ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

LA CHAÎNE INACHEVÉE

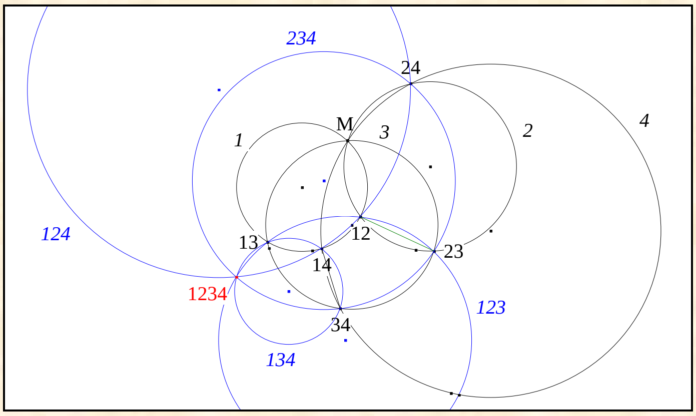
DE

WILLIAM KINGDON CLIFFORD

Tel un visage au regard clarifié
l'être géométrique semble se présenter
offrant ses trésors d'un passé déjà vieux,
il cherche son futur pas encore né.

Il lui faut une âme qui,
par ses instants de feu et de vérité
ouvre, sans le savoir, les trésors d'une grâce encore fermée.
[1]

Jean - Louis AYME [2]



Résumé. Dans cet article, l'auteur présente les trois théorèmes de Clifford, puis la chaîne (inachevée) associée régie par une récurrence géométrique.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. In this article, the author presents the three theorems of Clifford, then the incomplete associated string governed by a geometric recurrence.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

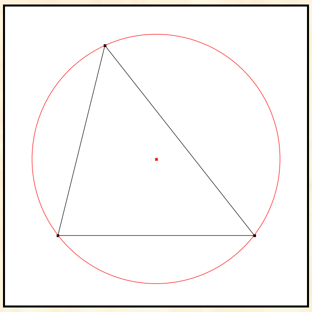
---

1 Monica Ayme
2 St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 01/06/2019 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sommaire

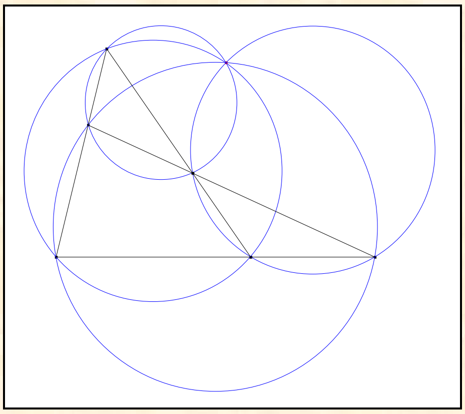
A. UN POINT D'HISTOIRE

1. Les deux premiers résultats



Né vers 325 av J.-C., Euclide reste un inconnu car nous ne savons rien de précis sur sa vie. Il a probablement étudié à Athènes avec des élèves de Platon, peut être même au Lycée fondé par Platon, avant d'aller se fixer à Alexandrie pour y fonder l'Ecole mathématique qui prit la succession de celle de Platon. Pappus [3] dans l'un des ses nombreux écrits, le peint comme étant d'un naturel doux et modeste et Proclus le présente comme un homme timide.
Euclide termina sa vie à Alexandrie vers 275.

Pour l'histoire des mathématiques, Euclide eut le premier, le mérite d'organiser, de systématiser et de réunir au sein des *Eléments*, les vérités géométriques plus ou moins éparses jusqu'à cette époque.
C'est dans la proposition **5** du Livre **IV** des Eléments que nous trouvons le cercle circonscrit à un triangle ou trilatère.



En 1804, William Wallace [4] dit *Scoticus* pose son regard sur le quadrilatère complet et formule le résultat suivant

pour tout quadrilatère complet formé par 4 transversales en position générale

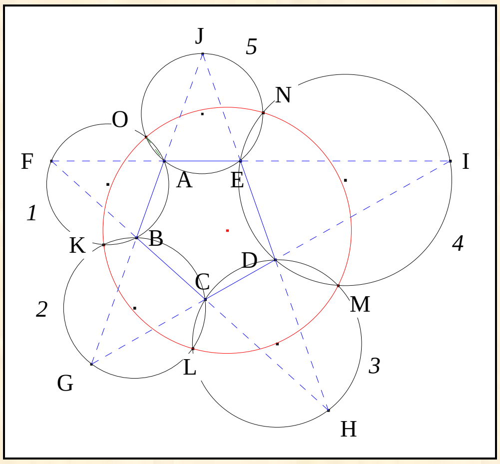
si, l'on considère les 4 triangles déterminés par ces droites prises 3 à 3,
puis les 4 cercles auxquels donnent lieu chaque triangle

alors, ces 4 cercles sont concourants.

