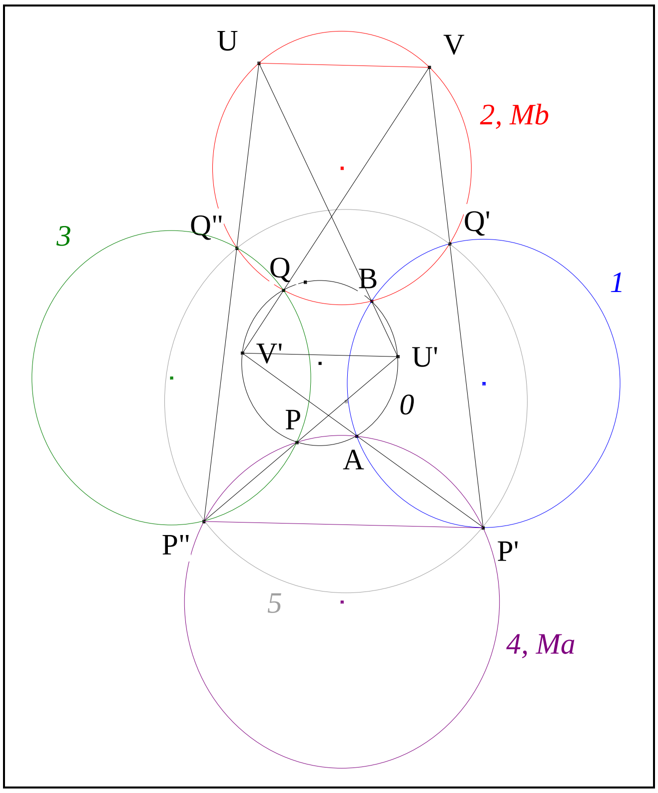
- Notons U le second point d'intersection de (P"Q") avec *2*
  et U' le second point d'intersection de (PP") avec *0*.

- D'après **2.** Le théorème des trois cercles, appliqué à *0*, *2* et *3*, (UBU') est une B-monienne de *0* et *2*.



- Notons V le second point d'intersection de (P'Q') avec *2*.
  et V' le second point d'intersection de (AP') avec *0*.

- D'après **2.** Le théorème des trois cercles, appliqué à *0*, *1* et *2*, (VQV') est une Q-monienne de *0* et *2*.



- Les cercles *2* et *0*, les points de base B et Q, les moniennes (UBU') et (VQV'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (UV) // (U'V').

- Les cercles *0* et *4*, les points de base P et A, les moniennes (U'PP'') et (V'AP'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (U'V') // (P''P').

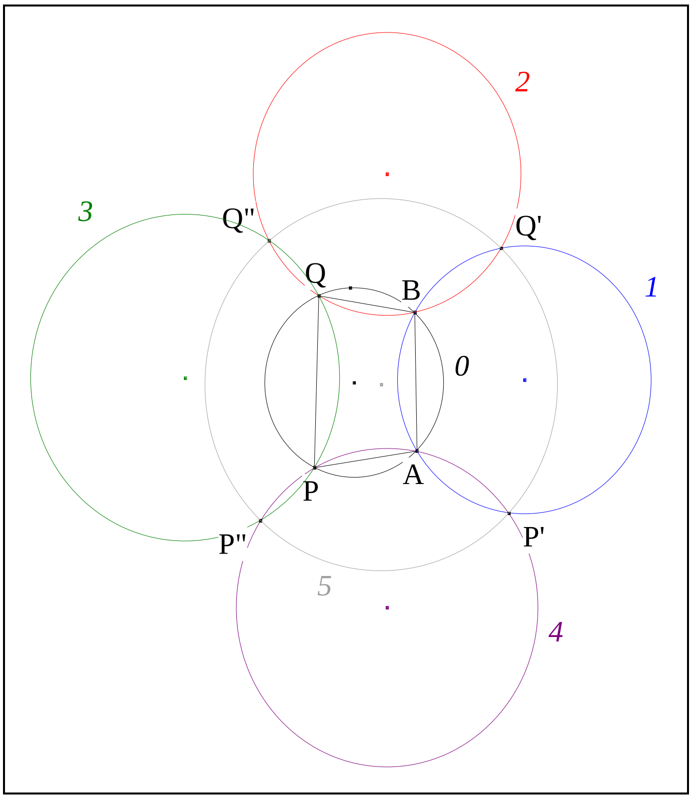
- Par transitivité de la relation //, (UV) // (P''P').

