GÉOMÉTRIE HUMAINE

JEAN-PIERRE EHRMANN

*

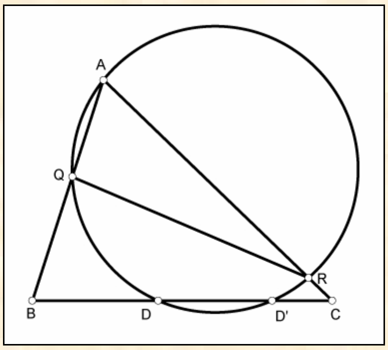
JEAN-LOUIS AYME

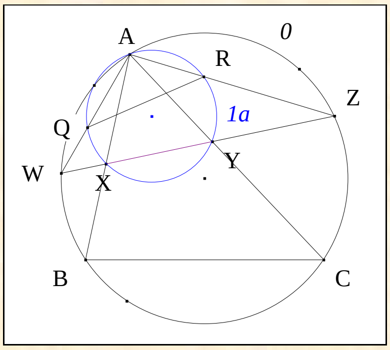
*

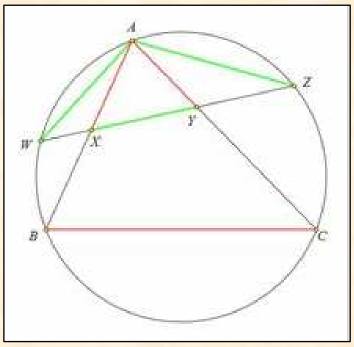
ERCOLE SUPPA

Malheur aux élites
qui ne prennent soin que d'eux-mêmes !.
Vous dominées avec violence et cruauté.

Jean-Louis AYME [1]







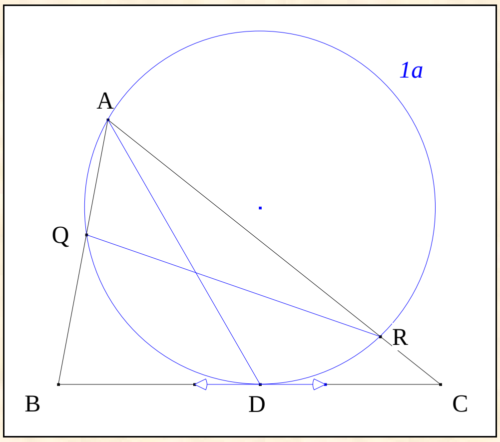
Résumé. Dans cet article, l'auteur ayant été séduit par un problème du géomètre italien Ercole Suppa, propose un lien subtil avec un problème du géomètre français Jean-Pierre Ehrmann. Ce lien permet de présenter un schéma de résolution du problème initial, voire une solution originale et élégante.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. In this article, the author seduced by a problem from the Italian geometer ErcoleSuppa, proposes a subtile connection to a problem from the French geometer Jean-Pierre Ehrmann. This connection permits to present a resolution scheme of the initial problem, see an original and elegant solution.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

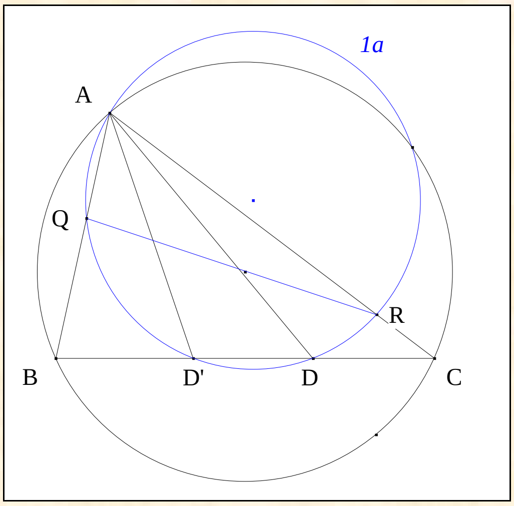
[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 24/08/2022 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sommaire

