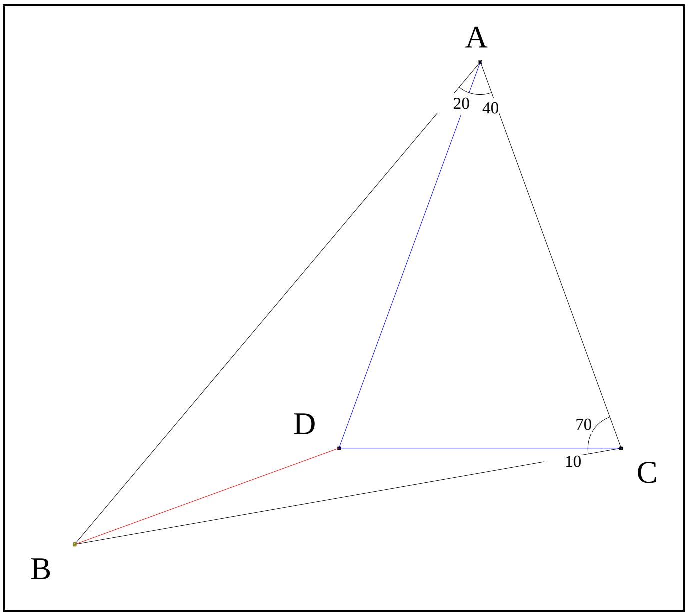
IN MEMORIAM

JUAN CARLOS SALAZAR (?-2008)

EL PROBLEMA 456

Jean-Louis AYME



En el triangulo ABC, D es un punto interior tal que
<BCD = 10°, <ACD = 70°, <BAD = 20°, <CAD = 40°.
Probar que BD es perpendicular a AC. [1]

Scolie : <ADC = 70° ; en conséquence, le triangle ADC est isocèle en A.

Contexte : ce triangle isocèle ayant un angle de 40° au sommet, nous suggère que ce problème 456 correspond au thème "Adventitious Angles"[2] ou "Mahatma's Puzzle"[3] ou encore "Tantale"[4].

Note historique : le premier nom a été donné en 1922 par Edward M. Langley[5], le deuxième par par la revue *Mathematical Spectrum*[6] en 1995 et le dernier par J. L. Heilbron[7] en 1998.

---

1 Communiqué au site "Laboratorio virtual de triangulos con cabri" de Ricardo Barroso en 2004 ; http://www.personal.us.es/rbarrosocabri/html
L'énoncé a été reformulé par l'auteur.

2 En français, Aventure angulaire.

3 Titre donné en Inde à des personnalités spirituelles de premier plan.

4 Dans la Mythologie, Tantale était le roi de Phrygie qui, pour avoir offensé les dieux, fut précipité dans les Enfers et condamné à une faim et à une soif dévorantes.

