HIGHWAY TO GEOMETRY 1

Jean-Louis AYME [1]

One of the prolific elementary geometers nowadays [2]

Résumé. L'auteur présente "Highway to Geometry" un parcours personnel où chaque Sujet, pris dans le noeud coulant d'un lasso, livre, escale après escale, des résultats qui permettent d'élaborer une solution fructueuse par la suite…
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents "Highway to Geometry" where each subject, taken in the flowing node of a lasso, leads, step after step, to results which will might allow us to reach out eventually for a fruitful solution…
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Resumen. El autor presenta "Highway to Geometry" donde cada Sujeto, atrapado en el nodo fluido de un lasso, trae, paso a paso, resultados que permiten desarrollar posiblemente una solución fructífera…
Las figuras están en posición general y todos los teoremas mencionados pueden todos ser demostrados sintéticamente.

Zusammenfassung. Der Autor präsentiert "Highway to Geometry" in welcher jeder Leitgedanke zuerst durch den lockeren Knoten eines Lasso's fließen muss, um nach und

---

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 31/08/2018 ; jeanlouisayme@yahoo.fr
[2] Citation de Darij Griberg au sujet de l'auteur ; http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Links.html

nach, Ergebnisse zu zeigen, die uns im Endeffekt eine fruchtbare Lösung ermöglichen…
Die Figuren sind alle in einer allgemeinen Position und alle aufgeführten Lehrsätze können synthetisch nachgewiesen werden können.

Sommaire

PROBLÈME 1 [3]

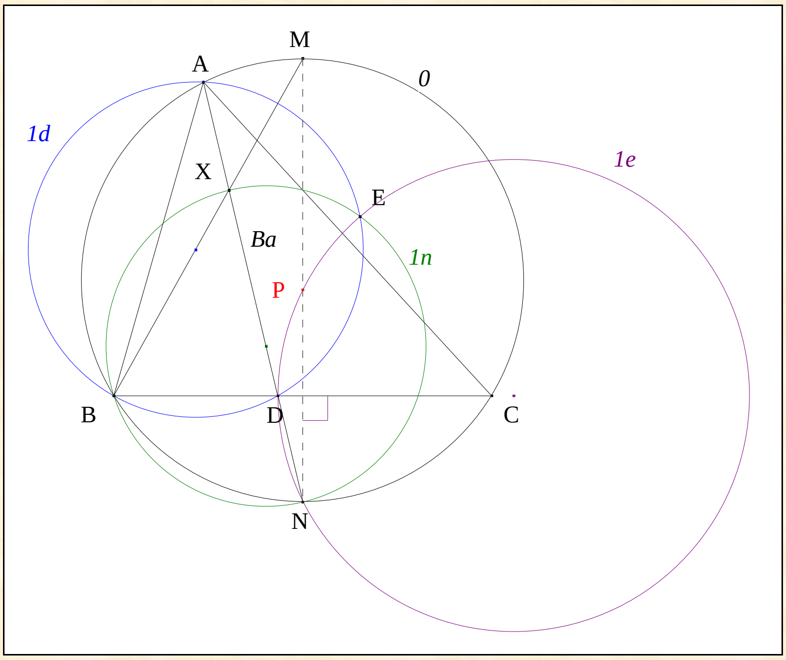
UN TRIANGLE

ET

TROIS CERCLES

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	Ba	la A-bissectrice intérieure de ABC,
	D	le pied de *Ba*,
	M, N	les premier, second A-perpoints de ABC,
	X	le point d'intersection de *Ba* et (BM),
	1d, *1n*	les cercles circonscrits resp. aux triangles ABD, XBN,
	E	le second point d'intersection de *1n* et *1d*,
	1e	le cercle circonscrit au triangle DNE
et	P	le symétrique de N par rapport à (BC).

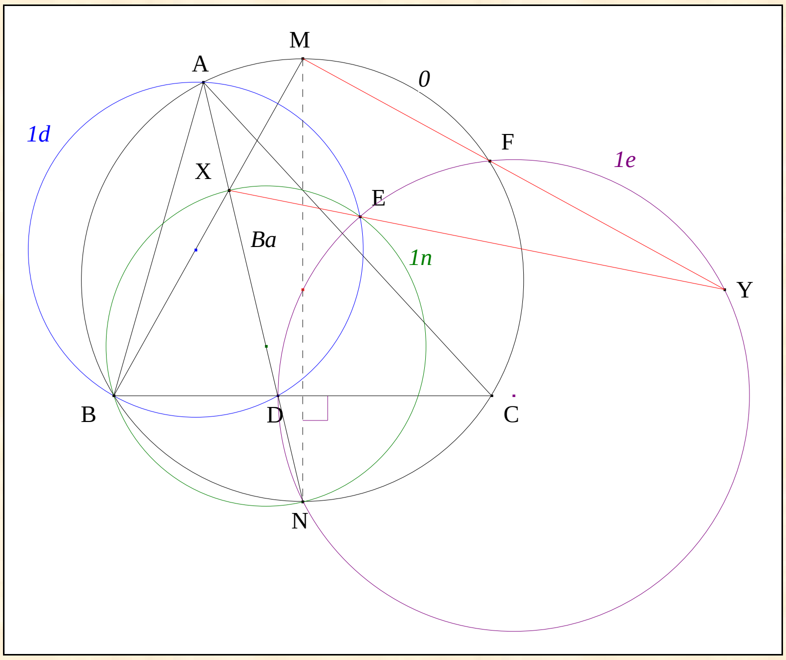
Donné : P est sur *1e*.

Commentaire : *peu de géomètres contemporains d'Auguste Miquel, avaient pressenti que le "Pivot theorem" allait devenir la source d'un grand nombre de théorèmes. Il en de même du théorème de Reim…*

[3] Geometry, AoPS du 18/05/2018 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1645388_geometry

VISUALISATION

LE POINT X



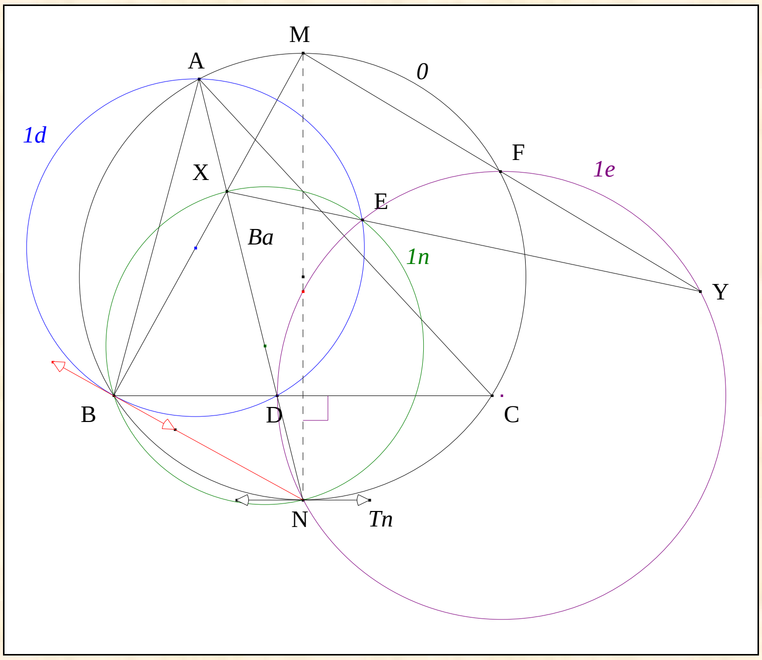
- Notons F le second point d'intersection de *1e* et *0*.

- D'après Auguste Miquel "Le théorème des trois cercles concourants" [4]
  appliqué à *0*, *1n* et *1e* concourants en N, (MF) et (XE) se coupent sur *1e*.

- Notons Y ce point d'intersection.

[4] Miquel Aug., Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. **1**, **3** (Oct. 1838) 485-487
Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. **13**, p. 4-7 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

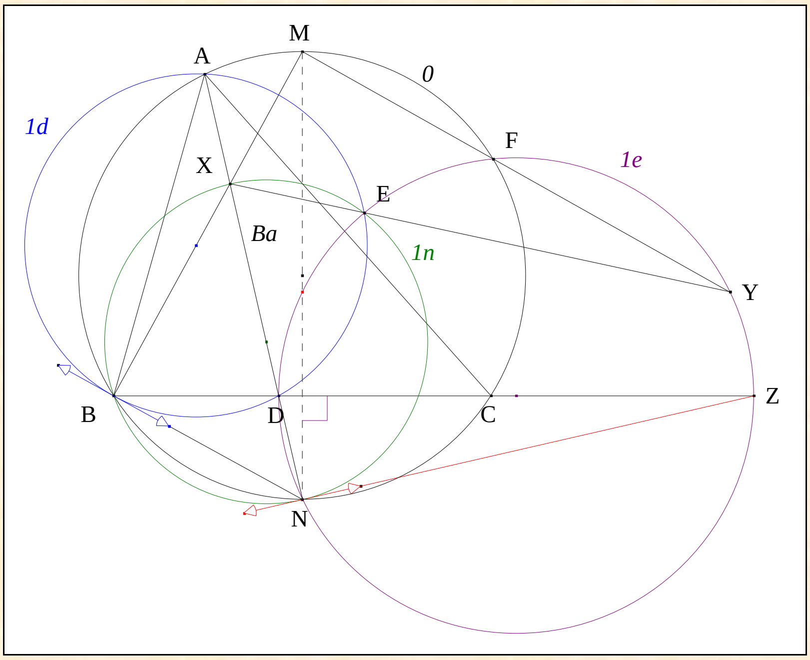
LES TANGENTES (BN) ET (NZ)



- Notons *Tn* la tangente à *0* en N.

- **Scolie :** *Tn* // (DB).

- Les cercles *0* et *1d*, les points de base A et B, la monienne (NAD), les parallèles *Tn* et (DB), conduisent au théorème **2'** de Reim ; en conséquence, (BN) est tangente à *1d* en B.

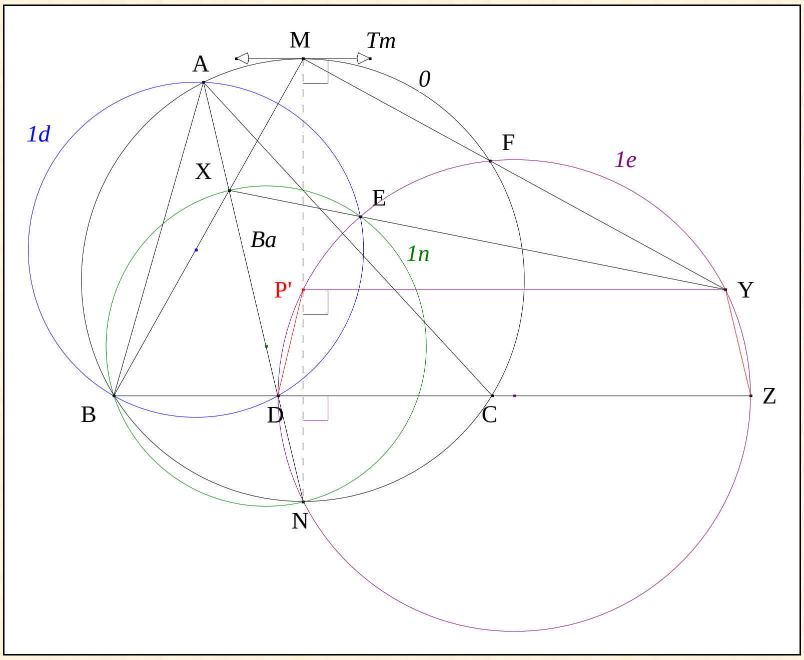


- Notons Z le second point d'intersection de (CC) avec *1e*.

- D'après Auguste Miquel "Le théorème des trois cercles concourants" [5] appliqué à *1e*, *1d* et *1n* concourants en E, (NZ) est tangente à *1n* en Z.

5

UN TRAPÈZE ISOCÈLE



- Notons P' le second point d'intersection de (MN) avec *1e*
  et *Tm* la tangente à *0* en M.