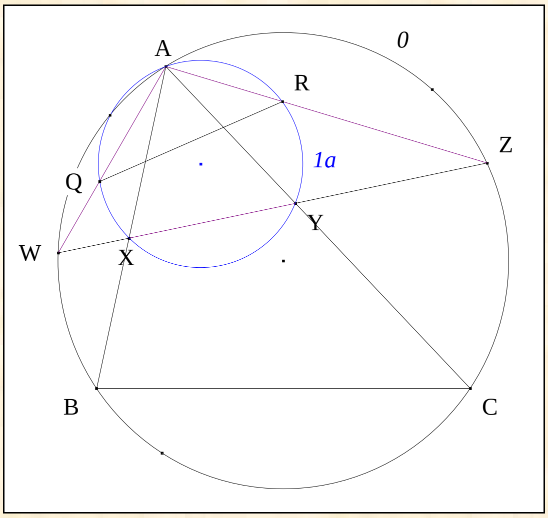
A. RÉCAPITULATION



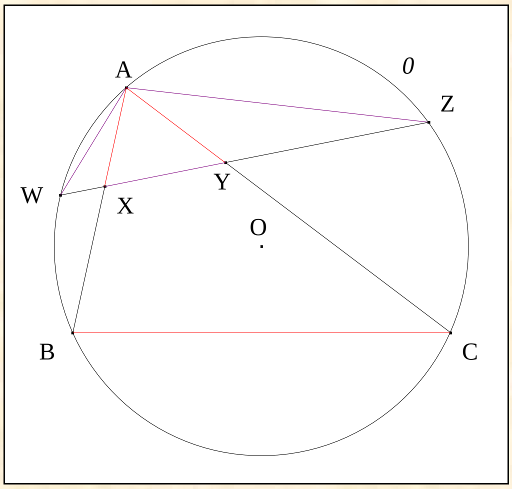
1. AD².BC = AB.AC.QR



2. AD.AD'.BC = AB.AC.QR



3. BC/WZ = XY/QR



4. AX.AY.BC = AW.AZ.XY.

B. LE SCHÉMA DE RÉSOLUTION

PROBLÈME 1 [2]

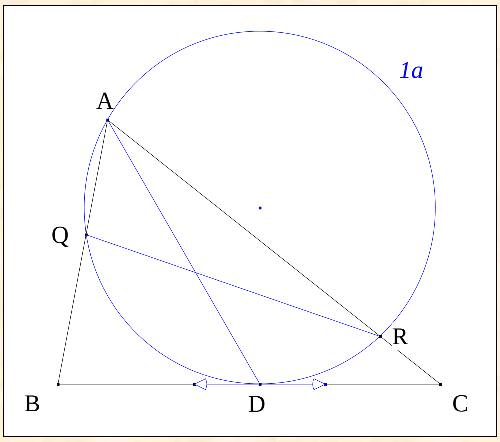
Une relation

Un point variable sur un côté

There is a Russian proverb
Shouting from a gun to sparrows
which is usually used when one uses an extremely powerful thing to solve
a simple problem [3]

VISION

Figure :



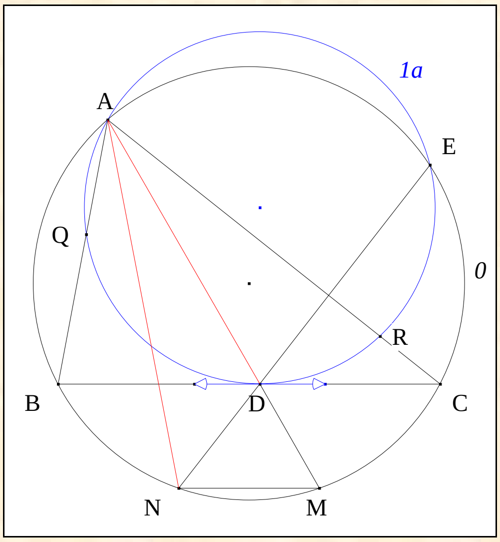
Traits : ABC un triangle,
D un point de [BC],
1a le cercle passant par A et tangent à (BC) en D,
r le rayon de *1a*
et Q, R les seconds points d'intersection de *1a* resp. avec (AC), (AB).

Donné : $AD^2.BC = AB.AC.QR$.

VISUALISATION

[2] geometry problem, AoPS du 30/11/2019 ; https://artofproblemsolving.com/community/c4t48f4h1961535_geometry_problem
a hard problem, AoPS du 02/12/2019 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1962022_a_hard_problem
Une relation, *Les-Mathematiques.net* du 04/12/2019 ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1900290

[3] Shvetsov D.