Ce point de concours correspondant à la première des dix questions posées sans preuve par Jacob Steiner [5] en 1827-28, sera redécouvert en 1836 par l'élève Auguste Miquel[6] de l'Institution Barbet à Paris et publié dans l'éphémère journal *Le Géomètre*.
Pour être plus de précis, rappelons que T. S. Davies [7] avait déjà relaté et prouvé ce résultat en 1835 dans le *Leybourn's Mathematical Repository*. Probablement Davies avait trouvé ce résultat indépendamment de Steiner

[3] Mathématicien grec du **IVe** siècle
[4] Wallace W., Leybourn's *Mathematical Repository* **1** part **I** (1804) 170
[5] Steiner J., Questions 1°, 2°, 3°, 4°, *Annales* de Gergonne**18** (1827-28) 302-303
[6] Miquel A., *Journal de Mathématiques* de Liouville **3** (1838) 485-487 ; *Nouvelles Annales* **10**

car sa solution de la Question **524** dans le même volume du *Repository*, nous permet de le penser. L'historien J. S. Mackay [8] arrive à la même conclusion en s'appuyant sur une question posée par Davies ayant trait au quadrilatère complet dans le *Leeds Correspondent* de 1821.
Pour terminer, ce point dit de Miquel suite à la proposition de Seligmann Kantor de Vienne (Autriche) en 1878, est aujourd'hui appelé, point de Miquel-Wallace…



En 1838, Auguste Miquel [9] découvre à partir d'une idée d'Eugène Catalan, "Le pentagramme" [10] formé par cinq droites en position générale.

2. Une chaîne de théorèmes

Les géomètres entendent par là une suite de théorèmes qui s'initialise par des résultats et dont les autres s'engagent héréditairement les uns dans les autres. Ainsi peuvent naître des "chaînes de théorèmes" susceptibles de dégager des pépites.
Cette piste de recherche a fasciné quelques géomètres du XIXe siècle comme William Kingdon Clifford et Gohierre de Longchamps.

En 1871, W. K. Clifford [11] a été le premier à donner au résultat de Miquel, une très belle généralisation dont l'intérêt réside essentiellement dans son caractère récurrent

(1) deux droites déterminent un point

(2) trois droites déterminent un cercle

(4) quatre droites déterminent quatre cercles concourants au point de Miquel-Wallace

(5) cinq droites déterminent cinq points de Miquel-Wallace cocycliques [12]

(6) six droites déterminent six cercles de Clifford concourant au point de Clifford [13]…

W. K. Clifford avait compris de quelle manière "faire marcher les calculs" et aussi, en vérité, comment ne pas les faire… pour établir que, dans le cas de six droites, les six cercles associés aux six groupements possibles de cinq droites, passaient de nouveau par un même point… qu'avec sept droites les sept points ainsi définis étaient de nouveau sur un même cercle…

---

[7] Davies T. S., Question **555**, *Leybourn's Mathematical Repository*, vol. **6** (1835)
[8] Mackay J. S., *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. **9**, (1890) 83-91
[9] Miquel A., *Journal de Liouville*, vol. III (1838) 485.
Miquel A., Mémoire de Géométrie, *Journal de Liouville*, vol. X (1844) 347.
[10] Ayme J.-L., Les pentagramme de Miquel et de Morley, G.G.G. vol. **4**, p. 1-3 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[11] Messenger of Mathematics, vol.**5**
Clifford W. K., A Synthetic Proof of Miquel's Theorem, *Messenger* **5** (1870)
[12] Cercle de Clifford
[13] Clifford W. K., *Mathematical papers* 1868, Cambridge et Dublin

Ne s'arrêtant pas en si bon chemin, W. K. Clifford poursuivait sa recherche récurrente et généralisait son résultat. En considérant une droite comme un cercle, il allait finalement se libérer des systèmes de droites en *position générale*, pour ne considérer que des cercles concourants.

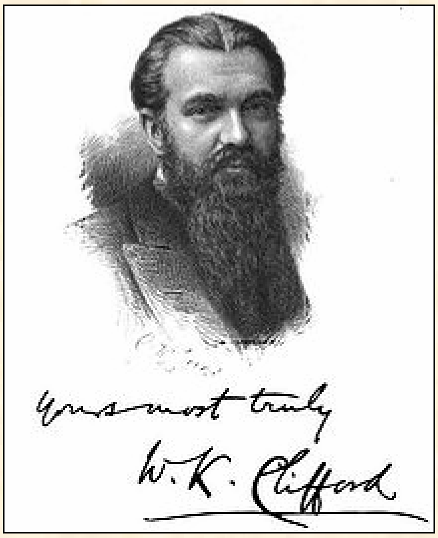
premier théorème: soient 4 cercles concourants ;
les 4 cercles déterminés par ces cercles pris 3 à 3, sont concourants

deuxième théorème: soient 5 cercles concourants ;
les 5 points déterminés par ces cercles pris 4 à 4, sont cocycliques

troisième théorème: soient 6 cercles concourants ;
les 6 cercles déterminés par ces cercles pris 5 à 5, sont concourants.

