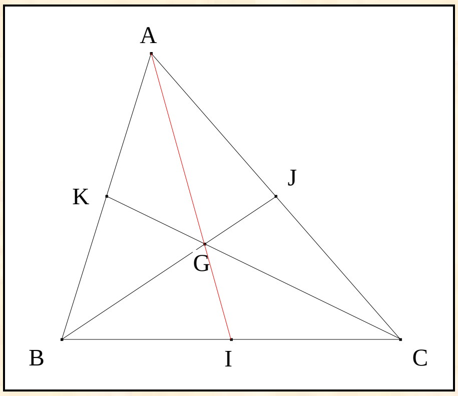
POINTS MÉDIANS

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. Cet article traite des généralisations du point médian d'un triangle.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. This article discusses the generalizations of the median point of a triangle.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 17/02/2020 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sommaire

A. LE POINT MÉDIAN D'UN TRIANGLE

Archimède de Syracuse (287 av. J.-C. - 212)

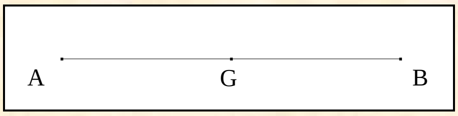
L'équilibre des figures planes

Livre **I**, Proposition **13**

1. Le point médian d'un segment

VISION

Figure :



Finition : [AB] un segment
et G le milieu de [AB].

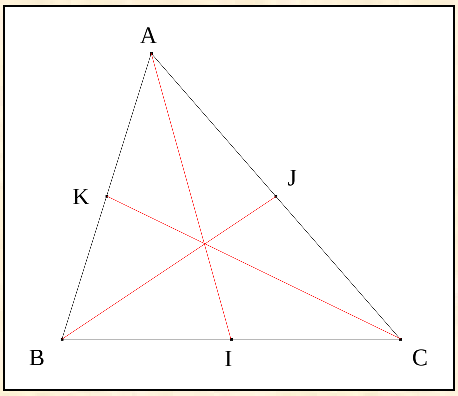
Définition : G est "Le point médian de [AB] " ou encore "Le milieu de [AB] " .

Scolie : GA/GB = 1/1.

2. Médianes d'un triangle

VISION

Figure :



Finition : ABC un triangle
et I, J, K les milieux resp. de [BC], [CA], [AB].

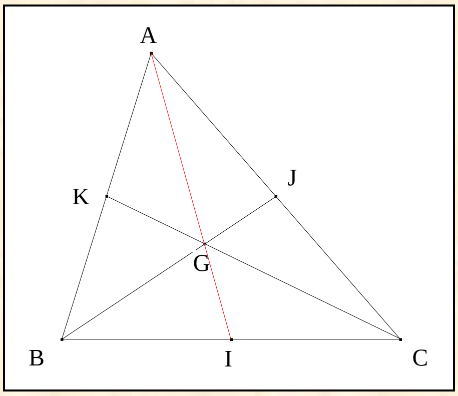
Définition : (AI), (BJ) et (CK) sont "Les A, B, C-médianes [2] de ABC".

[2] Ce mot apparaît pour la première fois en 1883 dans *Encyclopedia Britannica*

3. Le point médian d'un triangle

VISION

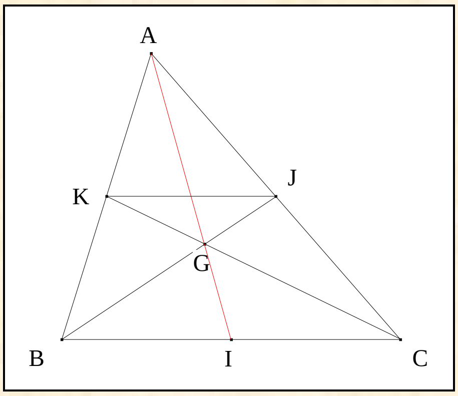
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I, J, K	les milieux resp. de [BC], [CA], [AB]
et	G	le points d'intersections des B, C-médianes (BJ) et (CK).

Donné : la A-médiane (AI) passe par G.

VISUALISATION



- Le quadrilatère BCJK est un trapèze.
- D'après Thalès de Milet "Le trapèze complet", A, G et I sont alignés.
- **Conclusion :** la A-médiane (AI) passe par G.