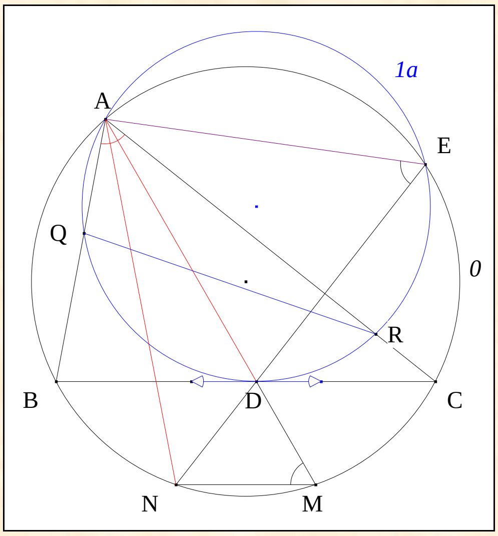


- Notons 0 le cercle circonscrit à ABC,
  E le second point d'intersection de *0* et *1a*,
  et M, N les seconds points d'intersection de (AD), (ED) avec *0*.

- Les cercles *0* et *1a*, les points de base A et E, le smoniennes (MAD) et (NED), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (MN) // (BDC).

- Par définition, (AM) et (AN) sont deux A-isogonales de ABC.

- D'après "Le produit AB.AC" [4], AB.AC = AD.AN i.e. $AB.AC/AD^2 = AN/AD$.



- Notons R, r les rayon de *0*, *1a*.

- D'après "La loi des sinus" appliqué aux triangles
  (1) ANE et ADE, AN/AD = R/r
  (2) BCA et QRA, R/r = BC/QR
  (3) par transitivité de =, AN/AD = BC/QR.

- **Conclusion :** par substitution et réarrangement, $AD^2.BC = AB.AC.QR$.

---

[4] Ayme J.-L., Le produit AB.AC, Problème **2**, G.G.G. vol. **17**, p. 8 ; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

PROBLÈME 2 [5]

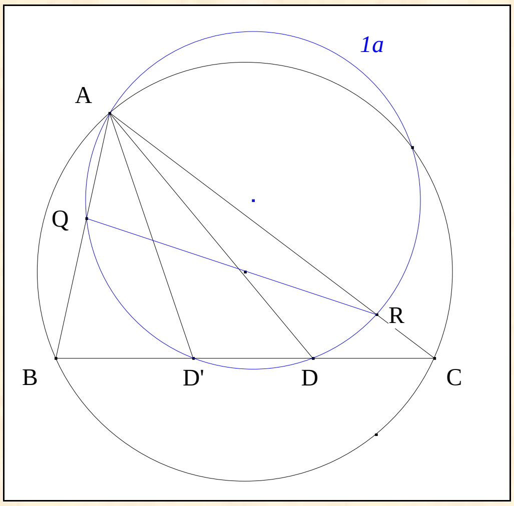
Une généralisation

Deux points variables sur un côté

Jean-Pierre Ehrmann

VISION

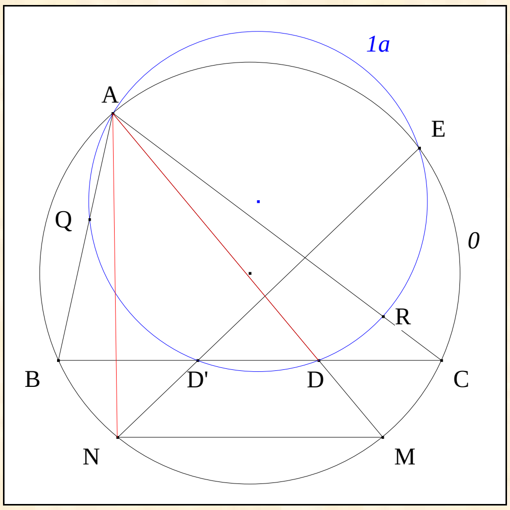
Figure :



Traits : ABC un triangle,
D, D' deux points de [BC],
1a le cercle passant par A, D, D'
et Q, R les seconds points d'intersection de *1a* resp. avec (AC), (AB).