En 1916, Henri Léon Lebesgues [14] dans son article intitulé *Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford*, montrait avec sa notation que la démonstration à partir d'un système de 4, 5, 6-droites en position générales se transposait à celle d'un système de 4, 5, 6-cercles concourants.

3. Une courte biographie de William Kingdon Clifford



William Kingdon Clifford est né au Royaume Uni, à Exeter, le 4 mai 1845.
A l'âge de 15 ans, William Kingdon Clifford entre au King's Collège de Londres où il révèle un réel talent en mathématiques. A 18 ans, il entre au College de la Trinité à Cambridge. Gymnaste remarquable, littéraire non moins remarquable, il obtient un prix de récitation et compose une série de comtes pour enfants intitulée *The Little People*. Professeur à l'université de Londres, il écrit en 1870 *On the Space-Theory of Matter* dans lequel il devint un supporter de la géométrie non euclidienne de Lobachevski en trouvant une application des nombres doubles qu'il a découvert. Ses travaux contribuent au développement de l'algèbre non commutative et lui permettent d'être élu à l'âge de 29 ans, membre de la Royal Society.
En géométrie, il a su donner du point et du cercle de Miquel, une très belle généralisation dont l'intérêt réside essentiellement dans son caractère récurrent, mais sa démonstration est purement analytique. Il introduit le mot cross ratio i.e. birapport.
En 1875, il épouse Lucy Lane dont il a deux filles.
Il décède de la tuberculose à Madère (Portugal), le 3 mars 1879.

---

[14] Lebesgues H. L., Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1916)

B. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

1. Un n-cercle

* pour tout point M et entier naturel n supérieur ou égal à 2,

  n cercles distincts concourants en M sont en *position générale*

  si,

  trois quelconques d'entre eux ne se coupent pas en dehors de M, en trois points alignés.

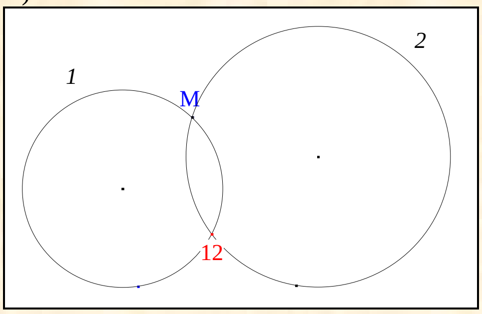
* Sous cette condition, nous définissons un n-cercle.

* Un n-cercle est noté C_n .

* Chaque cercle de C_n étant désigné par son indice en italique, par exemple *1*,
  C_n s'écrira aussi (*123…n*).

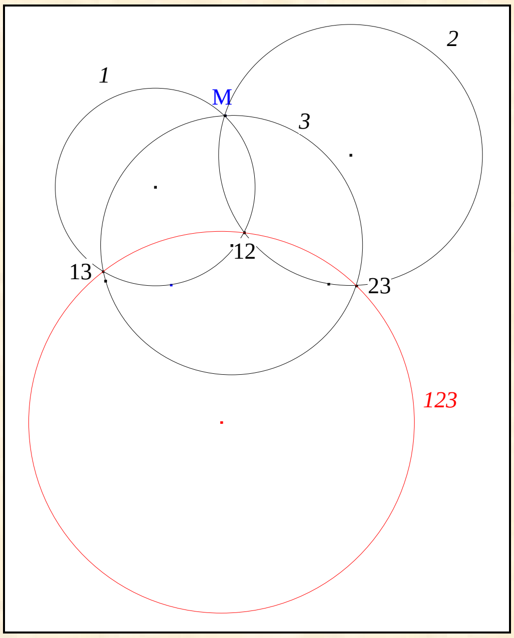
2. Notation et taille de Lebesgues

* C_2 ou (*12*)



le point commun à *1* et *2* est noté, en scripte, 12 et a pour taille 2

* C_3 ou (*123*)



le cercle passant par les points d'intersection de *1*, *2* et *3* est noté, en italique, *123* et a pour taille 3

* Ainsi, un cercle sera représenté par un nombre **impair** de naturels
et un point par un nombre **pair** de naturels
ce qui constitue la taille de leur notation.

3. La suite *C*

Pour tout n supérieur ou égal à 2, considérons la suite *C* des n-cercles, notée $(C_i)_{i=2,.., n...}$

4. Les deux règles d'intersection de Lebesgues [15]

Règle **1 :** *si,* deux cercles sécants ont des notations de même taille

alors, le premier point d'intersection a pour notation la partie commune de leur notation, et le second, la réunion de leur notation.