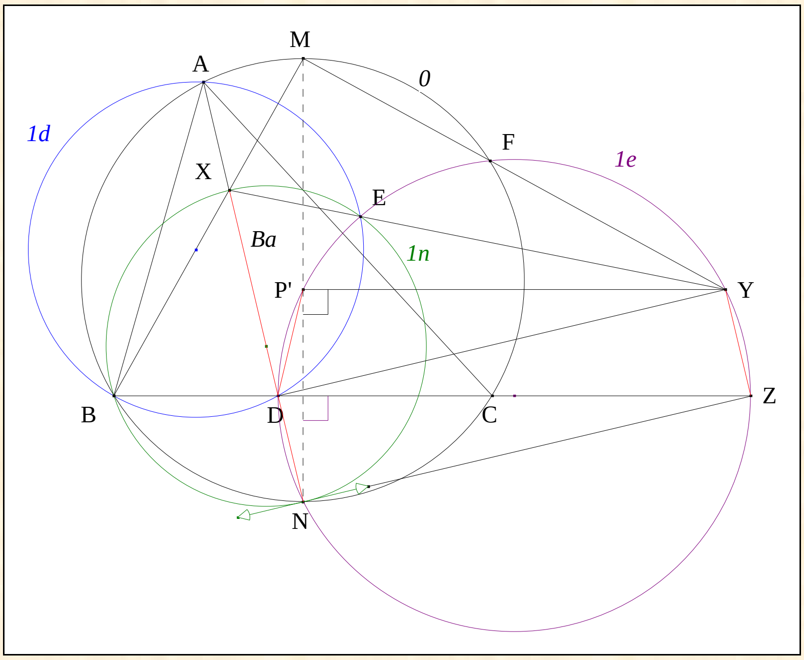
- Les cercles *1e* et *0*, les points de base N et F, les moniennes (P'NM) et (XFM), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (P'Y) // *Tm*.

- Par hypothèse, [MN] étant un diamètre de *0*, *Tm* ⊥ (MN) ;
  en conséquence, (P'Y) ⊥ (MN) ;

- **Scolie :** (DZ) // (P'Y).

- **Conclusion partielle :** le trapèze DP'YZ étant cyclique, DP' = ZY.

LE TRIANGLE D-ISOCÈLE DNP'



- Les cercles *1e* et *1n*, les points de base N et E, les moniennes (ZNN) et (YEX), conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (ZY) // (NX).

- Le quadrilatère YZND étant un trapèze cyclique, ZY = ND.

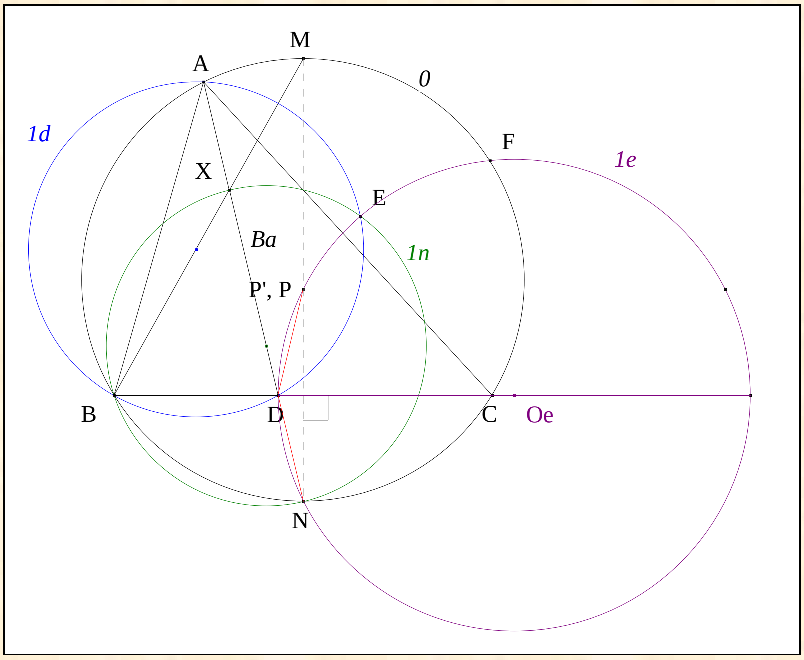
- Par transitivité de =, DP' = DN.

- **Conclusion partielle** : le triangle DNP' est D-isocèle.

LE SYMÉTRIQUE DE N

PAR

RAPPORT À (BC)



- Notons Oe le centre de *1e*.
- **Scolies :** **(1)** *1e* est le cercle circonscrit du triangle D-isocèle DNP'

  (2) (DC) en est la D-hauteur

  (3) Oe est sur (DC).
- **Conclusion :** P' étant confondus avec P, P est sur *1e*.

PROBLÈME 2 [6]

QUATRE POINTS COCYCLIQUES

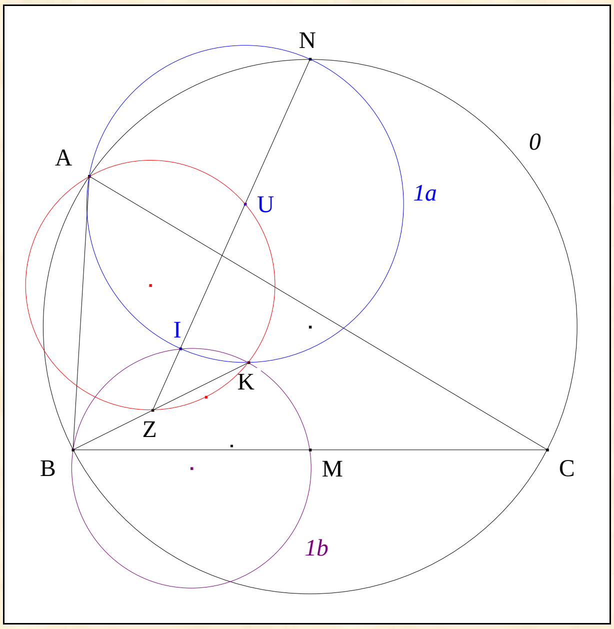
proposed

by

Jean-Louis Ayme

VISION

Figure :



Traits :		
	ABC	un triangle acutangle tel que AB < AC,
	0, *1*	les cercles circonscrit, inscrit à ABC,
	M	le milieu de [BC],
	N	le premier A-perpoint d eABC,
	I	le centre de *1*,
	1a, *1b*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AIN, BIM,
	U	le centre de *1a*,
	K	le second point d'intersection de *1a* et *1b*,
et	Z	le point d'intersection de (NI) et (BK).

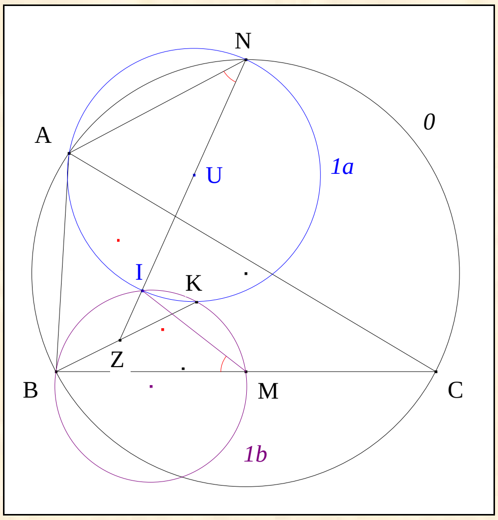
6 Ayme J.-L., Four concyclic points, AoPS du 13/08/2018 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1690521_four_concyclic_points

Donné : A, U, K et Z sont cocycliques.

Commentaire : une situation géométrique augmentée à partir d'un lemme d'Andrey Badzyan.

VISUALISATION

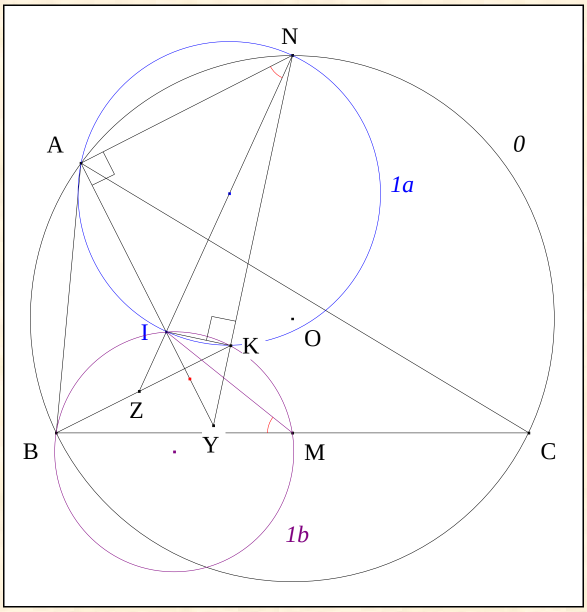
LE LEMME D'ANDREY BADZYAN [7]



- **Conclusion partielle :** <ANI = <IMB

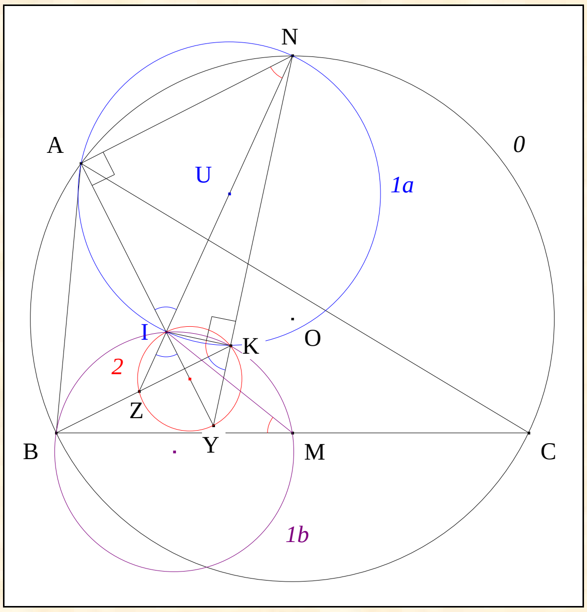
[7] All-Russian MO Round **4**, **9.4**, **10.3** (2005)
Incenter, circumcircle and equal angles, AoPS du 02/04/2005 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h32163
Ayme J.-L., *Collection géométrique sur le cercle inscrit*, **30.** Problème **1**,, G.G.G. vol. **50**,

LE PREMIER CERCLE [8]



- Notons Y le point d'intersection de (AI) et (NK).

- D'après Thalès de Milet "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (AI) ⊥ (AN) et (KI) ⊥ (KN).



- Une chasse angulaire :

*	nous avons :	<ANI = <IMB
*	par "Angles inscrits",	<IMB = <IKB
*	par transitivité de =,	<ANI = <IKB i.e. <IKZ
*	par complémentarité et "Angles opposés",	<ZIY = <ZKY.

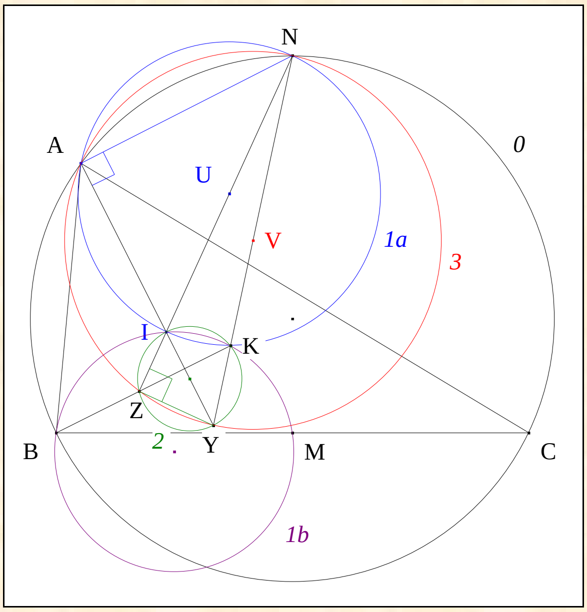
---

8 Three lines are concurrent and four points lie on a circle., AoPS du 26/05/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1093869_three_lines_are_concurrent_and_four_points_lie_on_a_circle

- **Conclusion partielle :** Y, K, I et Z sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle de diamètre [IY].

LE SECOND CERCLE



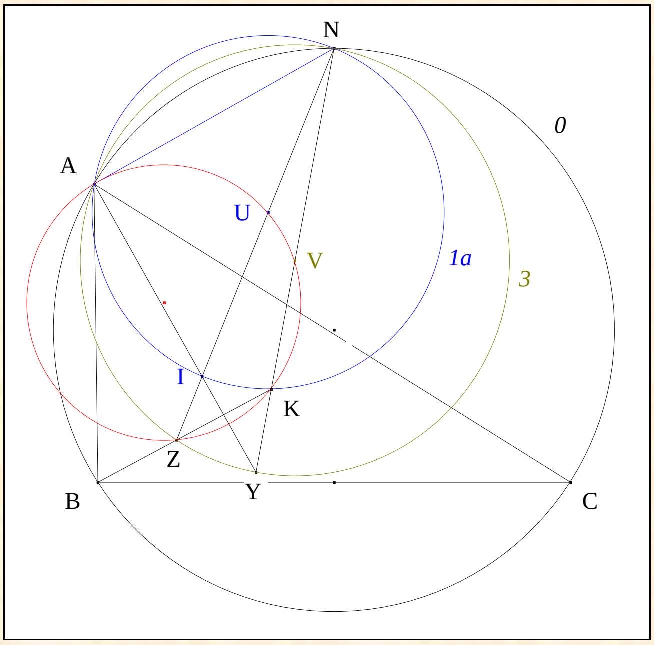
- Notons V le milieu de [NY].