5 Langley, Adventitious Angles Problem, *Mathematical Gazette*, 11 (1923) 321-323.

6 Mathematical Spectrum vol. 27 (1995-97) 7, 65-67.

7 Heilbron J. L., *Geometry civilised*, Clarendon Press, Oxford (1998) 292-295.

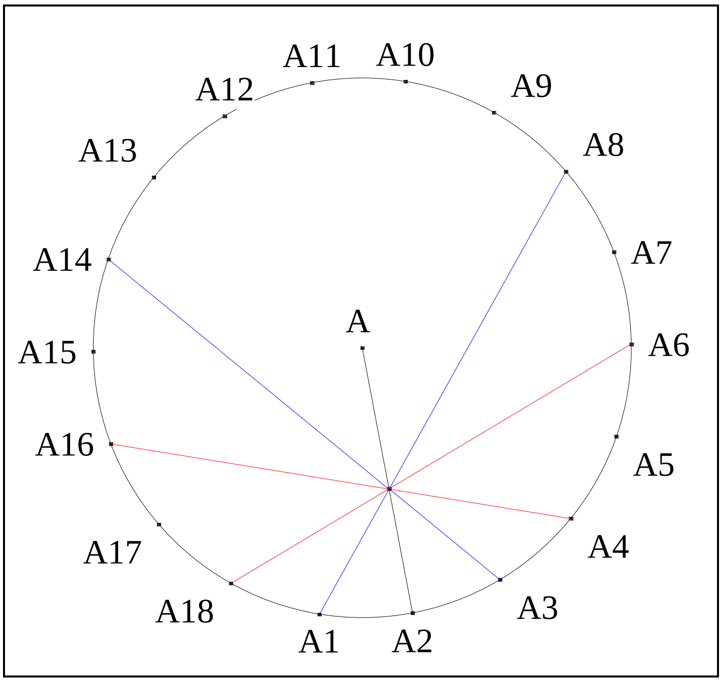
L'origine de ce thème remonte à l'année 1916 où le célèbre problème de Langley a été posé à "Entrance Examination for Peterhouse and Sidney Sussex Colleges" à Cambridge. Depuis de nombreuses variations sur ce thème ont été présentées[8].

Technique choisie : elle s'inspire de celle utilisée en 1951 par S. T. Thompson de Tacoma (Washington, États-unis) pour la résolution du problème de Langley[9].

UN LEMME FÉDÉRATEUR

VISUALISATION

Figure :



Traits : 0 un cercle,
A le centre de 0
et $A_1, A_2, \ldots, A_{18}$ les sommets du 18-gone régulier inscrit dans 0.

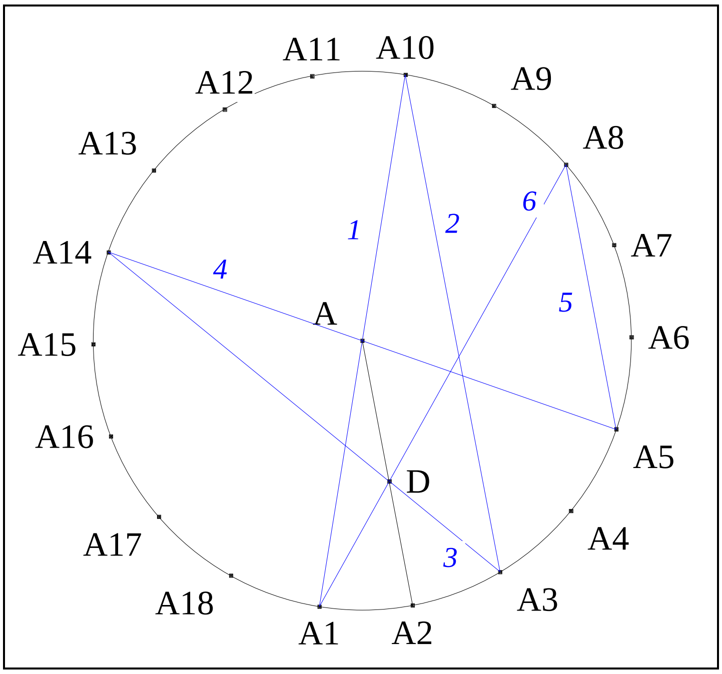
Donné : (A_1A_8), (A_3A_{14}), (A_4A_{16}), $(A_{18}A_6)$ concourent sur (AA_2).

