THE SUPPA's CLOVER CONJECTURE

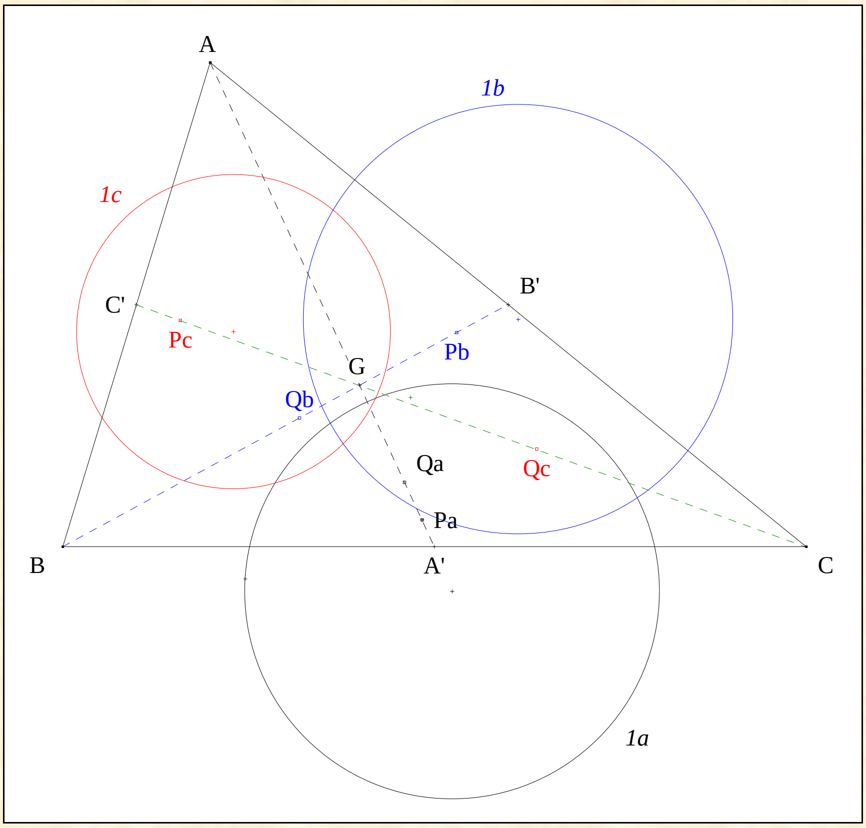
O

IL TEOREMA DEL TRIFOGLIO

VAN LAMOEN * SUPPA * AYME

†

Jean - Louis AYME [1]



Sunto. L'autore presenta una risoluzione sintetica de una congettura del geometra italiano Ercole Suppa che appare come una generalizzazione del cerchio di van Lamoen.
Le figure sono tutte in posizione generale e tutti i teoremi citati possono dimostrati sinteticamente.

Ringraziamenti. Essi vanno al Professor Ercole Suppa di Teramo (Italie) che ha revisionato e corretto questo articolo nonchè par la sua traduzione in italiano. La sua passione per la Geometria del Triangolo merita di essere notata dai Geometri comtemporanei.

---

1 St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/11/2016 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Abstract. The author presents a synthetically resolution of the Italian Ercole Suppa's conjecture which appears as a generalization of the van Lamoen's circle.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

Aknowledgment. They go to the Professor Ercole Suppa of Teramo (Italy) who has reviewed and corrected this article as well as for his translation into Italian. His passion for the Geometry of the Triangle deserves to be noticed by the contemporary Geometers.

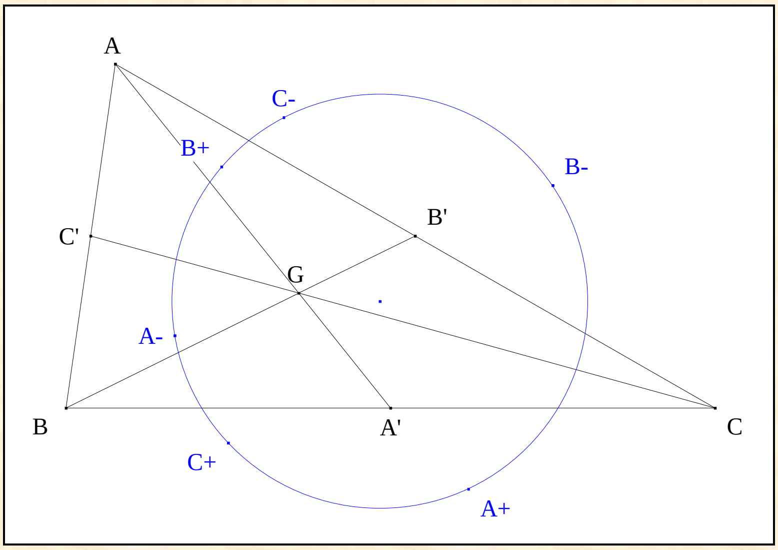
Sommrio

A. FLOOR MICHEL van LAMOEN

1. Il cerchio di van Lamoen

VISIONE

Figura :



Ipotesi :		ABC	un triangolo,
		G	il baricentro di ABC,
		A'B'C'	il triangolo mediale di ABC
	et	A+, A-, B+, B-, C+, C-	i centri dei cerchi circonscritti risp. ai triangoli GCB', GC'B, GAC', GA'C, GBA', GB'A.

Tesi : A+, A-, B+, B-, C+, C- sono conciclici. [2]

Commenti : una dimostrazione sintetica può essere vista sul sito dell'autore [3].

Osservazioni :

(1) la figura di van Lamoen è conosciuta, in inglese, come "The Cevasix configuration" ; questo nome è stato dato da Clark Kimberling.

(2) Il cerchio passante per A+, A-, B+, B-, C+, C-, è "il cerchio di van Lamoen di ABC"

(3) il centro di questo cerchio è catalogato come X_{1153} in ETC [4].

---

2 Lamoen (van) F. M., Problème **10830**, *Americam Mathematical Monthly* **107** (2000) 863 ; soluzione degli editori di *Monthly* **109**, 4 (2002) 396-397

3 Ayme J.-L., Le cercle de van Lamoen, G.G.G. vol. **2** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

4 Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

2. Una breve biografia da Floor van Lamoen

[5]

Computer exploration is nice. Proving is even nicer [6]

Floor Michel van Lamoen è nato il 15 luglio 1966 a Leiden (Paesi-Bassi).
E' cresciuto a Leeuwarden, poi ha lasciato il Ginnasio di questa città nel1984 per andare a studiare scienze e didattica all'università di Amsterdam. Nell'agosto del 1995, insegna informatica al St. Willibrord college di Goes. Fu in quella città che incontò Lyanne, la sua futura moglie. Si è sposato il 16 maggio 1997 ed è diventato padre di una figlia, Nuriye, il 14 febbraio 2000.
Come matematico, è anche redattore capo di *Forum Geometricorum* [7], una rivista internationale dedicata alla geometria euclidea classica.
Nell'aprile 2009, la casa editrice *Epsilon* pubblica il suo libro sui cerchi di Archimede. Dal 11 marzo 2010, è anche presidente di una'associazione nel comune di Goes.

Sportivo di alto livello, è uno specialista dei 5000m e dei 20000m. La sua passione è stata interrotta nel 2004 a causa di un'infortunio cronico al bicipite femorale.

Nota storica :

Floor van Lamoen di Goes (Paesi-Bassi) ha trovato questo risultato nel 2000 con l'aiuto del computer.
Le numerose soluzioni analitiche con numeri reali e complessi, con lunghi calcoli, condotti con *Maple* o con *Mathematica*, non sono state presentate dai redattori dell'*American Mathematical Montly* ; la redazione della rivista propose nel 2002, una propria solutione parzialmente basata su quella comunicata da van Lamoen. Osserviamo che la parte principale della dimostrazione si basa sull'esagono di Catalan.
La soluzione data da K. Y. Li nel 2001 nella rivista *Mathematical Excalibur* [8] di Hong-Kong, è basata sulle aree e sui rapporti di Talete.
Darij Grinberg [9] nel suo articolo intitolato "The Lamoen circle" afferma che

Der Beweis des Satzes von Lamoen ist ziemlich schwierig.

La sua dimostrazione trigonometrica leggermente diversa da quella presentata in *Excalibur*, utilizza la nozione di angolo e la legge del coseno. Nel 2003, in un messaggio *Hyacinthos* [10], egli afferma di aver riscoperto questo risultato, senza saperlo, nell'agosto del 2002, mediante di un programma di Geometria dinamica.

---

5 http://home.wxs.nl/~lamoen/

6 Floor's apothegm. Antreas Hatzipolakis ajoute : synthetic proving is the ultimate…

7 http://forumgeom.fau.edu/

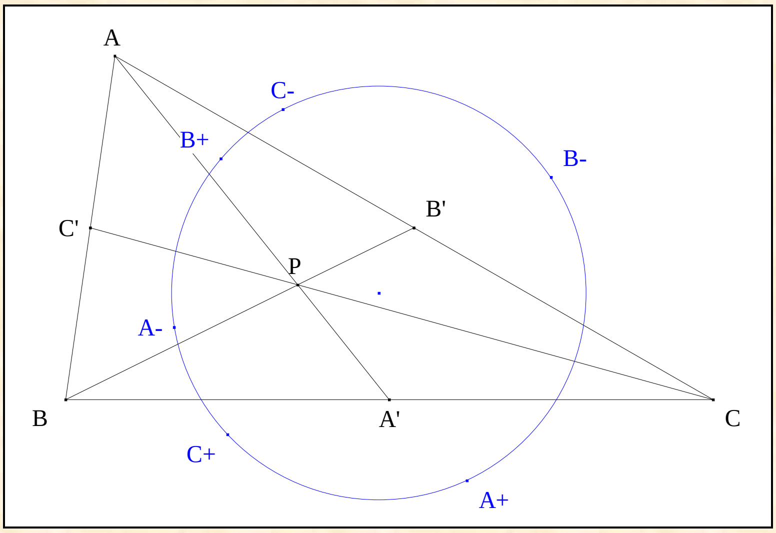
8 Li K. Y., Conclyclic problems, *Mathematical Excalibur* **6** (2001) Number 1, 1-2 ; disponibile in http://www.math.ust.hk/mathematical_excalibur/

9 Grinberg D., The Lamoen circle ; http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/

10 Grinberg D., A proof of the Lamoen Circle Theorem, Message *Hyacinthos* # **6557** du 17/02/2003 ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/6557

Nel 2005, Deoclecio Gouveia Mota Jr.[11] ha proposto una dimostrazione basata sulle trasformazioni. Nella risposta, Nikolaos Dergiades [12] precisa che questa dimostrazione permette di localizzare il centro del cerchio di van Lamoen.