- D'après Thalès de Milet "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (AY) ⊥ (AN) et (ZY) ⊥ (ZN)

- **Conclusion partielle :** N, A, Z et Y sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle de diamètre [NY].

LE A-CERCLE DE FRANK MORLEY [9]



- **Conclusion :** d'après "Le cercle de Frank Morley"
  appliqué à *1a* et *3*, A, U, K et Z sont cocycliques.

[9] Ayme J.-L., Les cercles de Morley…, G.G.G. vol. **2**, p. 1-3 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
Tobias Dantzig, Elementary proof of a theorem due to F. Morley, *American Mathematical Monthly*, vol. **23**, **7** (1916) 246-248
Morley F. (1860- Baltimore 17/10/1937)

PROBLÈME 3 [10]

TROIS CERCLES CONCOURANTS

proposed

by

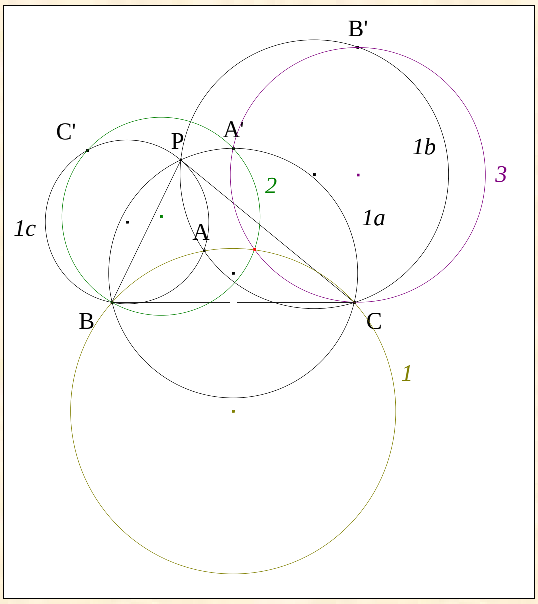
Peking University

Summer Camp 2018 Day **1** Problem **1**

La silencieuse évidence des sachants
est l'avers
de l'étrange qui étonne les savants.

VISION

Figure :



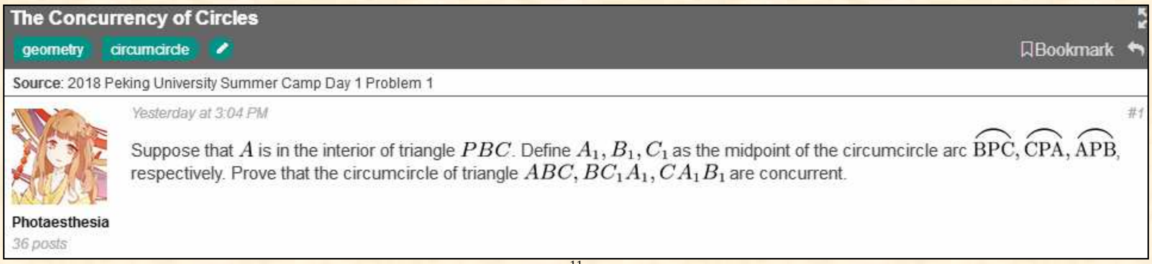
Traits : PBC un triangle acutangle tel que AB < AC,
A un point intérieur à PBC,
1a, 1b, 1c les cercles circonscrits resp. aux triangles BPC, CPA, APB
A', B', C' les premiers P-perpoints resp. de *1a, 1b, 1c*
et *1, 2, 3* les cercles circonscrits resp. aux triangles ABC, BC'A', CA'B'.

Donné : *1, 2* et *3* sont concourants.

---

[10] The Concurrency of Circles, AoPS du 13/08/2018 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1690561_the_concurrency_of_circles

Archives



The Concurrency of Circles

geometry circumcircle

Bookmark

Source: 2018 Peking University Summer Camp Day 1 Problem 1

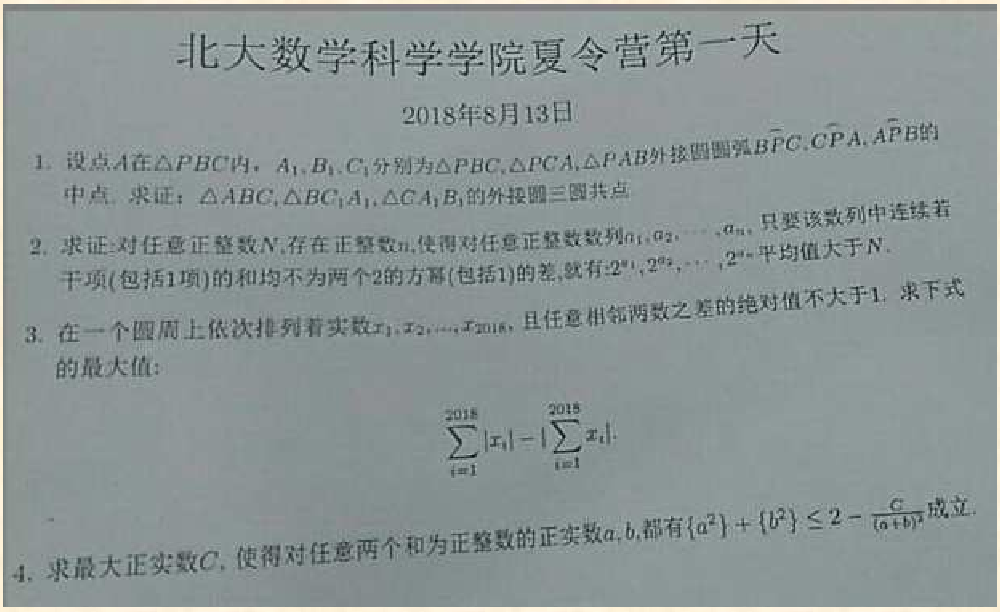
Yesterday at 3:04 PM #1

Suppose that A is in the interior of triangle PBC. Define A_1, B_1, C_1 as the midpoint of the circumcircle arc $\overset{\frown}{BPC}, \overset{\frown}{CPA}, \overset{\frown}{APB}$, respectively. Prove that the circumcircle of triangle ABC, BC_1A_1, CA_1B_1 are concurrent.

Photaesthesia

36 posts

[11]



北大数学科学学院夏令营第一天

2018年8月13日

1. 设点A在$\triangle PBC$内，A_1, B_1, C_1分别为$\triangle PBC, \triangle PCA, \triangle PAB$外接圆圆弧$\overset{\frown}{BPC}, \overset{\frown}{CPA}, \overset{\frown}{APB}$的中点. 求证：$\triangle ABC, \triangle BC_1A_1, \triangle CA_1B_1$的外接圆三圆共点

2. 求证:对任意正整数N,存在正整数n,使得对任意正整数数列$a_1, a_2, \cdots, a_n$, 只要该数列中连续若干项(包括1项)的和均不为两个2的方幂(包括1)的差,就有:$2^{a_1}, 2^{a_2}, \cdots, 2^{a_n}$平均值大于$N$.

3. 在一个圆周上依次排列着实数$x_1, x_2, \dots, x_{2018}$, 且任意相邻两数之差的绝对值不大于1. 求下式的最大值:

$$\sum_{i=1}^{2018} |x_i| - |\sum_{i=1}^{2018} x_i|.$$

4. 求最大正实数C, 使得对任意两个和为正整数的正实数a, b,都有$\{a^2\} + \{b^2\} \leq 2 - \frac{C}{(a+b)^2}$成立.

[12]

[11] https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1690561_the_concurrency_of_circles

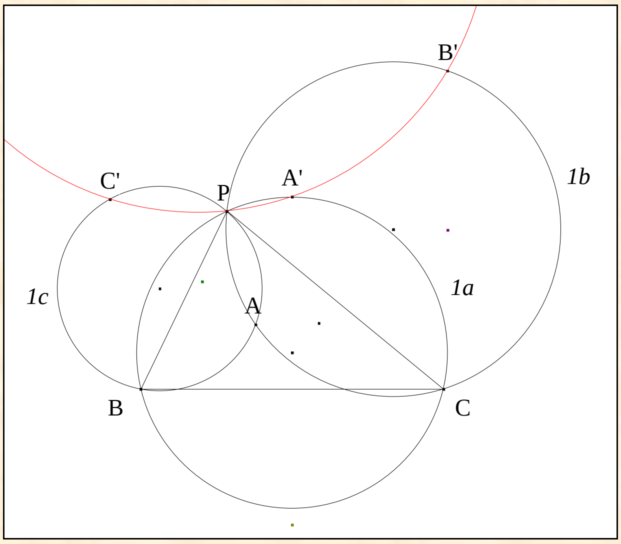
[12] Version en chinois Problem **1**

VISUALISATION

LE MID-ARCS TRIANGLE

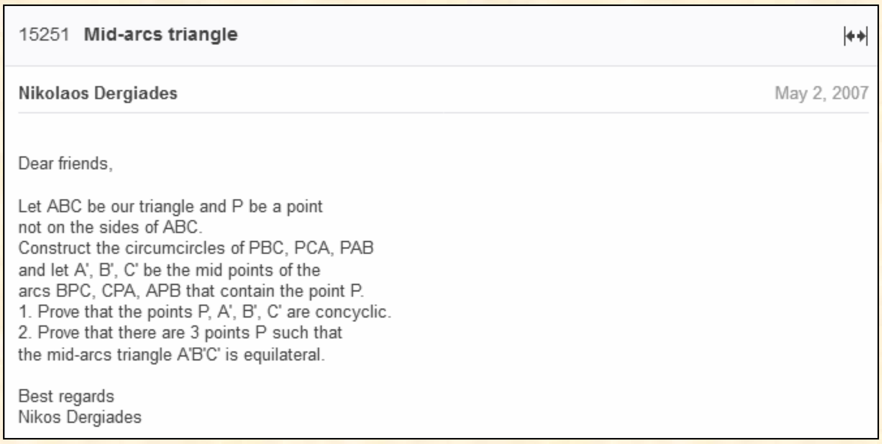
OU

LE LEMME DE NIKOLAOS DERGIADES [13]



- **Scolie :** A'B'C' est le "mid-arcs triangle de PBC".
- **Conclusion partielle :** d'après Nikolaos Dergiades (Cf. Appendice), A', B', C' et P sont cocycliques.
- Notons *4* ce cercle.

Archive



15251 **Mid-arcs triangle**

Nikolaos Dergiades May 2, 2007

Dear friends,

Let ABC be our triangle and P be a point
not on the sides of ABC.
Construct the circumcircles of PBC, PCA, PAB
and let A', B', C' be the mid points of the
arcs BPC, CPA, APB that contain the point P.
1. Prove that the points P, A', B', C' are concyclic.
2. Prove that there are 3 points P such that
the mid-arcs triangle A'B'C' is equilateral.

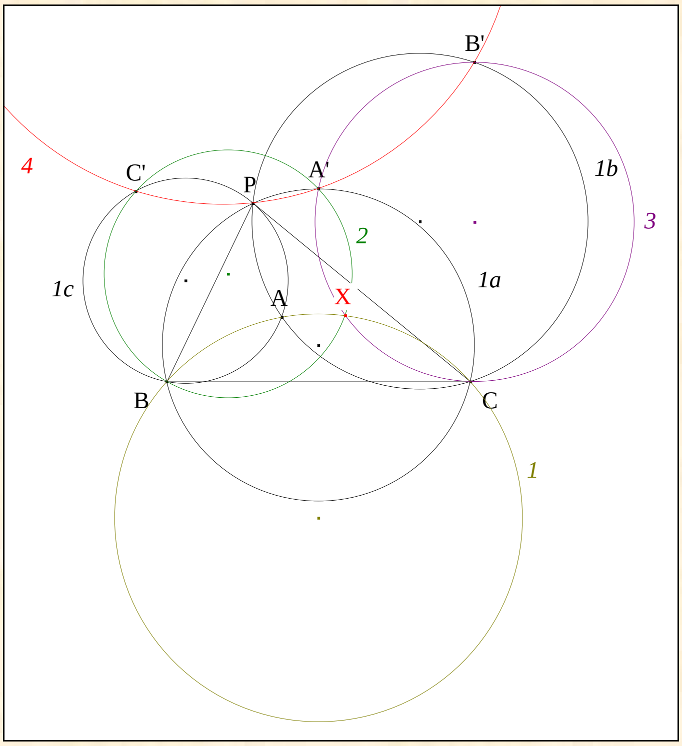
Best regards
Nikos Dergiades

[13] Dergiades N., Mid-arcs triangle, Message *Hyacinthos* # **15251** du 03/05/2007 ;
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/15251

LE THÉOREME DES SIX CERCLES

DE

AUGUSTE MIQUEL



- Notons X le second point d'intersection de *2* et *3*.