Donné : AD.AD'.BC = AB.AC.QR.

VISUALISATION



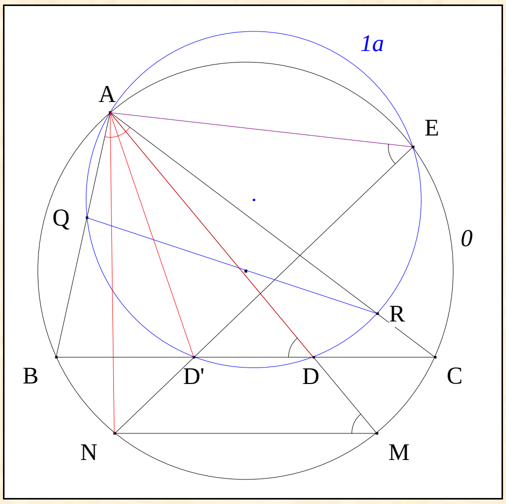
[5] Ehrmann J.-P., Une relation, *Les-Mathematiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1900290
Ayme J.-L., A hard problem, AoPS du 06/12/2019 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1964423_a_hard_problem

- Notons 0 le cercle circonscrit à ABC,
  E le second point d'intersection de 0 et $1a$,
  et M, N les seconds points d'intersection de (AD), (ED) avec 0.

- Les cercles 0 et $1a$, les points de base A et E, les moniennes (MAD) et (NED'), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (MN) // (BD'DC).

- Par définition, (AM) et (AN) sont deux A-isogonales de ABC.

- D'après "Le produit AB.AC" [6], AB.AC = AD.AN i.e. AB.AC/AD.AD' = AN/AD'.

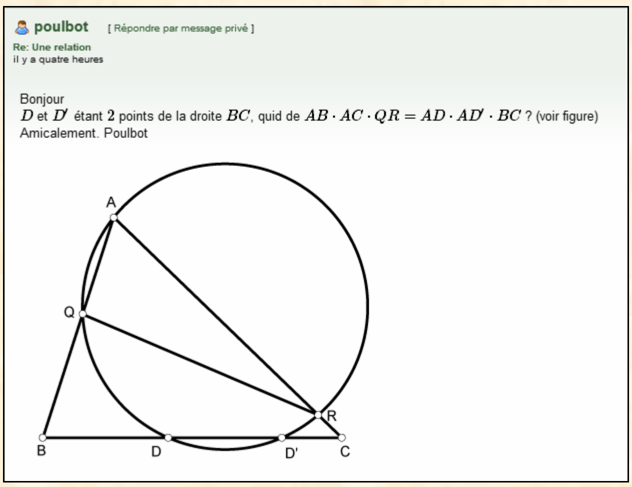


- Notons **R**, r les rayons de 0, $1a$,

- D'après "La loi des sinus" appliqué aux triangles **(1)** ABE et AD'E, AN/AD' = **R**/r
  (2) BCA et QRA, **R**/r = BC/QR
  (3) par transitivité de =, AN/AD' = BC/QR.

- **Conclusion :** par substitution et réarrangement, AD.AD'.BC = AB.AC.QR

Archive :



6 Ayme J.-L., Le produit AB.AC, Problème **2**, G.G.G. vol. **17**, p. 8 ; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

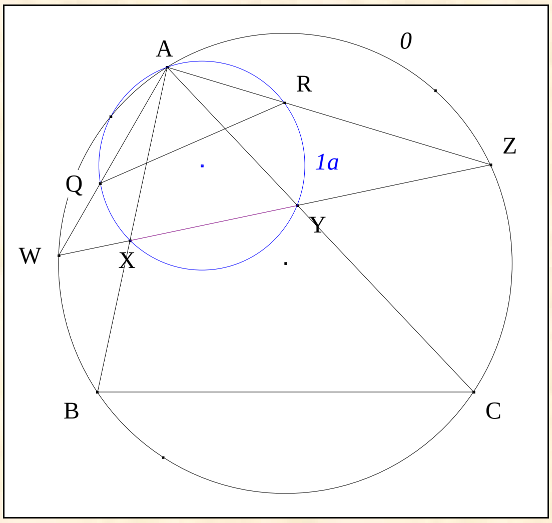
PROBLÈME 3 [7]