Règle **2 :** *si,* deux cercles sécants ont des notations de taille qui diffère de deux naturels

alors, le premier point d'intersection a pour notation la partie commune de leur notation et du premier naturel, et
le second, la partie commune de leur notation et du second naturel.

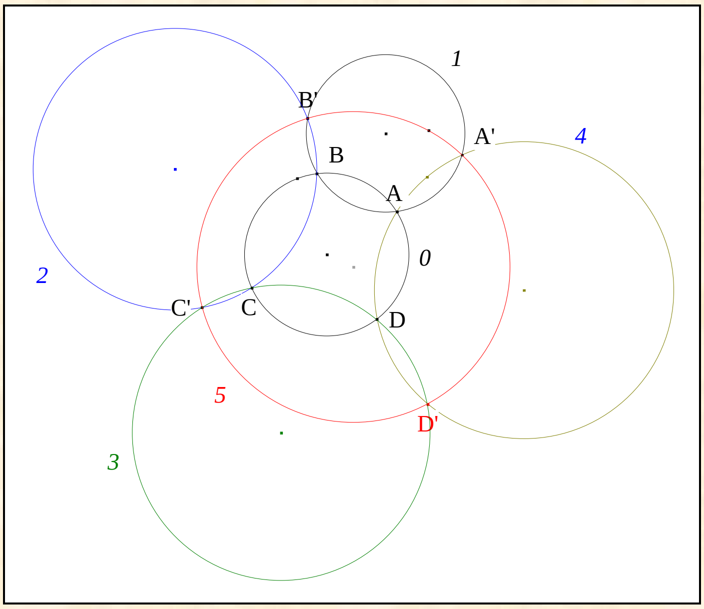
[15] Gohierre de Longchamps G., *Revue des Sociétés savantes*, du lundi mai 1864 ;
Annales scientifiques de l'École normale, vol.**III**, 1867 ;
Nouvelle Correspondance mathématiques, 1877
Lebesgue H., Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford, *Nouvelles Annales de Mathématiques* série 4 tome 16(1916) 481-495 ;
http://www.numdam.org/item/NAM_1916_4_16__481_0/

C. LE THÉORÈME DES SIX CERCLES [16]

Auguste Miquel (1844)

VISION

Figure :



Traits :	*0*	un cercle,
	A, B, C, D	quatre points de *0*,
	1, 2, 3, 4	quatre cercles passant respectivement par A et B, B et C, C et D, D et A,
	A', B', C', D'	les seconds points d'intersection de *1* et *4*, *1* et *2*, *2* et *3*, *3* et *4*,
et	*5*	le cercle passant par A', B', C'.

- **Conclusion :** *3* et *4* se coupent sur 5 en D'.

Scolies : **(1)** autre formulation :

si, A, B, C, D sont cocycliques *alors,* A', B', C', D' sont cocycliques

(2) *0* est le cercle de départ et *5* le cercle d'arrivé.

[16] Miquel A. (vers 1816 - 1851) Mémoire de Géométrie, *Journal de Liouville*, vol. **X** (1844) 347 ;
Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème du six cercles, G.G.G. vol. **2** ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

D. LA RÉCURRENCE INACHEVÉE

DE

W. K. CLIFFORD

1. La récurrence

Traits : M un point,
n un naturel supérieur ou égal à 2
$(C_i)_{i = 2,.., n…}$ la suite des C_i ,
et *P*(n) la fonction propositionnelle suivante :

* pour tout naturel pair noté 2k de [2, n],

(C_{2k}) détermine un point
entre
le cercle de (C_{2k-1})
et
les (2k-1) cercles de (C_{2k}) où l'on a rajouté le cercle C_{2k} aux (2k-1) cercles.

* pour tout naturel impair noté 2k+1 de [2, n],

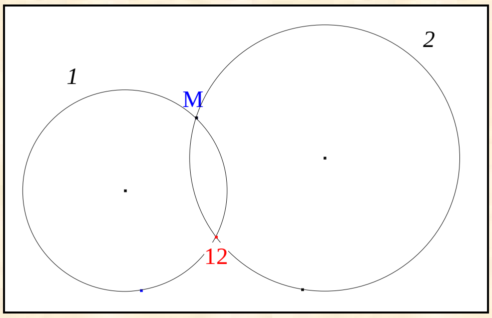
(C_{2k+1}) détermine un cercle
passant par
le point Clifford de (C_{2k})
et
les 2k points d'intersection de C_{2k+1} avec les 2k cercles

Donné : **[**pour tout n, *P*(n)] est vraie.

.