Il teorema inverso è stato formulato per la prima volta nel 2003 da Alexei Myakishev e da Peter Y. Woo[13]. La seconda formulazione, riportata in basso, è stata presentata nel 2004 da Minh Ha Nguyen[14] :



Ipotesi :		ABC	un triangolo,
		P	un punto,
		A'B'C'	il triangolo P-ceviano di ABC
	e	A+, A-, B+, B-, C+, C-	i centri dei cerchi circonscritti risp.
			ai triangoli PCB', PC'B, PAC', PA'C, PBA', PB'A.

Tesi : P è il baricentro o l'ortocentro di ABC
se, e solo se,
A+, A-, B+, B-, C+, C- sono conciclici.

[11] Gouveia Mota Jr. D., Lamoen Circle – Synthetic proof, Message *Hyacinthos* # **11095** du 14/03/2005 ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/11095

[12] Dergiades N., Lamoen Circle – Synthetic proof, Message *Hyacinthos* # **11097** du 14/03/2005 ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/11097

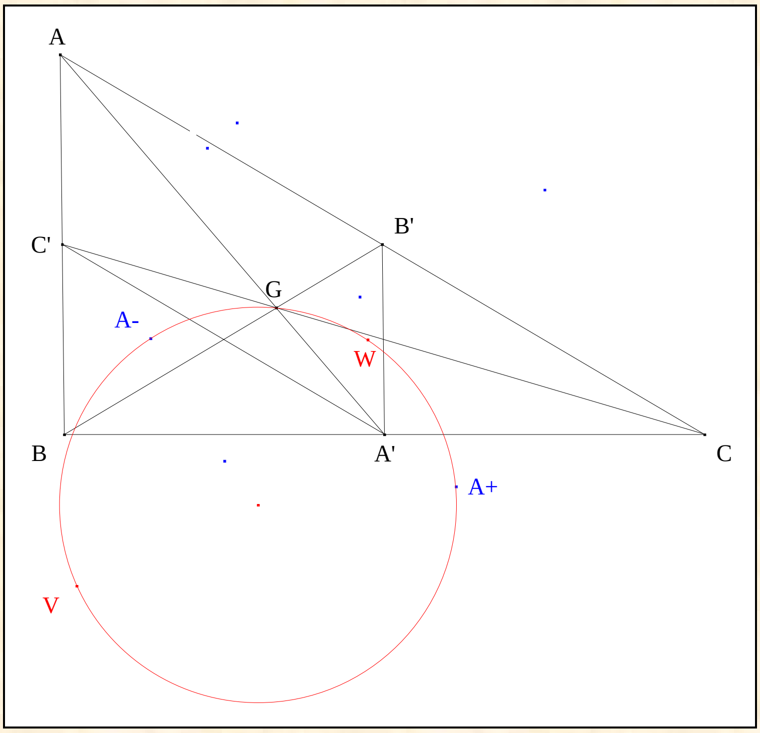
[13] Myakishev A., Woo P. Y., On the Circumcenters of Cevasix Configuration, *Forum Geometricorum* vol. **3** (2003) 57-63 ; http://forumgeom.fau.edu/

[14] Nguyen M. H., Another Proof of van Lamoen's Theorem and its converse, *Forum Geometricorum* vol. **5** (2005) 127-132 ; http://forumgeom.fau.edu/

3. Un'applicazione dell'autore

VISIONE

Figura :



Traits :		ABC	un triangolo,
		G	il baricentro di ABC,
		A'B'C'	il triangolo mediale di ABC,
	e	A+, A-, V, W	i centri dei cerchi circonscritti
			risp. ai triangoli GCB', GBC', GA'C', GB'A'.

Donné : A+, A-, V et W sono conciclici. [15]

Commentaire : una dimostrazione sintetica può essere vista sul sito dell'autore [16].
Questa dimostrazione ha ispirato il geometra italiano Ercole Suppa [17] di Teramo che ha intravisto una bella generalizzazione del cerchio di van Lamoen.

---

15 Geometry Proof, AoPS du 02/12/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1169266p5604260
Please prove this, AoPS du 23/08/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1294617_please_prove_this
Quatre points cocycliques, *Les-Mathematiques.net* ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1316177

16 Ayme J.-L., Cinq points cocycliques, G.G.G. vol. **29** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

17 Suppa E., Four concyclic centers ; http://www.esuppa.it/Articoli/Suppa_Four_concyclic_centers.pdf

B. PRIMA CONGETTURA DI SUPPA

RILASCIO

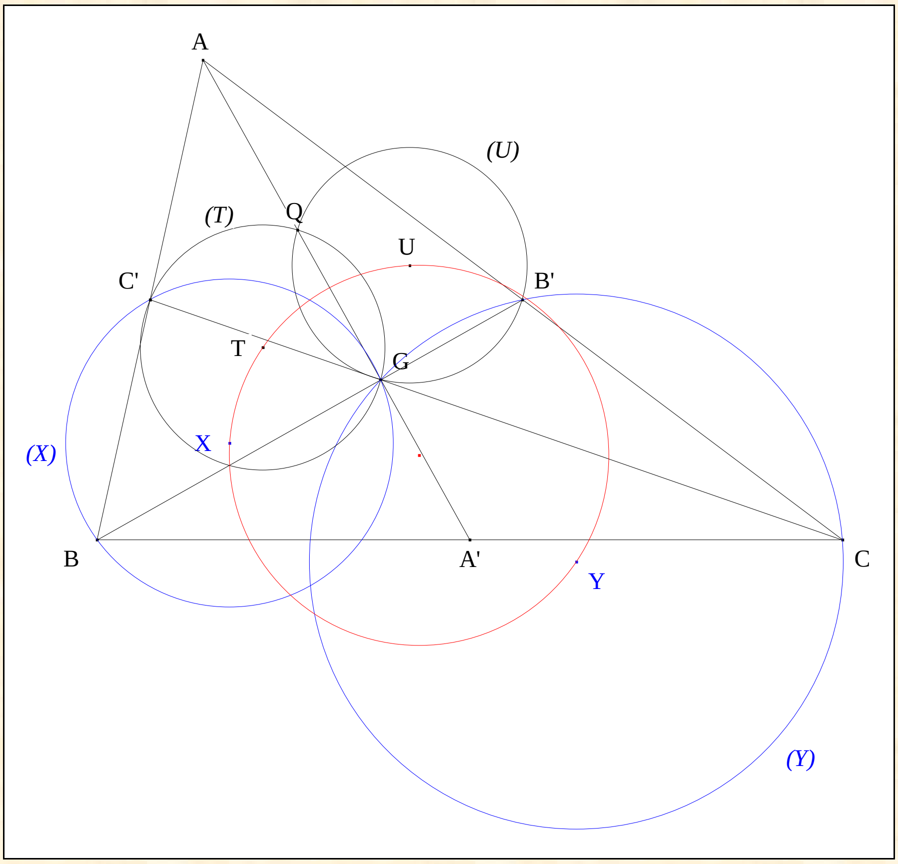
DEL

VINCOLO SU A

1. Lemma 1

VISIONE

Figura :

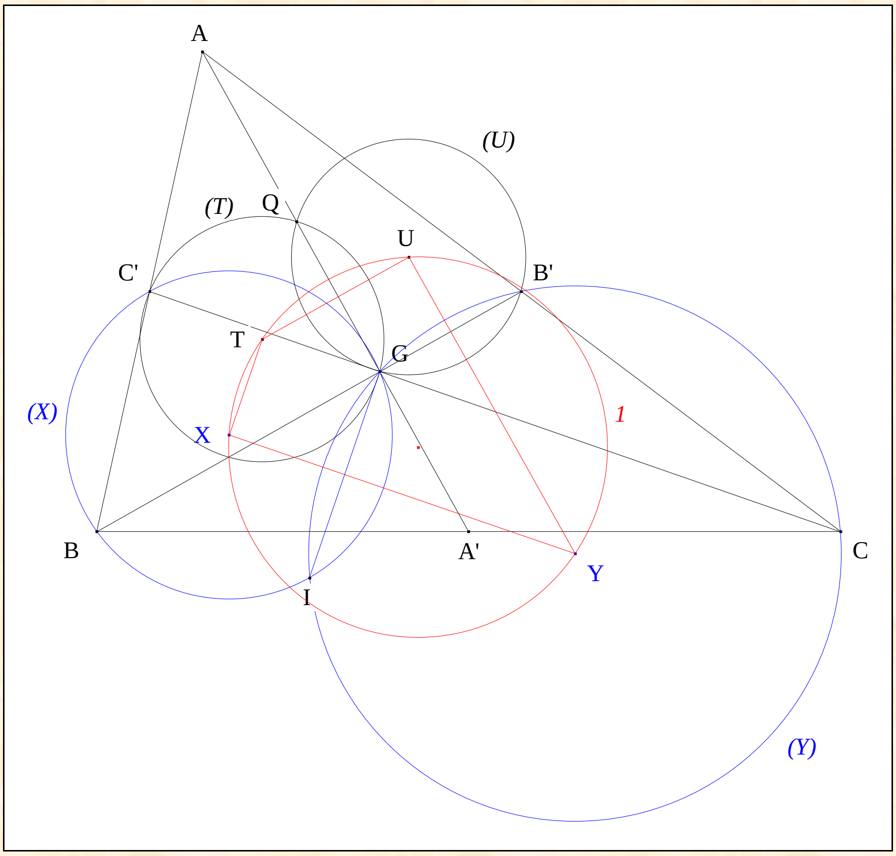


Ipotesi : ABC		un triangolo,
	G	il baricentro di ABC,
	A'B'C'	il triangolo mediale di ABC,
	Q	un punto di (AA')
e	(T), (U), (X), (Y)	i cerchi circonscritti risp. ai triangoli GQC', GQB', GBC', GCB'.

