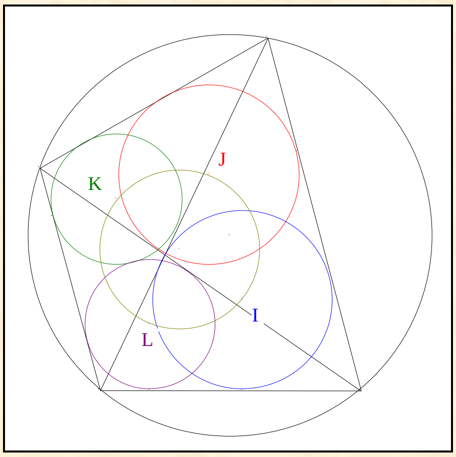
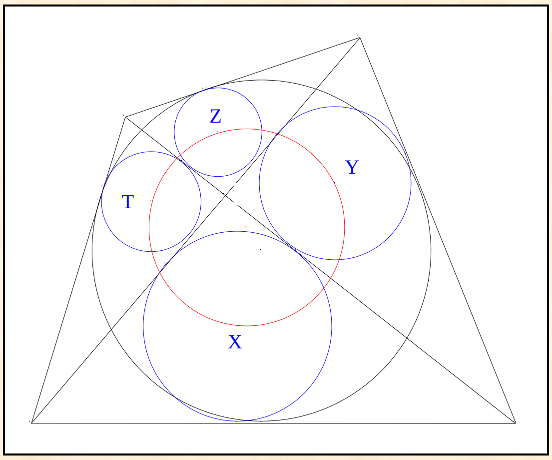
FORME ET MOUVEMENT

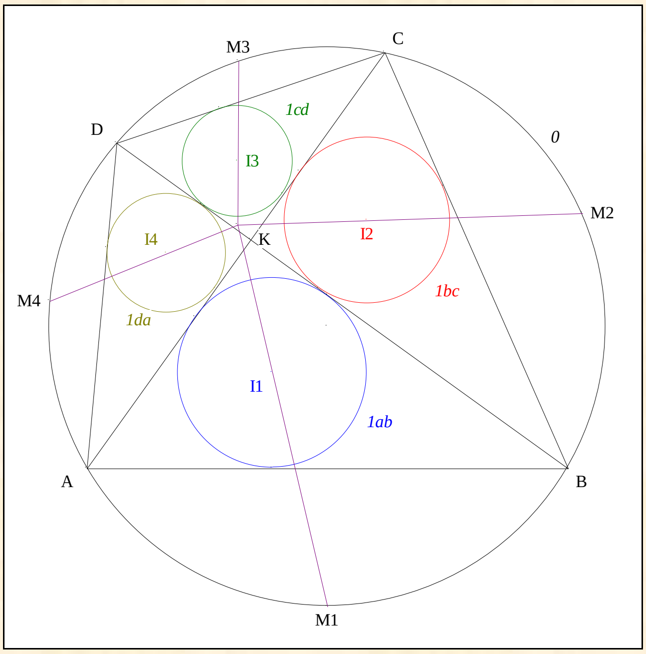
SHAPE AND MOVEMENT

†

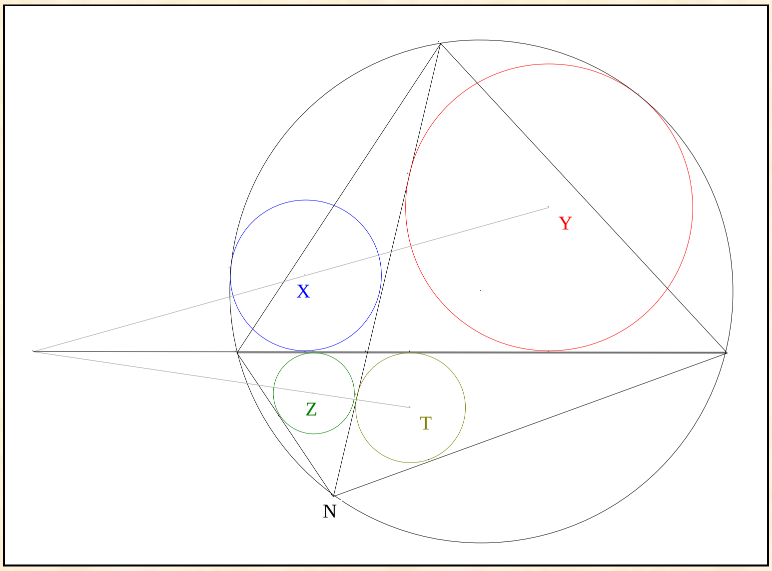
Jean - Louis AYME [1]

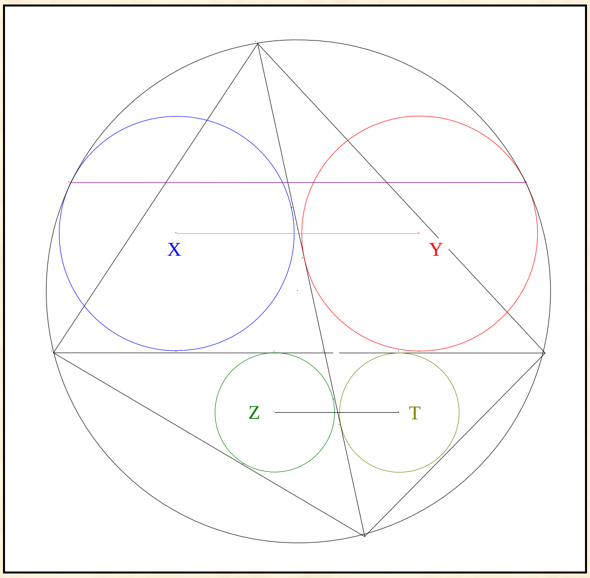






[1] St-Denis, Île de la Réunion (France), le 25/11/2010.





Résumé. L'auteur présente quelques formes quadrilatérales mettant en mouvement des cercles inscrits et se termine par une jolie construction.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents a few quadrilateral shapes involving movement of incircles and ends with a nice construction.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

Et c'est lorsqu'il cesse de chercher, elle est là,
immobile
à quelques pas de lui,
pleine de charme et rayonnante de beauté.

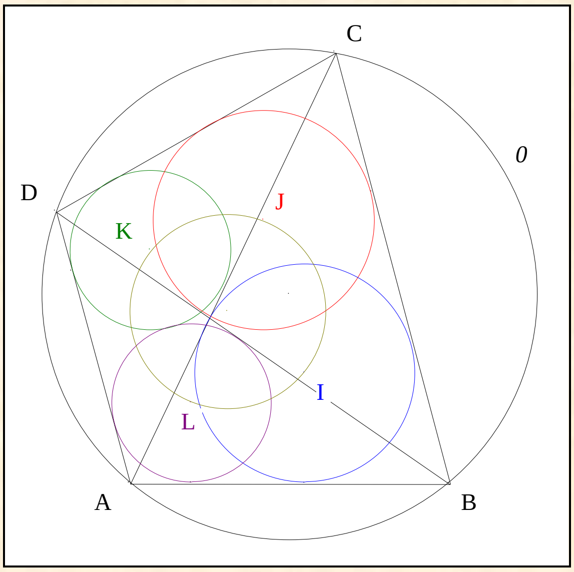
Sommaire

A. LOUIS P. PUISSANT

1. Le cercle de Puissant

VISION

Figure :



Traits : *0* un cercle,
ABCD un quadrilatère convexe inscrit dans *0*,
et I, J, K, L les centres des cercles inscrits des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

Donné : I, J, K et L sont cocycliques. [2]

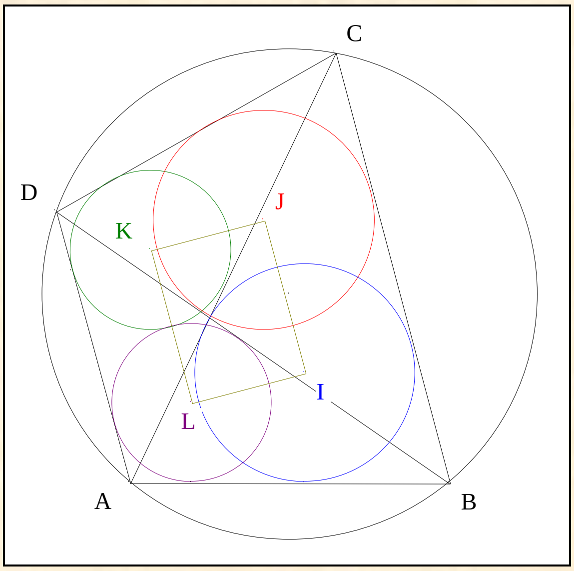
Commentaire : la visualisation de ce résultat peut être vue dans l'article de l'auteur [3] intitulé "Le cercle de Puissant".

2. Le rectangle de Ryokan Maruyama

VISION

Figure :

[2] Puissant L. P., *Correspondance sur l'École Polytechnique*, Tome **1**, (1806) 193.
[3] Ayme J.-L., Le cercle de Puissant, Généralisation et Réflexion, G.G.G. vol. **9**, p. 3 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
et I, J, K, L les centres des cercles inscrits des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

Donné : ABCD est cyclique *si, et seulement si,* le quadrilatère IJKL est un rectangle.

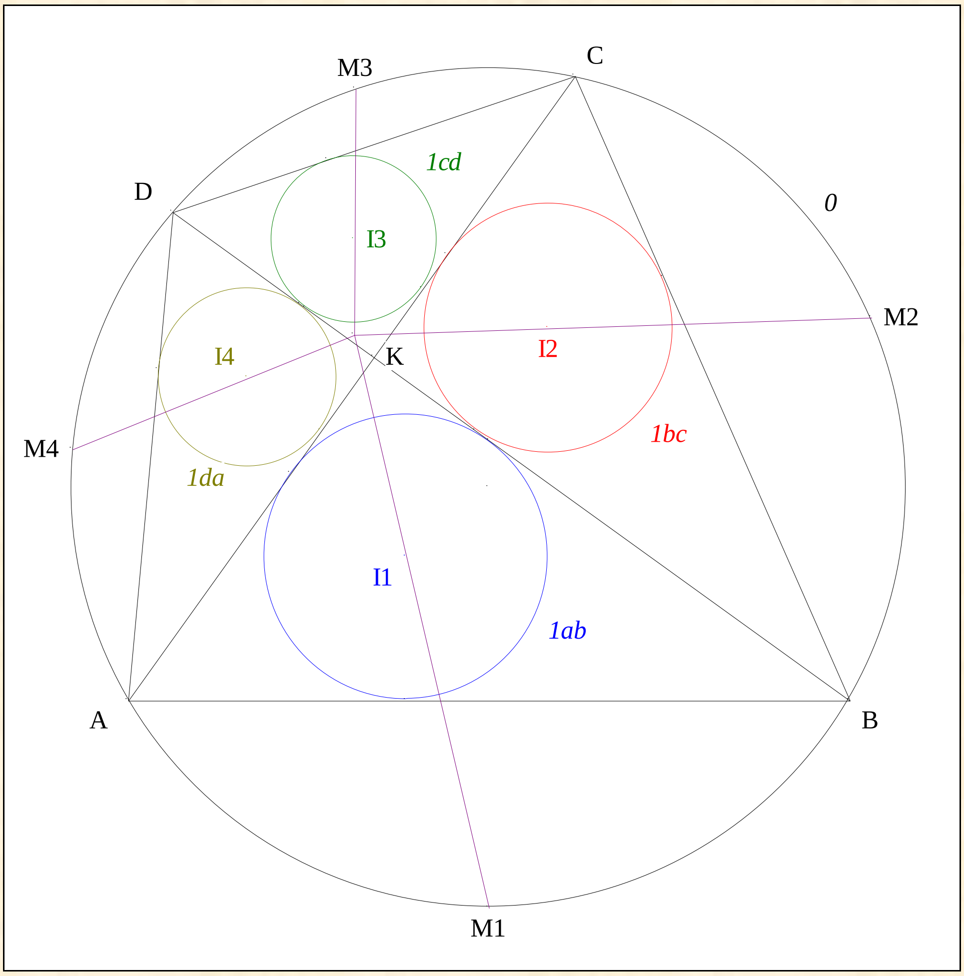
Commentaire : la visualisation de ce résultat peut être vue dans l'article de l'auteur [4]
intitulé "Le rectangle de Ryokan Maruyama".

3. Quatre droites concourantes

VISION

Figure :

[4] Ayme J.-L., Le rectangle de Ryokan Maruyama, G.G.G. vol. **4** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

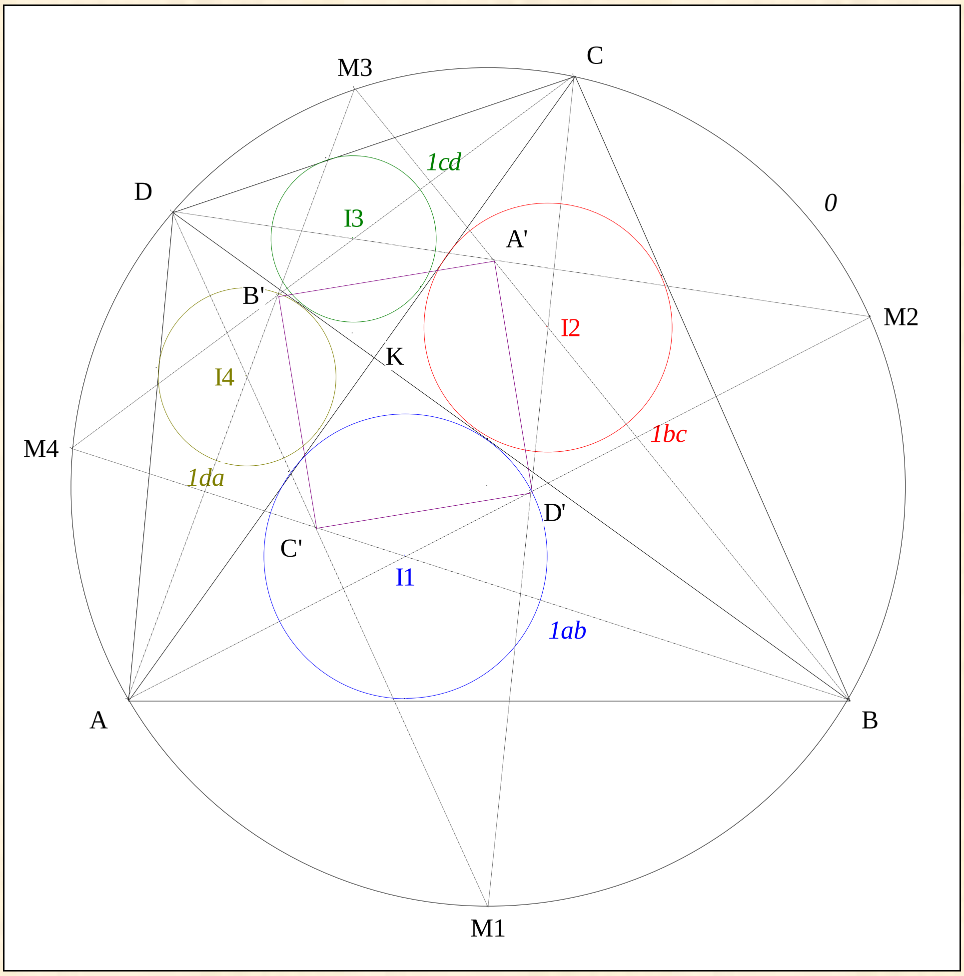


Traits : ABCD un quadrilatère convexe cyclique,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
K le point d'intersection de (AC) et (BD),
1ab, *1bc*, *1ca*, *1da* les cercles inscrits resp. aux triangles KAB, KBC, KCD,
I1, I2, I3, I4 les centres resp. de *1ab*, *1bc*, *1ca*, *1da*,
et M1, M2, M3, M4 les milieux des arcs AB, BC, CD, DA comme indiqués sur la figure.