- **Conclusion :** le cercle *2*, les points de base Q'' et Q', les moniennes naissantes (UQ''P'') et (VQ'P'), les parallèles (UV) et (P''P'), conduisent au théorème **0''** de Reim ; en conséquence, P', Q', P'' et Q'' sont cocycliques.

- Notons *5* ce cercle.

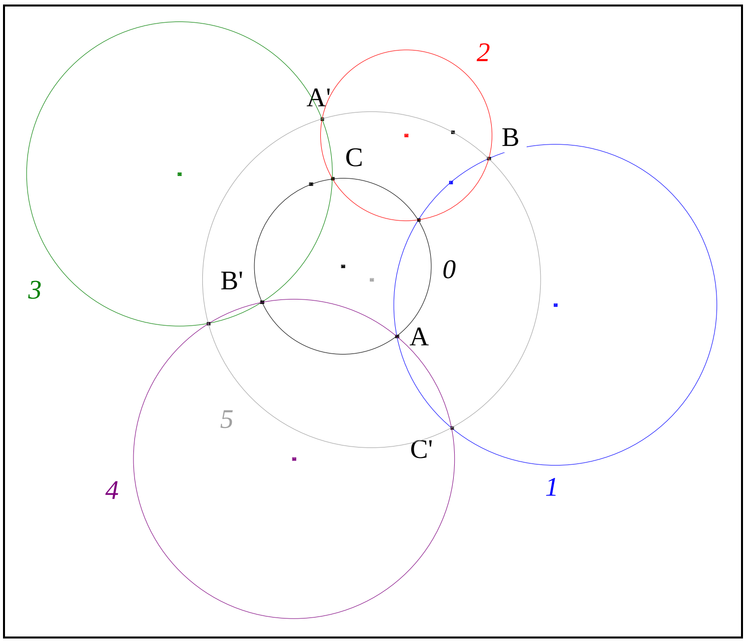
Scolies : **(1)** *0* est le cercle de départ et *5* celui d'arrivé.

(2) une autre vision



Énoncé traditionnel : les cercles qui ont pour cordes les côtés d'un quadrilatère cyclique se recoupent en quatre points cocycliques.

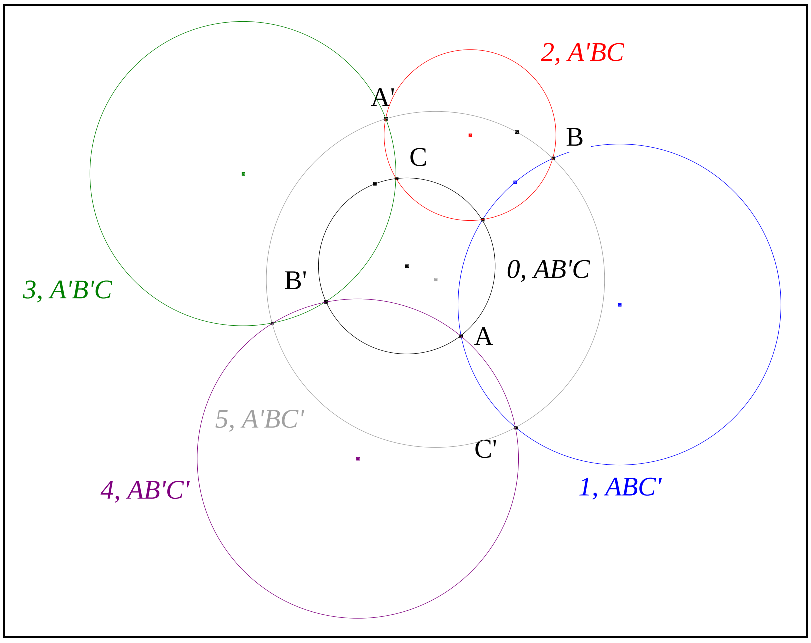
(3) Énoncé moderne



- Notons ABC, A'B'C' deux triangles
  et *0, 1, 2, 3, 4, 5* les cercles circonscrits des triangles AB'C, ABC', A'BC, A'B'C, AB'C' et A'BC'.

- **Conclusion :** *0*, *1* et *2* sont concourants *si, et seulement si*, *3*, *4* et *5* sont concourants.