I. HYPOTHÈSES DE DÉPART

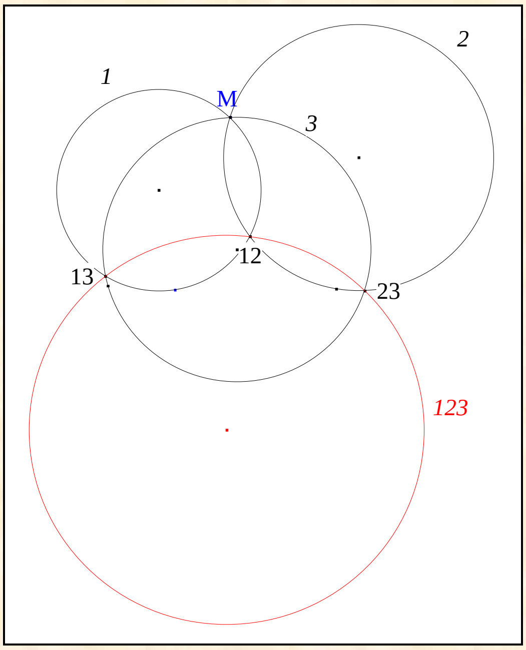
n = 2



- **Conclusion :** *P*(2) est vraie.

Scolie : ce point d'intersection est "le 2-point de Clifford de (*12*)".

n = 3



- Un 3-cercle (*123*) conduit par retrait d'un cercle de "droite à gauche"
  à trois 2-cercle i.e. (*12*), (*13*), (*23*).

- Ces trois 2-cercle
  définissent trois 2-point de Clifford i.e. 12 , 13 , 23.

- Notation allégée : *3 , *2 , *1

- D'après Euclide d'Alexandrie, *3 , *2 et *1 déterminent un cercle .

- **Conclusion :** *P*(3) est vraie.

Scolie : ce cercle est "le 3-cercle de Clifford de (*123*)".

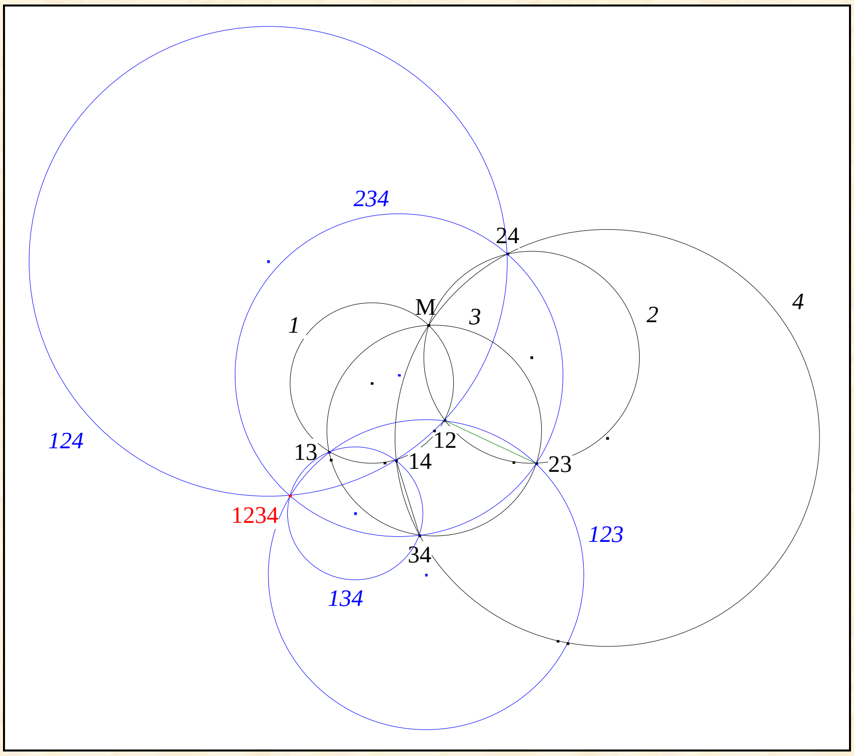
n = 4

ou

LE PREMIER THÉORÈME DE CLIFFORD

VISION

Figure :



Traits : (*1234*) un 4-cercle.

Donné : *123*, *124*, *134* et *234* sont concourants. [17]

VISUALISATION

- Un 4-cercle (*1234*) conduit par retrait d'un cercle de "droite à gauche"
  à quatre 3-cercles i.e. (*123*), (*124*), (*134*), (*234*).

- Ces quatre 3-cercle
  définissent quatre 3-cercle de Clifford i.e. *123* , *124* , *134* , *234*.

- Notation allégée : *!4* , *!3* , *!2* , *!1*.

[17] Wallace W., Leybourn's *Mathematical Repository*, vol. **1**, part **I** (1804) 170

- Considérons les cercles !*4* et !3, ainsi que les cercles intermédiaires *3* et *4*.

- D'après la règle d'intersection de Lebesgues,

(1)	les points d'intersection	de *123* et *3*	sont	13 et 23
(2)	les points d'intersection	de *3* et *4*	sont	34
(3)	les points d'intersection	de *4* et *124*	sont	14 et 24
(4)	les points d'intersection	de *123* et *124*	sont	12 et C.

- **Scolie :** à ce stade du raisonnement, le point C n'a pas de notation numérique.