Donné : (M1I1), (M2I2), (M3I3) et (M4I4) sont concourantes. [5]

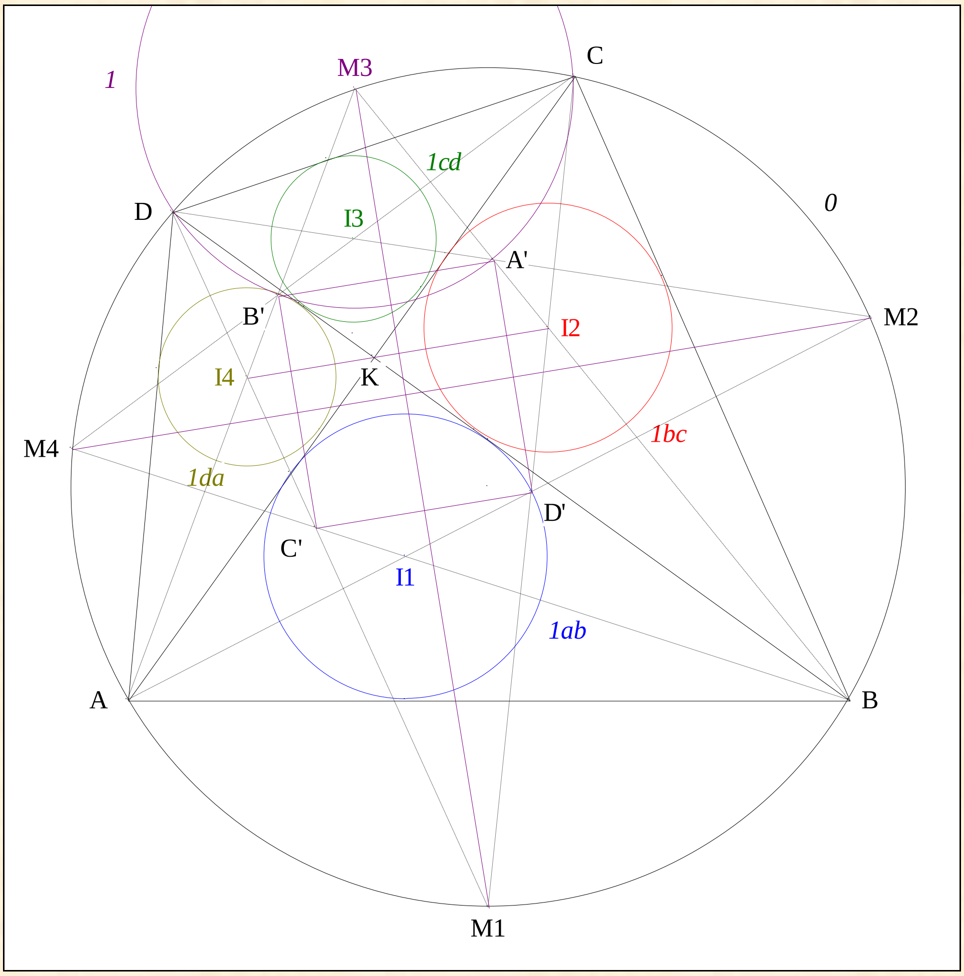
VISUALISATION

[5] All-Russian Olympiad 2010, 11 grade P-3, AoPS du 10/09/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=2014625
Cyclic quadrilateral and concurrency of lines, AoPS du 14/05/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=406516
M_1I_1,M_2I_2,M_3I_3,M_4I_4 are concurent, UZMO 2012, AoPS du 30/05/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=481632



- Notons A', B', C', D' les centres des cercles inscrits resp. des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.
- D'après Ryokan Maruyama [6], le quadrilatère A'B'C'D' est un rectangle.

[6] Ayme J.-L., Le rectangle de Ryokan Maruyama, G.G.G. vol. **4**, p. ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

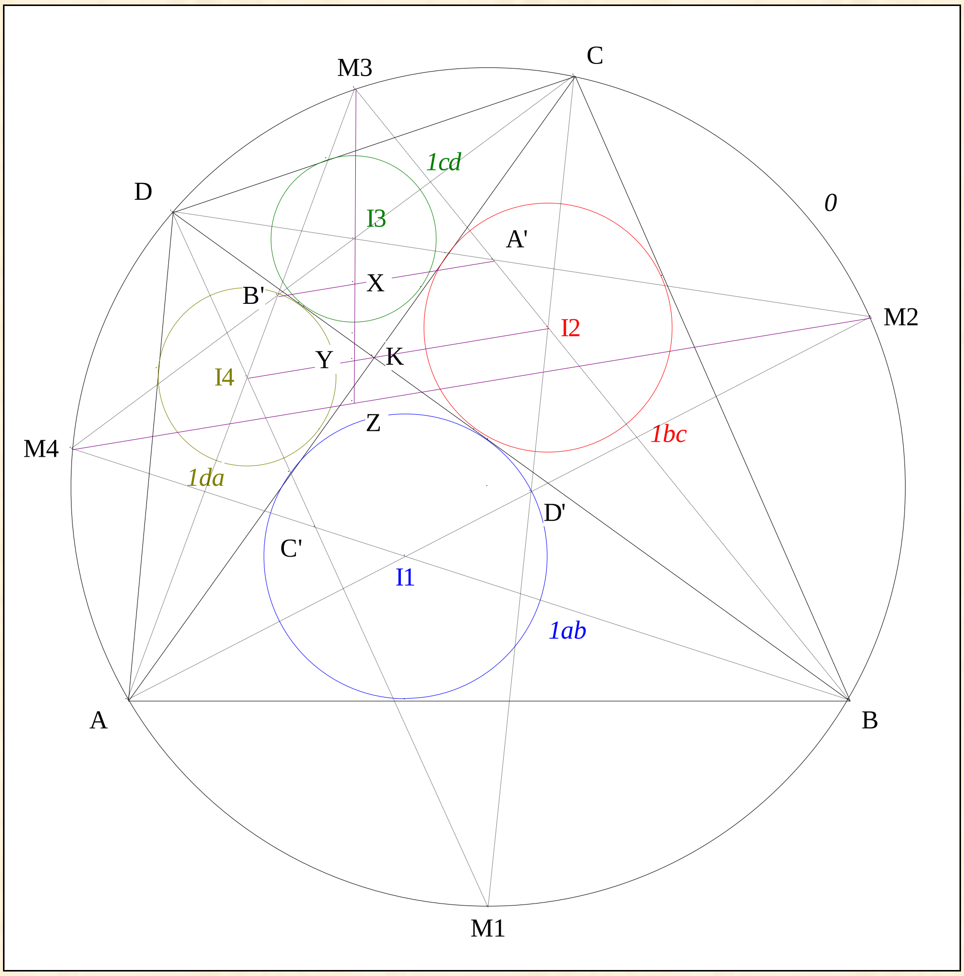


- Notons *1* le cercle de centre M3 passant par C ; il passe par D.
- D'après Mention [7], *1* passe par A' et B'.
- Les cercles *1* et *0*, les points de base C et D, les moniennes (B'CM4) et (A'DM2), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (A'B') // (M2M4).
- **Scolie :** (I2I4) est la K-bissectrice intérieure de KBC et KDA
- Nous savons [8] que (I2I4) // (M2M4).
- **Conclusion partielle :** (A'B'), (I2I4) et (M2M4) sont parallèles entre elles.

---

[7] Ayme J.-L., Le rectangle de Ryokan Maruyama, G.G.G. vol. **4**, **II. 3.** p. 6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

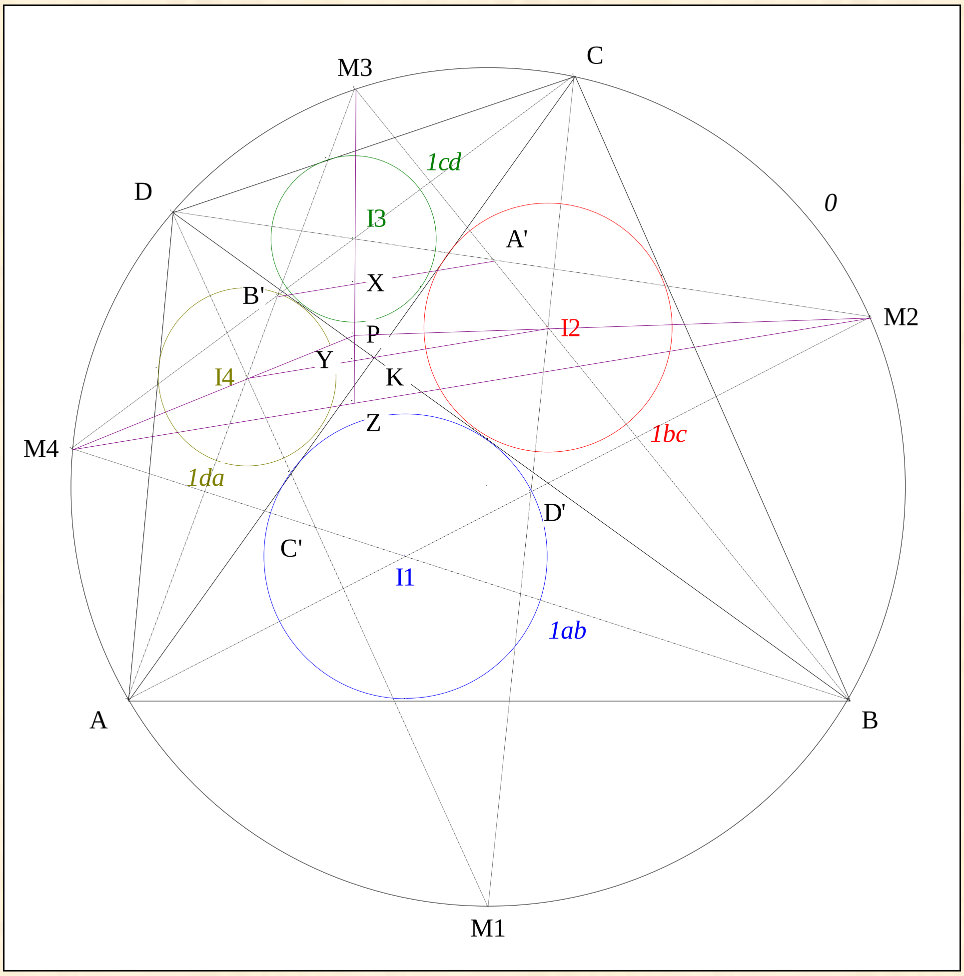
[8] Ayme J.-L., Le rectangle de Ryokan Maruyama, G.G.G. vol. **4**, **II. 5.** p. 8-10 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- **Scolies :** **(1)** A, I4, B' et M3 sont alignés
  (2) B , I2, A' et M3 sont alignés
  (3) C , I3, B' et M4 sont alignés
  (4) D , I3, A' et M2 sont alignés.

- Notons X, Y, Z les points d'intersection de (M3I3) resp. avec (A'B'), (I2I4), (M2M4).

- Relativement au triangle I3M2M4, nous avons : ZM2/ZM4 = XA'/XB' ;
  relativement au triangle M3I2I4, nous avons : XA'/XB' = YI2/YI4 ;
  par transitivité de la relation =, ZM2/ZM4 = YI2/YI4.



- Notons P le point d'intersection de (M2I2) et (M4I4).
- Sachant que ZM2/ZM4 = YI2/YI4, relativement au triangle PM2M4, P est sur (M3I3).
- **Conclusion partielle :** (M2I2), (M3I3) et (M4I4) sont concourantes en P.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (M3I3), (M4I4) et (M1I1) sont concourantes en P.
- **Conclusion :** (M1I1), (M2I2), (M3I3) et (M4I4) sont concourantes.

Archive :

Материалы для проведения
заключительного этапа

XXXVI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2009–2010 учебный год

Первый день

Майкоп, 25–30 апреля 2010 г.

Москва, 2010

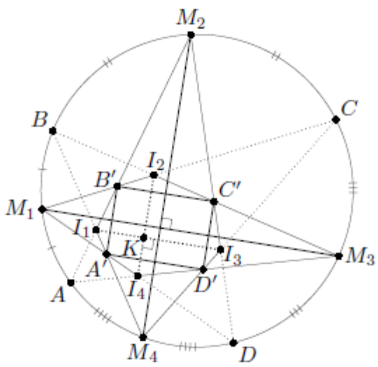


Рис. 6

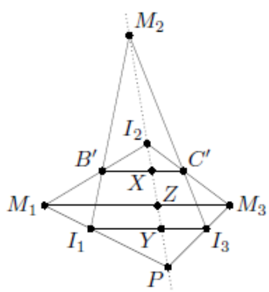


Рис. 7

дают, утверждение задачи очевидно. Пусть, скажем, точка I_1 не лежит на прямой M_1M_3. Обозначим $A' = DM_1 \cap BM_4$, $B' = AM_2 \cap CM_1$, $C' = BM_3 \cap DM_2$, $D' = AM_3 \cap CM_4$. Имеем $\angle BM_1M_2 = \angle CM_1M_2$ и $\angle BM_2M_1 = \angle AM_2M_1$, поэтому треугольники M_1M_2B и M_1M_2B' симметричны относительно прямой M_1M_2. Отсюда $M_2B' = M_2B$. Аналогично $M_2C' = M_2C$, и из $M_2B = M_2C$ получаем $M_2B' = M_2C'$. Поскольку $\angle AM_2M_4 = \angle DM_2M_4$, прямая M_2M_4 является биссектрисой (и, значит, высотой) равнобедренного треугольника $M_2B'C'$. Таким образом, $B'C' \perp M_2M_4$, поэтому $B'C' \parallel M_1M_3 \parallel I_1I_3$.