(4) Une approche plus parlante, "la technique d'accentuation"



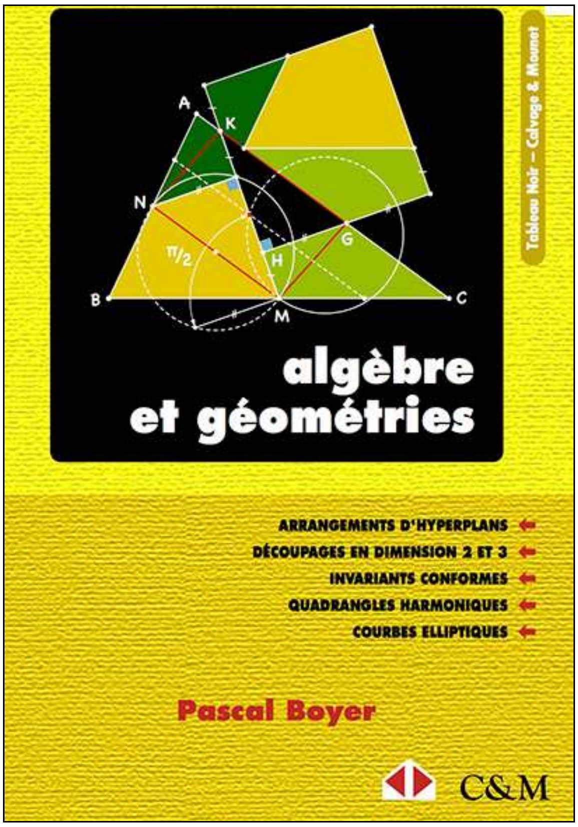
- Notons (AB'C), (ABC'), (A'BC), (A'B'C), (AB'C') les cercles *0*, *1*, *2*, *3*, *4*
  et (A'BC') le cercle d'arrivé *5*.

- **Conclusion :** (A'BC), (AB'C) et (ABC') sont concourants
  si, et seulement si,
  (AB'C'), (A'BC') et (A'B'C) sont concourants.

- Les règles : accentuation d'un point (A)' = A'
  double accentuation (A')' = A
  accentuation d'un cercle (AB'C')' = (A'BC).

B. UNE RÉFLEXION

Je tiens à rappeler que *Geometry * Géométrie * Geometria* est un site gratuit, ouvert généreusement à tous. Il a pour but, aux travers de ses nombreux articles, de réhabiliter la Géométrie du triangle en représentant ou en présentant de nombreux géomètres d'hier et d'aujourd'hui… et en livrant toutes références utiles dont l'auteur dispose…
Je suis toujours touché lorsque des auteurs rappellent dans leurs travaux leurs sources et en particulier celui de ce site…
Cependant, cela n'a pas été le cas dans les références du remarquable livre intitulé *Algèbre et Géométries* [7] écrit par le professeur Pascal Boyer de l'Université Paris **XIII** comme vous aller pouvoir le constater.
C'est selon moi très regrettable…



[7] Pascal Boyer, *Algèbre et Géométries*, Calvage & Mounet, Paris 2015

deux droites de $\mathbb{C}$ correspondent à deux cercles se coupant en N. En projetant selon un pôle appartenant seulement à l'un de ces cercles, l'une des droites de l'énoncé va rester une droite et l'autre va devenir un cercle. Le but de ce paragraphe est d'illustrer cette remarque à travers le théorème de Clifford, afin de donner corps à l'introduction de la géométrie inversive.

1.1. Théorème de Reim, dit des deux cercles

1.1.1. Théorème. *Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sécants en A et B ; deux droites D_A et D_B passant respectivement par A et B recoupent $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en des points P, P' et Q, Q', comme dans la figure 1.1. Alors, (PQ) et $(P'Q')$ sont parallèles.*

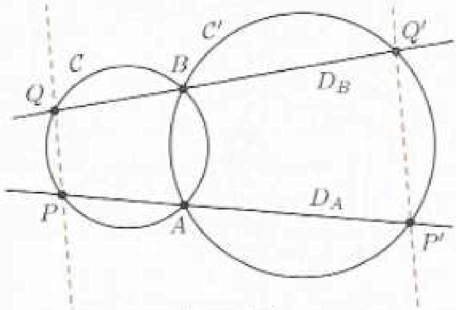


Figure 1.1
Théorème de Reim

Démonstration. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a

$$\widehat{PQB} = \widehat{PAB} = \widehat{P'AB} = \widehat{BQ'P'} \mod \pi,$$

d'où le résultat. □

1.1.2. Définition. Étant donnés deux cercles sécants, une droite passant par l'un des points d'intersection est appelée *une monienne*.