Énoncé traditionnel :

dans un triangle,
les médianes sont concourantes.

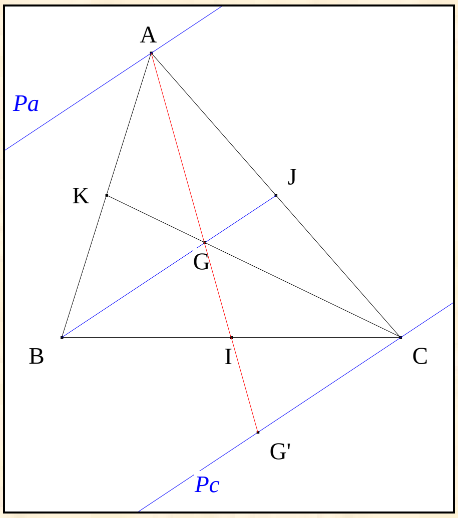
Scolies : **(1)** G a été appellé "χεντρον βαρϖν" par Archimède de Syracuse,
"centre des moyennes distances" ou "barycentre" des trois sommets de ABC par

Étienne Bobillier, suivi par Lazare Carnot [3],
"centre de gravité ou d'inertie" [4] de la surface ABC par les physiciens,
"centroïde" par Davies [5], "Schwerpunkt" en Allemagne,
"Balance point" par John H. Conway.
Dans la nomenclature d'ETC [6], il est répertorié sous X_2.

(2) Le point G au théâtre :
Molière l'évoque en 1672 dans *Les femmes savantes* [7] en mettant dans la bouche de Bélise, voire de Bêtise, la réplique suivante :

> "De ta chute, ignorant, ne vois-tu pas les causes,
> Et qu'elle vient d'avoir du point fixe écarté
> Ce que nous appelons centre de gravité ?"

(3) Position de G



- Notons *Pa*, *Pc* les parallèles à (BGJ) passant resp. par A, C
  et G' le point d'intersection de *Pc* et (AGI).

- D'après l'axiome de passage **IIIb**
  appliqué à la bande de frontière *Pc* et (BGJ), I est le milieu de [GG'] i.e. 2.GI = GG'.

- D'après l'axiome de passage **IIIb**
  appliqué à la bande de frontière *Pa* et *Pc*, G est le milieu de [AG'] i.e. GG' = AG ;
  par transitivité de la relation, 2.GI = AG.

- **Conclusion :** G est le second tiers-point de [AI] à partir de A.

(4) Notons que GA/GI = GB/GJ = GC/GJ = 2/1.

---

[3] Carnot, *Géométrie de position* (1803).
[4] Ces deux concepts sont équivalents ; rappelons qu'en physique, il y a identité en masse d'inertie et masse grave d'après le principe de relativité et qu'en mathématique, l'isobarycentre des sommets d'un triangle coïncide avec le centre de gravité de la plaque homogène triangulaire délimitée par ses sommets
[5] Davies T. S., *Mathematicien* **1**
[6] Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* (ETC) ; https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
[7] Acte **III**, Scène **II**

B. LE POINT MÉDIAN D'UN QUADRILATÈRE

LE POINT DE VUE

DE

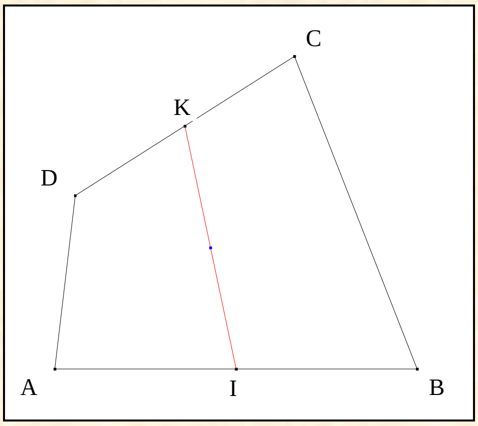
Joseph Diez Gergonne, Joseph Esprit Thomas de Lavernède

Annales de Gergonne 1 (1810-1811) 177

1. Bimédianes d'un quadrilatère

VISION

Figure :