- D'après Auguste Miquel "Le théorème des six cercles" [14] appliqué au cercle de départ *4* et aux quatre cercles *2*, *3*, *1b* et *1c*, X, C, A et B sont cocycliques.

- **Scolie :** c'est le cercle *1*.

- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* sont concourants en X.

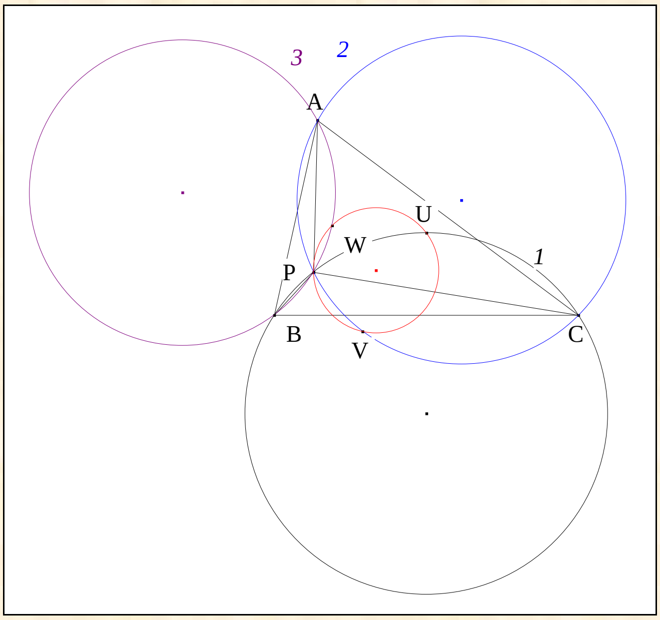
[14] Miquel A., Mémoire de Géométrie, *Journal de Liouville*, **1**e série, vol. I**X** (1844) 20-27
Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles, G.G.G. vol. **2**, p. 8-13 ; http://jl.ayme.pagesperso.orange.fr/

APPENDICE

Le lemme de Nikolaos Dergiades

VISION

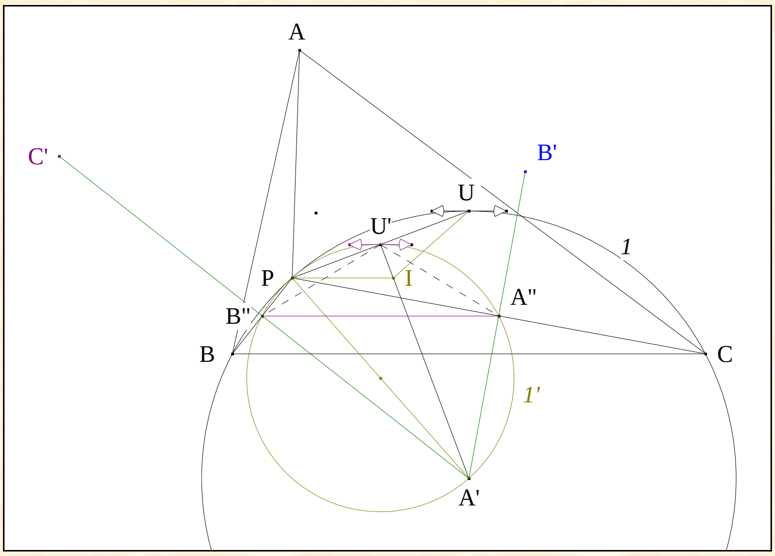
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	1, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles PBC, PCA, PAB
et	U, V, W	les milieux resp. des arc BPC, CPA, APB.

Donné : P, U, V, W sont cocycliques.

VISUALISATION



- Notons A', B', C' les centres de *1*, *2*, *3*
  et I le centre de A'B'C'.

- **Scolies :** (A'B') ⊥ (PC) et (A'C') ⊥ (PB).

- Notons A", B" les points d'intersection resp. de (A'B') et (PC), (A'C') et (PB),
  1' le cercle de diamètre [PA'] ; il passe par A" et B" ;
  U' le second point d'intersection de (PU) avec *1'*,
  Tu la tangente à *1* en U
  et *Tu'* la tangente à *1'* en U'.

- **Scolies :** **(1)** (A'U') ⊥ (PU'U)

  (2) *1* et *1'* sont tangents en P.

- Les cercles tangents *1'* et *1*, le point de base P, la monienne (U'PU), conduit au théorème **8** de Reim ;
  il s'en suit que *Tu'* // *Tu* ;
  U étant le premier P-perpoint de PBC, *Tu* // (BC) ;
  d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué à PBC, (BC) // (B"A") ;
  par transitivité de la relation //, *Tu'* // (B"A").

- Le triangle U'B"A" étant U'-isocèle, **(1)** (A'U') est la A'-bissectrice du triangle A'B'C'

  (2) (A'U') passe par I.

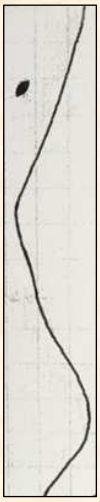
- P et U étant sur *1* et
  (A'U') étant perpendiculaire à (PU'U), **(1)** U est le symétrique de P par rapport à (A'I)

  (2) (A'I) est la médiatrice de [PU].

- **Conclusion partielle :** d'après "Le théorème de la médiatrice", IU = IP.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que IV = IP
  IW = IP.

- **Conclusion :** P, U, V, W sont cocycliques.



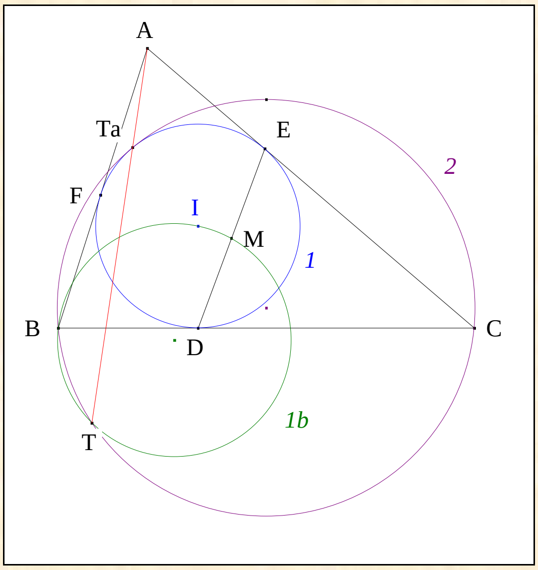
PROBLÈME 4 [15]

LAUVERNAY ET D'ALEMBERT

Le chemin le plus court d'un point à un autre
n'est pas la ligne droite,
mais le rêve…

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit à ABC,
I le centre de *1*,
DEF le triangle de contact de ABC,
M le milieu de [DE],
2 le cercle tangent à *1* passant par B et C,
Ta le point de contact de *2* et *1*,
1b le cercle circonscrit au triangle BIM
et T le second point d'intersection de *1b* avec *2*.

Donné : A, Ta et T sont alignés.

Commentaire : pour rester fidèle à l'esprit de ce site,
une preuve synthétique et non par inversion est présentée par l'auteur…

---

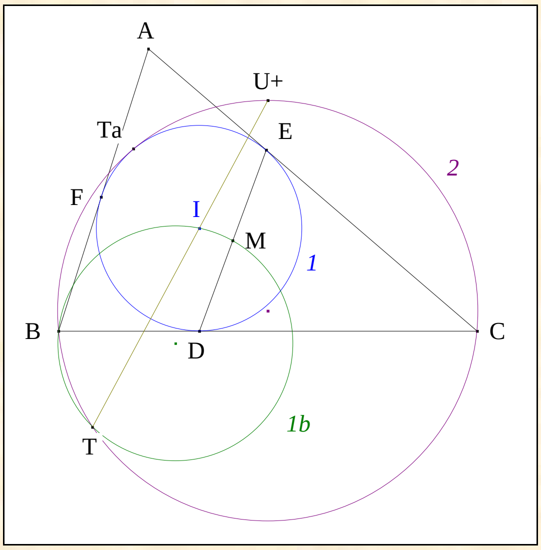
15 Ayme J.-L., Collinear, AoPS du 05/05/2018 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1638564_collinear
A cyclic from 2011 G**4**, AoPS du 02/05/2018 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1636969p10301873

VISUALISATION

GÉNÉRALISATION

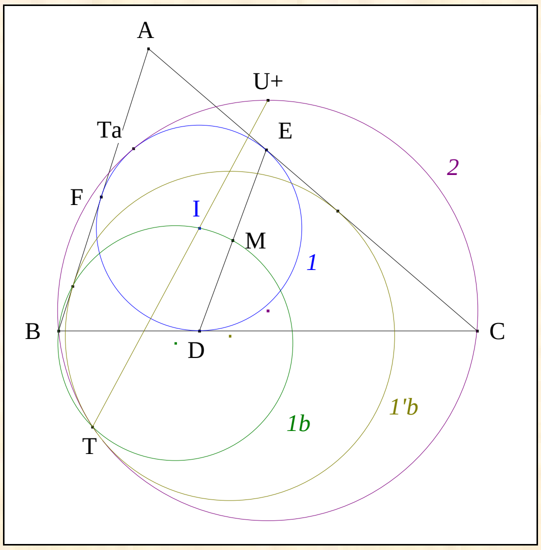
DE

LA DROITE D'EUGÈNE LAUVERNAY [16]



- Notons U+ le premier Ta-perpoint du triangle TaBC.

- D'après "Une généralisation de la droite de Lauvernay" [17] (Cf. Appendice **4**), U+, I et T sont alignés.



- Notons *1'b* le Ta-mixtilinear incircle du triangle TaBC.

- D'après Mixtilinear (in/ex)-circles [18], T est le point de contact de *1'b* et *2*.

---

16 Lauvernay E., *Journal de Mathématique Élémentaire*, n° **390** (1892)
Ayme J.L., A new mixtilinear incircle adventure **I**, G.G.G. vol. **4**, p. 18-19 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

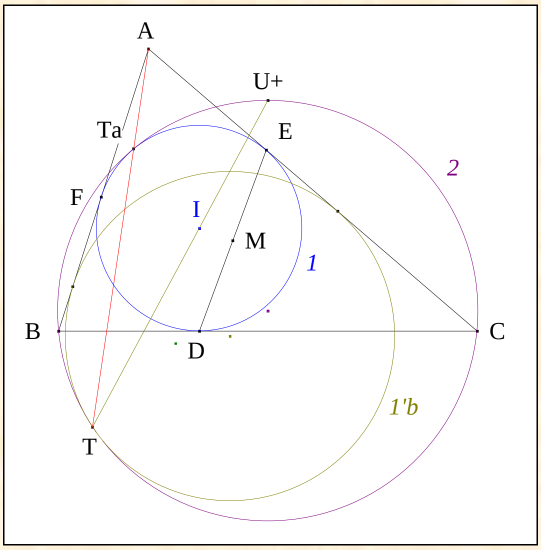
17 Ayme J.L., Mixtilinear (in-ex)-circles…, G.G.G. vol. **20**, p. 8-9 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
Ayme J.-L., Collinear points, AoPS du 03/05/2018 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1637689_collinear_points

18 Ayme J.-L., Mixtilear…, G.G.G. vol. **20**, p. 8-9 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

LA DROITE

DE

JEAN LE ROND D'ALEMBERT



- **Scolies :** **(1)** A est le centre d'homothétie externe de *1* et *1'b*

  (2) T est le centre d'homothétie interne de *1'b* et *2*

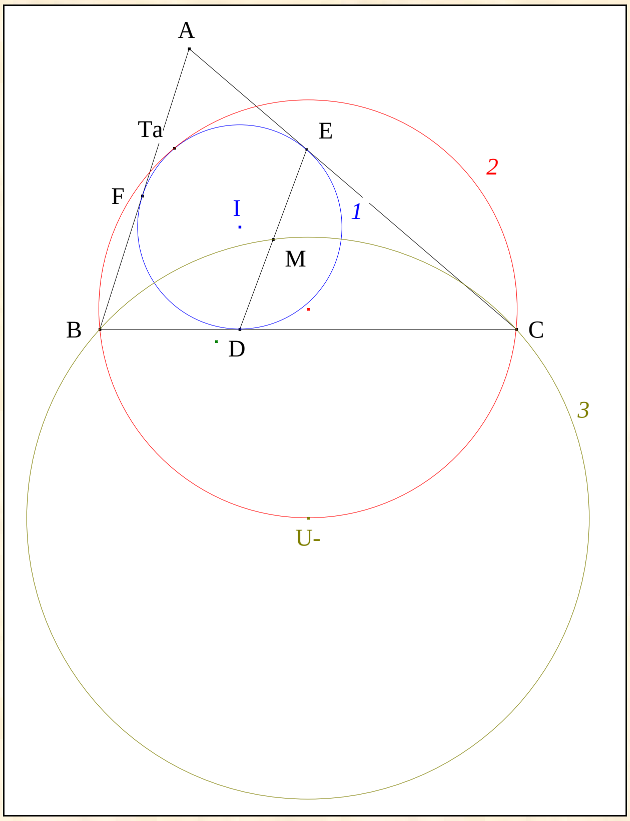
  (3) Ta est le centre d'homothétie interne de *2* et *1*.