Tesi : T, U, X et Y sono conciclici. [18]

[18] Suppa E., comunicazione privata del 9/10/2016

VISUALIZZAZIONE



- Denotiamo I il secondo punto d'intersezione di (X) e (Y).
- Dall'autore (Cf. **D.** Appendice **2.**), (GI) èt la G-simmediana del triangolo GBC.
- Una caccia angolare modulo **Π** fornisce :

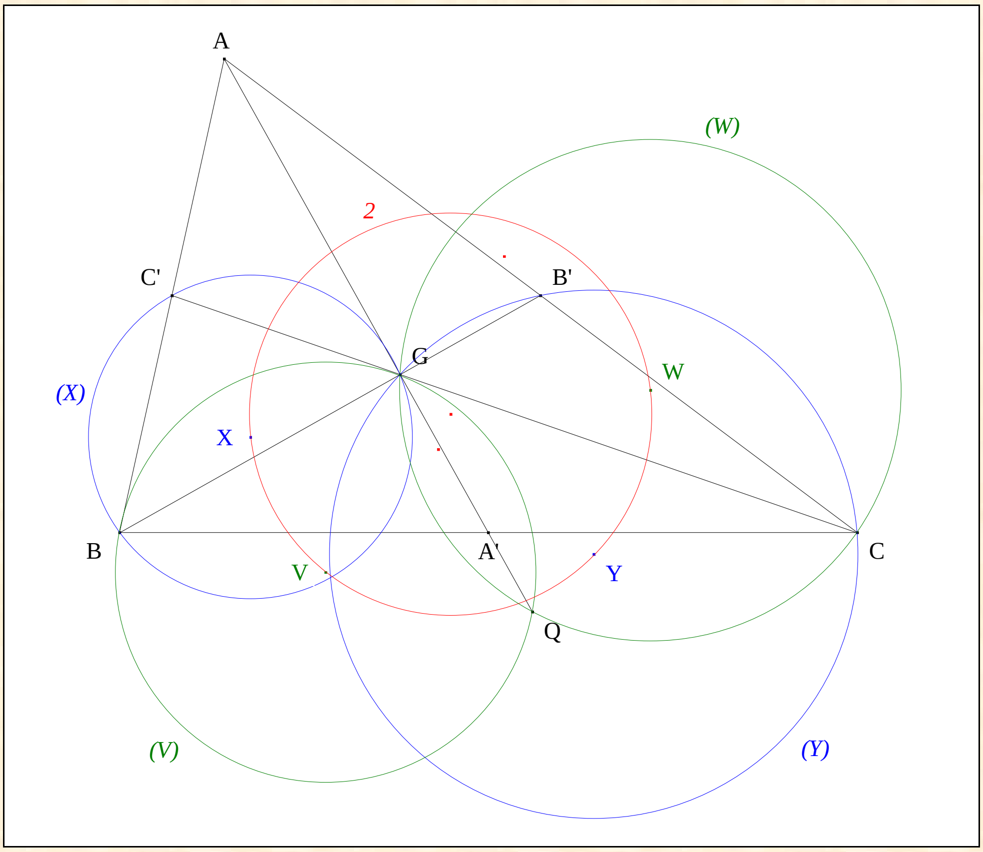
*	per "Angoli a lati perpendicolari'",	<XTU = <AGC'
*	per "Angoli opposti",	<AGC' = <A'GC
*	per isogonalità,	<A'GC = <BGI
*	per "Angoli a lati perpendicolari",	<BGI = <UYX
*	per transitività di =,	<XTU = <UYX.

- **Conclusione :** T, U, X e Y sono conciclici.
- Denotiamo *1* questo cerchio.

2. Lemma 2

VISIONE

Figura :



Ipotesi :	ABC	un triangolo,
	G	il baricentro di ABC,
	A'B'C'	il triangolo mediale di ABC,
	Q	un punto di (AA')
e	(X), (Y), (V), (W)	i cerchi circonscritti risp. ai triangoli GBC', GCB', GQB, GQC.

Tesi : X, Y, V e W sono conciclici. [19]

VISUALIZZAZIONE

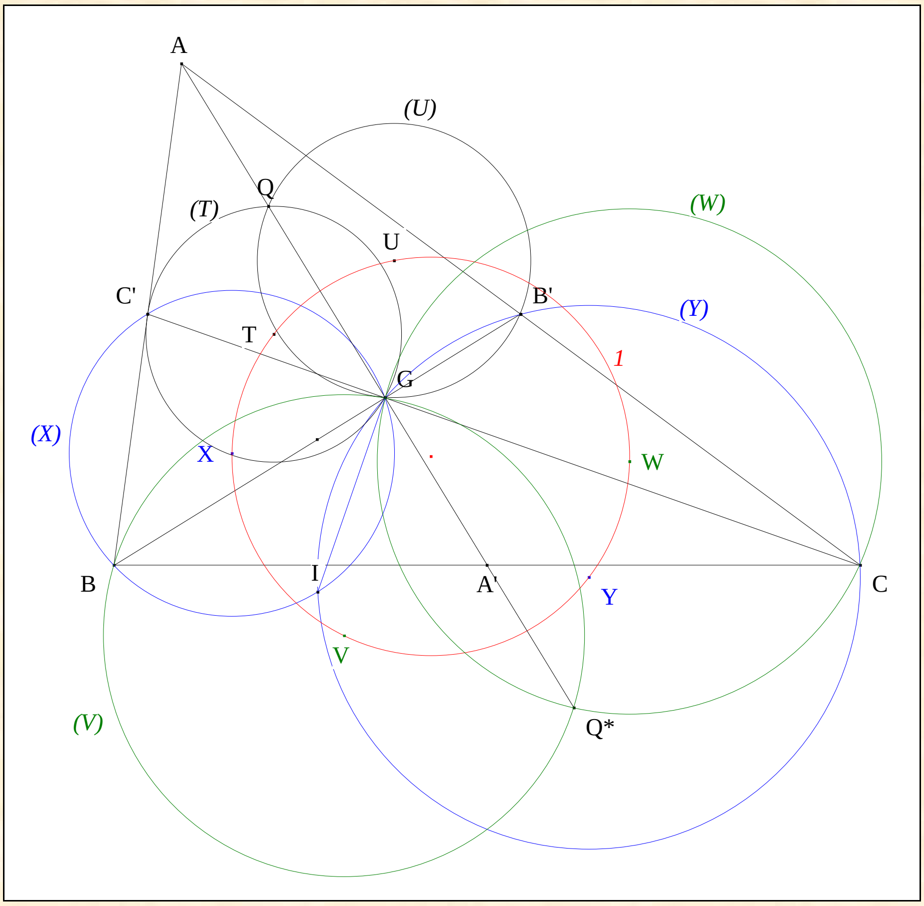
- Mutatis mutandis, si dimostra che X, Y, V e W sono conciclici
- Denotiamo *2* questo cerchio.

[19] Suppa E., comunicazione privata del 9/10/2016

3. La congettura di Suppa

VISIONE

Figura :

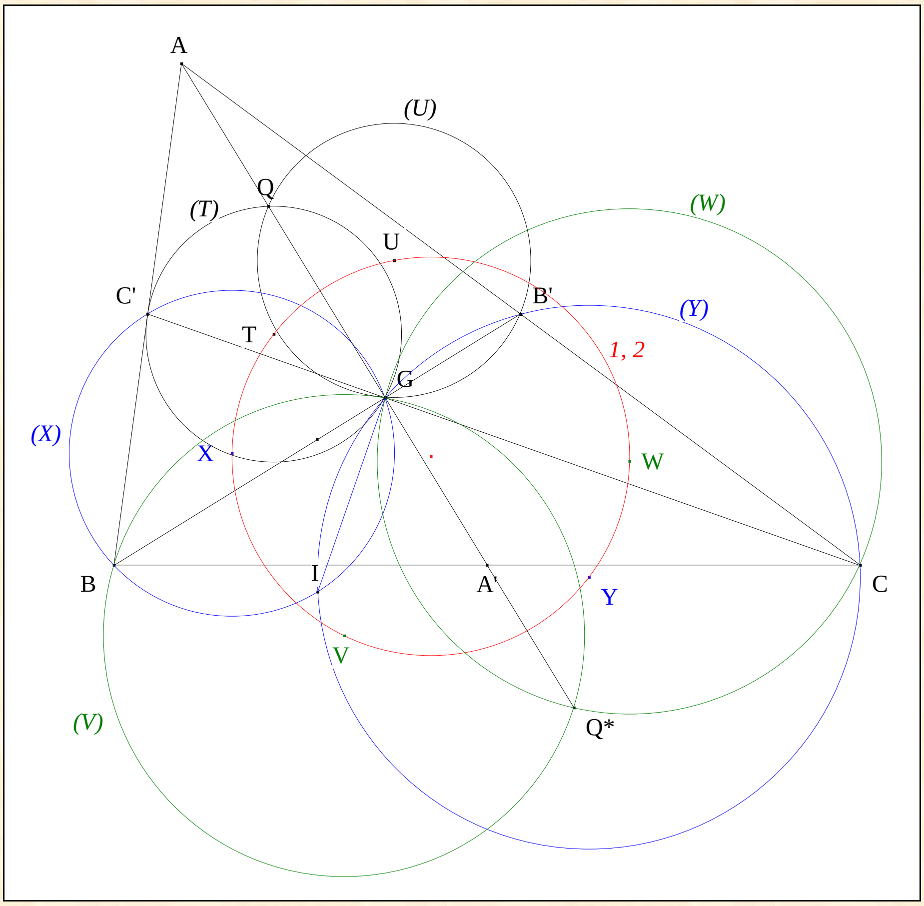


Ipotesi : alle ipotesi e notazioni precedenti, aggiungiamo,
Q* coniugato isotomico di A rispetto ad [A'Q]
e (V), (W) i cerchi circonscritti risp. ai triangoli GQ*B, GQ*C.