- D'après Miquel "Le théorème des six cercles", les points 13, 14et 12 étant sur le cercle *1*,
  les points restants 23, 34, 24 et C sont cocycliques
  i.e. C est sur le cercle *234* qui n'est d'autre que !*1*.

- D'après Miquel "Le théorème des six cercles", les points 23, 34, 24 et 12 étant sur le cercle *234* i.e !*1*
  les points restants 13, 14 et C sont cocycliques
  i.e. C est sur le cercle *134* qui n'est d'autre que !*2*.

- **Conclusion :** !*4*, !*3*, !*1*, !*2* i.e *123*, *124*, *134* et *234* concourent en C i.e. *P*(4) est vraie.

Scolies :

(1) ce point de concours est "le 4-point de Clifford de (*1234*)" et est noté 1234

(2) cette situation généralise le point de Miquel d'un delta
en considérant 4 cercles concourants au lieu de 4 droites…
le triangle ayant pour sommets 12, 13, 23 et pour ménélienne le cercle *4*

(3) cette situation généralise le théorème des cinq cercles de Lebesgues. [18]

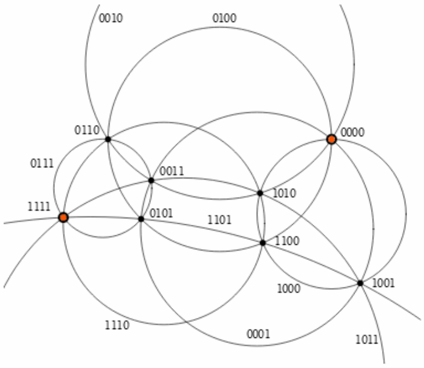
Archive :

[18] Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles, G.G.G. vol. **2** , p. 9-11 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Les théorèmes de Clifford

On construit un graphe $\mathcal{G}$. Ses sommets sont les éléments de l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n+1}$. Une arête relie les vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ si $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ ou $\mathbf{w}-\mathbf{v}$ appartient à la base canonique. Les vecteurs dont la somme des composantes et paire servent de label à 2^n points, les autres à 2^n cercles.

Les théorèmes de Clifford affirment qu'il est possible de placer les points et les cercles de manière qu'un point est sur un cercle exactement si leurs labels sont des sommets adjacents de $\mathcal{G}$.



Voyons le cas $n = 3$. On dessine quatre cercles passant tous par un même point. Ce point porte le label 0000 ; ceux des cercles sont respectivement 1000 , 0100 , 0010 et 0001 . Les cercles 1000 et 0100 se recoupent en 1100 . 1000 et 0010 se recoupent en 1010 , etc. Six nouveaux points. Le cercle 1110 est circonscrit aux points 1100 , 1010 et 0110 . De même 1100 , 1001 et 0101 définissent le cercle 1101 etc. Encore quatre cercles, dont le quatrième théorème de Clifford affirme qu'ils passent tous par un même point, le point 1111 .

La preuve utilise l'existence de la configuration de Miquel et le birapport dans le plan d'Argand-Cauchy. Elle dépasse le niveau de cette publication.

[19]

---

19 *Les-Mathematiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1715406,1715406
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,901899,902154
Gutierrez Antonio ; http://gogeometry.com/clifford1.htm

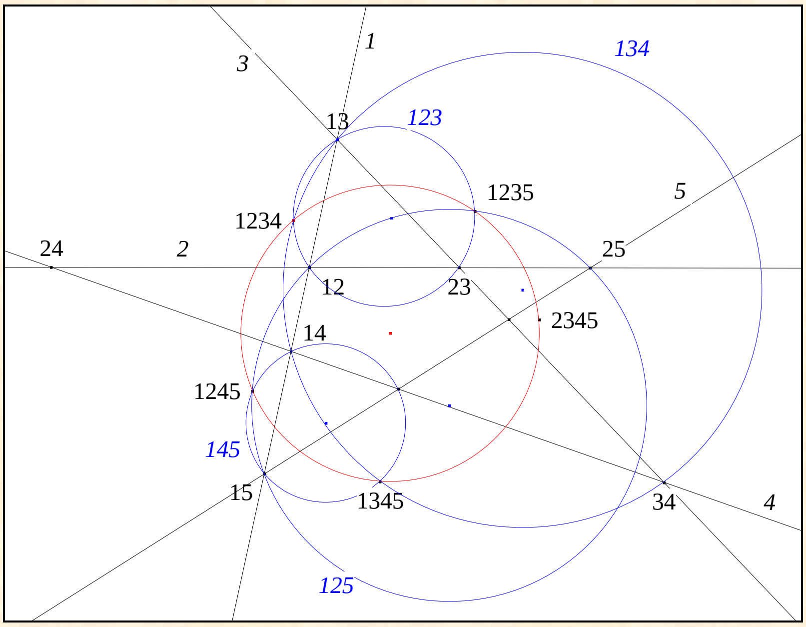
n = 5

ou

LE DEUXIÈME THÉORÈME DE CLIFFORD

VISION

Figure :



considérer des cercles concourants en lieu et place des droites

Traits : (*12345*) un 5-cercle.