- **Conclusion :** d'après "La droite de D'Alembert" [19], A, Ta et T sont alignés.

[19] Ayme J.-L., Forme et mouvement, G.G.G. vol. **20**, p. 36-37 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

APPENDICE

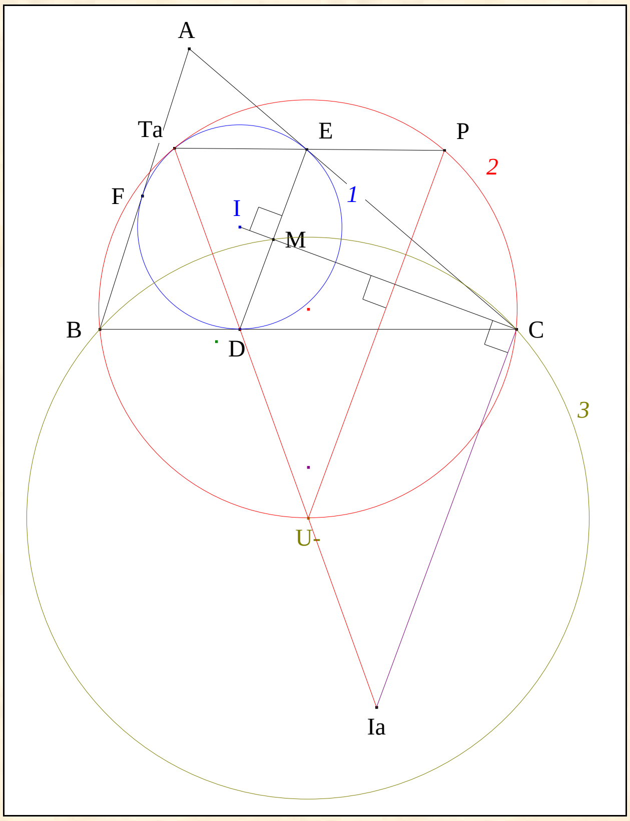
1. Centre d'un cercle



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
I le centre de *1*,
DEF le triangle de contact de ABC,
2 le cercle tangent à *1* passant par B et C,
Ta le point de contact de *2* et *1*,
U- le second Ta-perpoint du triangle TaBC,
M le milieu de [DE],
et *3* le cercle passant par B, M et C.

Donné : U- est le centre de *3*.

VISUALISATION



- Notons P le second point d'intersection de (TaE) avec 2
  et Ia le A-excentre de ABC.

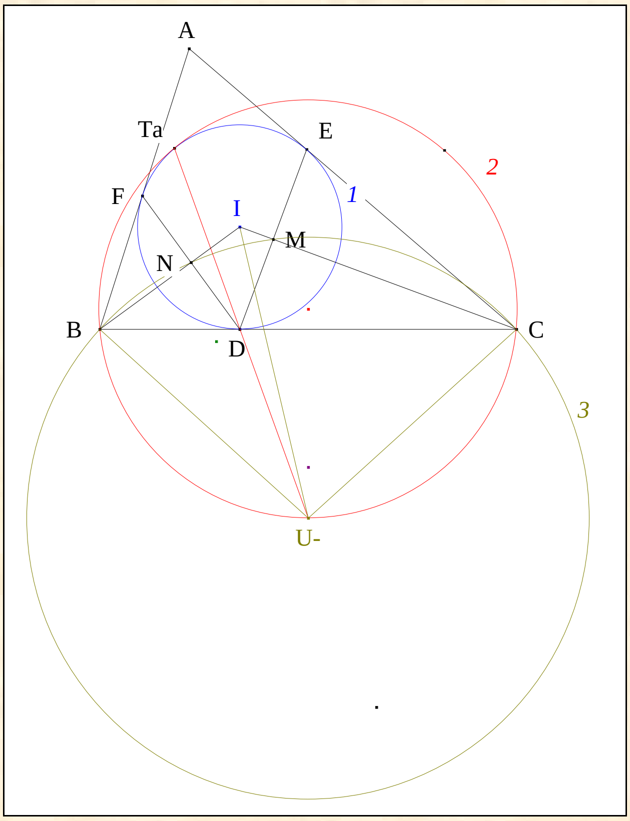
- **Scolies :** **(1)** Ta, D, U- et Ia sont alignés

  (2) U- est le milieu de [DIa].

- Les cercles tangents *2* et *1*, le point de base Ta, les moniennes (U-TaD) et (PTaE), conduisent au théorème **7** de Reim ; il s'en suit que (U-P) // (DE).

- (U-P) étant l'axe médian de la bande de frontières (DE) et (IaC), d'après l'axiome de passage **IIIb**, (U-P) est la médiatrice de [MC].

- **Conclusion partielle :** U-M = U-C.

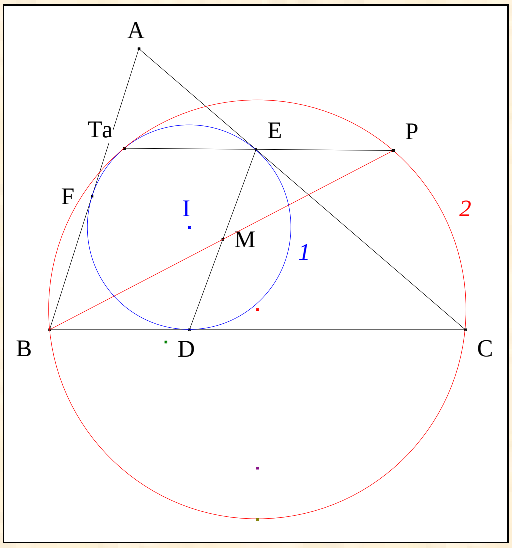


- Notons N le milieu de [DF].
- D'après "Quatre points cocyclique" [20] *3* passe par N.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que U-B = U-N.
- **Scolie :** U-M = U-C = U-N = U-B.
- **Conclusion :** U- est le centre de *3*.

2. Un point sur une cévienne [21]

[20] Concyclic Points (easy), AoPS du 01/08/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1123040_concyclic_points_easy
Quatre points cocycliques, *Les-Mathematiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1130825

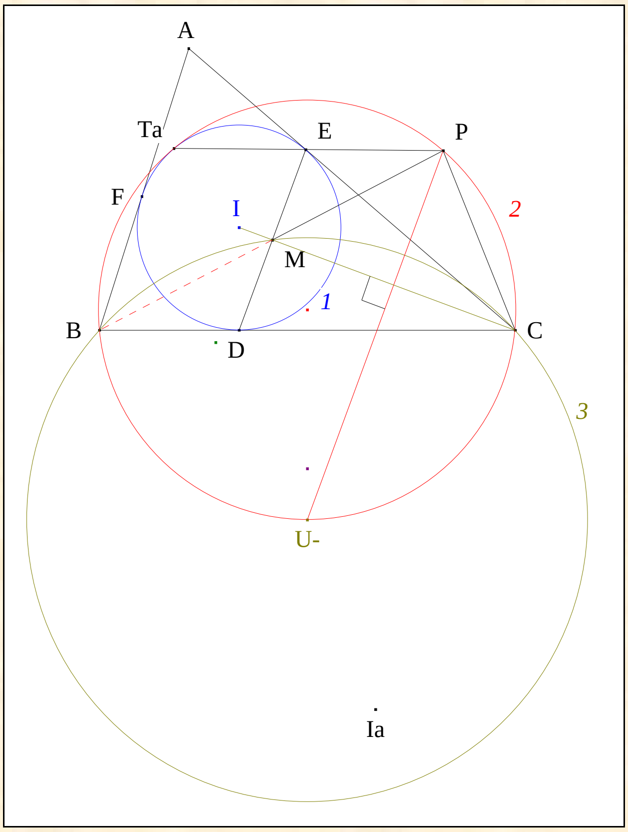
[21] Ayme J.-L., A point on a cevian, AoPS du 03/05/2018 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1637666_a_point_on_a_cevian



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit à ABC,
	I	le centre de *1*,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	2	le cercle tangent à *1* passant par B et C,
	Ta	le point de contact de *2* et *1*,
	P	le second point d'intersection de (TaE) avec *2*
et	M	le milieu de [DE],

Donné : M est sur (BP).

VISUALISATION



- Notons U- le second Ta-perpoint du triangle TaBC
  et *3* le cercle passant par B, M et C.

- D'après Appendice **1**, **(1)** U- est le centre de *3*

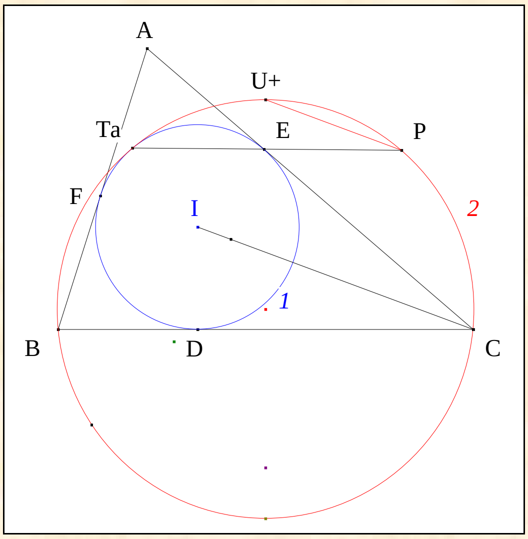
  (2) (PU-) est la médiatrice de [MC].

- **Scolie :** *2* passe par le centre de *3*.

- D'après "Le théorème de la médiatrice", le triangle PMC est P-isocèle.

- **Conclusion :** d'après "Cercle passant par le centre d'un cercle" [22], M est sur (BP).

3. Deux parallèles [23]



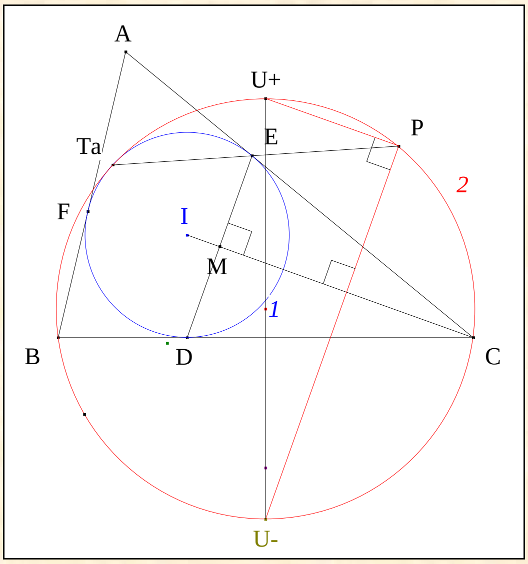
Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit de ABC,
I le centre de *1*,
DEF le triangle de contact de ABC,
2 le cercle tangent à *1* passant par B et C,
Ta le point de contact de *2* et *1*,
P le second point d'intersection de (TaE) avec *2*
et U+ le premier Ta-perpoint du triangle TaBC

Donné : (U+P) est parallèle à (IC).

VISUALISATION

[22] Ayme J.-L., Simplicity **1**, G.G.G. vol. **36**, P. 11-12 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[23] Ayme J.-L., Two parallel, AoPS du 03/05/2018 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1637677_two_parallels



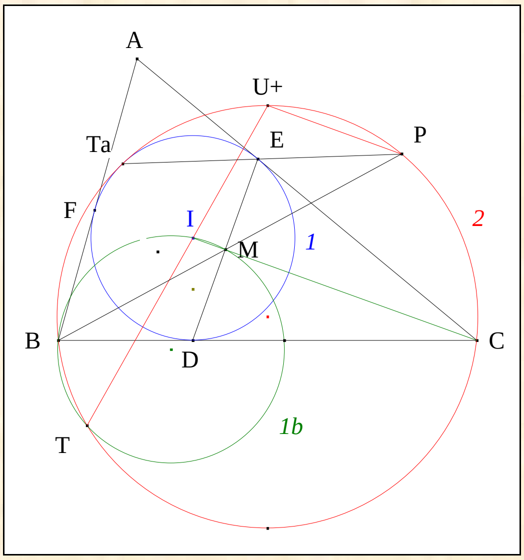
- Notons U- le second Ta-perpoint du triangle TaBC
  et M le milieu de [DE].

