NOTE GÉOMÉTRIQUE

ISOGONAL

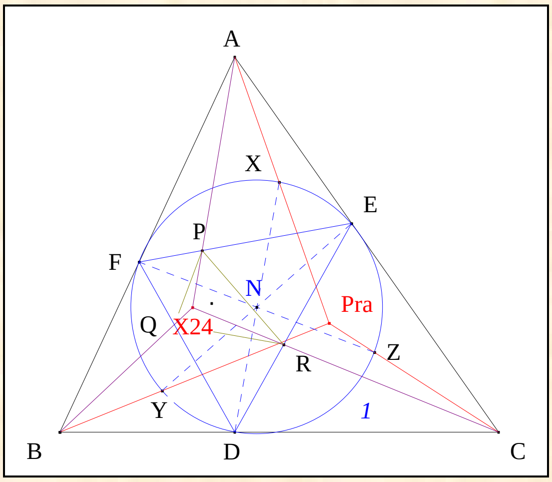
DU

POINT DE PRASOLOV

PREMIÈRES PREUVES

MÉTRIQUE ET SYNTHÉTIQUE

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. Dans cette note géométrique, l'auteur présente l'isogonal du point de Prasolov
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. In this geometric note, the author presents the Prasolov's isogonal point.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

Sommaire

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 01/06/2019 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

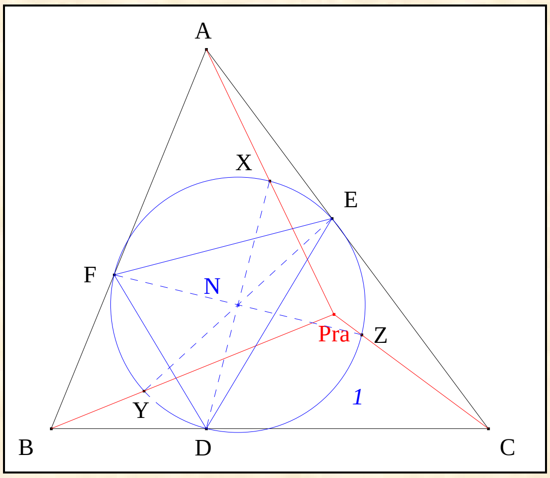
A. LE POINT

DE

VIKTOR VASIL' EVICH PRASOLOV (1991) [2]

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle acutangle,
DEF le triangle orthique de ABC,
1 le cercle d'Euler de ABC,
N le centre de *1*
et XYZ le triangle N-symétrique de DEF.

Donné : (AX), (BY) et (CZ) sont concourantes.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [3].
La solution métrique proposée par Victor Vasil'evich Prasolov dans *Plane Geometry*, a recours au théorème de Céva dans sa version trigonométrique.

Scolies : **(1)** ce point de concours, noté Pra, est le "point de Prasolov du triangle ABC" ; il est répertorié sous X_{68} chez ETC [4].

(2) Le nom de ce point a été proposé par Darij Grinberg [5].

---

2 Prasolov V. V., *Zadachi po planimetriii* **5**, Exercice **114** (1991)

3 Ayme J.-L., Une fresque, G.G.G. vol. **46**, p. 9-10 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
Ayme J.-L., Le point de Prasolov…, G.G.G. vol. **1** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

4 Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

5 Grinberg D., Prasolov Point X(68), Message *Hyacinthos* # **6302** du 09/01/2003 ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/

Note historique :

V. V. Prasolov (27.05.1956 -)

Rappelons cette exclamation de Darij Grinberg [6] :

This was a delightful surprise,
as the pedal triangle himself is not always perspective with ABC,
but the reflection always is !