VISUALISATION

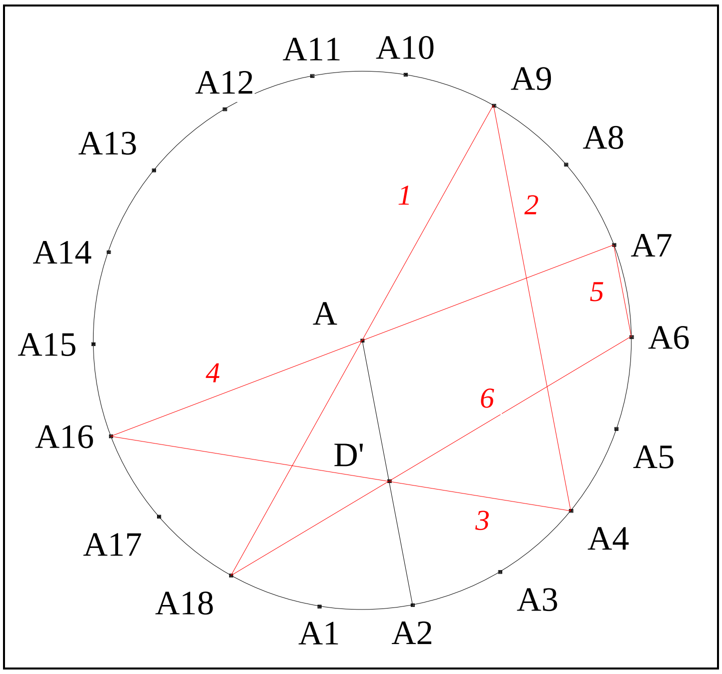
---

[8] Rike T., An intriguing Geometry Problem, Berkeley Math Circle (2002) ;
Diamond R. A. & Georgiou G. R., Triangles and Quadrilaterals Revisted Part 2: The solution, *Mathematics in School* 30, 1 (November 2001) 11-13.

[9] Langley E. M., A problem, *Mathematical Gazette*, 11 (1922) 173.



- **Scolie :** (AA_2), (A_3A_{10}), (A_5A_8) sont parallèles entre elles.
- Notons D le point d'intersection de (A_1A_8) et (A_3A_{14}).
- D'après "L'équivalence d'Aubert-MacKensie" (Cf. Annexe 1),
  (1) (AD) est la pascale de l'hexagone cyclique $A_1A_{10}AA_3A_{14}A_5A_8A_1$
  (2) $(AD) // (A_5A_8)$ ou encore $(AD) // (AA_2)$.
- D'après le postulat d'Euclide, $(AD) = (AA_2)$.
- **Conclusion partielle :** A, D et A_2 sont alignés.

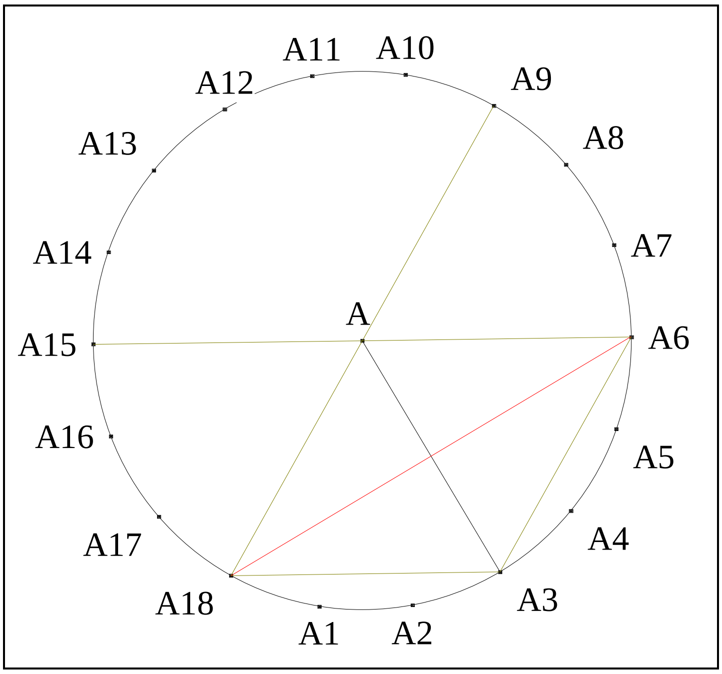


- **Scolie :** (AA_2), (A_4A_9), (A_6A_7) sont parallèles entre elles.
- Notons D' le point d'intersection de (A_4A_{16}) et (A_6A_{18}).

- D'après "L'équivalence d'Aubert-MacKensie" (Cf. Annexe 1),
  (1) (AD') est la pascale de l'hexagone cyclique $A_{18}A_9A_4A_{16}A_4A_6A_{18}$
  (2) (AD') // (A_4A_9).

- D'après le postulat d'Euclide, (AD') = (AA_2).