- D'après Thalès de Milet "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (U+P) ⊥ (PU-).

- D'après Appendice **1**, (PU-) ⊥ (IC) :
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (U+P) // (IC).

- **Conclusion :** (U+P) est parallèle à (IC).

4. Une généralisation de la droite de Lauvernay



- Notons P le second point d'intersection de (TaE) avec *2*.

- **Scolie :** (PU+) // (MI). [24]

- D'après Appendice **2**, B, M et P sont alignés.

---

[24] Ayme J.-L., A surprising conjecture, AoPS du 03/03/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=467493

- **Conclusion :** les cercles *2* et *1b*, les points de base T et B, la monienne (PBM), les parallèles (PU+) et (MI), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, U+, T et I sont alignés.

PROBLÈME 5 [25]

QUATRE MILIEUX COCYCLIQUES

proposed

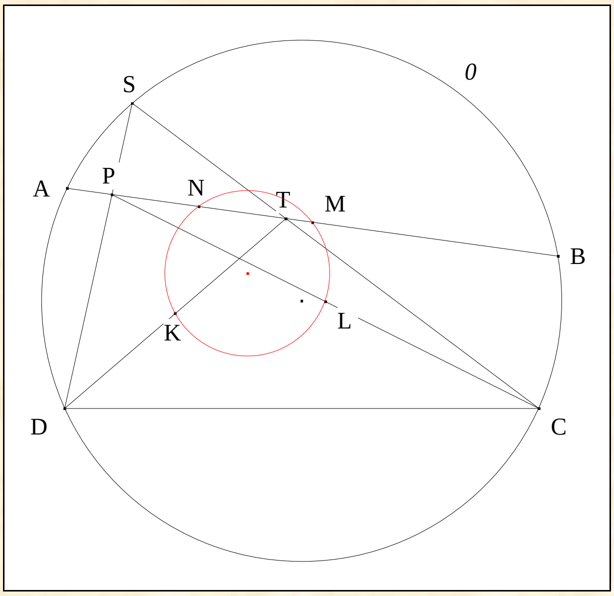
by

Thanos Kalogerakis

L'esquisse invisible d'un papillon
annonce
une évolution ineffable mais réelle…

VISION

Figure :



Traits : *0* un cercle,
[AB], [CD] deux cordes de *0*,
S un point de *0*,
P, T les points d'intersection de [AB] resp. avec [SD], [SC],
et K, L, M, N les milieux resp. de [DT], [CP], [AB], [PT].

Donné : K, L, M et N sont cocycliques.

---

[25] Kalogerakis T., **2194** A beatiful idea, inspired from an old problem (12/08/2018) ;
https://www.facebook.com/groups/parmenides52/permalink/1828227767290921/
Four concyclic points, AoPS du 05/09/2018 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1702891_four_concyclic_points

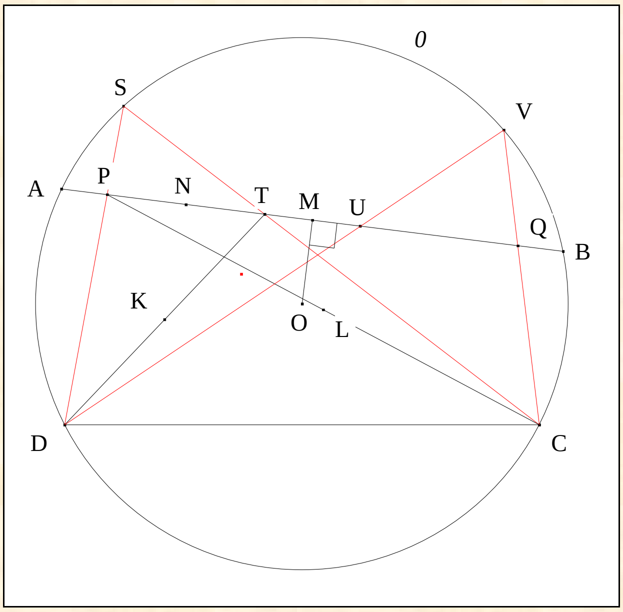
Commentaire : sentir la présence d'un papillon naissant …

VISUALISATION

LE PAPILLON

DE

JOHN STURGEON MACKAY [26]



- Notons U le symétrique de T par rapport à M,
  V le second point d'intersection de (DU) avec *0*
  et Q le point d'intersection de (CV) et (AB).

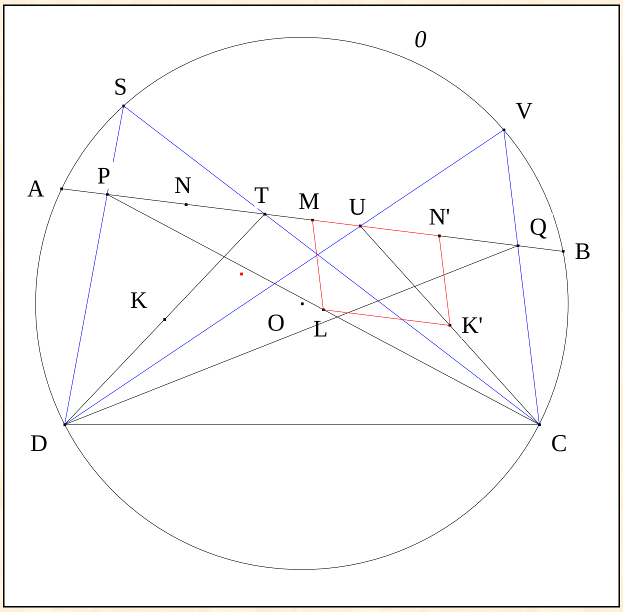
- **Terminologie :** le quadrilatère cyclique croisé DSCV est "un papillon de Mackay".

- **Conclusion partielle :** M est le milieu de [PQ]. [27]

[26] Mackay J. S., *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* **III** (1884-1885) 38
Ayme J.-L., A new metamorphosis of the Butterfly Problem, G.G.G. vol. **7**, p. 29-32 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[27] Mackay J. S., *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* **III** (1884-1885) 38
Ayme J.-L., A new metamorphosis of the Butterfly Problem, G.G.G. vol. **7**, p. 29-32 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

DEUX PARALLÉLOGRAMMES



- Notons K', N' les milieux resp. de [CU], [QU].

- D'après Thalès de Milet "La droite des milieux"
  appliqué au triangle PCU, **(1)** (LK') // (PU)

  (2) 2.LK' = PU.

- Une chasse segmentaire :

  * par décomposition : PU = PM + MU

  * par symétrie par rapport à M, PM = QM

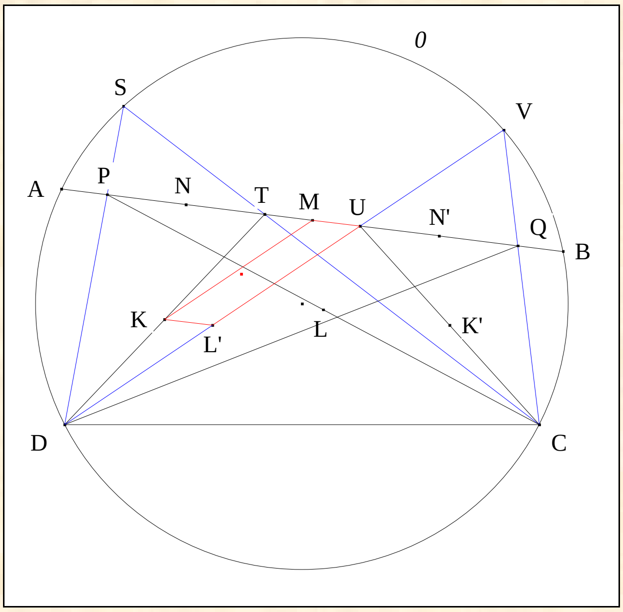
  * par substitution, PU = MQ + MU

  * par réduction, PU = 2.MN'.

- Le quadrilatère MN'K'L ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme
  en conséquence, (ML) // (N'K').

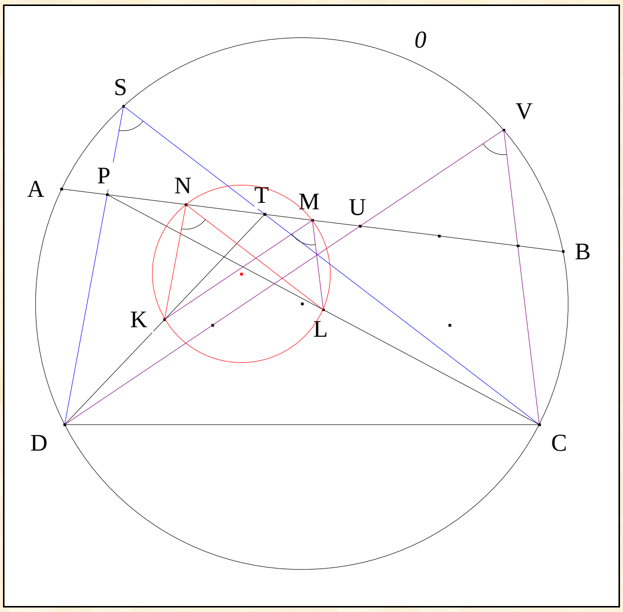
- D'après Thalès de Milet "La droite des milieux"
  appliqué au triangle QUC, (N'K') // (QC) i.e. (VC).

- **Conclusion partielle :** par transitivité du //, (ML) // (VC).



- Notons L' le milieu de [DU],
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (MK) // (VD).

UNE CHASSE ANGULAIRE



- D'après Thalès de Milet "La droite des milieux"
  appliqué au **(1)** triangle PTD, (NK) // (PD) i.e. (SD)

  (2) triangle TPC, (NL) // (TC) i.e. (SC).
- Une chasse angulaire :

  * par "Angles à côtés parallèles", <KNL = <DSC

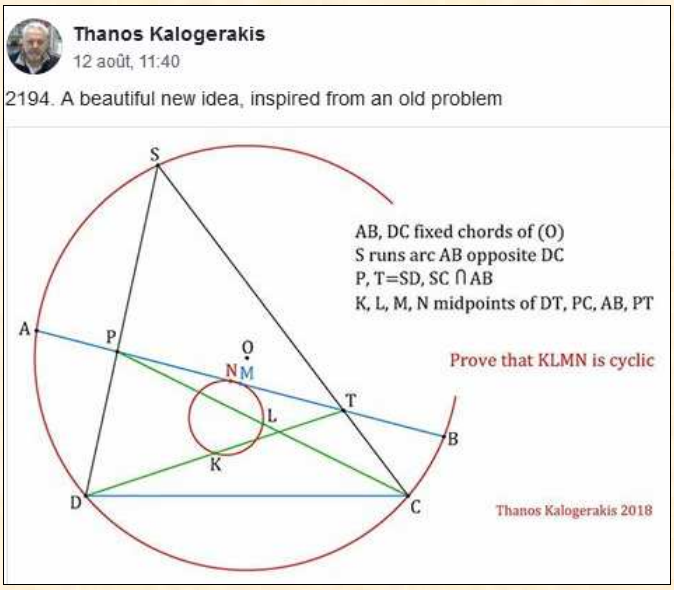
  * par "Angles inscrits", <DSC = <DVC

* par "Angles à côtés parallèles", <DVC = <KML

* par transitivité de =, <KNL = <KML.

- **Conclusion :** K, L, M et N sont cocycliques.

Archive



PROBLÈME 6 [28]

TROIS POINTS ALIGNÉS

proposed

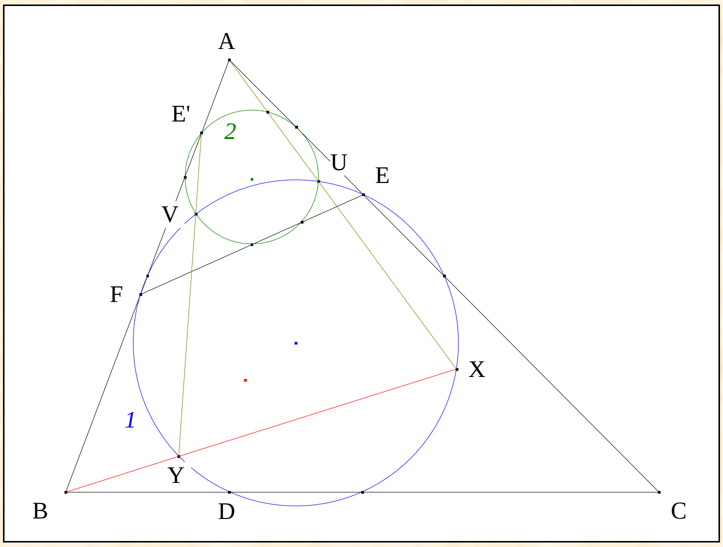
by

Jean-Louis Ayme

C'est dans l'absence
que nous apprenons
la valeur de la présence.