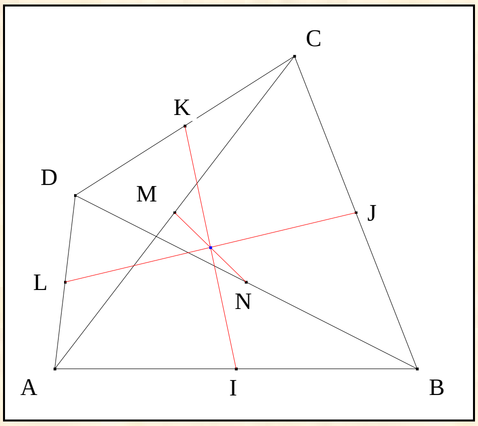
Finition : ABCD un quadrilatère,
et I, K les milieux resp. de [AB],[CD].

Définition : (IK) est "une **bi**médiane de ABCD".

2. Le point médian d'un quadrilatère

VISION

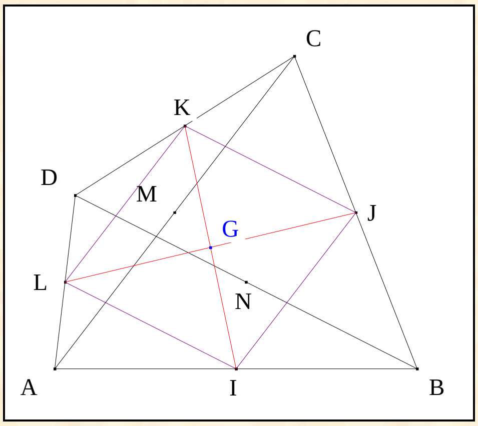
Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
et I, J, K, L, M, N les milieux resp. de [AB], [BC], [CD], [DA], [AC], [BD].

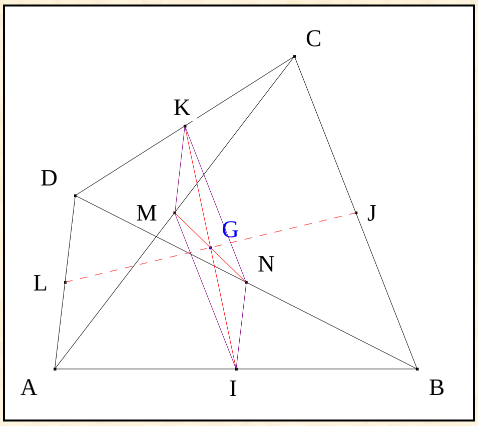
Donné : les bimédianes (IK), (JL) et (MN) sont concourantes.

VISUALISATION



- D'après Pierre Varignon [8] "Le parallélogramme", le quadrilatère IJKL est un parallélogramme ;
  en conséquence, [IK] et [JL] se coupent en leur milieu.

- Notons G ce point.



- D'après Pierre Varignon [9] "Le parallélogramme", le quadrilatère INKM est un parallélogramme;

---

[8] Varignon P., *Éléments* de mathématiques (1731) ; publication posthume
Ayme J.-L., **8.** Quickies **2**, G.G.G. vol. **15**, p. 6-8 ; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

en conséquence, [IK] et [MN] se coupent en leur milieu i.e. en G.

- **Conclusion :** (IK), (JL) et (MN) sont concourantes en G.

Énoncé traditionnel :

dans un quadrilatère quelconque,
les droites qui joignent les milieux des côtés opposés
se rencontrent
au milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales.

Scolies : **(1)** en géométrie, G est "Le point médian de ABCD"

(2) en physique, G est le centre de gravité de la surface ABCD.

Note historique : ce théorème proposé par Gergonne et de Lavernède, a été résolu [10] dans la même *Annales* par Octave Rochat, professeur de navigation à St Brieuc, Simon L'huilier, professeur à Genève, Vecten professeur à Nîmes, Pierre Tédenat recteur de l'Académie de Nîmes et Janot de Stainville, auteur d'un *Recueil de Problèmes*.