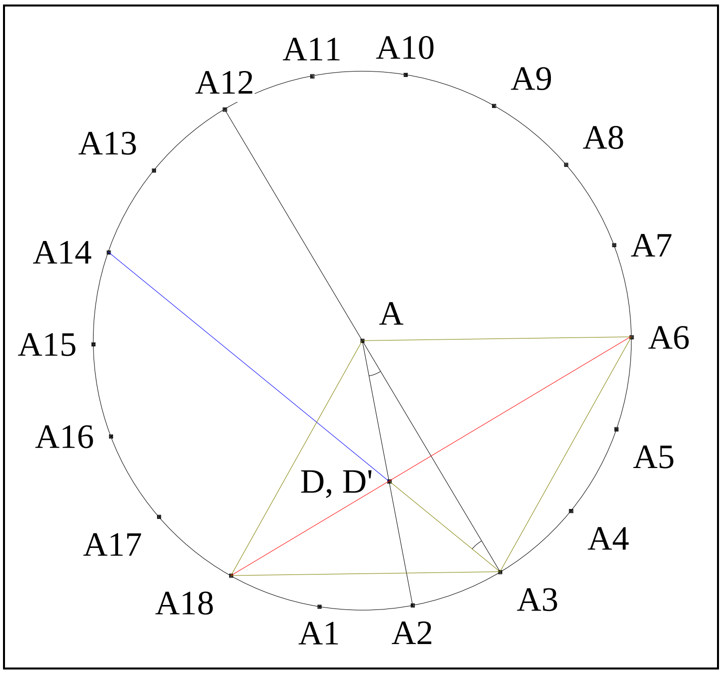
- **Conclusion partielle :** A, D' et A_2 sont alignés.



- **Scolies :**
  (1) (A_3A_{18}) // (A_6AA_{15})
  (2) (A_3A_6) // (A_9AA_{18})
  (3) (AA_{18}) = (AA_6).

- Le quadrilatère $AA_{18}A_3A_6$ est un losange.

- **Conclusion partielle :** (A_6A_{18}) est la médiatrice de $[AA_3]$ ou encore $(A_6A_{18}) \perp (AA_3)$.



- **Scolies :** **(1)** D est le point d'intersection de (AA_2) et (A_3A_{14})
  (2) $<A_2AA_3 = <A_{12}A_3A_{14}$ (= 20°).

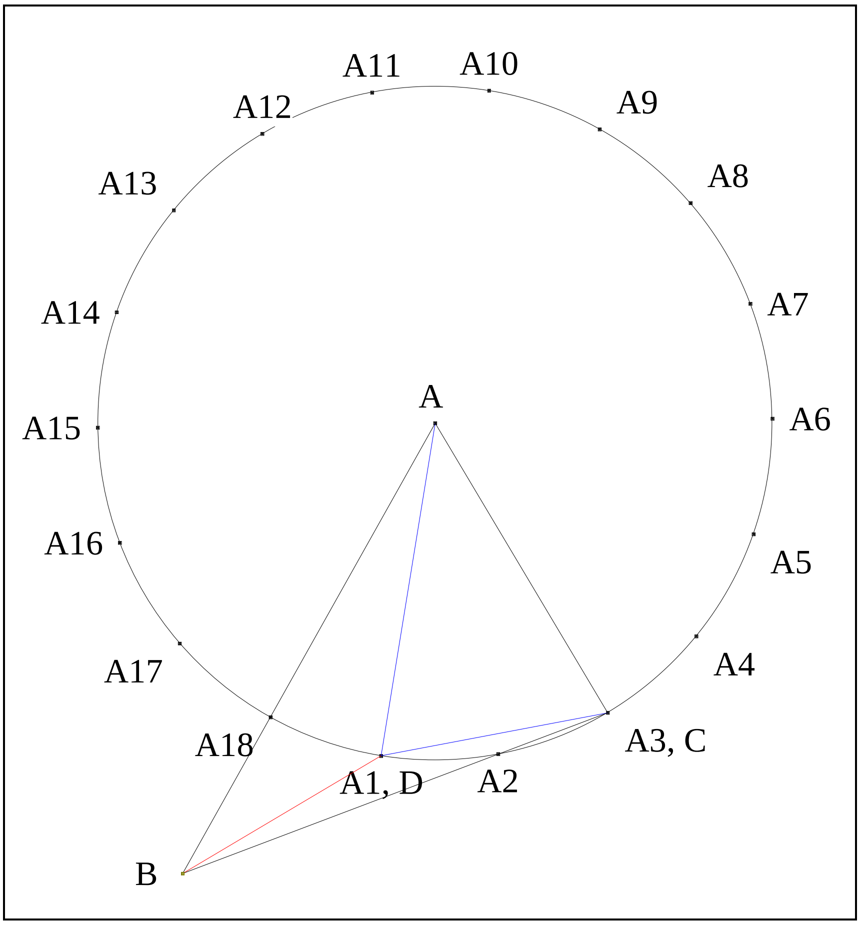
- Le triangle DA_3A est isocèle en D.