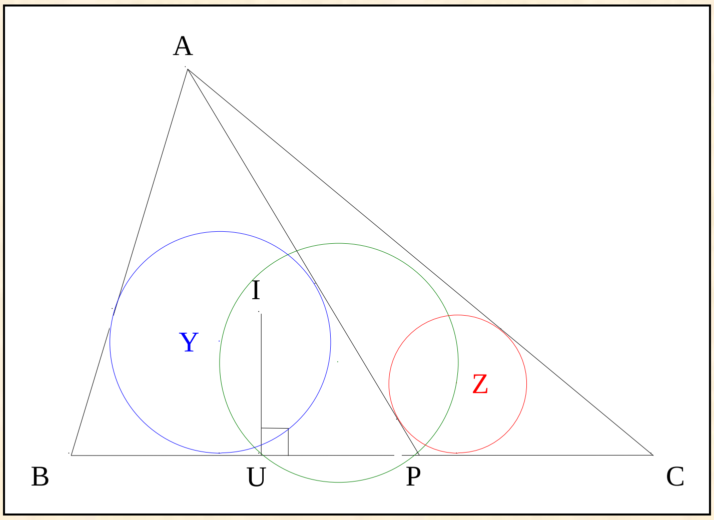
Пусть прямая M_2I_2 пересекает отрезки $B'C'$, I_1I_3 и M_1M_3 соответственно в точках X, Y, Z (см. рис. 7). Рассматривая гомотетии с центрами I_2 и M_2, получаем: $\frac{M_1Z}{M_3Z} = \frac{B'X}{C'X} = \frac{I_1Y}{I_3Y}$. Пусть $P = M_1I_1 \cap M_3I_3$. Если прямая PY пересекает M_1M_3 в точке Z', то из гомотетии с центром P получаем: $\frac{M_1Z'}{M_3Z'} = \frac{I_1Y}{I_3Y}$. Значит, Z' совпадает с Z. Получаем, что точка P лежит на прямой M_2I_2. Аналогично, P лежит на прямой M_4I_4, то есть все четыре прямые M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4 пересекаются в точке P.

B. I. VAJNSHTEJN

1. Quatre points cocycliques

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
P un point de [BC],
Y, Z les centres resp. des triangles APB, APC
et U le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur (BC).

Donné : U, Y, Z et P sont cocycliques.[9]

Commentaire : la visualisation de ce résultat peut être vue dans l'article de l'auteur [10] intitulé "Le théorème de Feuerbach-Ayme".

Note historique : la référence a été donnée d'une façon incomplète par le regretté Juan Carlos Salazar.

2. Un centre externe d'homothétie

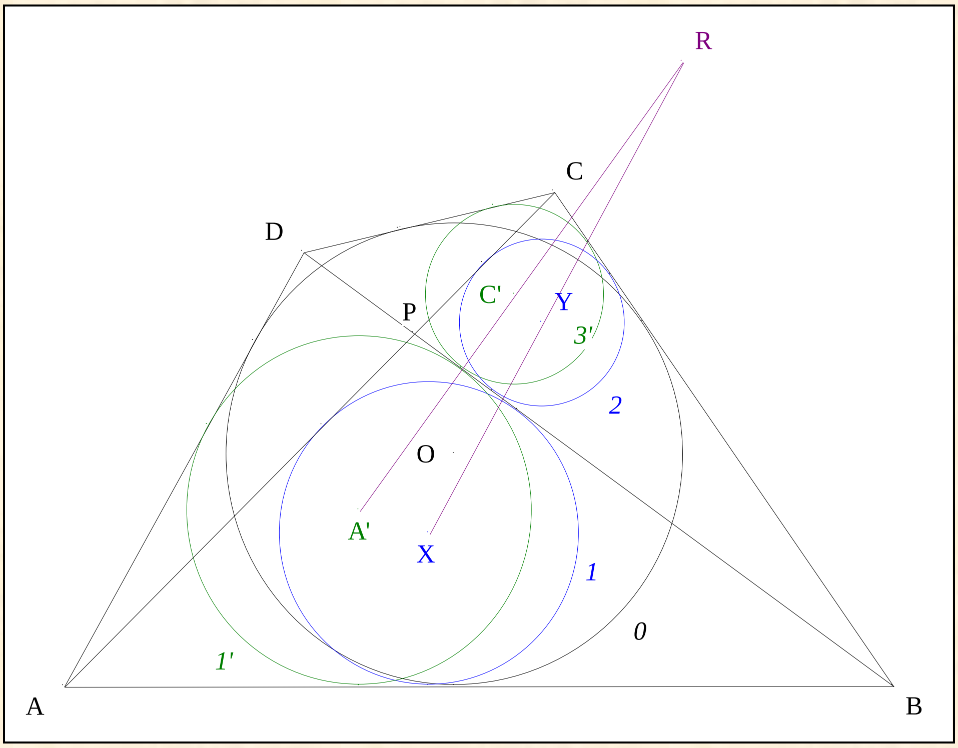
VISION

Figure :

---

9 *American Mathematical Monthly*.

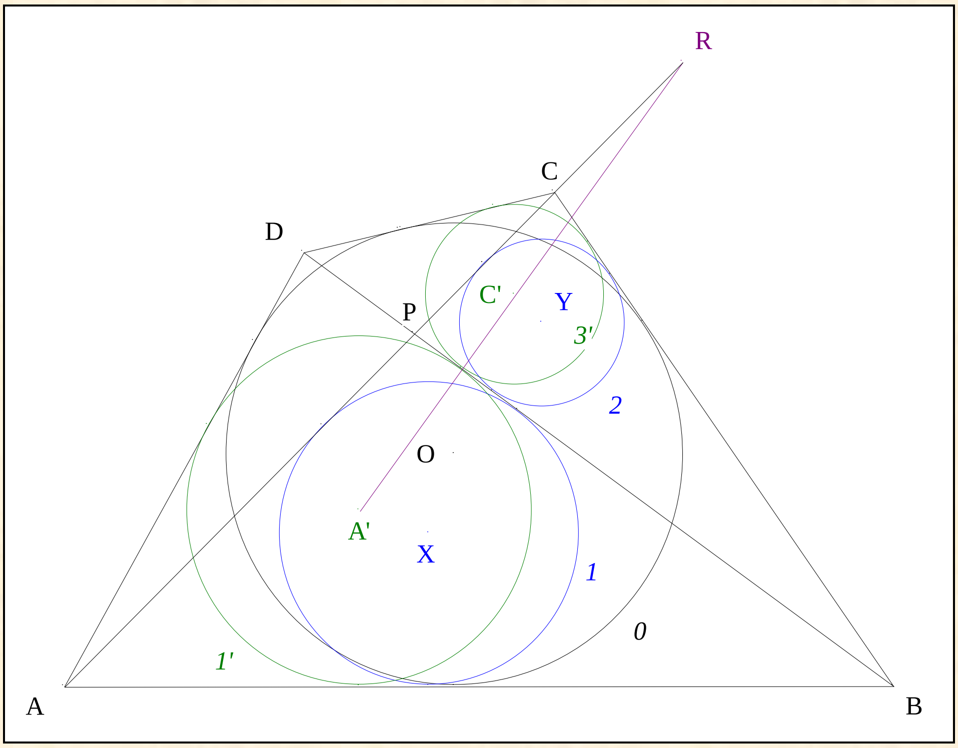
10 Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach-Ayme, G.G.G. vol. **5**, p. 9 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



Traits : ABCD un quadrilatère circonscriptible,
0 le cercle inscrit dans ABCD,
P le point d'intersection de (AC) et (BD),
1, *2*, *3*, *4* les cercles inscrits resp. des triangles PAB, PBC, PCD, PDA
X, Y, Z, T les centres resp. de *1*, *2*, *3* et *4*.
1', *3'* les cercles inscrits resp. des triangles ABD, BCD,
A', C' les centres resp. de *1'*, *3'*
et R le centre externe d'homothétie de *1'* et *3'*.

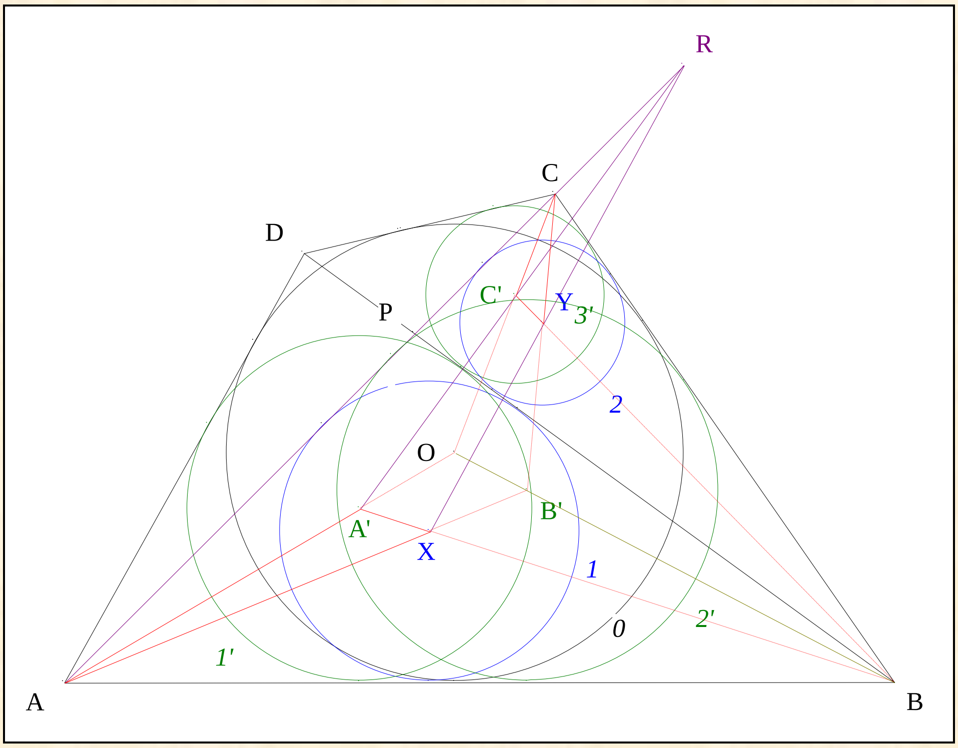
Donné : R est le centre externe d'homothétie de *1* et *2*.

VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** A est le centre externe d'homothétie de *0* et *1'*
  (2) C est le centre externe d'homothétie de *0* et *3'*.

- D'après "La droite de d'Alembert" (Cf. Annexe **1**), R, A et C sont alignés.



- Notons *2'* le cercle inscrit dans le triangle ABC
  et B' le centre de *2'*.

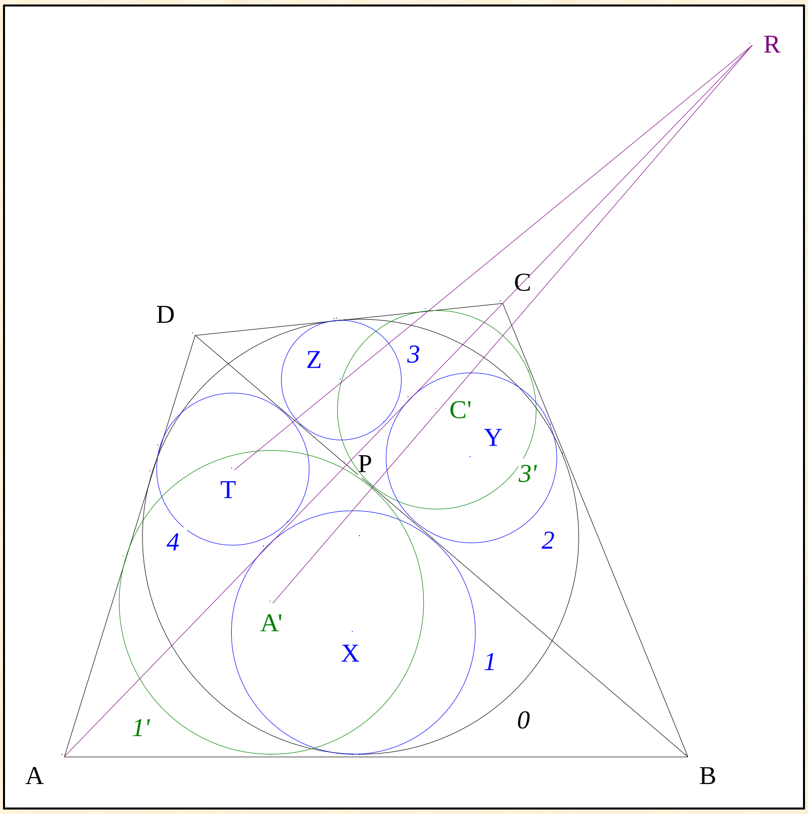
- **Scolies :** **(1)** B' est le point d'intersection de (AX) et (CY)

(2)	B	est le point d'intersection de (A'X) et (C'Y)
(3)	O	est le point d'intersection de (AA') et (CC')
(4)	R	est le point d'intersection de (AC) et (A'C')
(5)		B', B et O sont alignés

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles"[11], appliqué aux triangles AXA' et CYC' d'axe (B'BO), les triangles AXA' et CYC sont perspectifs ; en conséquence, (AC), (XY) et (A'C') sont concourantes en R.

- **Conclusion :** R est le centre externe d'homothétie de *1* et *2*.

Scolies : **(1)** R est le centre externe d'homothétie de *3* et *4*.

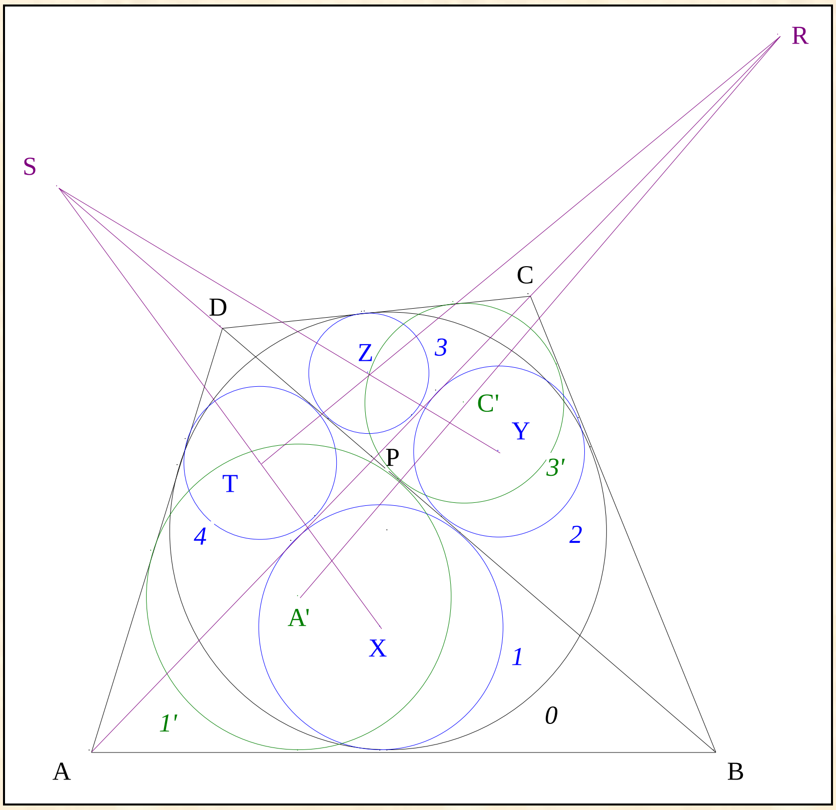


- Notons *3*, *4* les cercles inscrits resp. des triangles PCD, PDA
  et Z, T les centres resp. de *3*, *4*.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que R est le centre externe d'homothétie de *3* et *4*.