La réciproque de l'énoncé précédent s'énonce comme suit.

1.1.3. Théorème. *Soient P, Q, P', Q' tels que (PQ) et $(P'Q')$ sont parallèles. Soit $\mathcal{C}$ un cercle passant par P et Q et coupant (PP') et (QQ') respectivement en A et B. Alors, P', Q', A, B sont cocycliques.*

Démonstration. On a $\widehat{Q'P'P} = \widehat{APQ} \mod \pi$, qui d'après le théorème de l'angle inscrit est égal à $\widehat{ABQ} = \widehat{ABQ} \mod \pi$, et le résultat découle de la réciproque du théorème de l'angle inscrit. □

1.2. Théorème de Miquel, dit des trois cercles

On reprend l'énoncé du théorème de Reim, en remplaçant une des mé-niennes par un cercle.

1.2.1. Théorème. *Soient trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ qui se rencontrent en un certain point M ; on appelle A', B', C' les autres points d'intersection comme dans la figure 1.2. Pour A, point de $\mathcal{C}_1$, les méniennes associées recoupent $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ en B et C. Alors, B, C et A' sont alignés.*

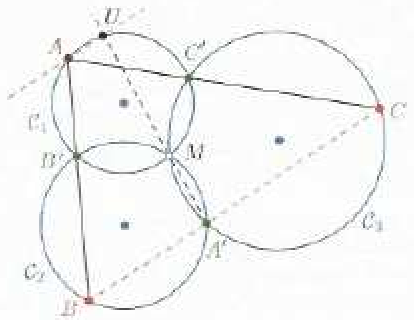


Figure 1.2. *Théorème de Miquel*

Démonstration. On considère la ménienne $(A'M)$ qui recoupe $\mathcal{C}_1$ en U ; d'après le théorème de Reim, (AU) est parallèle à $(A'C)$ et à $(A'B)$, de sorte que A', B, C sont alignés. □

La réciproque, davantage connue sous le nom de *théorème du pivot*, s'énonce comme il suit.

1.2.2. Théorème. *Soit ABC un triangle et soient A', B', C' trois points situés respectivement sur (BC), (AC) et (AB). Alors, les cercles circonscrits aux triangles $(AB'C')$, $(BA'C')$ et $(CA'B')$ concourent en un point M appelé point de Miquel (de la configuration ABC, $A'B'C'$).*

Démonstration. La ménienne $A'M$ recoupe le cercle circonscrit à $AC'B'$ en U ; d'après le théorème de Reim, (AU) est parallèle à $(A'B) = (A'C)$ et l'on conclut en utilisant 1.1.3. □

Remarque. Le théorème reste vrai si l'un des points primés est choisi en un sommet. On demande alors au cercle concerné d'être tangent au côté correspondant (voir figure 11.1, en page 412, pour une illustration de cela

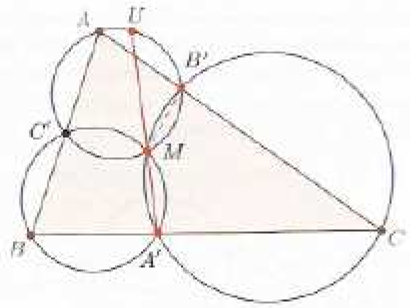


Figure 1.3. *Point de Miquel*

1.3. Théorème des quatre cercles

1.3.1. Théorème. *Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sécants en A et B, puis deux moniennes passant par A et B recoupant $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en P, Q et P', Q'. Pour $\mathcal{C}''$, cercle passant par P et Q, on note P'', Q'' son intersection avec les moniennes. Alors, P', Q', P'', Q'' sont cocycliques.*

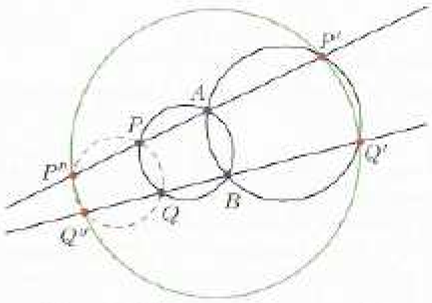


Figure 1.4. *Théorème des quatre cercles*

Démonstration. D'après le théorème de Reim, (AB) et $(P''Q'')$ sont parallèles et le résultat découle de 1.1.3. □

1.4. Théorème des cinq cercles

On reprend l'énoncé du théorème des quatre cercles en remplaçant une des moniennes par un cercle.