Jean - Louis Ayme

(2022)

VISION

Figure :

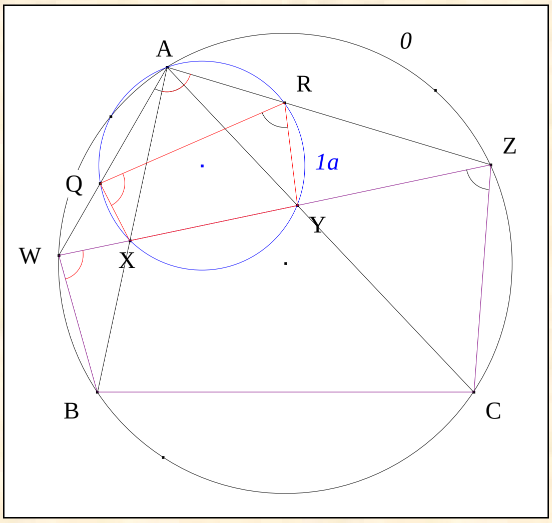


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit,
	X, Y	deux points resp. de [AB], [AC]
	W, Z	les points d'intersection de (XY) avec *0*,
	1a	le cercle circonscrit au triangle AXY
et	Q, R	les points d'intersection de *1a* resp; avec (AW), (AZ).

Donné : BC/WZ = XY/QR.

VISUALISATION

[7] Ayme J.L., Une proportion remarquable, *Les-Mathematiques.net* ;
https://les-mathematiques.net/vanilla/index.php?p=/discussion/2331320/une-proportion-remarquable/p1?new=1
Ayme J.-L., A remarkable proportion, AoPS du 23/08/2022 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h2910764_a_remarkable_proportion



- Une chasse angulaire :

  * par "Angles inscrits", <BWZ = <BAZ
  * par une autre écriture, <BAZ = <XAR
  * par "Angles inscrits", <XAR = <XQR
  * par transitivité de =, <BWZ = <XQR.

  * par supplémentarité, <ZCB = <RYX.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que <WZC = <QRY.

  <CBW = <YXQ.

- **Conclusion :** les quadrilatères cycliques BCZW et XYRQ étant semblables [8], BC/WZ = XY/QR.

[8] considérer la loi des sinus pour BC, WZ, puis pour XY, QR

PROBLÈME 4 [9]

Ercole Suppa (Italie)

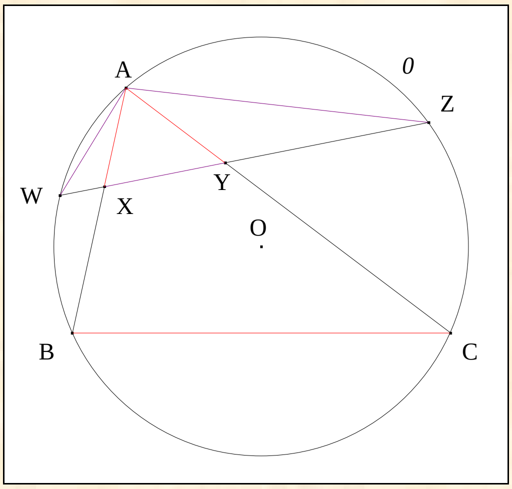
Romantics of Geometry

Problem **6181**

(14/09/2020)

VISION

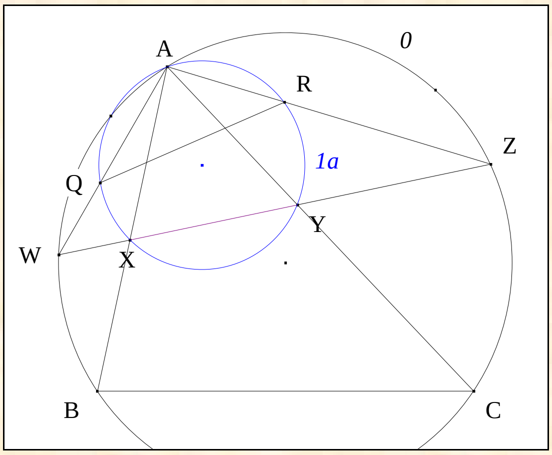
Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit,
X, Y deux points resp. de [AB], [AC]
et W, Z les points d'intersection de (XY) avec *0*.