(2) Un second centre externe d'homothétie

[11] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 39 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



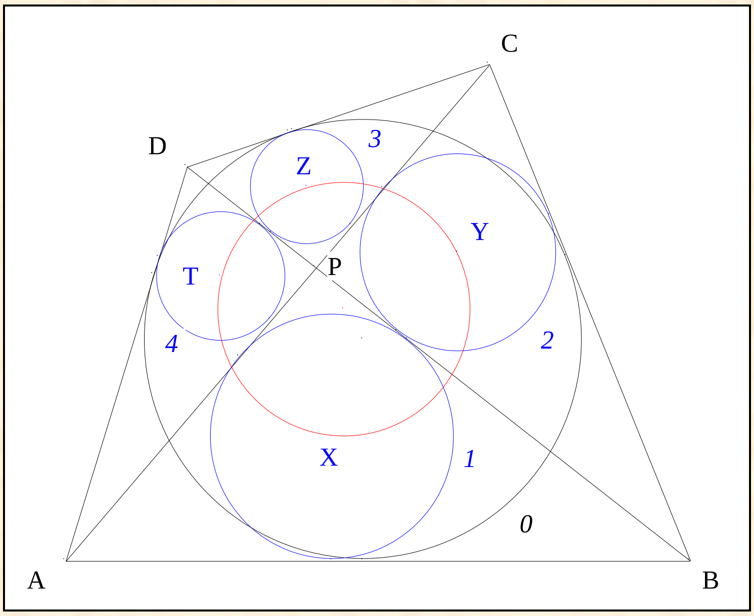
- Notons *4'* le cercle inscrit du triangle CDA,
  D' le centre de *4'*
  et S le centre externe d'homothétie de *1* et *4*.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que S est le centre externe d'homothétie de *2* et *3*.

3. Quadrilateral problem

VISION

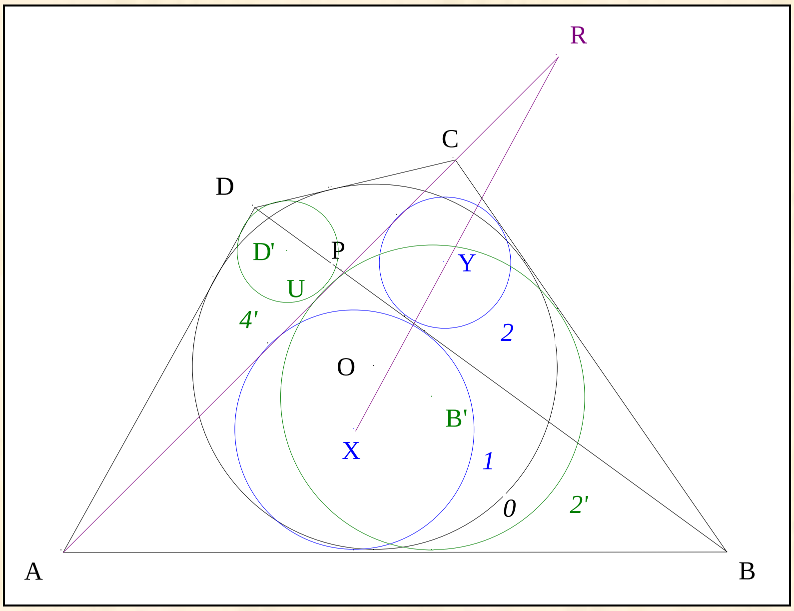
Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère circonscriptible,
0 le cercle inscrit dans ABCD,
P le point d'intersection de (AC) et (BD),
1, 2, 3, 4 les cercles inscrits resp. des triangles PAB, PBC, PCD, PDA
et X, Y, Z, T les centres resp. de *1, 2, 3* et *4.*

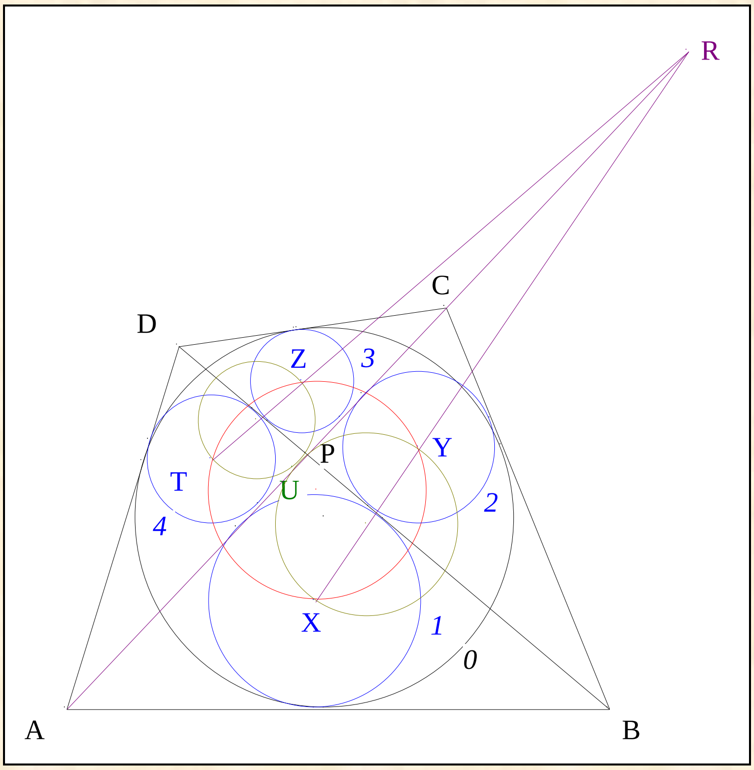
Donné : X, Y, Z et T sont cocycliques.

VISUALISATION



- Notons *2', 4'* les cercles inscrits resp. des triangles ABC, CDA
  et U le point de contact de *2'* avec (AC).

- **Conclusion partielle :** d'après **E. 1.** "Deux cercles tangents", *4'* passe par U.



- D'après **B. 1.** Quatre points cocycliques, appliqué à

*	*1* et *2*,	P, U, X et Y sont cocycliques
*	*3* et *4*,	P, U, Z et T sont cocycliques.

- D'après **B. 2.** Centre externe d'homothétie, (XY), (AUPC) et (ZT) sont concourantes en R.

- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes"[12], X, Y, Z et T sont cocycliques.

Commentaire : la preuve présentée est celle de Darij Grinberg qui, par la suite, en a aussi donné une preuve trigonométrique[13].

4. Note historique

Le résultat précédent a été présenté en 2004 sous forme de conjecture au groupe *Hyacinthos* par "Rafinad"[14]. Darij Grinberg[15] précise en 2004 que I. Vajnshtejn[16] avait déjà proposé cette conjecture en 1995 dans la revue russe *Kvant* et qu'une solution[17] en avait été publiée dans la même revue l'année suivante ; dans son message, il fait le point sur toutes les questions posées à propos de cette conjecture.

Here is a summary of the long discussion on the "Quadrilateral problem" starting with Hyacinthos message # 8910 by Rafi. I list all conjectures and theorems with the corresponding proofs or references excluding remarks not directly related to the subject and dead-end observations.

---

[12] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[13] Grinberg D., Quadrilateral problem Message *Hyacinthos* # **9022** du 10/01/2004.

[14] Rafinad, Quadrilateral problem, Message *Hyacinthos* # **8910** du 02/01/2004 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

[15] Grinberg D., Quadrilateral problem. SUMMARY, Message *Hyacinthos* # **8971** du 06/01/2004 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

[16] Vajnshtejn I., Reshenie zadachi **M1524**, Kvant **6** (1995) 25-26.

[17] *Kvant* **3** (1996) 27-28 ; http://kvant.mccme.ru/1996/03/resheniya_zadachnika_kvanta_ma.htm

Une solution métrique basée sur la notion de puissance a été proposée par Nikolaos Dergiades[18].

Ce problème avait déjà été soumis au CTK Exchange/College Math le 17 septembre 2003 sous le titre "The Conjecture of Christopher Bradley".
Un cas particulier avait été proposé en 1998 dans la revue *Crux Mathematicorum* par Toshio Seimiya[19] :

ABCD *étant un quadrilatère cyclique convexe,*
considérons les 4 *centres des cercles inscrits dans les* 4 *triangles déterminés par ses deux diagonales ;*
si, ces centres sont cocycliques alors, le quadrilatère est circonscriptible.

Une solution trigonométrique de ce problème, accompagnée d'une condition nécessaire et suffisante, a donné l'année suivante par Peter Woo[20].

Pour terminer, rappelons que la figure de cette conjecture apparaît sur deux tablettes votives, deux San Gaku qui ont de nos jours disparus ; l'une datant de 1793 de la préfecture de Fukusima[21] (Japon) et l'autre de 1811 de la préfecture de Tokyo[22] (Japon).

5. Archives

M1524. Пусть P — точка пересечения диагоналей описанного четырехугольника $ABCD$. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABP, BCP, CDP, DAP, лежат на одной окружности.

И. Вайнштейн

[23]

18 Nikolaos Dergiades, Quadrilateral problem, Message *Hyacinthos* # **8966** du 06/01/2004 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/
19 Seimiya T., *Crux Mathematicorum* **4/24** (1998) 234 ; http://math.ca/crux/
20 Woo P. Y., *Crux Mathematicorum* **4/25** (1999) 243-245 ; http://math.ca/crux/
21 Manuscrit Zinbyo Bukkaku Sangakusyu (?), Anmei Aida (1747-1817), *Mathematical Tablets*, vol. **2**
22 Sanpo Sasso (1830), Sigeto Iwai (1804-1878), *Mathematical Tablets*.
23 Vajnshtejn I., problème **M1524**, Kvant **6** (1995) 25-26.

$n \geq 5$. *Докажите, что*

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{70}^2 = a_1 a_2 \ldots a_{70}.$$

Обозначим

$$b_n = a_1 a_2 \ldots a_n - a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2.$$

Докажем, что $b_{n+1} = b_n - 1$ (при $n \geq 5$):

$$b_{n+1} = a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} - a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2 - a_{n+1}^2 =$$

$$= a_1 a_2 \ldots a_n (a_1 a_2 \ldots a_n - 1) - a_1^2 - a_2^2 - \ldots$$

$$\ldots - a_n^2 - (a_1 a_2 \ldots a_n - 1)^2 =$$

$$= a_1 a_2 \ldots a_n - a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2 - 1 = b_n - 1.$$

Далее,

$$b_5 = a_1 a_2 \ldots a_5 - a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_5^2 =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1^2 - 2^2 - 3^2 - 4^2 - 5^2 = 65.$$

Поэтому $b_6 = 64$, $b_7 = 63$, …, $b_{70} = 0$, т.е.

$$a_1 a_2 \ldots a_{70} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{70}^2.$$

Л. Курляндчик

Замечание. Эту задачу полезно сравнить со статьей про обобщенные уравнения Маркова («Квант» № 6 за 1995 год). Оказывается, набор (1, 2, 3, 4, 5, 1, …, 1) из 70 чисел — это «корневое решение» уравнения

$$x_1^2 + \ldots + x_{70}^2 = x_1 x_2 \ldots x_{70},$$

из которого за 65 шагов получается решение

$$(1, 2, 3, 4, 5, a_6, a_7, \ldots, a_{70})$$

того же уравнения. (Шаг за шагом мы получаем решения

$$(1, 2, 3, 4, 5, a_6, a_7, \ldots, a_k, 1, \ldots, 1),\ k = 6, 7, \ldots, 70;$$

рекуррентная формула в условии — это формула (3) из статьи, позволяющая «вырастить» новое решение уравнения Маркова.)

M1524. *Пусть P — точка пересечения диагоналей описанного четырехугольника $ABCD$. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABP, BCP, CDP, DAP, лежат на одной окружности.*

В решении, разумеется, основную роль играет равенство двух касательных, проведенных из одной точки к окружности. Но кроме того, нам пригодится и нетривиальное равенство

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} \qquad (1)$$

— основной результат задачи M1495 (см. «Квант» №6 за 1995 год); здесь r_1, r_2, r_3, r_4 — радиусы окружностей с центрами O_1, O_2, O_3, O_4, вписанных в треугольники APB, BPC, CPD и DPA (рис. 1); T_1, T_2, T_3, T_4 — точки касания окружностей со сторонами четырехугольника; T_1', T_1'', T_2', T_2'', T_3', T_3'', T_4', T_4'' — точки их касания с диагоналями четырехугольника.

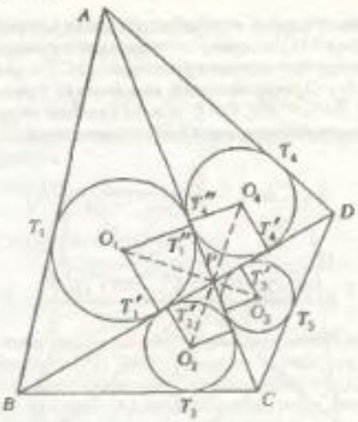


Рис. 1

Так как

$$AT_1 = AT_1'' = AP - PT_1'', \quad BT_1 = BT_1' = BP - PT_1',$$

то

$$AB = AT_1 + BT_1 = AP + BP - PT_1'' - PT_1',$$

или, учитывая, что $PT_1'' = PT_1'$,

$$AB = AP + BP - 2PT_1'. \qquad (2)$$

Точно так же

$$CD = CP + DP - 2PT_3'. \qquad (3)$$

Складывая почленно (2) и (3), получим

$$AB + CD = AC + BD - 2T_1'T_3'. \qquad (4)$$

Аналогично найдем, что

$$AD + BC = AC + BD - 2T_2'T_4'. \qquad (5)$$

Так как четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, то $AB + CD = AD + BC$, поэтому из (4) и (5) следует

$$T_1'T_3' = T_2'T_4'. \qquad (6)$$

Обозначим $\angle BPO_1 = \beta$. Тогда $\angle BPO_2 = \frac{\pi}{2} - \beta$, ибо $O_1O_3 \perp O_2O_4$ (как биссектрисы смежных углов),

$$T_1'T_3' = PT_1' + PT_3' = (r_1 + r_3)\operatorname{ctg}\beta. \qquad (7)$$

$$T_2'T_4' = (r_2 + r_4)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = (r_2 + r_4)\operatorname{tg}\beta. \qquad (8)$$

Из (6), (7) и (8) получим $(r_1 + r_3)\operatorname{ctg}\beta = (r_2 + r_4)\operatorname{tg}\beta$. Теперь из (1) легко вывести, что

$$\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \frac{r_1 + r_3}{r_2 + r_4} = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}, \text{ т.е. } \frac{r_1 r_3}{\sin^2\beta} = \frac{r_2 r_4}{\cos^2\beta}.$$

Но $PO_1 = r_1/\sin\beta$, $PO_3 = r_3/\sin\beta$, $PO_2 = r_2/\cos\beta$, $PO_4 = r_4/\cos\beta$, значит, $PO_1 \cdot PO_3 = PO_2 \cdot PO_4$.