Archive :

5.114. In triangle ABC, heights AA_1, BB_1 and CC_1 are drawn. Let A_1A_2, B_1B_2 and C_1C_2 be diameters of the circle of nine points of triangle ABC. Prove that lines AA_2, BB_2 and CC_2 either meet at one point or are parallel. [7]

[6] Grinberg D., Prasolov Point X(68), Message *Hyacinthos* # **6331** du 09/01/2003 **;**
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/6331

[7] Prasolov V., PROBLEMS IN PLANE AND SOLID GEOMETRY v.**1** Plane Geometry, p. 109 ;
translated and edited by Dimitry Leites ; http://e.math.hr/old/afine/planegeo.pdf

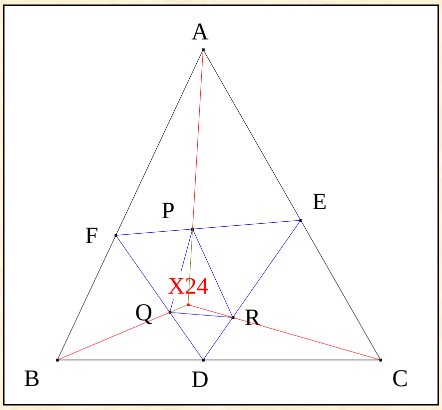
B. ORTHIQUE DE L'ORTHIQUE

DE

JOHN CASEY (1893)

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle acutangle,
DEF le triangle orthique de ABC
et PQR le triangle orthique de DEF.

Donné : PQR est en perspective avec ABC.

VISUALISATION

- Nous avons : PQR est inscrit dans DEF, DEF est inscrit dans ABC ;
  PQR est en perspective avec DEF, DEF est en perspective avec ABC.

- **Conclusion :** d'après Döttl "The cevian nest theorem" [8], PQR est en perspective avec ABC.

Scolie : le centre de cette perspective est répertorié sous X_{24} chez ETC [9].

Note historique : ce point a été évoqué en 1893 par John Casey.

EXERCISES.

2. If *A'B'C'* be the orthique triangle of *ABC* (that is, formed by the feet of perpendiculars) and *A''B''C''* the orthique of *A'B'C'*, show that the normal co-ordinates of the centre of perspective of *ABC* and *A''B''C''* are sec *A* cos 2*A*, &c., and that it is a point on Euler's line.

[10]

8 Ayme J.-L., The cevian nests theorem, G.G.G. vol. **3** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

9 Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

10 Casey J., *A Treatise of Analytic Geometry of the Triangle* (1893) 85 ; https://archive.org/details/atreatiseonanal05casegoog/page/n122

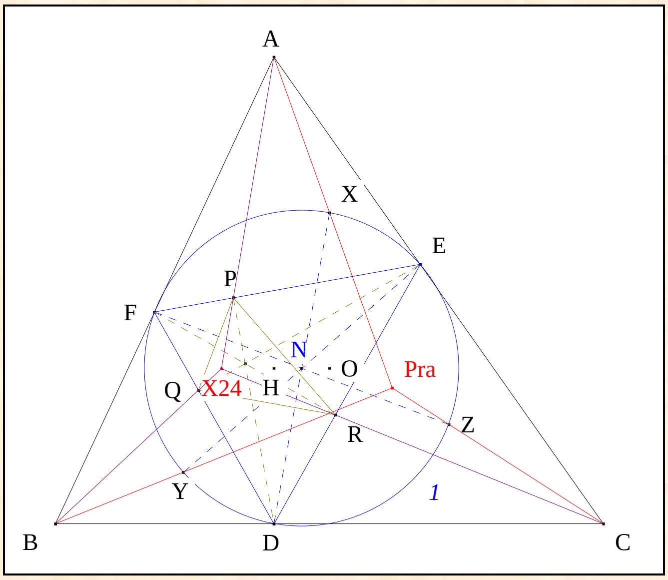
C. ISOGONAL

DU

POINT DE PRASOLOV [11]

VISION

Figure :



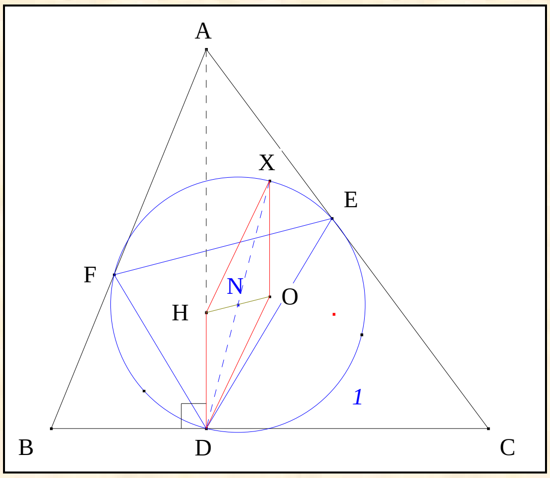
Traits : ABC un triangle acutangle,
H, O l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit à ABC,
DEF le triangle orthique de ABC
PQR le triangle orthique de A'B'C'
1 le cercle d'Euler de ABC,
N le centre de *1*,
XYZ le triangle N-symétrique de DEF,
et Pra, X_{24} les perspectors de ABC resp. avec XYZ, PQR.