VISION

Figure :



Traits :		ABC	un triangle tel que AB < AC,
		DEF	le triangle orthique de ABC,
		1, *2*	les cercles d'Euler resp. des triangles ABC, AEF,
		E'	le pied de la perpendiculaire à (AB) issue de E,
		U, V	les points d'intersection de *1* et *2* comme indiqué sur la figure
	et	X, Y	les seconds points d'intersection resp. de (AU), (E'V) avec *1*.

Donné : Y, X et B sont alignés.

---

[28] Ayme J.-L., Three collinear points, AoPS du 19/08/2018 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1694084_three_collinear_points

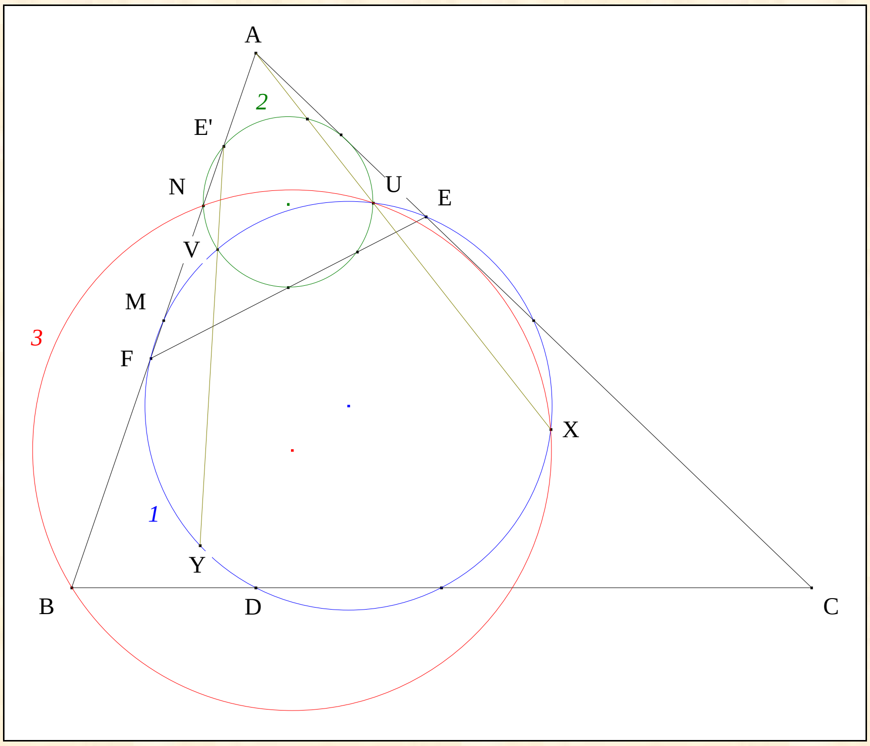
Commentaire : le cercle auxiliaire.

VISUALISATION

LE A-CERCLE

DE

ANTONIO GUTIERREZ [29].



- Notons M, N les milieux de [AB], [AF].
- **Scolie :** M, N sont resp. sur *1*, *2*.
- D'après Jacob Steiner "Puissance d'un point relativement à un cercle",

*	appliqué à A et à *1*,	AU.AX	= AF.AM
*	par "La technique du **1**",	AF.AM	= (1/2).AF . 2.AM
*	par hypothèse,	(1/2).AF . 2.AM	= AN.AB
*	par transitivité de =,	AU.AX	= AN.AB.

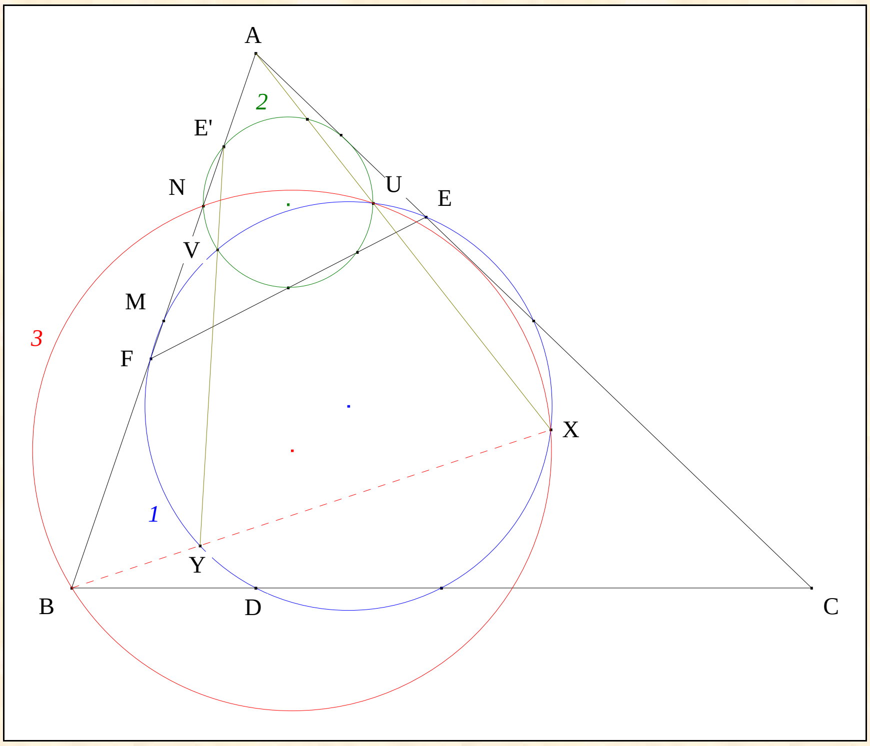
- **Conclusion partielle :** d'après Feuerbach-Steiner, U, X, B et N sont cocycliques.
- Notons *3* ce cercle.

[29] Gutierrez A., Problem **1360**, *Go Geometry* ; https://gogeometry.blogspot.com/2018/07/geometry-problem-1360-triangle-nine.html

LE THÉORÊME DU PIVOT

DE

AUGUSTE MIQUEL [30]



- **Conclusion :** d'après Auguste Miquel "Le théorème des trois cercles concourants" appliqué au triangle YE'B et aux cercles *1*, *2* et *3* concourants en U, Y, X et B sont alignés.

[30] Miquel Aug., Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. **1**, **3** (Oct. 1838) 485-487
Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. **12**, p. 4-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

PROBLÈME 7 [31]

TROIS DROITES CONCOURANTES

proposed

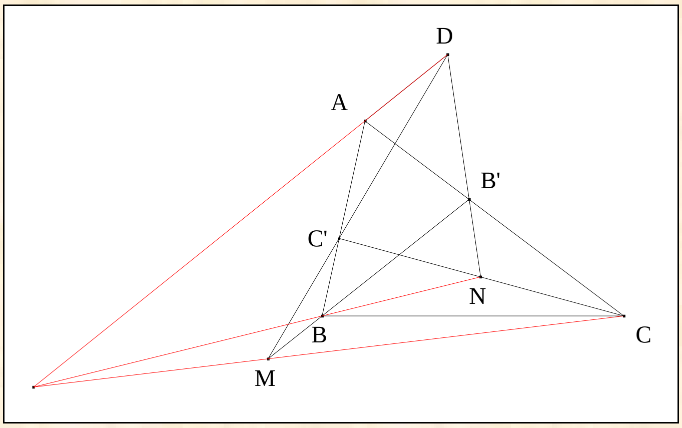
by

Virgil Nicula

Une voie de foudre
annonçant
une voie directissime.

VISION

Figure :



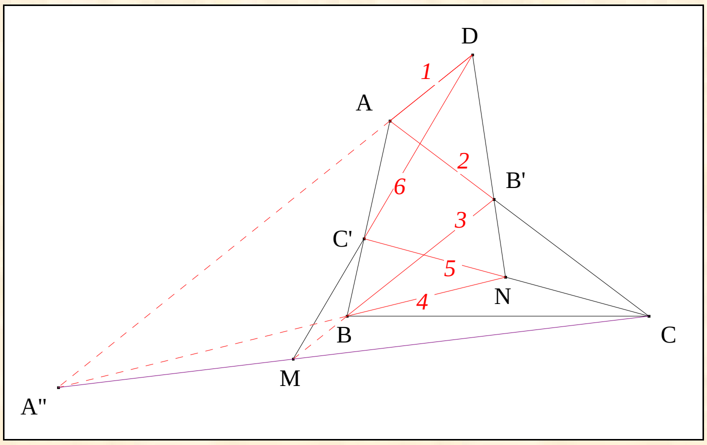
Traits :	ABC	un triangle,
	B', C'	deux points resp. de (AC), (AB),
	D	un point
	M, N	les points d'intersection de (DC') et (BB'), (DB') et (CC'),
et	A"	le point d'intersection de (BN) et (CM).

Donné : (AD), (BN) et (CM) sont concourantes.

Commentaire : une application directe.

[31] Nicula V., Concurrence, AoPS du 05/10/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=436025

VISUALISATION



- Notons A" le point d'intersection de (AD) et (BN).

- D'après Pappus d'Alexandrie "La proposition **139**" [32]
  (A"CM) est la pappusienne de l'hexagone sectoriel DAB'BNC'D de frontières (DB'N) et (AC'B).

- **Conclusion :** (AD), (BN) et (CM) sont concourantes.

[32] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6**, p. 10-15 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

PROBLÈME 8 [33]

UN PARALLÉLOGRAMME

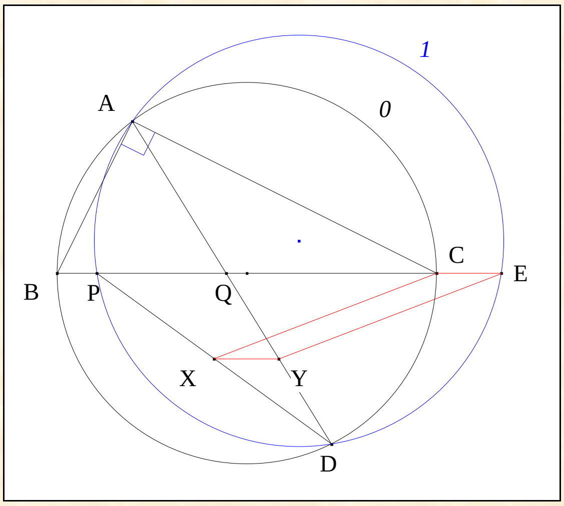
proposed

by

Jean-Louis Ayme

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle A-rectangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
P le point de [BC] tel que CP = CA,
Q le point de [BC] tel que BQ = BA,
D le second point d'intersection de (AQ) avec *0*,
1 le cercle circonscrit au triangle APD,
E le second point d'intersection de (BC) avec *1*
et X, Y les milieux resp. de [DP], [DQ].

Donné : le quadrilatère XYEC est un parallélogramme.

Commentaire : parfois une preuve métrique s'impose...

---

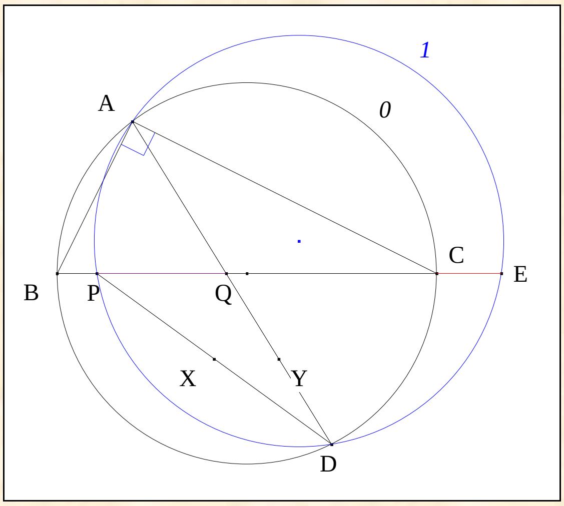
33 Ayme J.-L., A parallelogram, AoPS du 21/08/2018 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1695100_a_parallelogram

VISUALISATION

LE LEMME D'HIROSHI HARUKI

OU

LE THÉOREME DE MICHEL CHASLES



- Notons BC = a , AC = b , AB = c.
- Une évaluation : BP = a – c CQ = a – b PQ = a - (a - c) - (a - b) = b + c - a.
- D'après "Le lemme d'Haruki" [34], BP.CQ = PQ.CE

* par substitution, (a - c).(a - b) = (b + c -a).CE
* par développement, a² - ab – ac + bc = (b + c - a).CE
* par multiplication par **2**, 2a² - 2ab - 2ac + 2bc = 2(b + c - a).CE

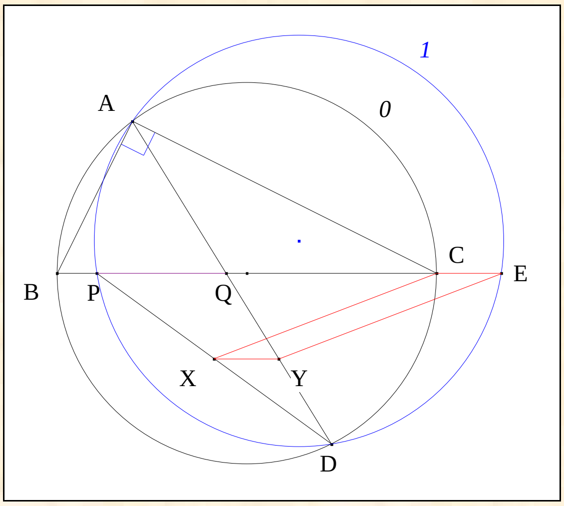
* d'après Pythagore de Samos, a² = b² + c²
* par substitution, a² + b² + c² - 2ab - 2ac + 2bc = 2(b + c - a).CE
* par "Identités remarquables" (b + c - a)² = 2(b + c - a).CE
* par simplification, b + c - a = 2.CE
* par substitution, PQ = 2.CE.