---

[9] Varignon P., *Éléments* de mathématiques (1731) ; publication posthume
Ayme J.-L., **8.** Quickies **2**, G.G.G. vol. **15**, p. 5-6 ; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[10] *Annales de Gergonne* **1** (1810-1811) 310

C. LE POINT MÉDIAN D'UN QUADRILATÈRE

LE POINT DE VUE

DE

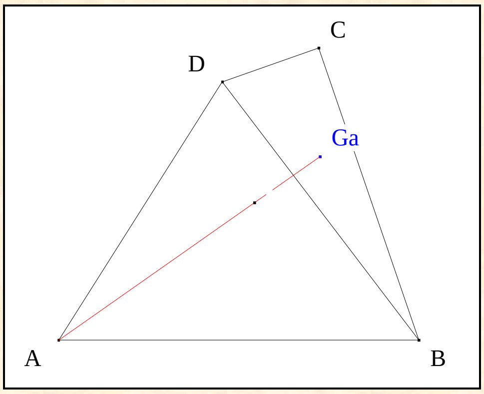
Jakob Steiner

Gesammelte Werke **1**, p. 128 - *Annales de Gergonne* **19** (1928-1929)

1. Médianes d'un quadrilatère

VISION

Figure :



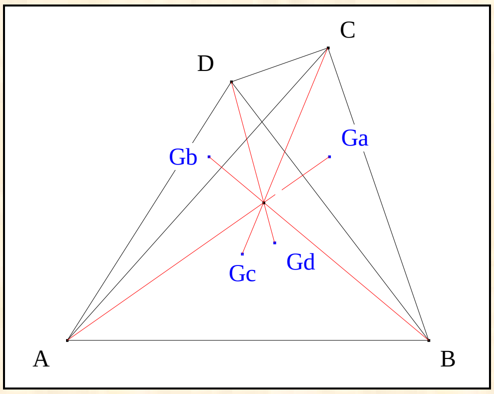
Finition : ABCD un quadrilatère
et Ga le point médian du triangle BCD.

Définition : (AGa) est "La A-médiane de ABCD".

2. Le point médian d'un quadrilatère

VISION

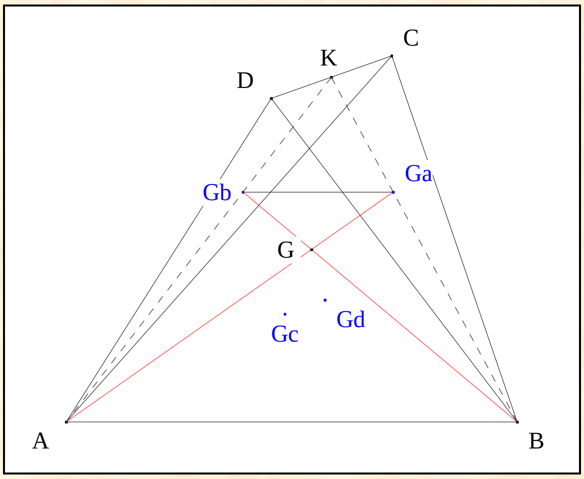
Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère
et Ga, GB, Gc, Gd les points médians resp. des triangle BCD, CDA, DAB, ABC.

Donné : (AGa), (BGb), (CGc) et (DGd) sont concourantes. [11]

VISUALISATION



- Notons K le milieu de [CD]
  et G le point d'intersection de (AGa) et (BGb).

- D'après Thalès de Milet "Rapports", **(1)** (GaGb) // (AB)

  (2) G est le second tiers-point de [AGa] à partir de A

  (3) G est le second tiers-point de [BGb] à partir de B.

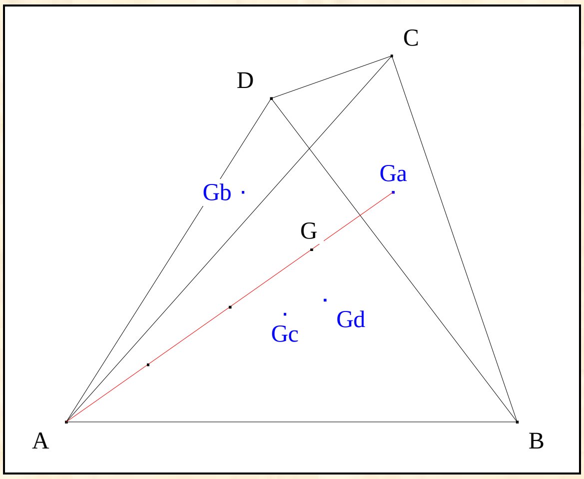
- **Conclusion partielle :** (AGa) et (BGb) passe par G situé au second tiers-point de [AGa] à partir de A.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (CGc), (DGd) passe par G.