Используя теорему об отрезках пересекающихся хорд, получаем из этого равенства, что O_1, O_2, O_3, O_4 лежат на одной окружности.

Докажем, что верна и теорема, обратная к утверждению задачи М1524: *если P — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$ и центры O_1, O_2, O_3, O_4 окружностей, вписанных в треугольники APB, BPC, CPD, DPA, лежат на одной окружности, то четырехугольник $ABCD$ — описанный.*

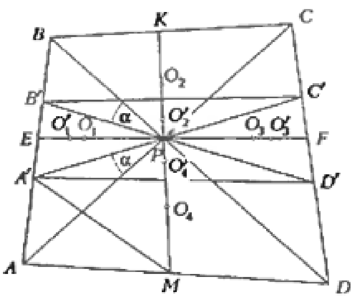


Рис.2

Пусть это не так. Обозначим стороны AB, BC, CD, DA через a, b, c, d соответственно и предположим для определенности, что $a + c > b + d$. Проведем через точку P прямые $A'C'$ и $B'D'$, идущие внутри углов APB и CPD (точки A' и B' лежат на отрезке AB, точки C' и D' — на отрезке CD) так, что угол α между AC и $A'C'$ равен углу между $B'D'$ и BD (рис.2); здесь $0 \le \alpha \le \alpha_0$, где α_0 — половина угла APB. Длины сторон четырехугольника $A'B'C'D'$ — непрерывные функции от α. Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = A'B' + C'D' - (B'C' + D'A');$$

$$f(0) = a + c - (b + d) > 0, \quad f(\alpha_0) < 0,$$

поэтому найдется значение α, при котором $f(\alpha) = 0$. При этом соответствующий четырехугольник $A'B'C'D'$ будет описанным, т.е. центры O_1', O_2', O_3', O_4' окружностей, вписанных в треугольники $A'PB'$, $B'PC'$, $C'PD'$, $D'PA'$, будут лежать на окружности по доказанной выше теореме. Остается заметить, что биссектрисы углов с вершиной P для четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ совпадают; при этом $O_1'P > O_1P$, $O_3'P > O_3P$, $O_2'P < O_2P$, $O_4'P < O_4P$. (Это следует из такого почти очевидного факта, доказательство которого мы оставляем читателям: если треугольники XPY и UPV расположены так, что биссектрисы углов UPV и XPY совпадают, $\angle UPV > \angle XPY$, причем точки U, V лежат по ту же сторону от прямой XY, что и точка P, или на самой прямой XY, то центр Q вписанной окружности треугольника UPV расположен ближе к P, чем центр O вписанной окружности XPY: $QP < OP$). Но тогда мы получаем противоречие с тем, что обе четверки центров лежат на окружностях, — с равенствами

$$O_1P \cdot O_3P = O_2P \cdot O_4P, \quad O_1'P \cdot O_3'P = O_2'P \cdot O_4'P.$$

Отсюда следует обратная теорема.

Н.Вайнштейн

дящей через них окружности, то соседние касательные пересекаются на прямых AC и BD (диагоналях исходного четырехугольника или их продолжениях).

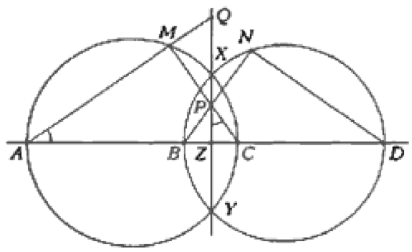
* * *

Следующие пять задач взяты из числа предлагавшихся на XXXVI Международной математической олимпиаде в Канаде. Мы приносим глубокую благодарность нашему коллеге Энди Лю из университета Альберты, возглавившему комиссию по выбору задач для этой олимпиады, за присланные решения и комментарии, которые частично использованы ниже.

М1525. *Пусть A, B, C и D — четыре различные точки на прямой, расположенные в указанном порядке. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в точках X и Y. Прямые XY и BC пересекаются в точке Z. Пусть P — точка на прямой XY, отличная от Z. Прямая CP пересекает окружность с диаметром AC в точках C и M, а прямая BP пересекает окружность с диаметром BD в точках B и N. Докажите, что прямые AM, DN и XY пересекаются в одной точке.*

Это, конечно, очень простая задача. Вот два коротких решения.

1) Пусть AM пересекает XY в точке Q (см. рисунок). Прямоугольные треугольники AQZ, ACM и PCZ подобны (у первой пары общий угол A, у второй — C). Поэтому $QZ/AZ = CZ/PZ$, т.е. $QZ = AZ \cdot CZ/PZ$. Но прямая DN пересекает XY на том же расстоянии от Z,



поскольку по свойству пересекающихся хорд (мы использовали его в конце решения М1524)

$$AZ \cdot CZ = XZ \cdot YZ = BZ \cdot DZ.$$

2) Здесь также используется последнее равенство. Пусть H — точка пересечения высот треугольника BPC. При гомотетии с центром Z и коэффициентом $AZ/BZ = DZ/CZ$ прямая BH переходит в прямую AM, CH — в DN, а значит, H переходит в точку Q, где встречаются AM, XY и DN.

Н.Васильев

М1526. *Пусть a, b, c — положительные числа такие, что $abc = 1$. Докажите, что*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}.$$

[24]

2338. *Proposed by Toshio Seimiya, Kawasaki, Japan.*

Suppose $ABCD$ is a convex cyclic quadrilateral, and P is the intersection of the diagonals AC and BD. Let I_1, I_2, I_3 and I_4 be the incentres of triangles PAB, PBC, PCD and PDA respectively. Suppose that I_1, I_2, I_3 and I_4 are concyclic.

Prove that $ABCD$ has an incircle.

[25]

[24] *Kvant* **3** (1996) 27-28.

[25] Seimiya T., *Crux Mathematicorum* **4/24** (1998) 234 ; http://math.ca/crux/

2338. [1998: 234] *Proposed by Toshio Seimiya, Kawasaki, Japan.*

Suppose $ABCD$ is a convex cyclic quadrilateral, and P is the intersection of the diagonals AC and BD. Let I_1, I_2, I_3 and I_4 be the incentres of triangles PAB, PBC, PCD and PDA respectively. Suppose that I_1, I_2, I_3 and I_4 are concyclic.

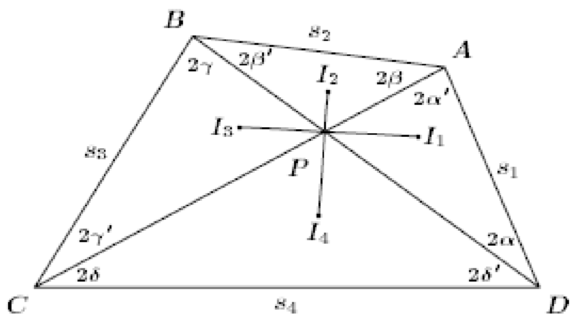
Prove that $ABCD$ has an incircle.

Solution by Peter Y. Woo, Biola University, La Miranda, California, USA.

$ABCD$ does not have to be cyclic. More precisely,

When a convex quadrilateral is subdivided into 4 triangles by its two diagonals, then the incentres of the 4 triangles are concyclic if and only if the quadrilateral has an incircle.

Notation. Let P be the point where the diagonals intersect and let the triangles be T_1, T_2, T_3, T_4 (labelled counterclockwise as in the figure), with the respective incentres I_1, I_2, I_3, I_4. Denote the 8 angles formed by the diagonals with the four sides by 2α, $2\alpha'$, 2β, $2\beta'$, 2γ, $2\gamma'$, 2δ, $2\delta'$ (counterclockwise with 2α, $2\alpha'$ in T_1, etc.).



Step 1. In the usual notation (used only here in step 1) for $\triangle ABC$ with sides a, b, c, incentre I, and semiperimeter $s = \frac{a+b+c}{2}$, AI satisfies

$$AI^2 \;=\; bc\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\,.$$

The proof follows from familiar formulas. In E.W. Hobson's *Treatise on Plane and Advanced Trigonometry*, for example, in section 123 the author shows that

$$AI \;=\; \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}\,,\quad \tan\frac{B}{2} \;=\; \frac{r}{s-b}\,,\quad \tan\frac{C}{2} \;=\; \frac{r}{s-c}\,,$$

$$\text{and}\quad \sin^2\frac{A}{2} \;=\; \frac{(s-b)(s-c)}{bc}\,,$$

which, when combined, proves the claim.

Step 2. I_1, I_2, I_3, I_4 *are concyclic if and only if*

$$\tan\alpha\tan\alpha'\tan\gamma\tan\gamma' \;=\; \tan\beta\tan\beta'\tan\delta\tan\delta'\,.$$

Proof. Since PI_1 and PI_3 bisect vertically opposite angles, as do PI_2 and PI_4, the Intersecting Chords Theorem says that I_1, I_2, I_3, I_4 are concyclic if and only if $PI_1 \cdot PI_3 = PI_2 \cdot PI_4$. The desired equality then follows from step 1.

Step 3. A quadrilateral has an incircle if and only if the sum of one pair of opposite sides equals the sum of the other. This is a standard result of elementary geometry. See, for example, Nathan Altshiller Court's *College Geometry*, p. 135.

Step 4. Let $ABCD$ be any quadrilateral (that is, any four points, no three collinear), *I, I' be incentres of $\triangle ABC$ and $\triangle ADC$, and IN, $I'N'$ be*

perpendiculars to the diagonal AC from I and I'. Then $CN \geq CN'$ if and only if $AD + BC \geq AB + CD$, with equality for both or for neither.

Proof. $CB - AB = CN - AN$ [because $CN = s - c$ and $AN = s - a$ in the notation of step 1] and $AD - CD = AN' - CN'$. Add these two equalities [noting that $AN = AC - CN$ and $AN' = AC - CN'$].

Step 5. $AD + BC \geq AB + CD$ if and only if

$$\tan\angle BAI \tan\angle DCI' \;\geq\; \tan\angle BCI \tan\angle DAI',$$

with equality for both or for neither.

Proof. This follows from step 4 since we have $\tan\angle BAI = \frac{IN}{AC-CN}$, $\tan\angle DCI' = \frac{I'N'}{CN'}$, $\tan\angle BCI = \frac{IN}{CN}$, and $\tan\angle DAI' = \frac{I'N'}{AC-CN'}$. [Note that the incentres here generally do not coincide with those of the main result. The key observation is that IA (for example) bisects the angle between a diagonal and side of the quadrilateral, while the angles α, α', etc. in step 2 each are equal to half the angle between a diagonal and side.]

Proof of the main result. If $ABCD$ has an incircle then $AD + BC = AB + CD$ (step 3), so that $\tan\alpha\tan\gamma = \tan\beta'\tan\delta'$ and $\tan\alpha'\tan\gamma' = \tan\beta\tan\delta$ (step 5). By step 2, I_1, I_2, I_3, I_4 are therefore concyclic. On the other hand, if $ABCD$ does not circumscribe some circle, then let s_i be the side of T_i opposite P (for $i = 1, 2, 3, 4$). Without loss of generality, assume $s_2 + s_4 > s_1 + s_3$. Then by step 5, $\tan\alpha\tan\gamma > \tan\beta'\tan\delta'$ and $\tan\alpha'\tan\gamma' > \tan\beta\tan\delta$, so that by step 2, I_1, I_2, I_3, I_4 are not concyclic.

Also solved by NIELS BEJLEGAARD, Stavanger, Norway; FRANCISCO BELLOT ROSADO, I.B. Emilio Ferrari, Valladolid, Spain; CHRISTOPHER J. BRADLEY, Clifton College, Bristol, UK; NIKOLAOS DERGIADES, Thessaloniki, Greece; WALTHER JANOUS, Ursulinengymnasium, Innsbruck, Austria; VJECKOSLAV KOVAČ, student, Univ. Zagreb, Croatia; D.J. SMEENK, Zaltbommel, the Netherlands; JEREMY YOUNG, student, Nottingham, England; and the proposer.

All solvers except Woo and Janous proved the theorem as stated (with $ABCD$ cyclic). Janous remembers having seen the stronger version before, but he did not recall the reference. Can any reader provide a reference?

[26]

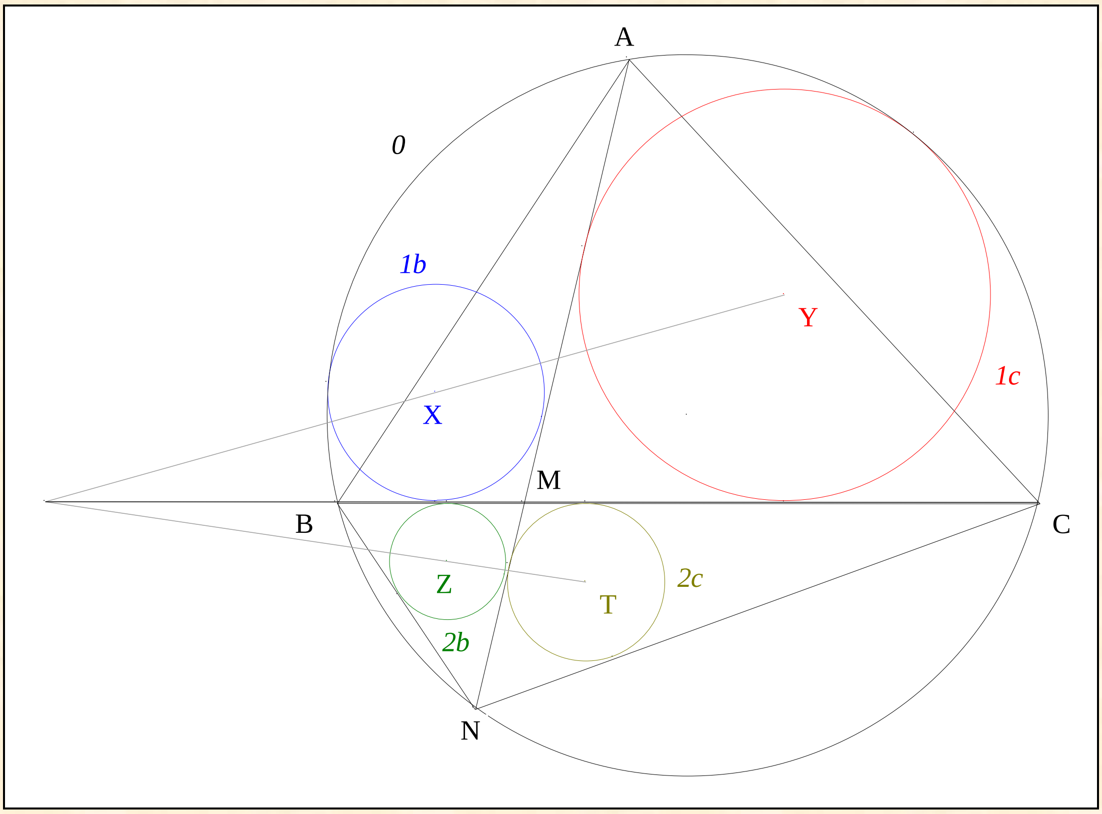
[26] Woo P. Y., *Crux Mathematicorum* 4/25 (1999) 243-245 ; http://math.ca/crux/