1.4.1. Théorème. *Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sécants en A et B ; une monienne passant par A donne les points P et P' comme dans la figure 1.5. Un cercle passant par B recoupe $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en Q et Q' puis un cercle passant par P et Q recoupe la monienne en P'' et le cercle précédent en Q''. Alors, les points P', Q', P'', Q'' sont cocycliques.*

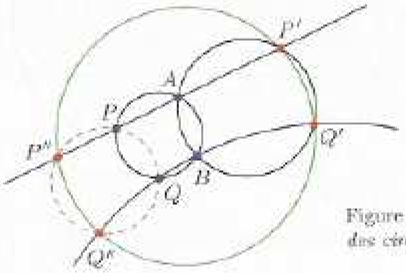


Figure 1.5. *Théorème des cinq cercles*

Démonstration. D'après le théorème des trois cercles, les droites (AB) et $(P''Q'')$ se rencontrent en un point U du cercle passant par B, Q, Q', Q'' ; de même, (PQ) et $(P'Q')$ se rencontrent en un point V de ce même cercle. D'après le théorème de Reim, (UV) est parallèle à $(P'P'')$ et l'on conclut en invoquant 1.1.3. □

1.5. Théorème des six cercles

On remplace enfin la dernière monienne du théorème des cinq cercles, ce qui donne l'énoncé qui suit.

1.5.1. Théorème. *Soient deux cercles sécants en A, B et soit un cercle passant par A (resp. par B) qui donne les points P, P' (resp. Q, Q') comme sur la figure 1.6. Un cercle passant par P et Q recoupe les cercles PAP' et QBQ' en P'' et Q''. Alors, les points P', Q', P'', Q'' sont cocycliques.*

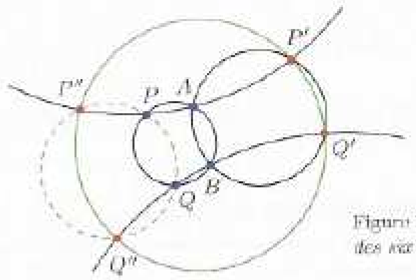


Figure 1.6. *Théorème des six cercles*

Démonstration. Soit U (resp. U') l'intersection de $(P''Q'')$ (resp. (PP'')) avec le cercle $QQ'Q''B$ (resp. $ABPQ$). D'après le théorème des trois cercles, les points U, B, U' sont alignés.

On introduit de même le point V (resp. V') l'intersection de $(P'Q')$ avec $QQ'Q''B$ (resp. (AP') avec $(ABPQ)$), de sorte que V, Q, V' sont alignés.

D'après le théorème de Reim, les droites (UV) et $(U'V')$ sont parallèles à $(P'P'')$ et le résultat découle de 1.1.3. □

Une formulation équivalente du théorème des six cercles est donnée par le corollaire suivant.

Bibliographie

[1] M. Alessandri. *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique.* Dunod, 1999.

[2] J.-M. Arnaudiès. *Les 5 polyèdres réguliers de $\mathbb{R}^3$ et leurs groupes.* CDU-SEDES, 1969.

[3] J.-M. Arnaudiès and J. Bertin. *Groupes, algèbres et géométrie, tome* **1**. Ellipses, 1993.

[4] J.-M. Arnaudiès and J. Bertin. *Groupes, algèbres et géométrie, tome* **2**. Ellipses, 1993.

[5] J.-M. Arnaudiès and J. Bertin. *Groupes, algèbres et géométrie, tome* **3**. Ellipses, 2000.

[6] M. Audin. *Géométrie.* EDP Sciences, 2006.

[7] Y. Benoist. Pavages du plan. *X-UPS*, 2001.

[8] M. Berger. *Géométrie 1.* Nathan, 1990.

[9] M. Berger. *Géométrie 2.* Nathan, 1990.

[10] M. Berger. *Geometry Revealed.* Springer, 2009.