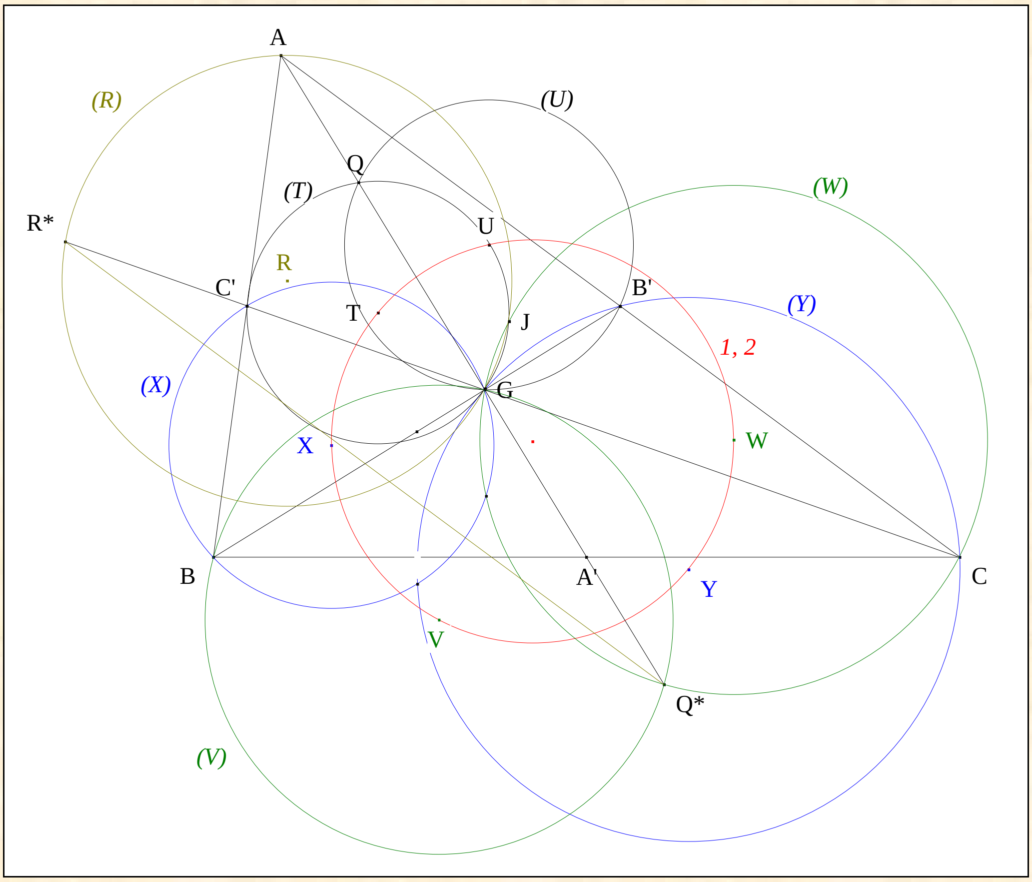
Donné : V e W giacciono su *1*.[20]

[20] Suppa E., comunicazione privata del 19/10/2016

VISUALISATION



- Da **B. 1**, X, Y, T e U sono conciclici su *1*.
- Da **B. 2**, X, Y, V e W sono conciclici su *2*.



- Denotiamo R* il punto d'intersezione della parallela ad (AC) condotta da Q* con (CC'),
  (R) il cerchio circonscritto al triangolo GR*A
  e J il secondo punto d'intersezione di (R) e (W).

- Dall'autore (Cf. **D.** Appendice **2.**), (GJ) é la G-simmediana del triangolo GAC.

- **Osservazioni :**
  (1) AQ = A'Q*
  (2) QQ* = AA'
  (3) (A'C') // (AC).

- Denotiamo $P_R(Q)$ la potenza di Q rispetto a (R).

- Una caccia di rapporti di potenze fornisce :

  * $P_R(Q) / P_W(Q) = (QG.QA) / (QG.QQ^*)$ = QA / QQ* = A'Q* / A'A

  * $P_R(C') / P_W(C') = (C'G.C'R^*) / (C'G.C'C)$ = C'R* / C'C

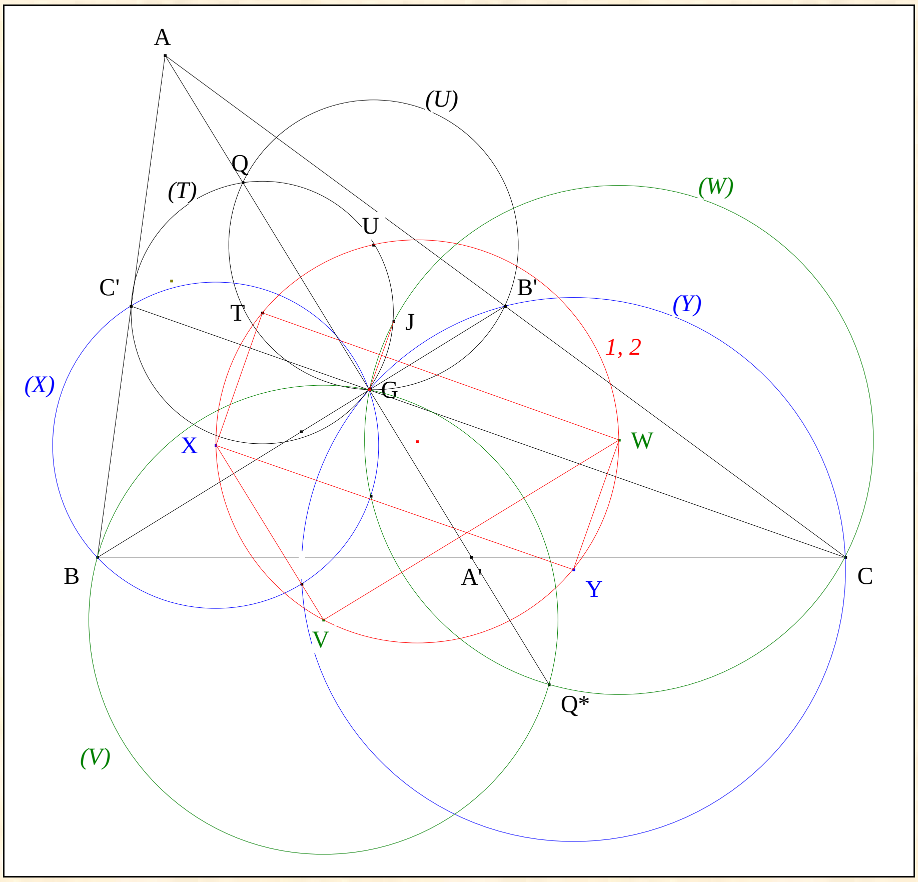
  * dal teorema di Talete , A'Q* / A'A = C'R* / C'C

  * di conseguenza, $P_R(Q) / P_W(Q) = P_R(C') / P_W(C')$. [21]

- **Conclusione parziale :** dato che (T) passa per G, (T) passa per J.

---

[21] Coolidge, J.L., *A Treatise on the Geometry of the Circle and the Sphère*, theorem **11**, p. 103, Cambridge, 1914
Altshiller-Court N., *College Geometry*, theorem **475,** p. 212-213, Barnes & Noble, Richmond, 1936



- Une caccia angolare modulo **Π** fornisce :

*	X, Y, V e W sono su *2*,	<WYX = <WVX
*	per "Angoli a lati perpendicolari'",	<WVX = <B'GA
*	per isogonalità,	<B'GA = <CGJ
*	per "Angoli a lati perpendicolari",	<CGJ = <TWY
*	per "Angoli a lati paralleli",	<TWY = <XTW
*	per transitività di =,	<WYX = <XTW

- **Conclusione parziale :** T giace su *2*.
- **Conclusione :** V e W giacciono su *1*.

Osservazione : *1* è una debole A-generalizzazione del cerchio di van Lamoen relativo ad ABC.

4. Una breve biografia di Ercole Suppa

Ercole Suppa è nato a Teramo (Italia) il 25 febbraio 1958. Si è laureato in Matematica nel 1981 presso l'Università dell'Aquila. Ha insegnato matematica applicata in un I.T.C. per programmatori. Attualmente insegna matematica e fisica al Liceo Scientifico "A.Einstein" di Teramo. Dal 1997 si è dedicato alla preparazione degli studenti partecipanti alle Olimpiadi della Matematica ed ha sviluppato insieme con sua moglie, anch'essa docente di matematica, un sito web dedicato alle gare matematiche[22].
Nel 2001 ha pubblicato il libro *Il problema geometrico, dal compasso al Cabri* [23] in collaborazione col suo collega ed amico Italo D'Ignazio che gli ha trasmesso una grande passione per la geometria sintetica.
Appassionato di problem solving, ha inviato soluzioni di problemi geometrici proposti su varie riviste ed ha allestito un sito web dedicato alla geometria elementare[24].