C. VLADIMIR ZAJIC

1. Le résultat de V. Zajic

VISION

Figure :



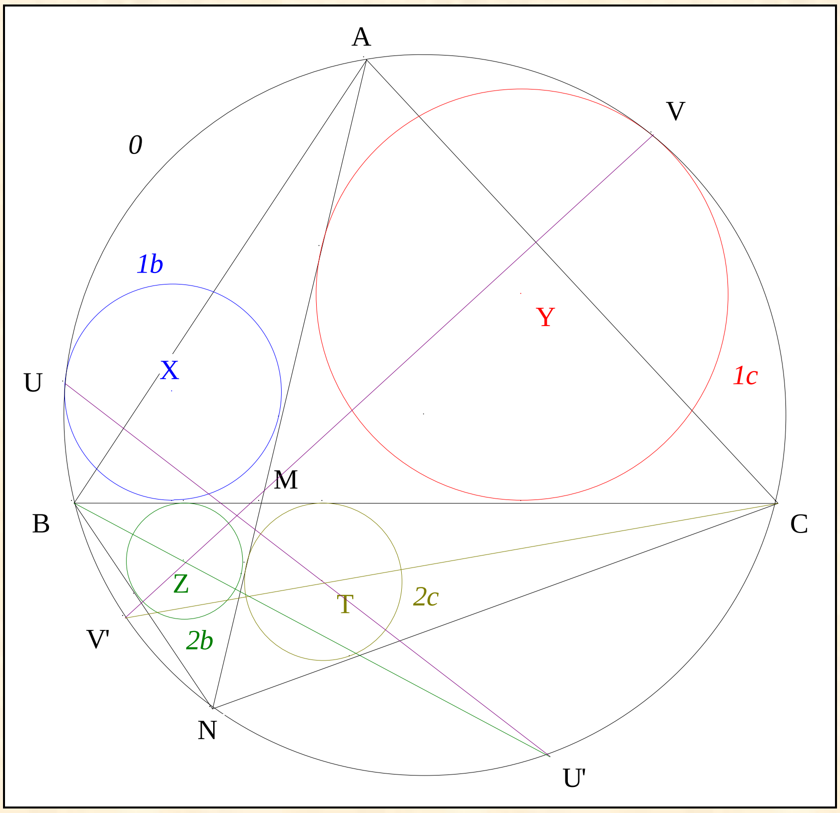
Traits :

	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	M	un point de [BC],
	1b, *1c*	les cercles tangents à *0*, [AM], resp. à [MB], [MC]
	X, Y	les centres resp. de *1b*, *1c*,
	N	le second point d'intersection de (AM) avec *0*,
	2b, *2c*	les cercles inscrits des triangles BMN, CMN
et	Z, T	les centres resp. de *2b*, *2c*.

Donné : (XY), (ZT) et (BC) sont concourantes [27].

VISUALISATION

[27] Zajic V., Ordinary and Thebault incircles, Nice but difficult. Own , *Mathlinks* du 07/12/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=244007
Ayme J.-L., Conjecture with Thebault's circles and incircles, *Mathlinks* du 10/11/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=444912



- Notons U, V les points de contact de *0* resp. avec *1b*, *1c*,
  et U', V' les points d'intersection des médiatrices de [BN], [CN] avec *0* comme indiqués sur la figure.

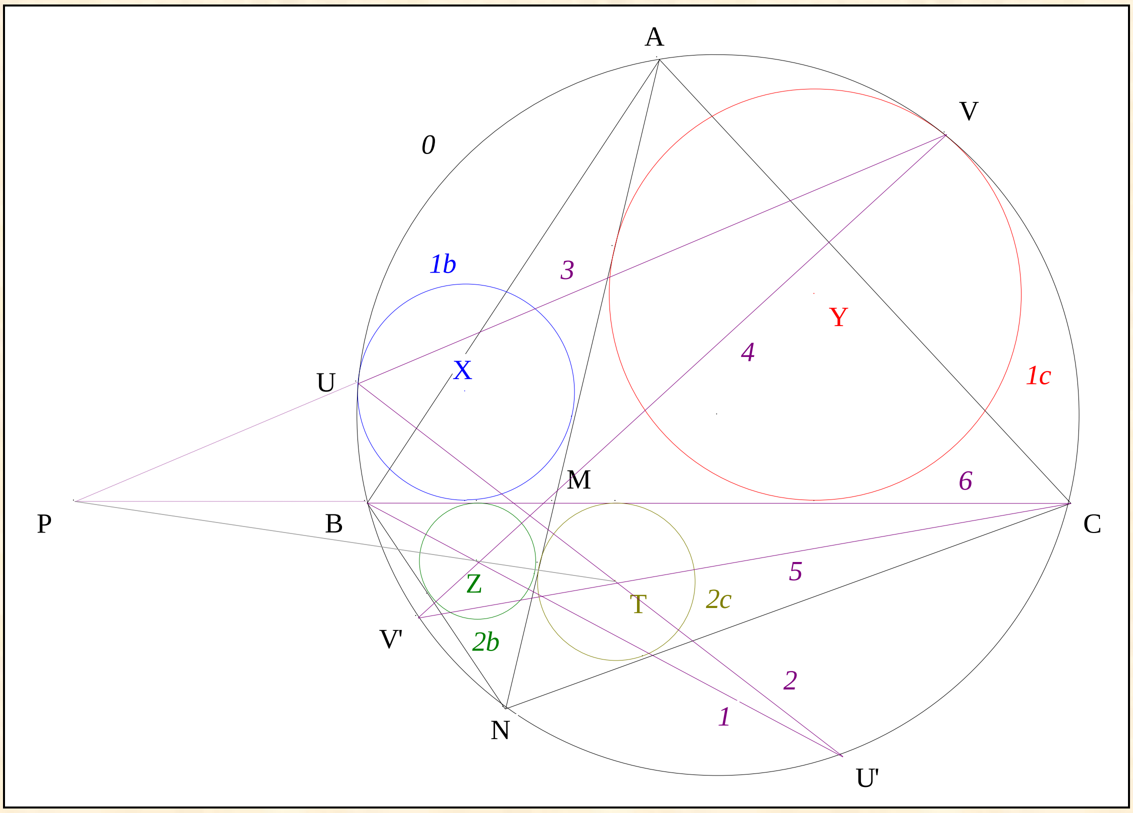
- D'après "Un remarquable résultat de Vladimir Protassov"[28] appliqué aux cercles

  * *0* et *1b* tangent en U, U, T et U' sont alignés
  * *0* et *1c* tangent en V, V, Z et V' sont alignés.

- **Scolies :** **(1)** B, Z et U' sont alignés

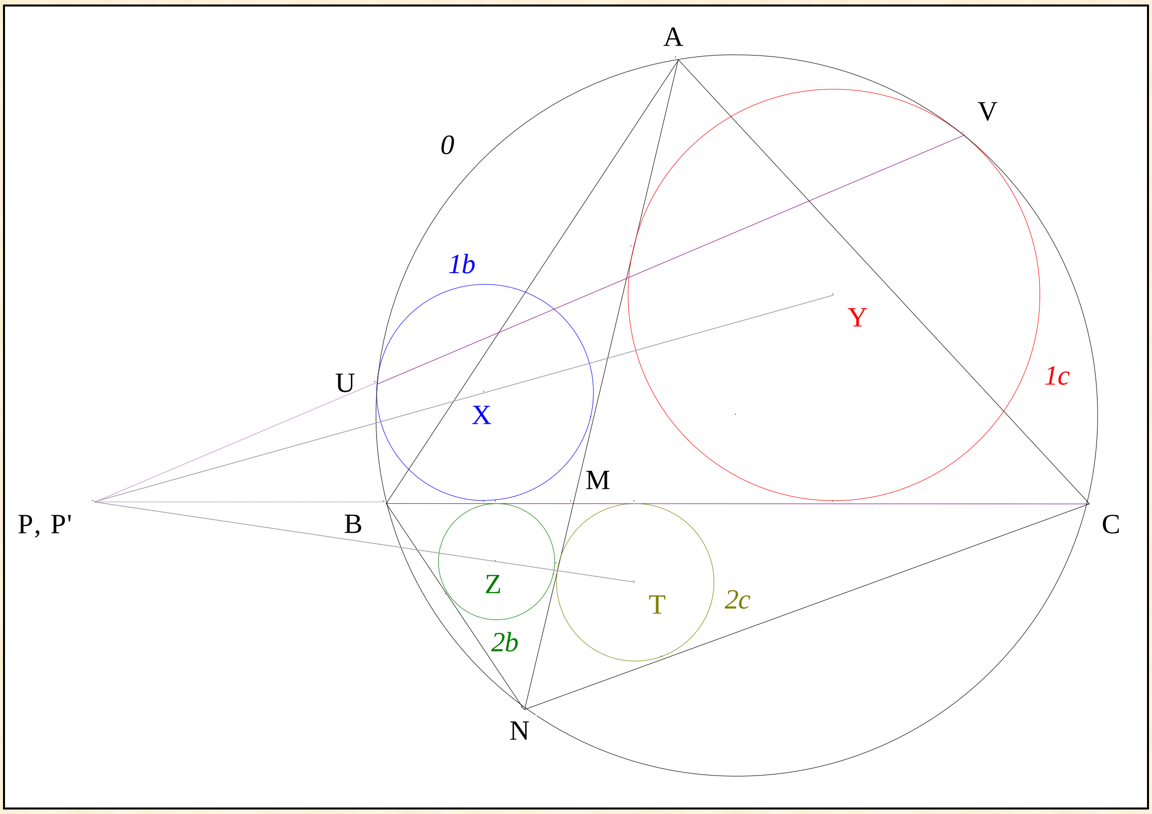
  (2) C, T et V' sont alignés.

[28] Ayme J.-L., Un remarquable résultat de Vladimir Protassov, G.G.G. vol. **2** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons P le point d'intersection de (BC) et (UV).

- D'après "Hexagramma mysticum"[29], (ZTP) est la pascale de l'hexagone cyclique BU'UVV'CB.



[29] Ayme J.-L., Hexagramma mysticum, G.G.G. vol. **12**, p. 4 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

- Notons P' le point d'intersection de (BC) et (XY).

- **Scolies :** **(1)** U est le centre interne d'homothétie de *0* et *1b*
  (2) V est le centre interne d'homothétie de *0* et *1c*
  (3) P' est le centre externe d'homothétie de *1b* et *1c*.

- D'après "La droite de d'Alembert" (Cf. Annexe **1**), U, V et P' sont alignés ;
  en conséquence, P et P' sont confondus.

- **Conclusion :** (XY), (ZT) et (BC) sont concourantes.

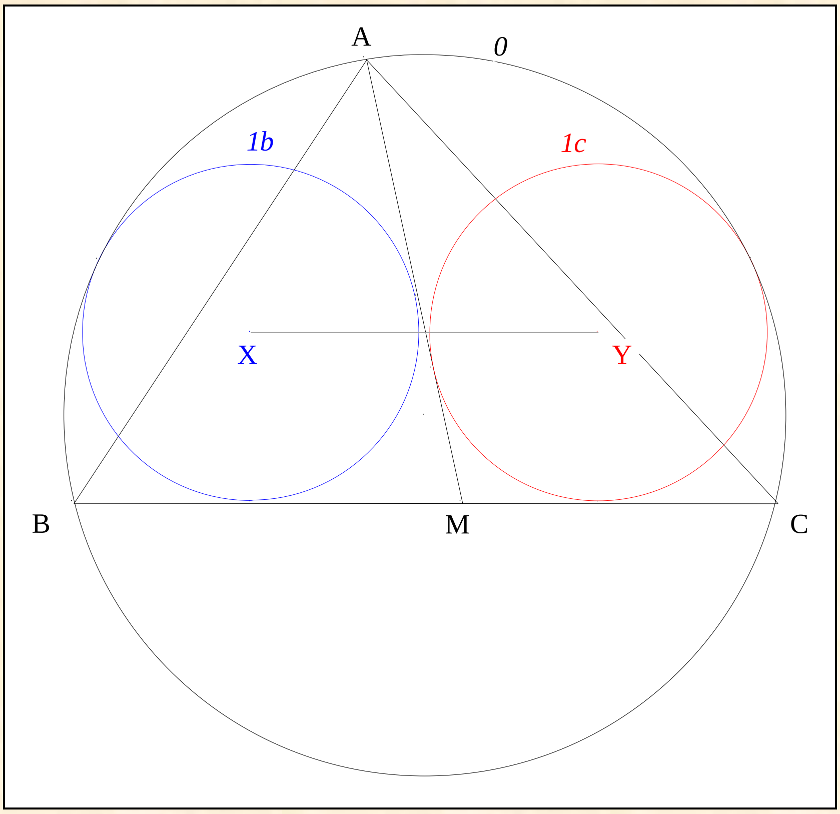
Scolie : *1b*, *1c* sont resp. "les B, C-cercles de Thébault de ABC relativement à M".

Note historique : la visualisation présentée s'inspire de celle du sud coréen Han-sol Shin plus connu sous le pseudonyme de "Leonhard Euler" sur le site *Mathlinks*.