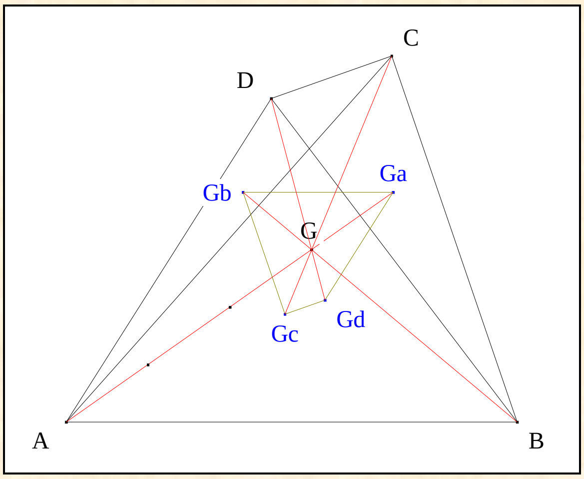
- **Conclusion :** (AGa), (BGb), (CGc) et (DGd) sont concourantes en G.

Scolies : **(1)** G est le point médian de ABCD

[11] *Journal de Mathématiques Élémentaires* de 1905-1906

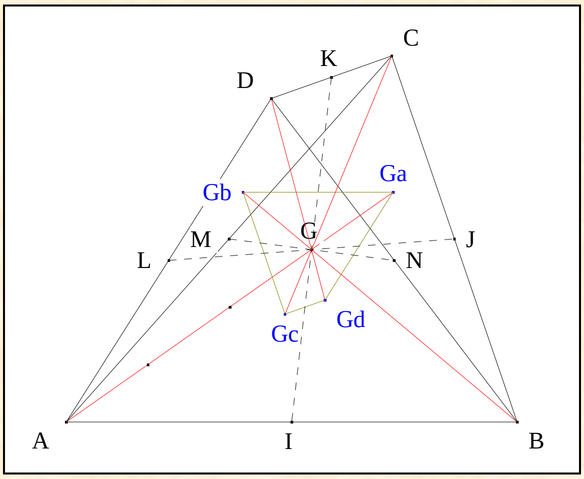


(2) notons que GA/GGa = GB/GGb = GC/GGc = GD/GGd = 3/1



(3) le quadrilatère GaGbGcGd est indirectement homothétique à ABCD (centre G et rapport 1/3)

(4) Les bimédianes (IK), (JL) et (MN) passent par G



D. LE QUASI-POINT MÉDIAN D'UN QUADRILATÈRE

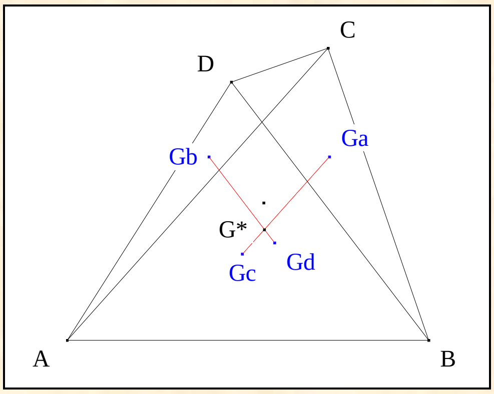
LE POINT DE VUE

DE

Alexei Gennadyevich Myakishev et Jaroslav Ganin [12]