[22] http://www.rotupitti.it
[23] D'Ignazio I, Suppa E., *Il problema geometrico, dal compasso al Cabri*, Interlinea Editrice, Teramos, 2001 ; ISBN 88-85426-16-1
[24] http://www.esuppa.it

C. SECONDA CONGETTURA DI SUPPA

RILASCIO

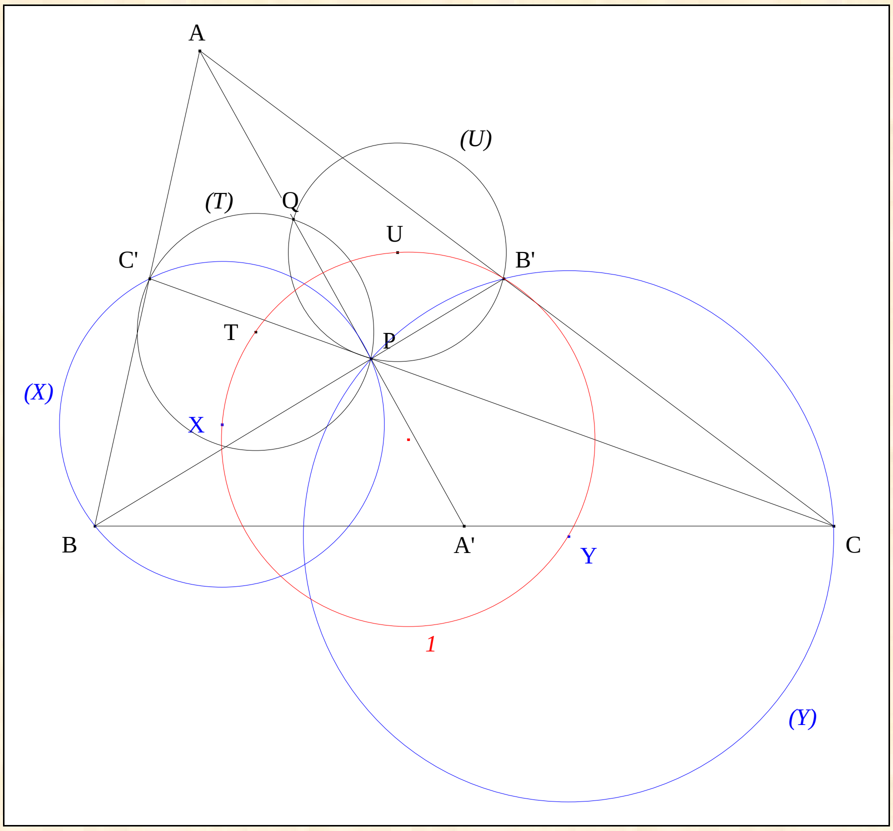
DEL

VINCOLO SU G

1. Primo lemma

VISIONE

Figura :



Ipotesi :	ABC	un triangolo,
	A'	il punto medio di [BC],
	P	un punto di (AA'),
	B', C'	i punti d'intersezione risp. di (PB) e (AC), (PC) e (AB),
	Q	un punto di (AA')
e	(T), (U), (X), (Y)	i cerchi circonscritti risp. ai triangoli PQC', PQB', PBC', PCB'.

Tesi : T, U, X e Y sono conciclici.

Commento : la dimostrazione sintetica è analoga a quella di **B. 1.**Una dimostrazione sintetica differente è stata data il 09 ottobre 2016 da Ercole Suppa. [25]

Osservazione : denotiamo *1* questo cerchio.

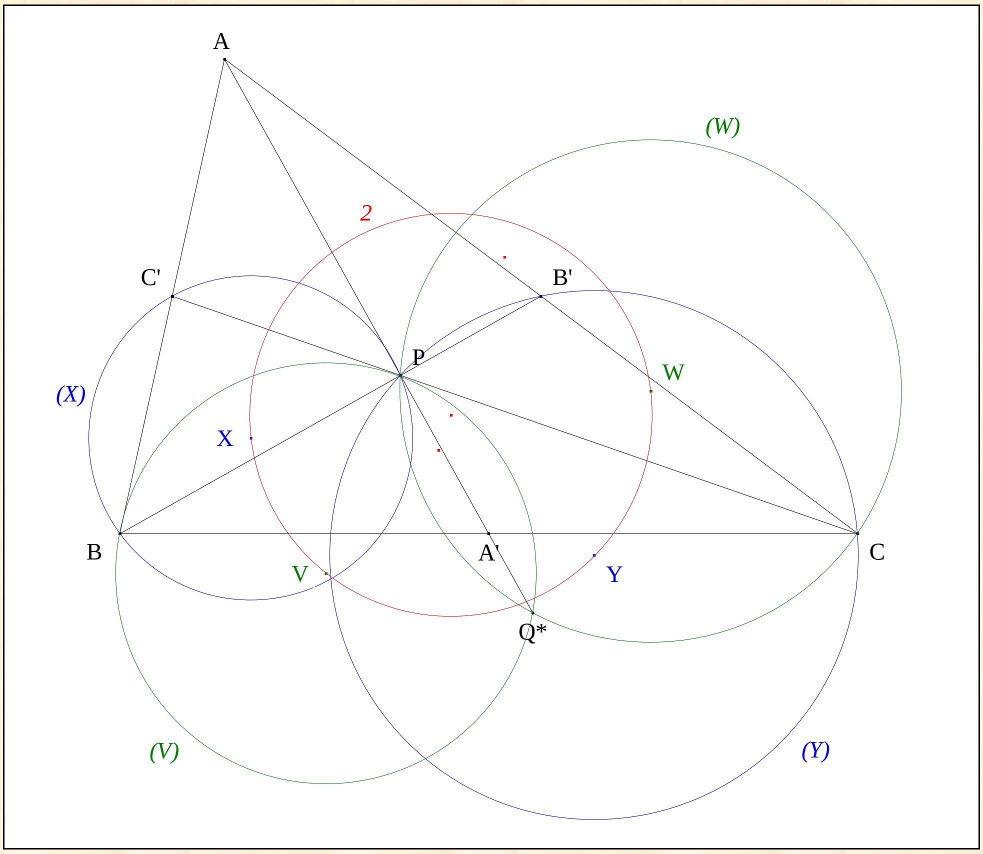
---

[25] Suppa E., Four concyclic centers ; http://www.esuppa.it/Articoli/Suppa_Four_concyclic_centers.pdf

2. Secondo lemma

VISIONE

Figura :



Ipotesi :	ABC	un triangolo,
	A'	il punto medio di [BC],
	P	un punto di (AA'),
	B', C'	i punti d'intersezione risp. di (PB) e (AC), (PC) e (AB),
	Q*	un punto di (AA'),
e	(X), (Y), (V), (W)	i cerchi circonscritti risp. ai triangoli PBC', PCB', PQ*B, PQ*C.

Donné : X, Y, V e W sono conciclici.

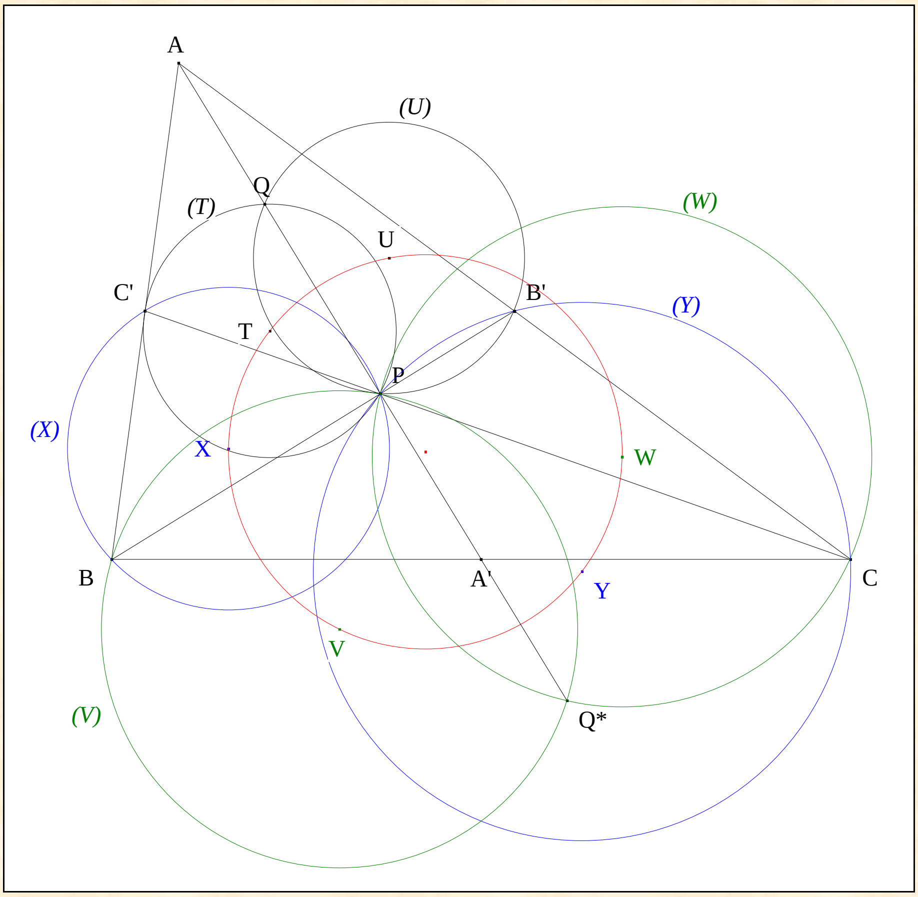
Commento : la dimostrazione sintetica è analoga a quella di **B. 2.**

Osservazione : denotiamo *2* questo cerchio.