2. Le résultat de C. Pohoatza et de J. P. Ehrmann

VISION

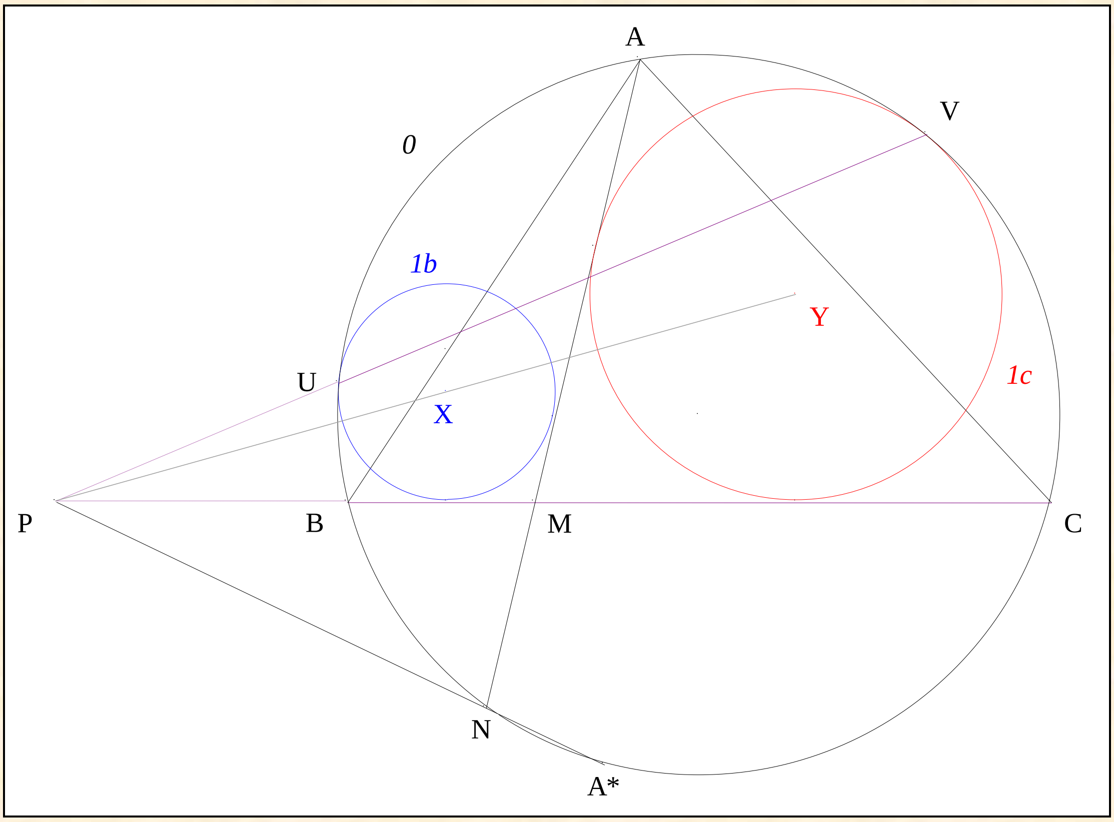
Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
M un point de [BC]
et *1b*, *1c* les B, C-cercles de Thébault de ABC relativement à M.

Donné : M est le A-expoint de contact de ABC *si, et seulement si*, *1b* est égal à *1c* [30].

VISUALISATION



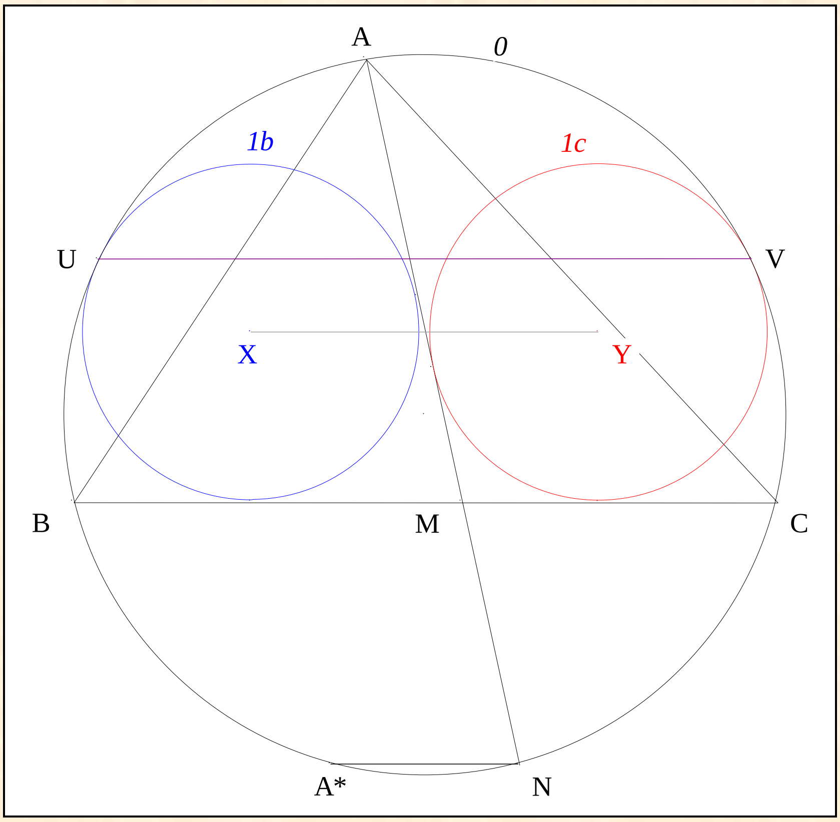
- Aux notations et hypothèses de la situation précédentes,
  nous ajoutons A* le A-point de de Longchamps.[31]

- D'après Jianhua Fang "Une concourance" [32], (NA*) passe par P.

[30] Pohoatza, On a particular case of Thebault's theorem, Jean-Pierre Ehrmann and me, *Mathlinks* du 25/04/2008 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=201858

[31] Ayme J.-L., A new mixtilinear incircle adventure **I**, G.G.G. vol. **4**, p. 12 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[32] Ayme J.-L., A new mixtilinear incircle adventure **III**, G.G.G. vol. **4**, p. 36 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Raisonnons par équivalence logique.

M est le A-expoint de contact de ABC *si, et seulement si,* (AN) est la A-nagelienne de ABC ;

d'après de Longchamps "Question 659" [33],

(AN) est la A-nagelienne de ABC *si, et seulement si,* (A*N) // (BC) ;

(A*N) // (BC) *si, et seulement si,* (BC) // (XY) ;

(BC) // (XY) *si, et seulement si,* *1b* est égal à *1c*.

- **Conclusion :**

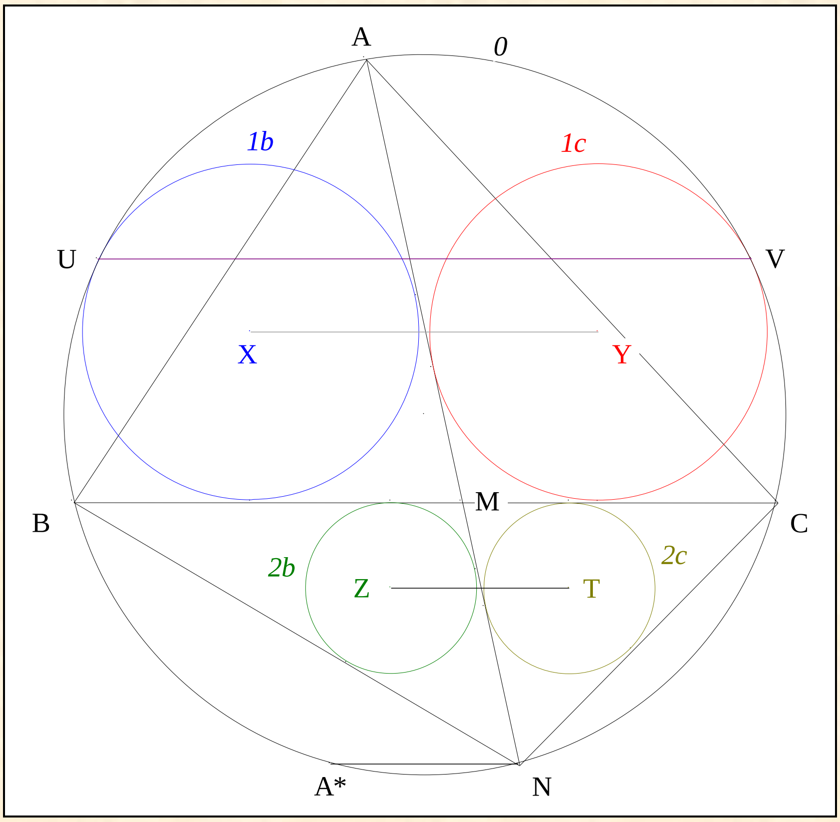
M est le A-expoint de contact de ABC *si, et seulement si,* *1b* est égal à *1c*.

Scolie : deux cercles inscrits égaux [34]

---

[33] Ayme J.-L., A new mixtilinear incircle adventure **I**, G.G.G. vol. **4**, p. 24 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[34] Radius of incenter, *Mathlinks* du 21/06/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=353717
Ayme J.-L., Conjecture with Thebault's circles and incircles, *Mathlinks* du 10/11/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=444912



- D'après **C. 1.** Le résultat de V. Zajic, (ZT) // (BC).

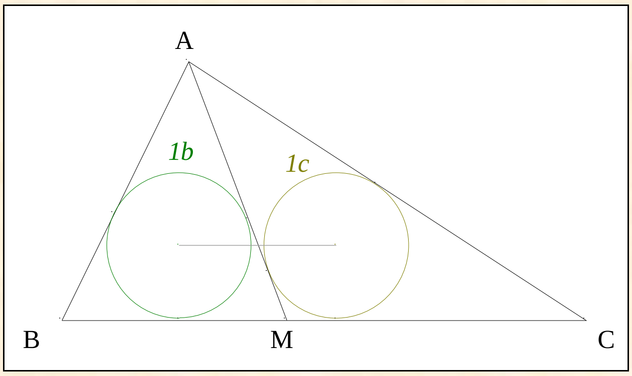
- **Conclusion :** *2b* est égal à *2c*.

Note historique : la figure des deux cercles inscrits égaux apparaît en 1897 sur une tablette votive, une San Gaku de la préfecture de Chiba[35] (Japon).

3. Construction de deux cercles inscrits égaux

VISION

Figure :

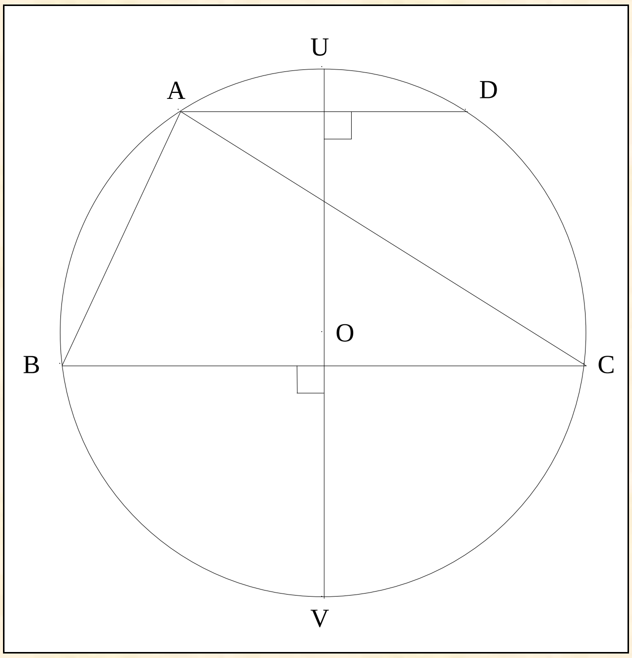


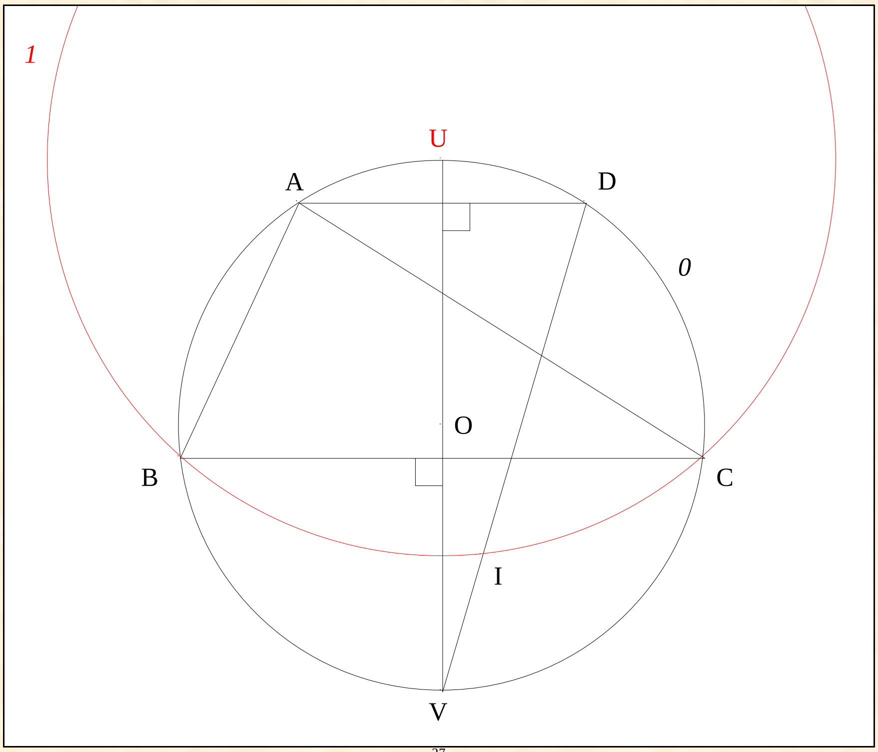
[35] Chiba (1970), Akira Hirayama and Hachio Norii, private circulation ;
Seiyo Sanpo (1781) vol. **3**, Teisi Fujita (1734-1807), *Mathematics Detailed*.

Traits : ABC un triangle,
M un point de [BC]
et *1b*, *1c* les cercles inscrits resp. aux triangles BMA, CMA.

Problème : construire M tel que*1b* soit égal à *1c*.

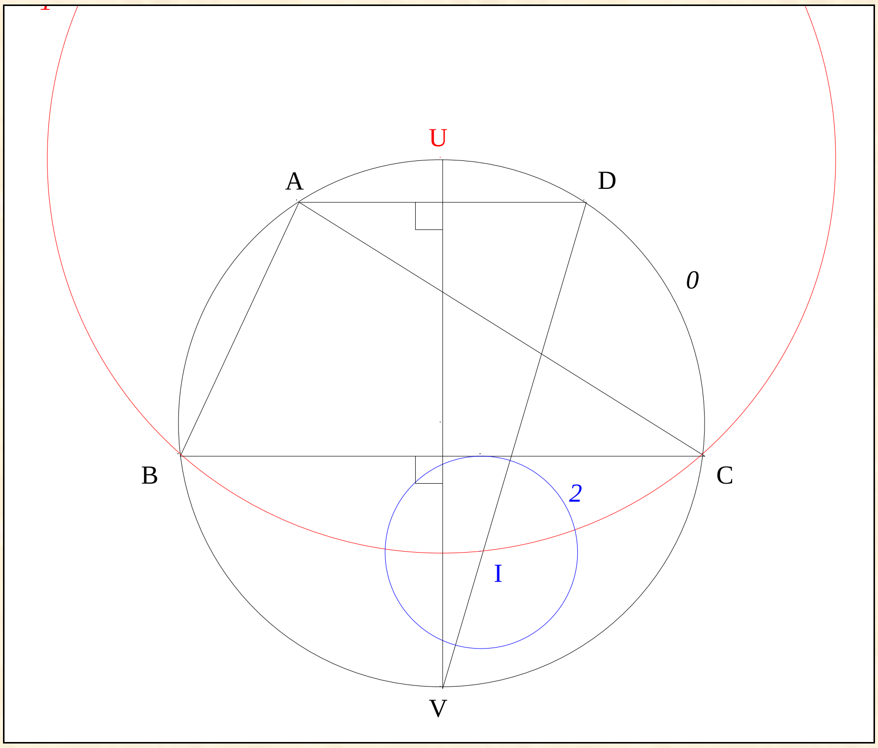
VISUALISATION SANS PAROLE [36]