Donné : les cinq 4-point 1234, 1235, 1245, 1345 et 2345 sont cocycliques.[20]

VISUALISATION

- Un 5-cercle (*12345*) conduit par retrait d'un cercle de "droite à gauche" à cinq 4-cercles
  i.e (*1234*), (*1235*), (*1245*), (*1345*), (*2345*).

- Ces cinq 4-cercle définissent cinq 4-point de Clifford i.e. 1234 , 1235 , 1245 , 1345 , 2345

  Notation allégée : *5 , *4 , *3 , *2 , *1

- Chaque 4-point est le point commun à quatre cercles (défini par le 4-cercle correspondant) obtenus en retirant successivement un cercle de "droite à gauche" au 4-cercle.

[20] Miquel A., *Le Géomètre* (1836)
Ayme J.-L.,

PREMIÈRE ÉTAPE

- Considérons les quatre points: *5, *4, *3, *2 liés à *1* et aux indices restants restants i.e. *2*, *3*, *4*, *5* ;
  par exemple,

123	ou	!*4*
124	ou	!*3*
135	ou	!*2*
145	ou	!*2*

- Choisissons deux de ces cercles
  et
  appliquons la règle d'intersection de Lebesgues à *123*, *124*, *135*, *145*

(1) les points d'intersection de *123* et *124* sont 12 et 1234

le cercle *124* passe par deux points associé à *1* i.e. 12 et 14, 12 étant pris, il reste 14

(3) les points d'intersection de *124* et *145* sont 14 et 1245

le cercle *145* passe par deux points associé à *1* i.e. 14 et 15, 14 étant pris, il reste 15

(4) les points d'intersection de *145* et *135* sont 15 et 1345

le cercle *135* passe par deux points associé à *1* i.e. 15 et 13, 15 étant pris, il reste 13

(2) les points d'intersection de *135* et *123* sont 13 et 1235

- D'après Miquel " Le théorème des six cercles", les points 12, 13, 14 et 15 étant sur *1*,
  les points 1234, 1235, 1245, 1345 sont cocycliques.

- Notons *12345* ce cercle.

SECONDE ÉTAPE

- Considérons quatre points: *5, *4, *3, *1 liés à *2* et aux indices restants i.e. *1*, *3*, *4*, *5* ;
  par exemple,

123	ou	!*4*
124	ou	!*3*
235	ou	!*2*
245	ou	!*2*

- Choisissons deux cercles en relation avec *2* et aux indices restants
  et
  appliquons la règle d'intersection de Lebesgues à *123*, *124*, *245*, *235*

(1) les points d'intersection de *123* et *124* sont 12 et 1234

le cercle *124* passe par deux points associé à *2* i.e. 12 et 24, 12 étant pris, il reste 24

(2) les points d'intersection de *124* et *245* sont 24 et 1245

(3) les points d'intersection de *245* et *235* sont 25 et 2345

(4) les points d'intersection de *235* et *123* sont 23 et 1235.

- D'après Miquel "Le théorème des six cercles", les points 12, 23, 24 et 25 étant sur *2*,
  les points 1234, 1235, 1245, 2345 sont cocycliques.

- Notons *12345'* ce cercle.

DERNIÈRE ÉTAPE

- *12345* et *12345'* ayant trois points en communs sont confondus.

- **Conclusion :** 1234, 1235, 1245, 1345 et 2345 sont cocycliques i.e. *P*(5) est vraie.

- Notons *12345* ce cercle.

Scolie : **(1)** ce cercle est "le 5-cercle de Clifford de (*12345*)" et est noté (*12345*)

(2) cette situation généralise le pentagramme de Miquel
en considérant un 5-cercles en place d'un 5-droites…

Archive :

> *Cas de cinq droites. Théorème de Miquel.* — Appliquons le lemme aux quatre circonférences 123, 134, 145, 152 prises dans cet ordre. On trouve les couples de points communs 1234, 13; 1345, 14; 1245, 15; 1235, 12. Et comme 13, 14, 15, 12 sont sur la droite 1, il en résulte que 1234, 1345, 1245, 1235 sont sur une circonférence.
>
> Faisant maintenant jouer à la droite 2 le rôle spécial que jouait avant la droite 1, on voit que 2134, 2135, 2145, 2345 sont aussi sur une circonférence.
>
> Ces deux circonférences sont donc confondues, c'est la circonférence de Miquel 12345.

[21]

[21] Lebesgue H., Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford,
Nouvelles Annales de Mathématiques série **4** tome **16**(1916) 481-495, 486 ;
http://www.numdam.org/item/NAM_1916_4_16__481_0/

n = 6

ou

LE TROISIÈME THÉORÈME DE CLIFFORD [22]

VISION

Figure :

Traits : (*123456*) un 6-cercle.