3. La congettura di Suppa

VISIONE

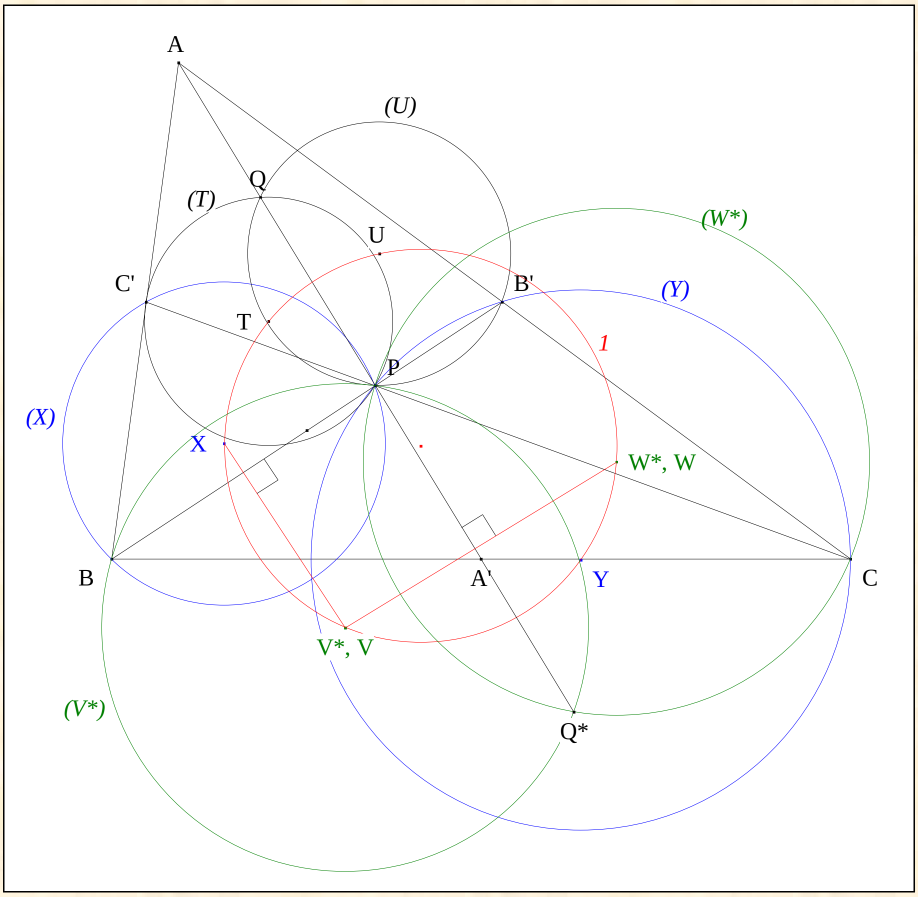
Figura :



Ipotesi :	ABC	un triangolo,
	A'	il punto medio di [BC],
	P	un punto di (AA'),
	B', C'	i punti d'intersezione risp. di (PB) e (AC), (PC) e (AB),
	Q	un punto di (AA'),
	Q*	un secondo punto di (AA') distinto da Q
e	(T), (U), (X), (Y), (V), (W)	i cerchi circonscritti risp.
		ai triangoli PQC', PQB', PBC', PCB', PQ*B, PQ*C.

Problema : trovare la posizione di Q* affinchè T, U, X, Y, V e W siano conciclici.

VISUALIZZAZIONE DELL'AUTORE



- Da **C. 1**, T, U, X e Y sono conciclici su *1*.

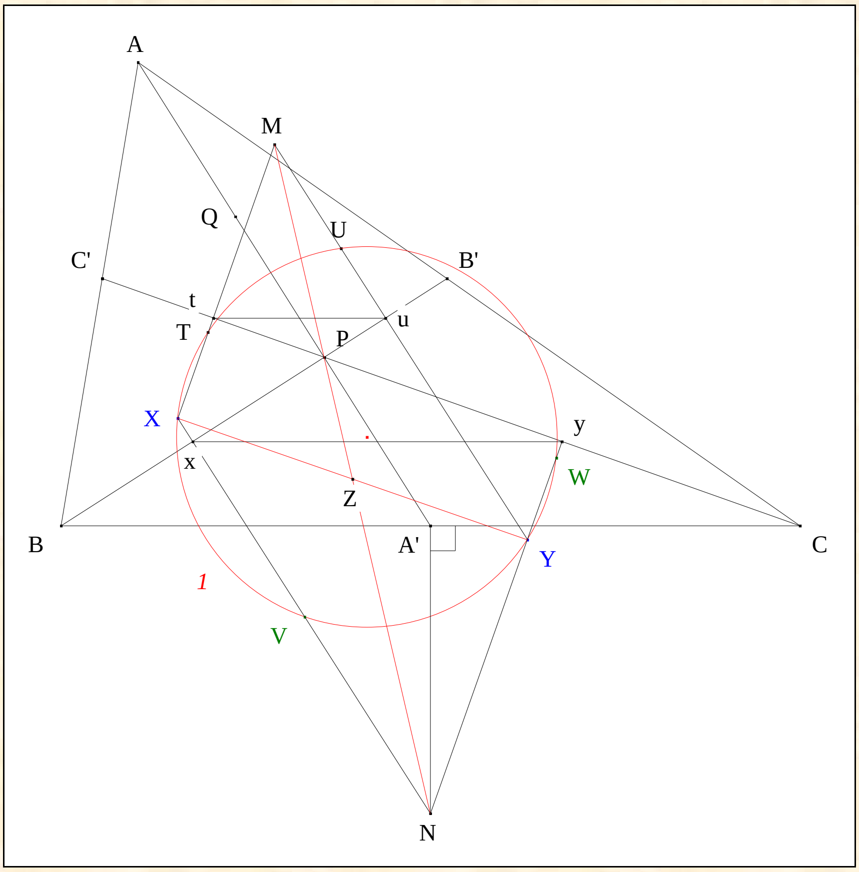
- Denotiamo
  V* il secondo punto d'intersezione della perpendicolare a (PB) condotta da X con *1*,
  W* il secondo punto d'intersezione della perpendicolare a (PA') condotta da V* con *1*,
  (V*) il cerchio di centro V* passante per P
  e (W*) il cerchio di centro W* passante per P.

- **Conclusione parziale :** (V*) e (W*) si intersecano in un secondo punto Q* su (PA').

- **Osservazioni :** **(1)** V* e V coincidono

  (2) W* e W coincidono.

Commento : dobbiamo determinare la posizione di Q*.



- Denotiamo M, N i punti d'intersezione risp. di (XT) e (YU), (XV) e (YW),
  x, y, t, u i punti medi risp. di [PB], [PC], [PC'], [PB']
  e Z il punto d'intersezione di (XY) e (PN).

- dal "Piccolo teorema" [26] di Desargues applicato ai triangoli omotetici Mtu e Nyx, M, P e N sono allineati.

- dall'assioma d'incidenza **Ia**, Z giace su (MN).

- essendo il quadrilatero MXNY un parallelogramma, Z è il punto medio di [XY].

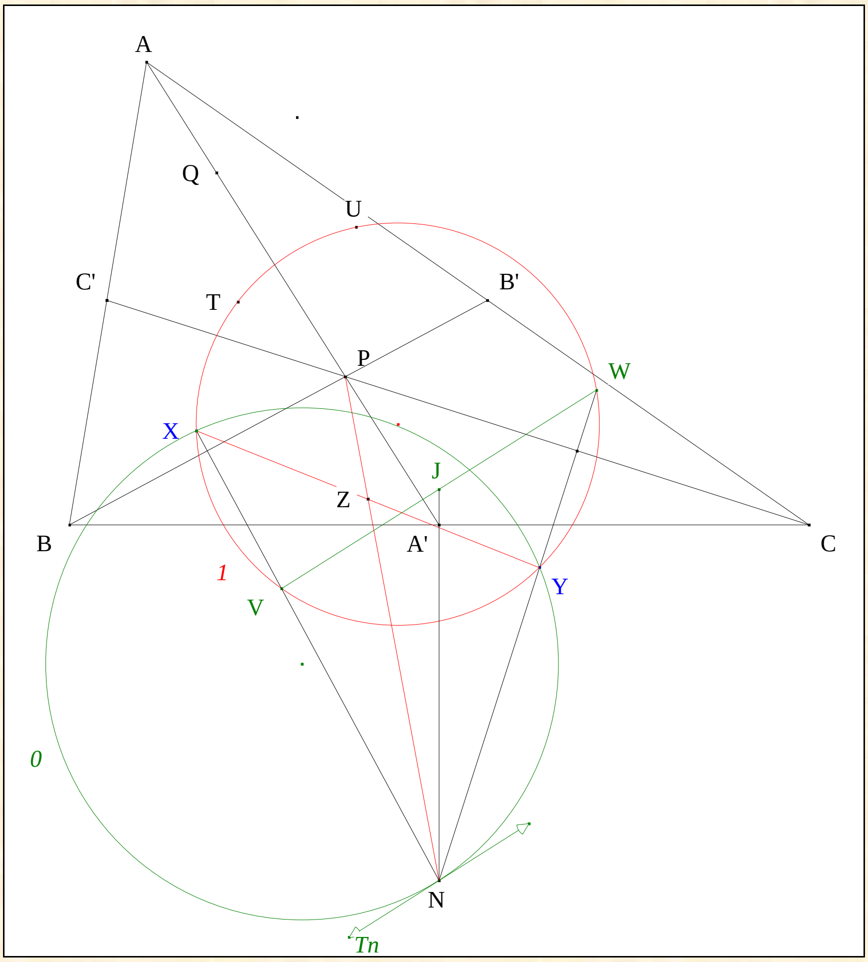
- essendo N il centro del cerchio circonscritto PBC, (NA') ⊥ (BC).

- da Vigarié "Isogonale et perpendiculaire" [27], (NA') è la N-simmediana del triangolo NXY.