VISION

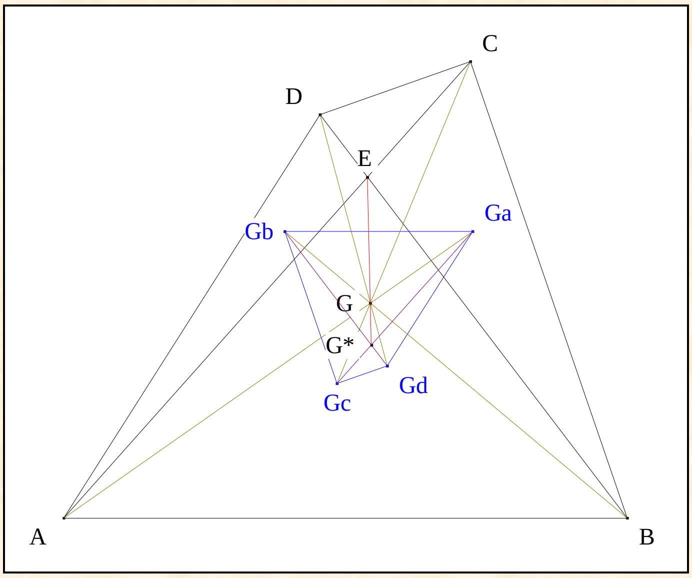
Figure :



Finition : ABCD un quadrilatère convexe,
Ga, GB, Gc, Gd les points médians resp. des triangle BCD, CDA, DAB, ABC
et G* le point d'intersection de (GaGc) et (GbGd).

Définition : G* est "Le quasi-point médian de ABCD".

Scolies : **(1)** l'alignement d'Auguste Deteuf [13]



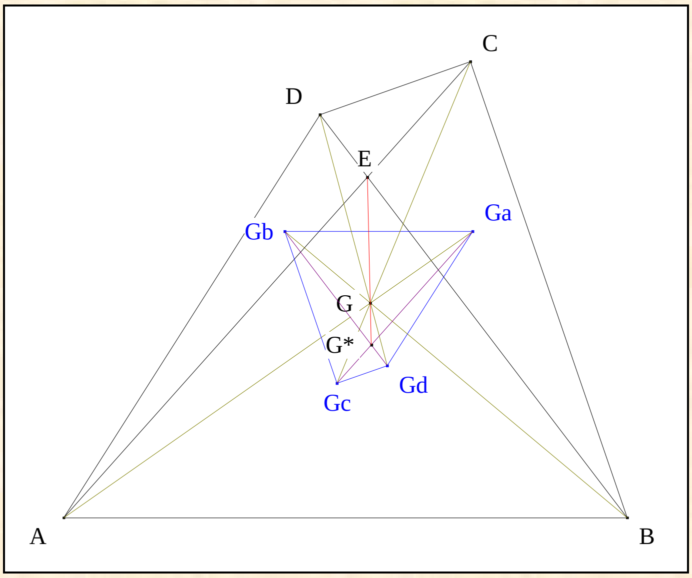
[12] Myakishev A., Message *Hyacinthos* # **12400**, 16/03/2006 ; www.hyacinthos.99on.com/message.php?msg=12400

[13] Deteuf A., Sur un point particulier du quadrilatère inscriptible, *Nouvelles Annales*, Série **4**, vol. **8** (1908) 442-448

En 1908, Auguste Deteuf, ingénieur des Ponts et Chaussées, ajoute une nouvelle droite passant par le point médian G de ABCD à savoir la droite joignant le point d'intersection E des diagonales au quasi-point médian G*.

Idée : les triangles CDE et GcGdG* étant homothétiques, d'après Thalès de Milet, E, G et G* sont alignés.

(2) Un rapport fructueux



- **Conclusion :** le quadrilatère GaGbGcGd est indirectement homothétique à ABCD (centre G et rapport 1/3), GG*/ GE = 1/3.

Commentaire : ce résultat contribue à une preuve synthétique du théorème de Ganin [14].

[14] Ayme J.-L., Généralisations de la droite d'Euler, G.G.G. vol. **51** ; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

E. LE POINT MÉDIAN D'UN n-GONE

LE POINT DE VUE

DE

Lidia Ivanovna Golovina et Isaac Moisevitch Yaglom

Induccion en la geometria, Editorial Mir, Moscou (1976)

1. Un n-gone

* pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

n points distincts sont en *position générale*

si,

trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés

* sous cette condition, nous définissons une suite de n points notés A_i (i = 1,…n)

* une telle suite est un n-gone i.e. un polygone à n sommets, noté T_n

* $T_n = A_1 \dots A_n$.