[34] Ayme J.-L., Quickies **5**, G.G.G. vol. **15**, p. 20-23 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

LA DROITE DES MILIEUX

DE

THALES DE MILET



- D'après Thalès de Milet "La droite des milieux" appliqué au triangle DPQ, (XY) // (PQ) et 2.XY = PQ ;

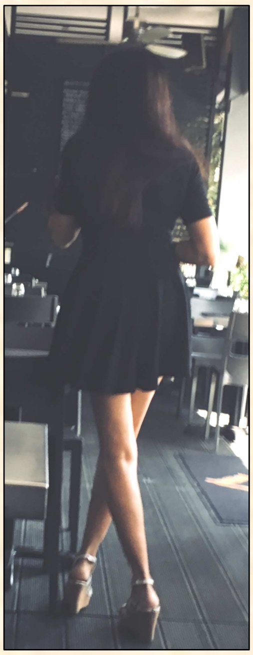
  par transitivité de = et simplification par 2, XY = CE.

- **Conclusion :** le quadrilatère XYEC ayant deux côtés parallèles et égaux, est un parallélogramme.

Archive :

Thus Haruki's Lemma is essentially the same as Chasles' Theorem: *If A, B, C, D are four fixed points of a conic and if P is a variable point of the conic, then the cross ratio $P(ABCD)$ is independent of the position of P on the conic.* (See [**37**].)[35]

[35] Bankoff L., The Metamorphosis of the Butterfly Problem, *Mathematics Magazine* vol. **60**, **4** (October 1987) 200



PROBLÈME 9 [36]

QUATRE POINTS COCYCLIQUES

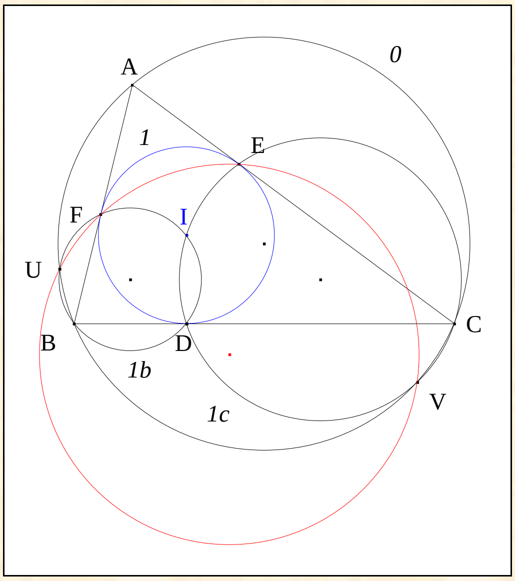
proposed

by

Jean-Louis Ayme

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0, *1* les cercles circonscrit, inscrit à ABC,
I le centre de *1*,
DEF le triangle de contact de ABC,
1b, *1c* les cercles de diamètre s resp. [BI], [CI],
et U, V les seconds points d'intersection de *1b*, *1c* avec *0*.

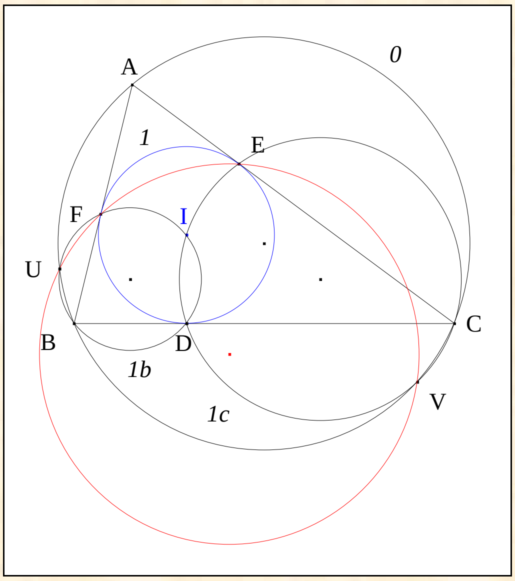
Donné : U, V, E et F sont cocycliques.

---

[36] Ayme J.-L., four concyclics points, AoPS du 22/08/2018 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1695709_four_concyclic_points

Commentaire : une application directe.

VISUALISATION



- **Conclusion :** d'après Henri Léon Lebesgue "Le théorème des cinq cercles" [37] appliqué à la droite ((BC) et aux cercles *1b*, *1*, *1c* et *0*, U, V, E et F sont cocycliques.

---

[37] Lebesgue H. L., Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1916) ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0
Ayme J.-L., Du théorème de Reim…, G.G.G. vol. **2**, p. 9-11 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

PROBLÈME 10 [38]

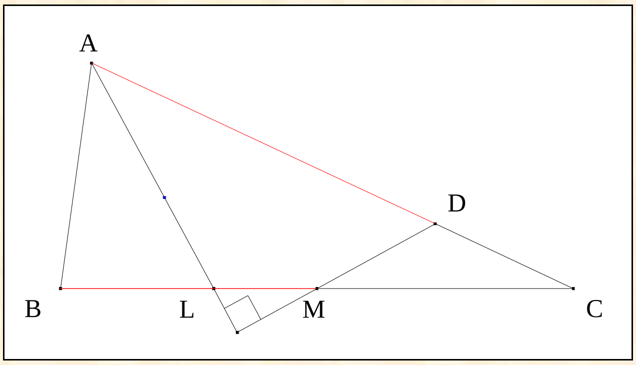
MOP 2005 Homework - Red Group #**17**

UNE RELATION

Une co-naissance suivie d'un envol

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle tel que AB < AC,
2p le périmètre de ABC,
L le pied de la A-bissectrice intérieure de ABC,
M le milieu de [BC]
et D le point d'intersection de la perpendiculaire à (AL) issue de M avec (AC).

Donné : AD + BM = p.

Commentaire :

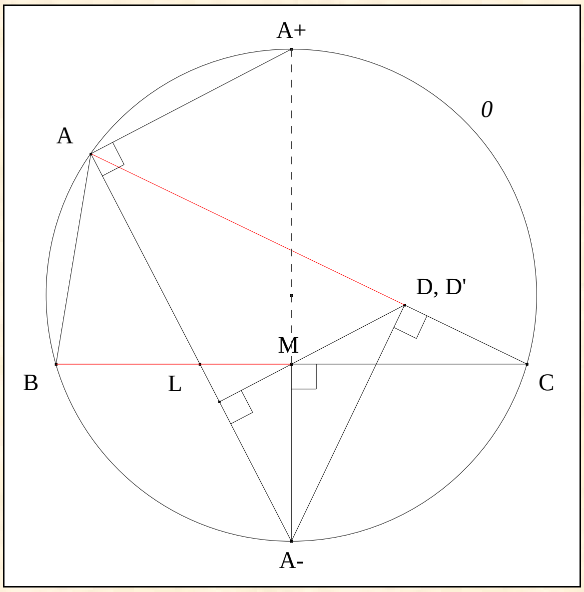
VISUALISATION

FRANZ HEINEN

OU

[38] Equals to Half the perimeter of a triangle, AoPS du 06/05/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=588395

LA DIRECTION D'UNE SIMSONNIENNE



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  A+, A- les premier, second A-perpoints de ABC
  et D' le pied de la perpendiculaire à (AC) issue de A-.

- Par définition, (D'ML) est la droite de Simson de pôle A- relativement à ABC.

- D'après Heinen "Direction d'une droite de Simson-Wallace" [39],
  (AA+) est une représentante de la direction de la droite de Simson de pôle A- relativement à ABC ;
  en conséquence, (D'ML) // (AA+).

- Nous avons : (AA+) ⊥ (ALA-) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (D'ML) ⊥ (ALA-) ;
  en conséquence, D' et D sont confondus.

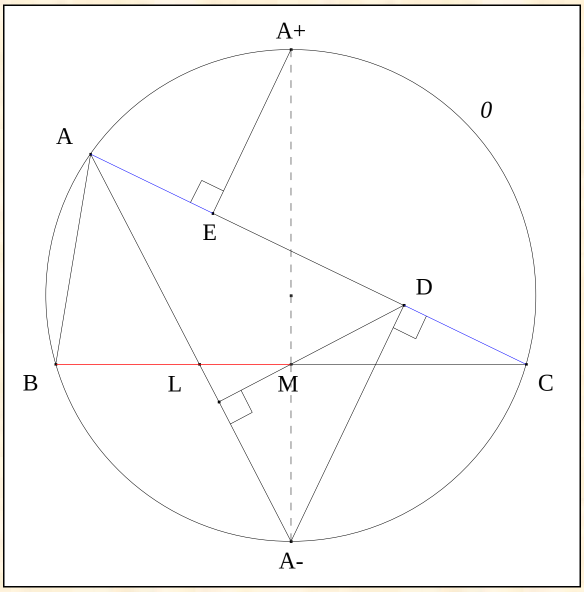
---

39 Ayme J.-L., Othopôle…, G.G.G. vol. **8**, p. 10-11 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

ARCHIMÊDE DE SYRACUSE

OU

LA CORDE BRISÉE



- Notons E le pied de la perpendiculaire à (AC) issue de A+.
- D'après Archimède "Le théorème de la corde brisée" [40], AB + AE = EC.
- Une chasse segmentaire :

  * D étant l'isotome de E relativement à [AC], EC = AD
  * par substitution, AB + CD = AD
  * par difference, AB + (AC - AD) = AD
  * en conséquence, AB + AC = 2.AD

  * par hypothèse, BC = 2.MB
  * par addition membre à membre et par hypothèse, AB + AC + BC = 2AD + 2MB.

- **Conclusion :** par substitution et simplification, AD + BM = p.

[40] Ayme J.-L., Le cercle de Spieker, G.G.G. vol. **13**, p. 32-34 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A	
aligné	collinear
annexe	annex
axiome	axiom
appendice	appendix
adjoint	associate
a propos	by the way btw
acutangle	acute angle
axiome	axiom
B	
bissectrice	bisector
bande	strip
C	
centre	incenter
centre du cercle circonscrit	circumcenter
cercle circonscrit	circumcircle
cévienne	cevian
colinéaire	collinear
concourance	concurrence
coincide	coincide
confondu	coincident
côté	side
par conséquence	consequently
commentaire	comment
D	
d'après	according to
donc	therefore
droite	line
d'où	hence
distinct de	different from
E	
extérieur	external
F	
figure	figure
H	
hauteur	altitude
hypothèse	hypothesis
I	
intérieur	internal
identique	identical
i.e.	namely
incidence	incidence
L	
lemme	lemma
lisibilité	legibility
M	
mediane	median
médiatrice	perpendicular bissector
milieu	midpoint

N	
Notons	name
nécessaire	necessary
note historique	historic note
O	
orthocentre	orthocenter
ou encore	otherwise
P	
parallèle	parallel
parallèles entre elles	parallel to each other
parallélogramme	parallelogram
pédal	pedal
perpendiculaire	perpendicular
pied	foot
point de vue	point of view
postulat	postulate
point	point
pour tout	for any
Q	
quadrilatère	quadrilateral
R	
remerciements	thanks
reconnaissance	acknowledgement
respectivement	respectively
rapport	ratio
répertorier	to index
S	
semblable	similar
sens	clockwise in this
order	
segment	segment
Sommaire	summary
symédiane	symmedian
suffisante	sufficient
sommet (s)	vertex (vertice)
T	
trapèze	trapezium
tel que	such as
théorème	theorem
triangle	triangle
triangle de contact	contact triangle
triangle rectangle	right-angle triangle