---

26 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus…, G.G.G. vol. **6**, p. 40-44; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

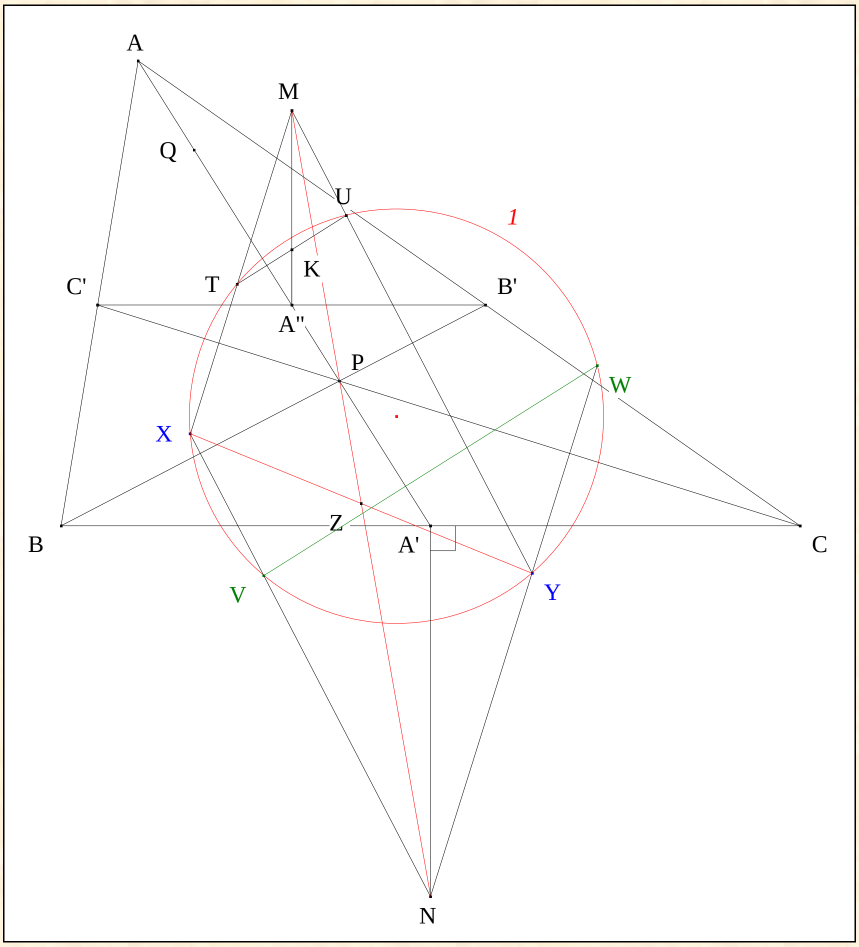
27 Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-?



- Denotiamo J il punto medio di [VW]
  0 il cerchio circonscritto al triangolo XYZ
  e *Tn* la tangente a *0* in N.

- I cerchi *0* e *1*, i punti base X e Y, le moniane (NXV) e (NYW), conducono al teorema **1** di Reim ; ne segue che *Tn* // (VW).

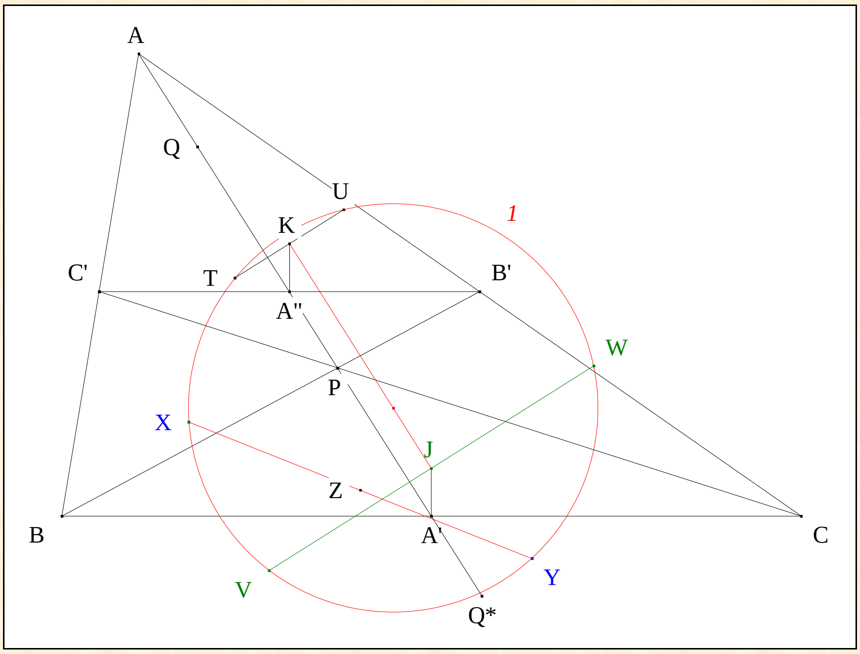
- **Conclusione parziale :** (NA') passa per J.



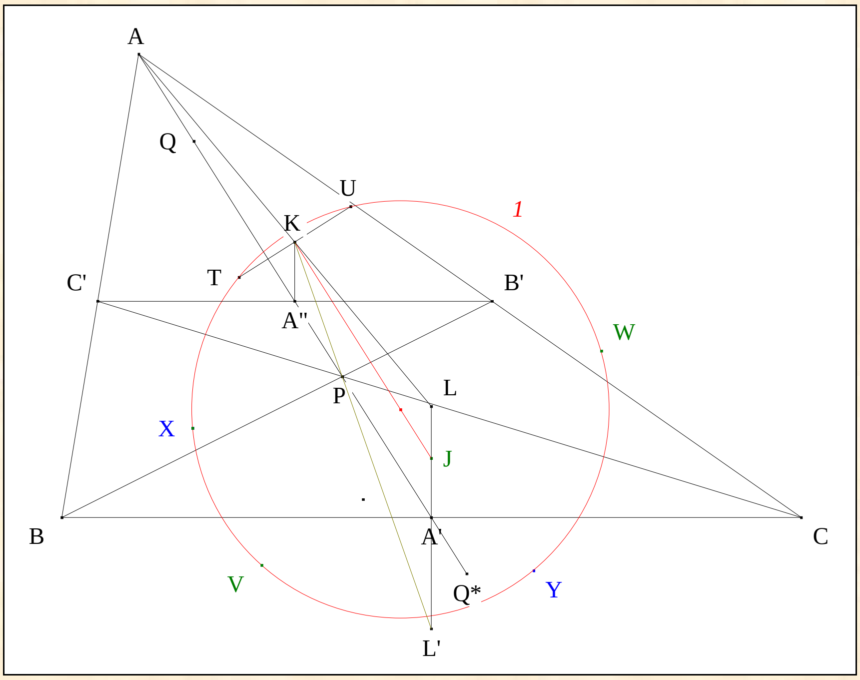
- Denotiamo A", K i punti medi risp. di [B'C'], [TU].
- Mutatis mutandis, si dimostra che **(1)** (MA") ⊥ (B'C')

  (2) (MA") è la M-simmediana del triangolo MXY

  (3) K giace su (MA").

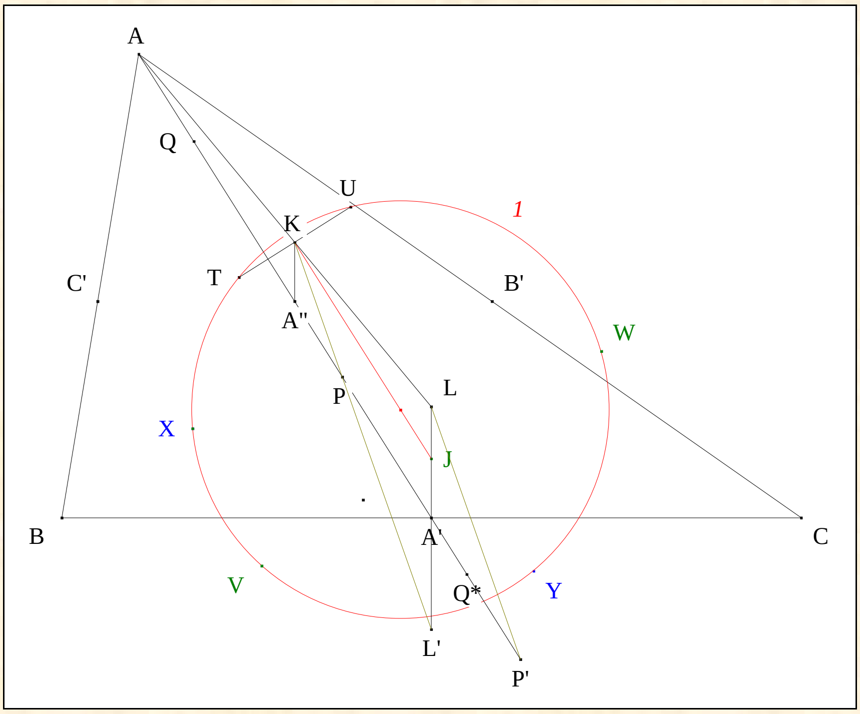


- **Osservazione :** (JK) // (AP).
- **Conclusione parziale :** QQ* = 2.JK.



- Denotiamo L, L' i punti d'intersezione di (A' J) risp. con (AK), (KP).
- Una prima caccia di rapporti fornisce :

  * i triangoli AA"K e AA'L essendo simili, A"K/A'L = AA"/AA'
  * i triangoli AB'C' e ABC essendo simili, AA"/AA' = B'C'/BC
  * i triangoli PB'C' e PBC essendo simili, B'C'/BC = PA"/PA'
  * i triangoli PA"K e PA'L' essendo simili, PA"/PA' = A"K/A'L'
  * per transitività di =, A"K/A'L = A"K/A'L'
  * di conseguenza, A'L = A'L' cioè A' è il punto medio di [LL'].