Donné : X_{24} est l'isogonal de Pra relativement à ABC.

---

[11] isogonal conjugate of prasolov point, AoPS du 22/12/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t130f6h453505_isogonal_conjugate_of_prasolov_point
Conjugué isogonal du point de Prasolov, *Les-Mathematiques.net* ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,721705,721805
Ayme J.-L., Isogonal of the Prasolov point, AoPS du 27/05/2019 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1846033_isogonal_of_the_prasolovs_point

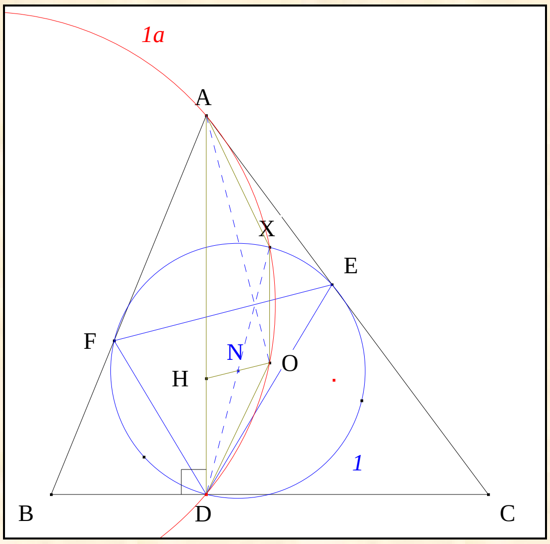
I. VISUALISATION MÉTRIQUE



- D'après Karl Feuerbach [12], **(1)** N est le milieu de [OH]

  (2) OA = DX.

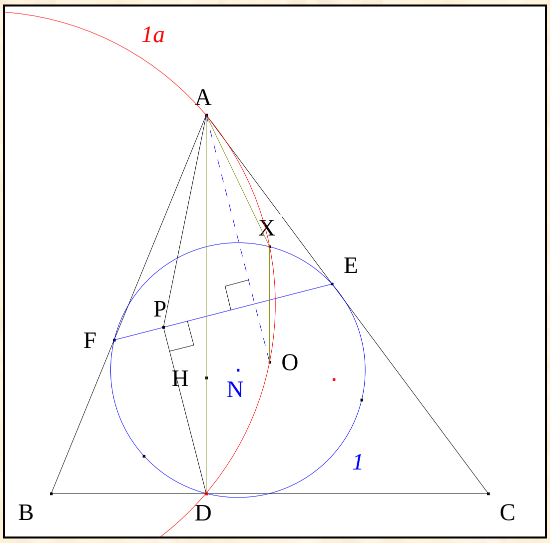
- Le quadrilatère DOXH ayant ses diagonales [OH] et [DX] se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ; en conséquence, (OX) // (DHA).



- Le quadrilatère ADOX ayant deux côté opposés parallèles est un trapèze ; celui-ci ayant ses diagonales égales, est isocèle et cyclique.

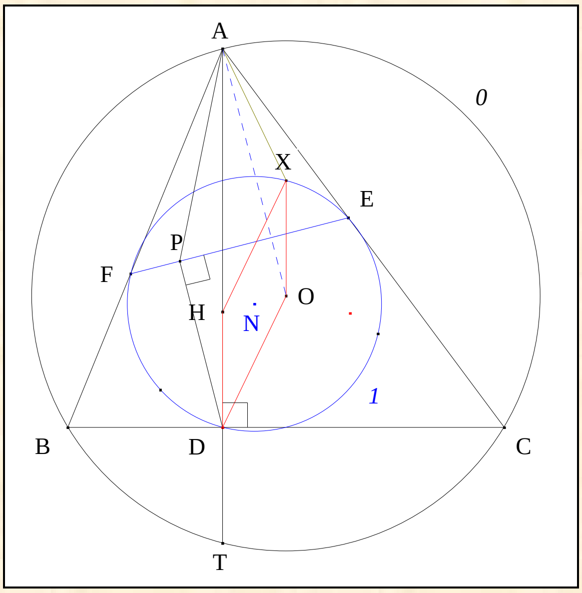
- Notons *1a* son cercle circonscrit.