- D'après le théorème de la médiatrice, D est sur (A_6A_{18}) ;
  en conséquence, D et d' sont confondus.

- **Conclusion :** (A_1A_8), (A_3A_{14}), (A_4A_{16}), $(A_{18}A_6)$ concourent sur (AA_2).

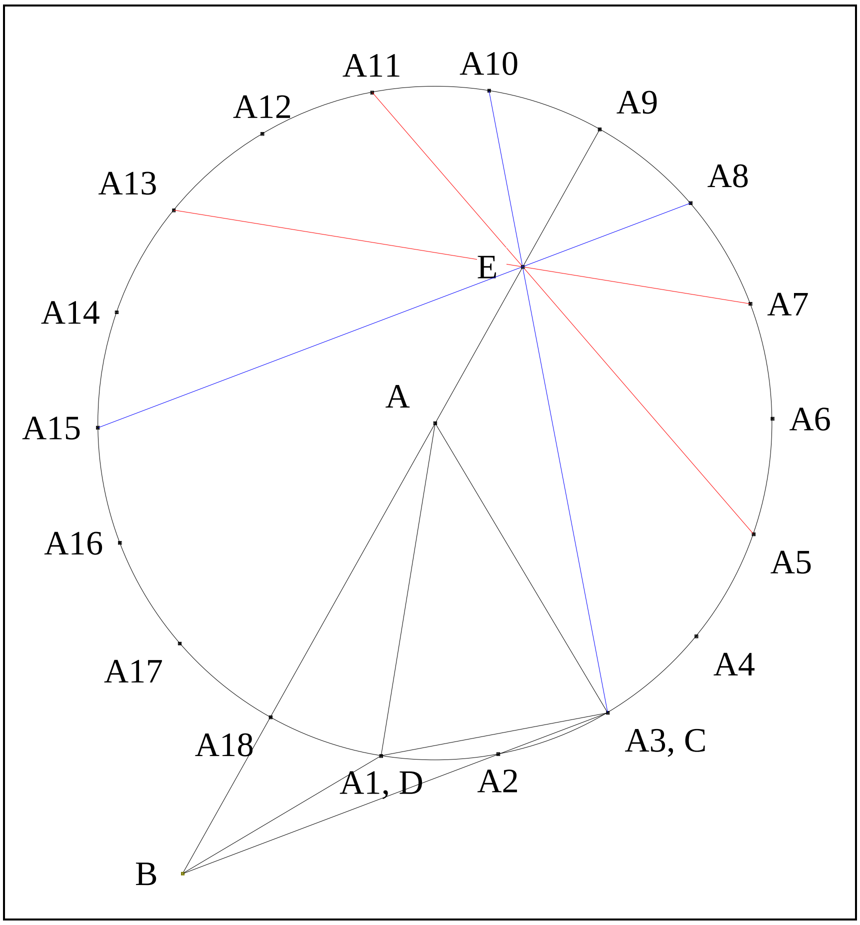
Commentaire : ce lemme, dans son principe, fédère le thème "Adventitious angles".