Donné : AX.AY.BC = AW.AZ.XY.

VISUALISATION



[9] https://fr-fr.facebook.com/photo.php?fbid=1685266221654723&set=gm.3308901909223492&type=3&theater&ifg=1

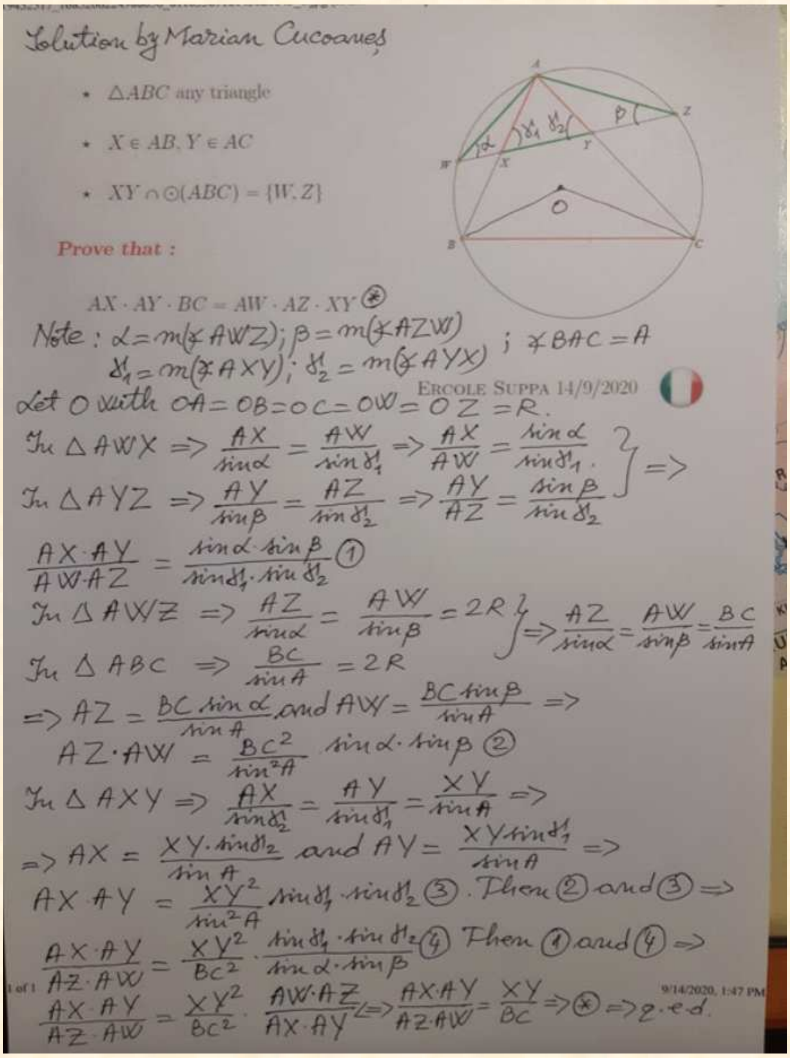
- Notons $1a$ le cercle circonscrit au triangle AXY
  et Q, R les points d'intersection de $1a$ resp; avec (AW), (AZ).

- D'après Problème **2**, AX.AY.WZ = AW.AZ.QR.

- D'après Problème **3**, BC/WZ = XY/QR.

- **Conclusion :** par multiplication membre à membre, AX.AY.BC = AW.AZ.XY.

Archive :



Solution by Marian Cucoaneș

- $\triangle ABC$ any triangle
- $X \in AB$, $Y \in AC$
- $XY \cap \odot(ABC) = \{W, Z\}$

Prove that :

$AX \cdot AY \cdot BC = AW \cdot AZ \cdot XY$ (*)

Note : $\alpha = m(\measuredangle AWZ)$; $\beta = m(\measuredangle AZW)$; $\measuredangle BAC = A$

$\delta_1 = m(\measuredangle AXY)$; $\delta_2 = m(\measuredangle AYX)$

ERCOLE SUPPA 14/9/2020

Let O with $OA = OB = OC = OW = OZ = R$.