2. La récurrence d'ordre 2

Traits : n un naturel supérieur ou égal à 3,
$T_n = A_1 \dots A_n$ un n-gone,
$(T_k)_{\ i = 3,.., n}$ la suite des T_k
et $P(k)$ la fonction propositionnelle suivante :

T_{k-1} et T_k déterminent resp. les points médians G_{k-1}, G_k tels que $G_kA_k / G_kG_{k-1} = (k-1)/1$.

Donné : la proposition **[**pour tout n ≥ 3, P(n)] est vraie.

3. Hypothèses de départ

* d'après **A. 3.** la proposition P(3) est vraie

* d'après **B. 2.** la proposition P(4) est vraie.

4. Hypothèse d'hérédité :

* au rang n fixé, les propositions P(n-1) et P(n) sont vraies

* soit A_{n+1} le sommet suivant

* considérons les n-gones T_n et T_{n+1}

G_{n-1} est le point médian du (n-1)-gone $A_1 \dots A_{n-1}$;

$(G_{n-1}A_n)$ et $(G_{n-1}A_{n+1})$ sont deux médianes resp. des n-gones $A_1 \dots A_n$ et de $A_1 \dots A_{n-1}A_{n+1}$;

G_n est le point médian du n-gone $A_1 \ldots A_n$;

en conséquences, $G_{n-1}A_{n-1} / G_{n-1}G_n = G_{n-1}A_{n+1} / G_{n-1}G_n = (n-1)/1$

Mais $(G_nG_{n+1}) // (A_{n+1}A_n)$ et $A_nA_{n+1} / G_nG_{n+1} = (n-1)/1$

Notons O le point d'intersection des médianes (G_nA_n) et $(G_{n+1}A_{n+1})$ du (n+1)-gone $A_1 \ldots A_{n+1}$;

les triangles OG_nG_{n+1} et OA_nA_{n+1} étant semblables, $OA_n / OG_n = OA_{n+1} / OG_{n+1} = A_nA_{n+1} / G_nG_{n+1} = n/1$;

toutes les médianes du (n+1)-gone passent par ce même point ;

en conséquence, au rang (n+1), la proposition P(n+1) est vraie.

N'ayant rencontré aucune contrainte
sur le choix de n, la proposition [$\forall n \geq 3$, P(n) $\Rightarrow$ P(n+1)] est vraie.

- **Conclusion :** les hypothèses de départ et d'hérédité étant vraies,
  d'après le théorème de récurrence, la proposition **[**pour tout n, *P*(n)] est vraie.

F. LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A	
aligné	collinear
annexe	annex
axiome	axiom
appendice	appendix
adjoint	associate
a propos	by the way btw
acutangle	acute angle
axiome	axiom
B	
bissectrice	bisector
bande	strip
C	
centre	incenter
centre du cercle circonscrit	circumcenter
cercle circonscrit	circumcircle
cévienne	cevian
colinéaire	collinear
concourance	concurrence
coincide	coincide
confondu	coincident
côté	side
par conséquence	consequently
commentaire	comment
D	
d'après	according to
donc	therefore
droite	line
d'où	hence
distinct de	different from
E	
extérieur	external
F	
figure	figure
H	
hauteur	altitude
hypothèse	hypothesis
I	
intérieur	internal
identique	identical
i.e.	namely
incidence	incidence
L	
lemme	lemma
lisibilité	legibility
M	
mediane	median
médiatrice	perpendicular bissector
milieu	midpoint
N	
Notons	name
nécessaire	necessary
note historique	historic note
O	
orthocentre	orthocenter
ou encore	otherwise
P	
parallèle	parallel
parallèles entre elles	parallel to each other
parallélogramme	parallelogram
pédal	pedal
perpendiculaire	perpendicular
pied	foot
point de vue	point of view
postulat	postulate
point	point
pour tout	for any
Q	
quadrilatère	quadrilateral
R	
remerciements	thanks
reconnaissance	acknowledgement
respectivement	respectively
rapport	ratio
répertorier	to index
S	
semblable	similar
sens	clockwise in this
order	
segment	segment
Sommaire	summary
symédiane	symmedian
suffisante	sufficient
sommet (s)	vertex (vertice)
T	
trapèze	trapezium
tel que	such as
théorème	theorem
triangle	triangle
triangle de contact	contact triangle
triangle rectangle	right-angle triangle