LA PREUVE

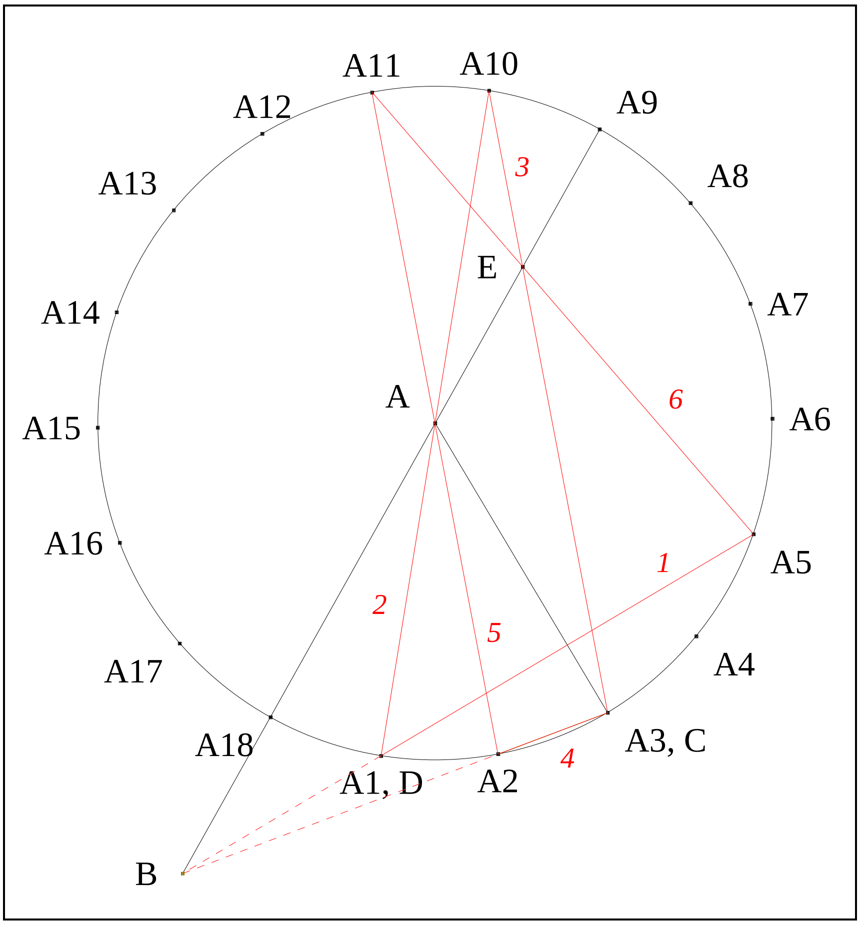


- Immergeons notre figure dans celle du lemme précédent.

- **Scolies :** **(1)** C et A_3 sont confondus
  (2) D et A_1 sont confondus
  (3) B, A_2, C sont alignés.



- D'après le lemme, (A_8A_{15}), $(A_{10}A_3)$, $(A_{11}A_5)$, (A_7A_{13}) concourent sur (AA_9).
- Notons E ce point de concours.
- **Scolie :** A, B, E, A_9, A_{18} sont alignés.



- **Scolies :** **(1)** A_1, A, A_{10} sont alignés
  (2) A_2, A, A_{11} sont alignés.

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 2),
  (AE) est la pascale de l'hexagone cyclique $A_5A_1A_{10}A_3A_2A_{11}$; en conséquence, (A_1A_5) passe par B.

- Nous avons : (A_1A_5B) // (A_6A_{18}) ;
  d'après le lemme, $(A_6A_{18}) \perp (AA_3)$;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, $(A_1A_5B) \perp (AA_3)$ ou encore $(BA_1) \perp (AA_3)$.

- **Conclusion :** "BD es perpendicular a AC".