- Denotiamo P' il simmetrico di P rispetto a A'.
- Essendo il quadrilatero PLP'L' un parallelogramma, (LP') // (KP).
- un'ultima caccia di rapport fornisce :

*	a partire dalla conclusione parziale	QQ*/AA' = 2.JK/AA'
*	essendo JKA"A' un parallélogramma,	2.JK/AA' = 2.A'A"/AA'
*	essendo AA"K e AA'L triangoli simili,	2.A'A"/AA' = 2.LK/LA
*	essendo (LP') e (KP) rette parallelele, per Talete,	2.LK/LA = 2.P'P/P'A
*	essendo A' il punto medio di [LL'],	2.P'P/P'A = 4.PA'/P'A
*	per transitività di =,	QQ*/AA' = 4.PA'/P'A.

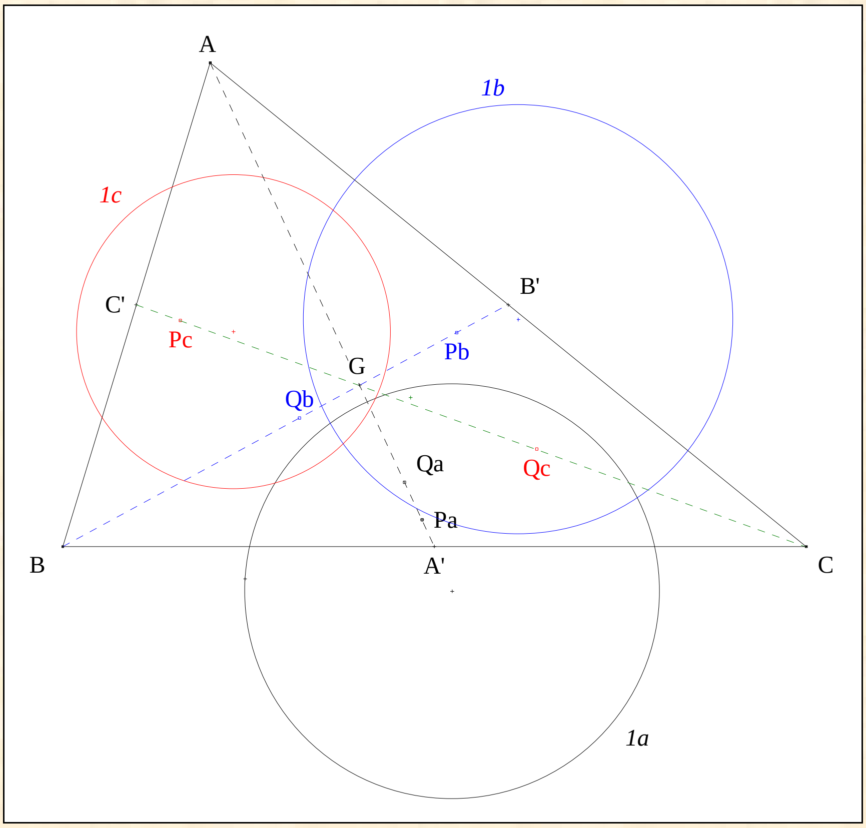
- **Conclusione :** Q* è definito dalla relazione, QQ*/AA' = 4.PA'/P'A.

Osservazioni : **(1)** *1* è una forte (A, G)-generalizzazione del cerchio di van Lamoen relativo ad ABC.

(2) la congettura diventa un teorema

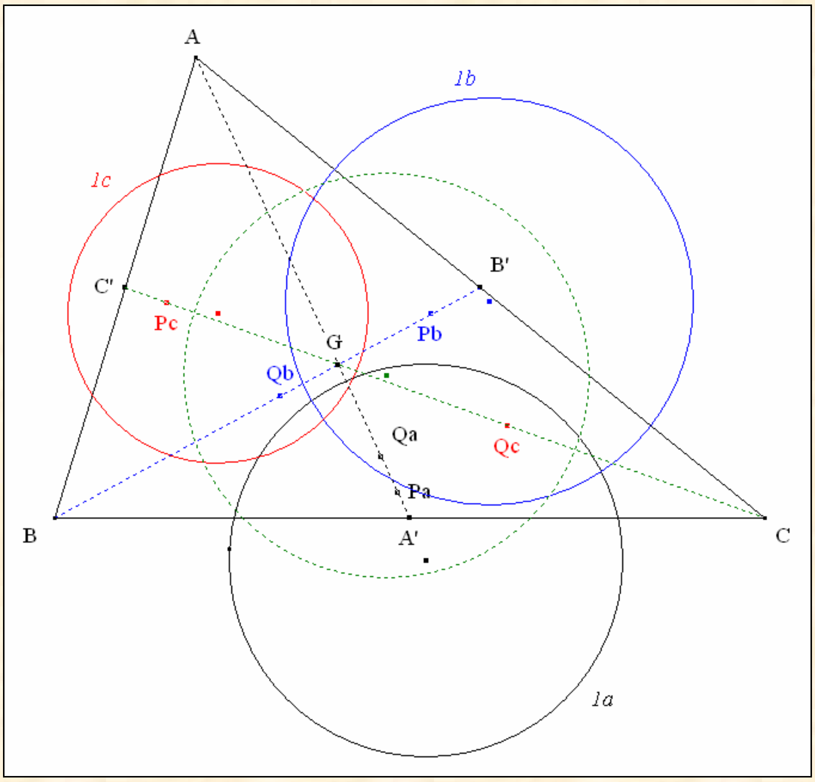
(3) questa relazione è stata proposta da Ercole Suppa in seguito ad una sua investigazione compiuta con l'aiuto del programma *Mathematica*, usando il metodo analitico

(4) visione triangolare



P diventa Pa e Q diventa Qa

(5) visione particolare



quando Pa, Pb, Pc coincidono con G e Qa, Qb, Qc coincidono risp. con A, B, C, i cerchi *1a*, *1b* e *1c* diventano il cerchio di van Lamoen.

Terminologia : l'autore ha associato a questa visione triangolare l'immagine di un trifoglio.
Così la congettura di Ercole Suppa è diventata "il teorema del trifoglio" o in inglese "the Suppa's clover theorem".

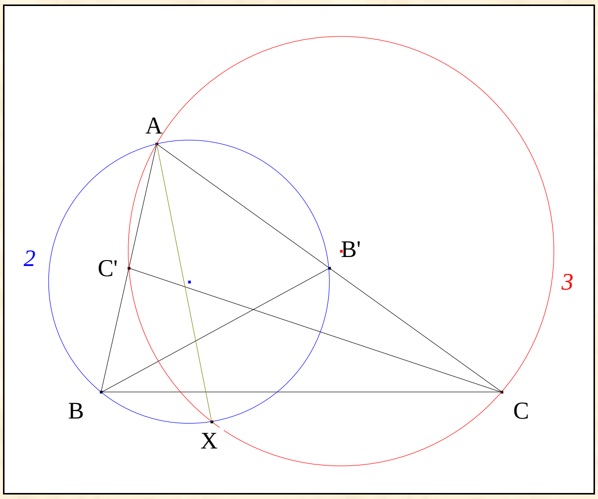
4. Une breve biografia di Jean-Louis Ayme

Jean-Louis Ayme, dottore-associato di matematica, ha ricevuto la sua esucazione scolastica dapprima in Germania e poi in Francia. Dopo essere stato studente del Prytanée National Militaire a La Flèche (Sarthe, Francia) dove Cartesio visse dal 1607 al 1614 e poi alla Scuola degli ufficiali militari della Air Salon-de-Provence, si iscrive facoltà di Scienze di Marsiglia per diventare professore di matematica.
Ha insegnato in Francia e all'estero vale a dire in Tunisia, Afghanistan, Marocco, Sud Africa, Canada e, infine, all’isola della Reunion situata nell'Oceano Indiano.
La sua passione per la geometria gli ha permesso di pubblicare un libro dal titolo *Méthodes et Techniques en Géométrie* [28] nonchè di dirigere il sito *Geometry * Géométrie * Geometria* [29].

[28] Ayme J.-L., *Méthodes et Techniques en Géométrie, A propos de la Droite de Newton*, Ellipses, Paris, 2003 ; ISBN 2-7298-I585-6
[29] http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

D. APPENDICE

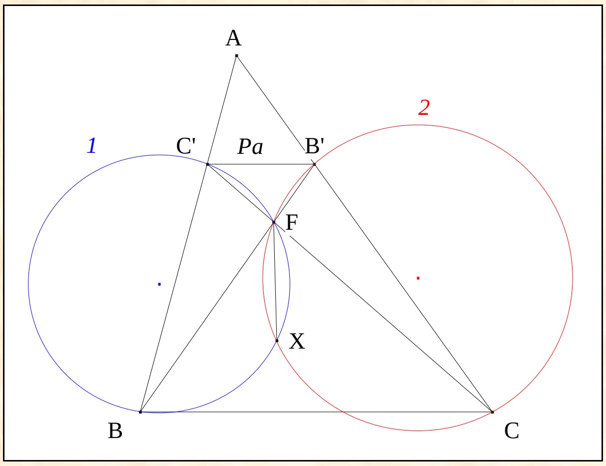
1. Une simmediana come asse radicale[30]



Ipotesi :	ABC	un triangolo,
	B', C'	i punti medi risp. di [CA], [AB],
	2, *3*	i cerchi circonscritti risp. ai triangoli ABB', BCC'
e	X	il secondo punto d'intersezione di *1* e *2*.

Tesi : (AX) è la A-simmediana di ABC.

2. Une generalizzazione dell'autore[31]



Ipotesi :	ABC	un triangolo,
	Pa	una A-paralleliana di ABC,
	B', C'	i punti d'intersezione di *Pa* risp. con (CA), (AB),
	F	il punto d'intersezione di (BB') e (CC'),
	1, *2*	i cerchi circonscritti ai triangoli BFC', CFB'
e	X	il secondo punto d'intersezione di *1* e *2*.

Tesi : (FX) è la F-simmediana di FBC.

---

[30] Stevanovic M., Symmedian as radical axis, Message *Hyacinthos* # **10904** du 20/11/2004 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/10904

[31] Ayme J.-L., 17/02/2006