In $\triangle AWX \Rightarrow \frac{AX}{\sin\alpha} = \frac{AW}{\sin\delta_1} \Rightarrow \frac{AX}{AW} = \frac{\sin\alpha}{\sin\delta_1}$

In $\triangle AYZ \Rightarrow \frac{AY}{\sin\beta} = \frac{AZ}{\sin\delta_2} \Rightarrow \frac{AY}{AZ} = \frac{\sin\beta}{\sin\delta_2}$ $\Rightarrow$

$\frac{AX \cdot AY}{AW \cdot AZ} = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\delta_1 \cdot \sin\delta_2}$ (1)

In $\triangle AWZ \Rightarrow \frac{AZ}{\sin\alpha} = \frac{AW}{\sin\beta} = 2R$

In $\triangle ABC \Rightarrow \frac{BC}{\sin A} = 2R$ $\Rightarrow \frac{AZ}{\sin\alpha} = \frac{AW}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin A}$

$\Rightarrow AZ = \frac{BC \sin\alpha}{\sin A}$ and $AW = \frac{BC \sin\beta}{\sin A} \Rightarrow$

$AZ \cdot AW = \frac{BC^2}{\sin^2 A} \sin\alpha \cdot \sin\beta$ (2)

In $\triangle AXY \Rightarrow \frac{AX}{\sin\delta_2} = \frac{AY}{\sin\delta_1} = \frac{XY}{\sin A} \Rightarrow$

$\Rightarrow AX = \frac{XY \cdot \sin\delta_2}{\sin A}$ and $AY = \frac{XY \sin\delta_1}{\sin A} \Rightarrow$

$AX \cdot AY = \frac{XY^2}{\sin^2 A} \sin\delta_1 \cdot \sin\delta_2$ (3). Then (2) and (3) $\Rightarrow$

$\frac{AX \cdot AY}{AZ \cdot AW} = \frac{XY^2}{BC^2} \cdot \frac{\sin\delta_1 \cdot \sin\delta_2}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$ (4) Then (1) and (4) $\Rightarrow$

$\frac{AX \cdot AY}{AZ \cdot AW} = \frac{XY^2}{BC^2} \cdot \frac{AW \cdot AZ}{AX \cdot AY} \Leftrightarrow \frac{AX \cdot AY}{AZ \cdot AW} = \frac{XY}{BC} \Rightarrow$ (*) $\Rightarrow$ q.e.d.

1 of 1 9/14/2020, 1:47 PM

C. LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A	
aligné	collinear
annexe	annex
axiome	axiom
appendice	appendix
adjoint	associate
a propos	by the way btw
acutangle	acute angle
axiome	axiom
B	
bissectrice	bisector
bande	strip
C	
centre	incenter
centre du cercle circonscrit	circumcenter
cercle circonscrit	circumcircle
cévienne	cevian
colinéaire	collinear
concourance	concurrence
coincide	coincide
confondu	coincident
côté	side
par conséquence	consequently
commentaire	comment
D	
d'après	according to
donc	therefore
droite	line
d'où	hence
distinct de	different from
E	
extérieur	external
F	
figure	figure
H	
hauteur	altitude
hypothèse	hypothesis
I	
intérieur	internal
identique	identical
i.e.	namely
incidence	incidence
L	
lemme	lemma
lisibilité	legibility
M	
mediane	median
médiatrice	perpendicular bissector
milieu	midpoint
N	
Notons	name
nécessaire	necessary
note historique	historic note
O	
orthocentre	orthocenter
ou encore	otherwise
P	
parallèle	parallel
parallèles entre elles	parallel to each other
parallélogramme	parallelogram
pédal	pedal
perpendiculaire	perpendicular
pied	foot
point de vue	point of view
postulat	postulate
point	point
pour tout	for any
Q	
quadrilatère	quadrilateral
R	
remerciements	thanks
reconnaissance	acknowledgement
respectivement	respectively
rapport	ratio
répertorier	to index
S	
semblable	similar
sens	clockwise in this
order	
segment	segment
Sommaire	summary
symédiane	symmedian
suffisante	sufficient
sommet (s)	vertex (vertice)
T	
trapèze	trapezium
tel que	such as
théorème	theorem
triangle	triangle
triangle de contact	contact triangle
triangle rectangle	right-angle triangle