À

SON ÉPOUSE MILAGROS

C'est le 16 avril 2004, que Juan Carlos[10] a pris contact avec moi, par mail, à partir de Puerto Ordaz (Venezuela).
Ce contact qui n'a jamais été rompu, nous a permis d'échanger nos travaux géométriques. Je sais qu'il a occupé avec talent les fonctions de coach de l'équipe vénézuelienne pour les I.M.O. et partager avec enthousiasme les dicussions ax seins des groupes *Hyacinthos* et *Mathlinks*.
Le dernier contact que j'ai eu avec lui, date du 9 septembre 2007 ; il m'écrivait :

[10] Salazar J. C., Google : Applicaciones del Teorema de Desargues ; Concurrencias y Colinealidades.

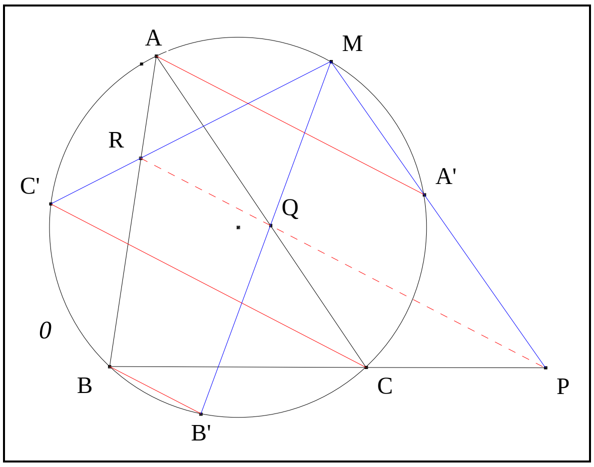
"I am in Maputo, Mozambique, and I am working in Isolux, Spain Electrical Company, as electrician engineer, my profession. I am retired from my sweet geometry…".

Il décède le dimanche 30 mars 2008 en Afrique du Sud et est enterré le lundi 7 avril au Venezuela dans la religion catholique.

Qu'il repose en paix.
Jean-Louis

ANNEXE

1. L'équivalence d'Aubert-MacKensie



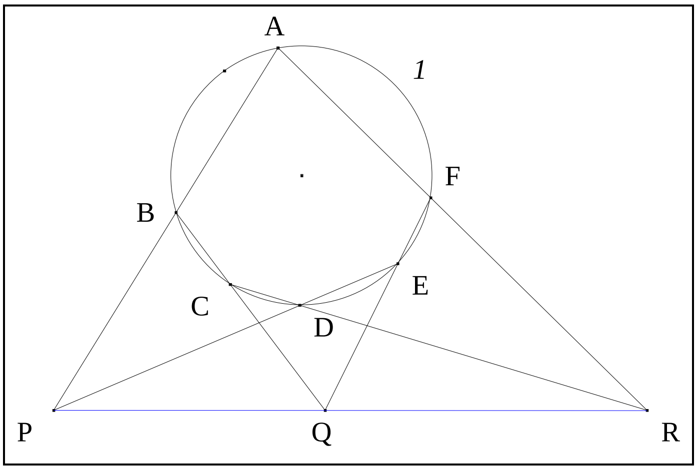
Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	A', B', C'	trois points de *0* tels que (AA'), (BB') et (CC') soient parallèles entre elles,
	M	un point,
et	P, Q, R	les point d'intersection de (MA') et (BC), (MB') et (CA), (MC') et (AB).

Donné : M est sur *0* *si, et seulement si*, (PQR) est une ménélienne de ABC, parallèle à (AA').

Scolie : la visualisation nécessaire est de Paul Aubert[11] et suffisante de M'Kensie[12].

2. Hexagramma mysticum[13]

[11] Aubert P., Généralisation du problème de Pascal donnant neuf points en ligne droite, *Nouvelles Annales* (1899).
[12] M'Kensie, *Journal de Mathématiques Spéciales* de Longchamps (1887) 201.
[13] Pascal B. (1640)



Traits :	*1*	un cercle,
	ABCDEF	un hexagone tels que les points A, B, C, D, E soient sur *1*,
et	P, Q, R	les points d'intersection de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si,* les points P, Q et R sont alignés.