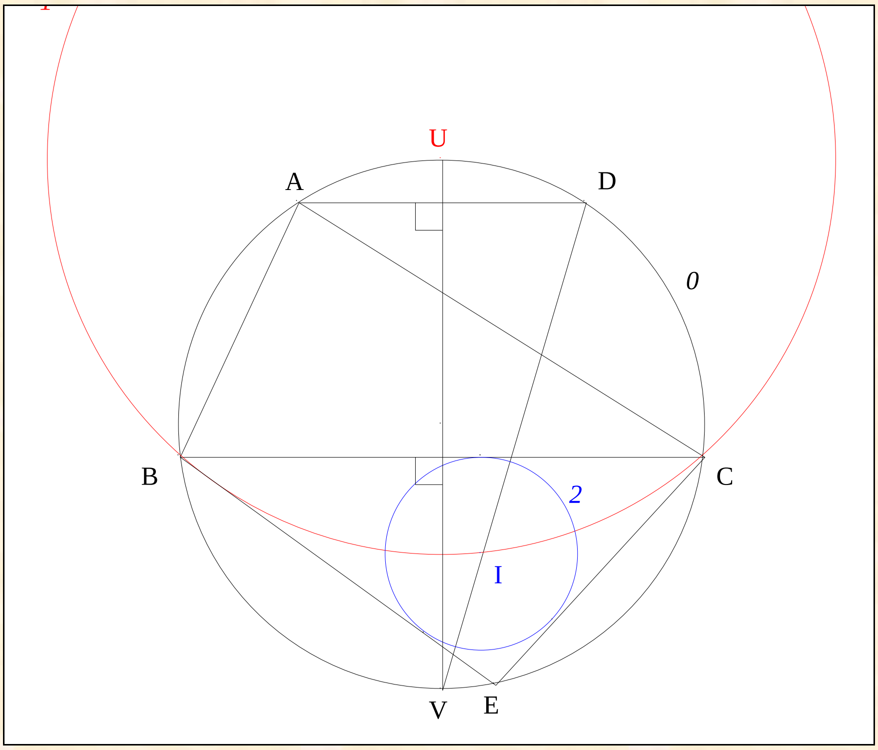


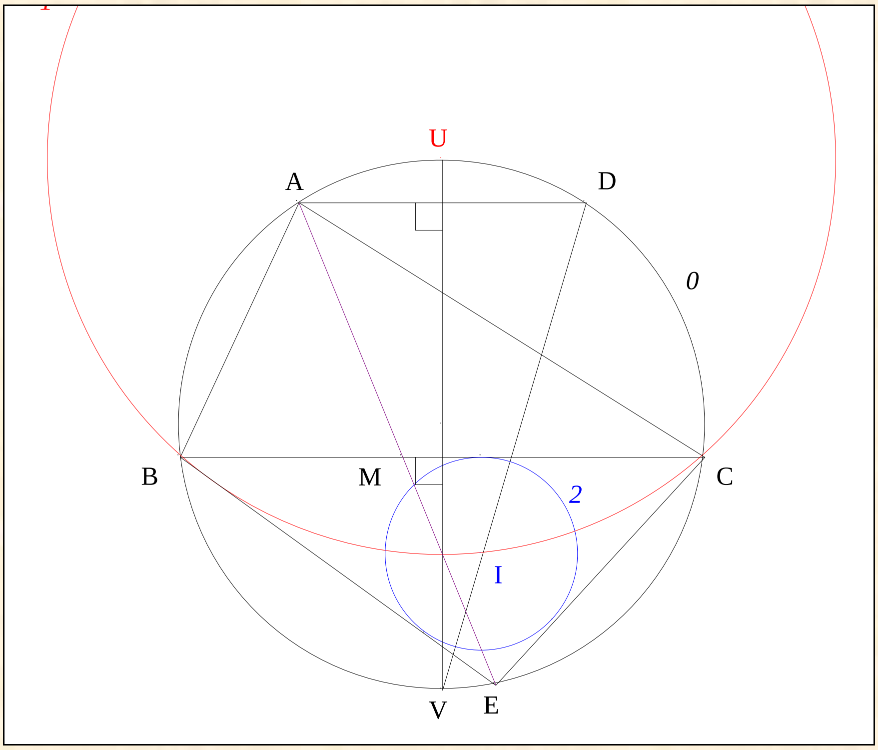


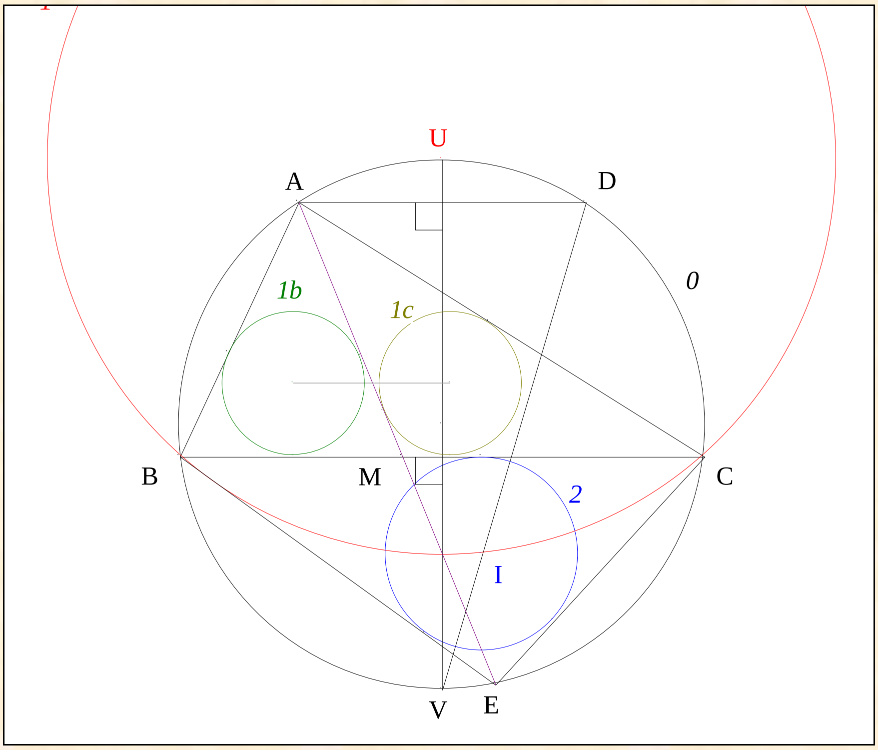
[37]

[36] Elle s'appuie sur les résultats précédents.
[37] Ayme J.-L., A new mixtilinear incircle adventure **I**, G.G.G. vol. **4** ; L'alignement remarquable d'Eugène Lauvernay p. 17 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme


U
A
D
0
B
C
2
I
V


U
A
D
0
B
C
2
I
V
E


U
A
D
0
B
M
C
2
I
V
E

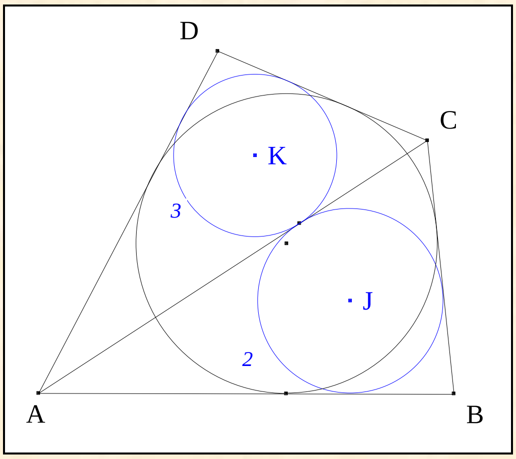

U
A
D
0
1b
1c
B
M
C
2
I
V
E

D. APPENDICE

1. Deux cercles tangents

VISION

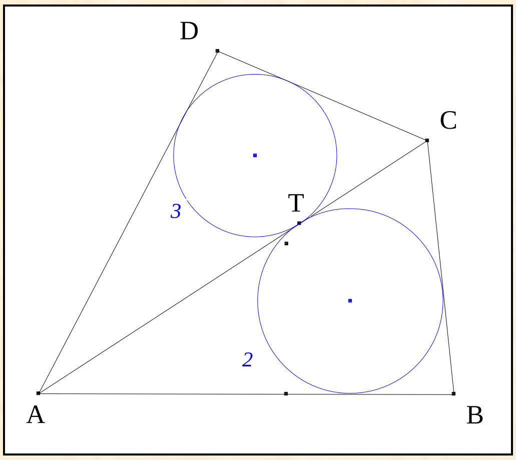
Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
et *2, 3* deux cercles incrits resp. de ABC, ACD.

Donné : ABCD est circonscriptible *si, et seulement si,* *2* est tangent à *3.*

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons T le point de contact de *2* avec la diagonale (AC).
- D'après "Le quadrilatère de Pitot"[38] appliqué à ABCD, AB + CD = BC + DA.
- D'après "Le triangle de Pitot"[39] appliqué à ABC, BC + TA = BA + TC.

[38] Ayme J.-L., Equal incircle theorem, G.G.G. vol. **20**, p. 7 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
[39] Ayme J.-L., Equal incircle theorem, G.G.G. vol. **20**, p. 11 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

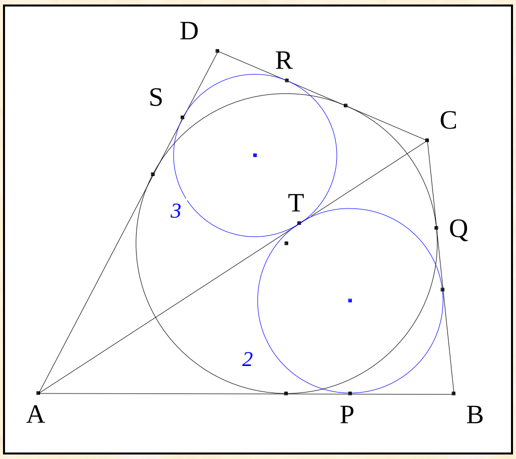
- En additionnant ces égalités membre à membre,
  puis en simplifiant, nous obtenons : DC + TA = DA + TC.

- D'après "Le triangle de Pitot" appliqué à ACD, T est le point de contact de *3* avec (AC).

- **Conclusion :** *2* est tangent à *3*.

Scolie : la droite des centres est perpendiculaire à la diagonale (AC).

VISUALISATION SUFFISANTE



- Notons T le point de contact de *2* avec (AC).
  P, Q, les points de contact de *2* resp. avec (AB), (BC)
  et R, S les points de contact de *3* resp. avec (CD), (DA).

- D'après "Le triangle de Pitot"
  appliqué au triangle
  * ABC, BC + TA = BA + TC ;
  * ABD, AD + TC = CD + TA.

- En additionnant ces égalités membre à membre,
  puis, en simplifiant, nous obtenons : BC + AD = AB + CD.

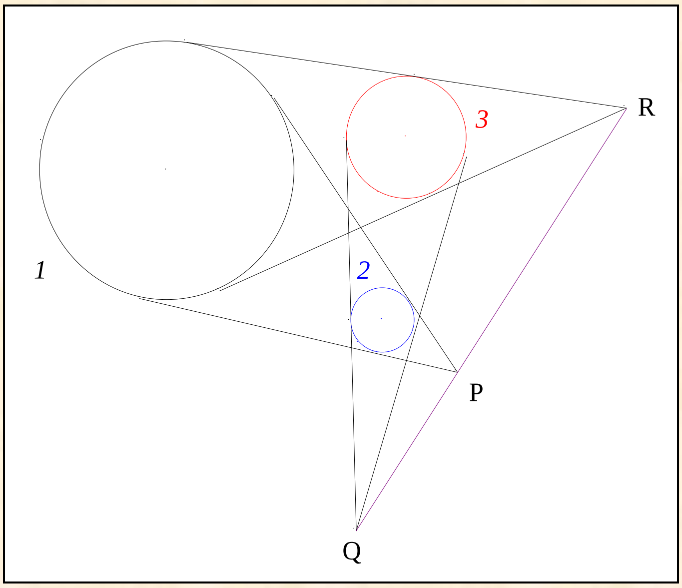
- **Conclusion :** ABCD est circonscriptible.

Note historique : cette figure apparaît sur une tablette votive, une sangaku de 1826 de la préfecture de Ibaragi (Japon)[40].

[40] Syami Sanpu (1826), Chochu Siraisi (1795?-1862), *Mathematical Tablets*, vol. **2**.

E. ANNEXE

1. La droite de d'Alembert [41]



Traits : *1, 2, 3* trois cercles deux à deux extérieurs
et P, Q, R les points d'intersections des tangentes communes extérieures de *1* et *2*, de *2* et *3*, de *3* et *1*.

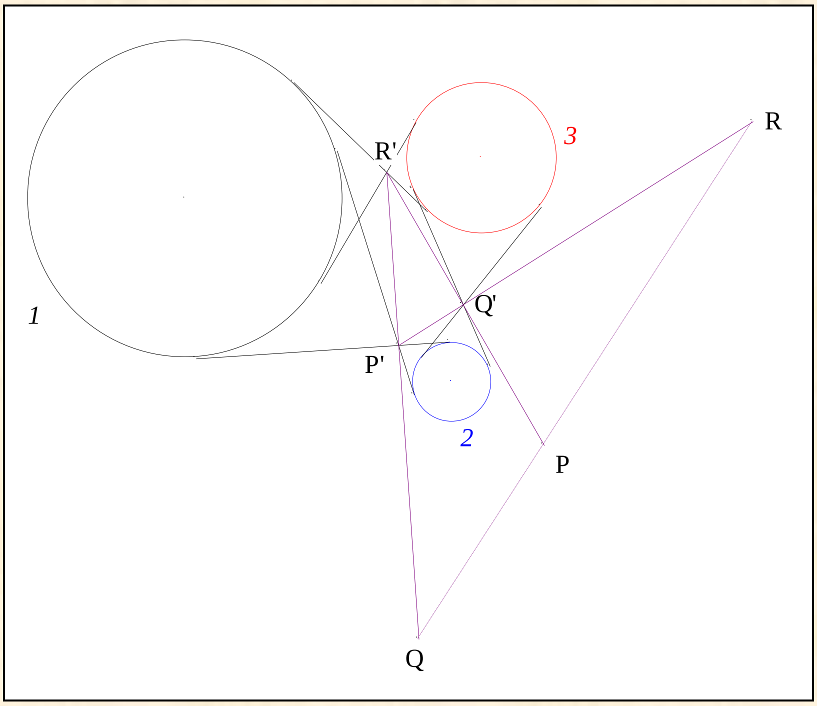
Donné : P, Q et R sont alignés.

Commentaire : P, Q et R sont resp. les centres externes d'homothétie de *1* et *2*, *2* et *3*, *2* et *3*.
Ce résultat peut être symbolisé par e.e.e.

Scolie : les trois alignements

---

[41] Chasles M., Note **VI**, *Aperçu historique* (1837) 293.



- Les trois centres extérieurs d'homothétie sont alignés ;
  il en est de même de deux centres intérieurs et d'un centre extérieur.

Commentaire : ce dernier résultat peut être symbolisé par i.i.e.