Donné : les six 5-cercles *12345*, *12345*, *12456*, *13456*, *3456* sont concourants.

VISUALISATION

- Un 6-cercle (*123456*) conduit par retrait d'un cercle de "droite à gauche"
  à six 5-cercles i.e. (*12345*), (*12346*), (*12356*), (*12456*), (*13456*), (*23456*).

- Ces six 5-cercle
  définissent six 5-cercle de Clifford i.e. *12345* , *12346* , *12356* , *12456* , *13456* , *23456*.

- Notation allégée : !*6* , !*5* , !*4* , !*3* , !*2* , !*1*.

PREMIÈRE ÉTAPE

- Considérons les cercles !*6* et !5, ainsi que les cercles intermédiaires *345* et *346*.

- D'après la règle d'intersection de Lebesgues,

  (1) les points d'intersection de *12345* et *345* sont 1345 et 2345

  (2) les points d'intersection de *345* et *346* sont 34 et 3456

  (3) les points d'intersection de *346* et *12346* sont 1346 et 2346

  (4) les points d'intersection de *12346* et *12345* sont 1234 et C.

- **Scolie :** à ce stade du raisonnement, le point C n'a pas de notation numérique.

- D'après Miquel "Le théorème des six cercles", les points 1345, 34, 1346 et 1234 étant sur le cercle *134*,
  les points restants 2345, 3456, 2346 et C sont cocycliques
  i.e. C est sur le cercle *23456* qui n'est d'autre que !*1*.

- D'après Miquel "Le théorème des six cercles", les points 2345, 34, 2346 et 1234 étant sur le cercle *234*,
  les points restants 1345, 3456, 1346 et C sont cocycliques
  i.e. C est sur le cercle *13456* qui n'est d'autre que !*2*.

- **Conclusion partielle :** !*6*, !*5*, !*1* et !*2* passent par le point C.

---

[22] Clifford W. K., *Mathematical papers* 1868, Cambridge et Dublin

DEUXIÈME ÉTAPE

- Considérons les cercles !*5* et !*4*, ainsi que les cercles intermédiaires *346* et *356*.

- D'après la règle d'intersection de Lebesgues

(1)	les points d'intersection de	*12346* et *346*	sont	1346 et 2346
(2)	les points d'intersection de	*346* et *356*	sont	36 et 3456
(3)	les points d'intersection de	*356* et *12356*	sont	1356 et 2356
(4)	les points d'intersection de	*12356* et *12346*	sont	1236 et C'.

- **Scolie :** à ce stade du raisonnement, le point C' n'a pas de notation numérique.

- D'après Miquel "Le théorème des six cercles", les points 1346, 36, 1356 et 1236 étant sur le cercle *136*, les points restants 2346, 3456, 2356 et C' sont cocycliques i.e. C' est sur le cercle *23456* qui n'est d'autre que !*1*.

- D'après Miquel "Le théorème des six cercles", les points 2346, 36, 2356, et 1236 étant sur le cercle *236*, les points restants 1346, 3456, 1356 et C' sont cocycliques i.e. C' est sur le cercle *13456* qui n'est d'autre que !*2*.

- **Conclusion partielle :** !*5*, !*4*, !*1* et !*2* passent par le point C' ; en conséquence, C et C' sont confondus.

DERNIÈRE ÉTAPE

- **Conclusion :** *12345*, *12345*, *12456*, *13456*, *3456* i.e. !*6*, !*5*, !*4*, !*3* , !*2* et !*1* sont concourants.

Scolie : ce point de concours est "le 6-point de Clifford de (*123456*)" et est noté 123456

Archive

Cas de six droites. — Appliquons le lemme aux circonférences 56123, 563, 564, 56124 prises dans cet ordre. Elles nous donnent comme couples de points communs 5613, 5623 ; 5634, 56 ; 5614, 5624 ; 5612 et un autre point A. Or les points 5613, 56, 5614, 5612 appartiennent à la circonférence 561, donc les points 5623, 5634, 5624, A sont sur une circonférence ; c'est-à-dire que la circonférence 56234 passe aussi par A.

De même les points 5623, 56, 5624, 5612 sont sur la circonférence 562 ; donc 5613, 5634, 5614, A sont sur une circonférence, c'est-à-dire que la circonférence 56134 passe aussi par A.

En faisant jouer à deux droites quelconques le rôle spécial des deux droites 56, on voit finalement que les six cercles de Miquel passent par le point A qu'on désignera par la notation 123456.

[23]

[23] Lebesgue H., Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford,
Nouvelles Annales de Mathématiques série **4** tome **16**(1916) 481-495, 487
http://www.numdam.org/article/NAM_1916_4_16__481_0.pdf