[12] Feuerbach K., *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren* (1822).
Le British Museum possède une des rares copies de ce livre qui n'a pas été traduit en anglais. Certains auteurs considèrent ce livre comme sa thèse.



- D'après Christian von Nagel [13], (OA) ⊥ (EF) ;
  par hypothèse, (EF) ⊥ (DP) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (OA) // (DP).

- **Conclusion partielle :** d'après "Angles à côtés parallèles", <XOA = <ADP.



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  R le rayon de *0*,
  b, c les longueur AC, AB
  et T le second point d'intersection de (AD) avec *0*.

- D'après Lazare Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" [14], DH = DT.

- **Commentaire :** raisonnons à rebours
  pour montrer que
  les triangles APD et AXO sont inversement semblables.

---

13 von Nagel C. H., *Nouvelles Annales* **1**ère série **19** (1860) 354 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

14 Carnot L. N. M.(1753-1823), n° **142**, *De la corrélation des figures géométriques* (1801) 101

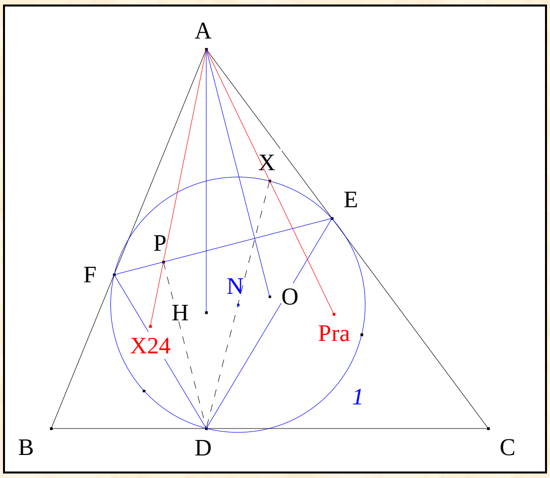
- Évaluation de

  * DP [15], DP = R sin 2B.sin 2C
  * DB.DC [16], DB.DC = bc.cosB.cos C

- Une chasse segmentaire :

  * partons de PD/XO = AD/AO
  * par "Produit en croix", PD.AO = AD.XO
  * par substitution, PD.R = AD.DH i.e. AD.DT
  * par "Puissance de D par rapport à *0* ", PD.R = DB.DC
  * par substitution, R².sin 2B.sin 2C = bc.cosB.cos C
  * par simplification, 4.R².sin B.sin C = bc
  * par "La loi des sinus", cette égalité est vraie.

- **Conclusion partielle :** les triangles APD et AXO sont inversement semblables et <PAH = <OAX.

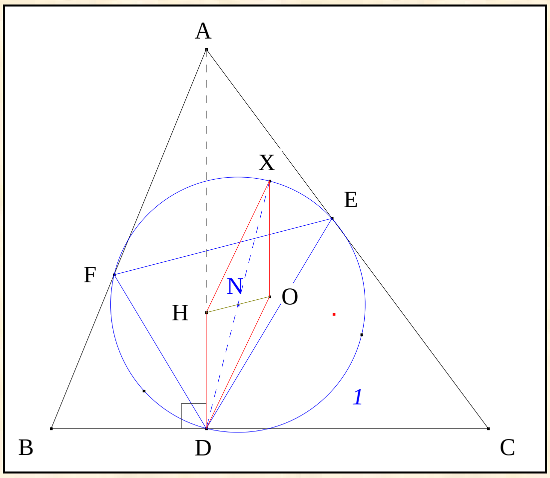


- O étant l'isogonal de H relativement à ABC, (AP) et (AX) sont deux A-isogonales de ABC.

- **Conclusion :** par "visualisation triangulaire" et
  par définition, X_{24} est l'isogonal de Pra.

[15] Lalesco T., Proposition **15.21**, La Géométrie du triangle, ed. Jacques Gabay (1987) 109
[16] Lalesco T., Proposition **15.5**, La Géométrie du triangle, ed. Jacques Gabay (1987) 107

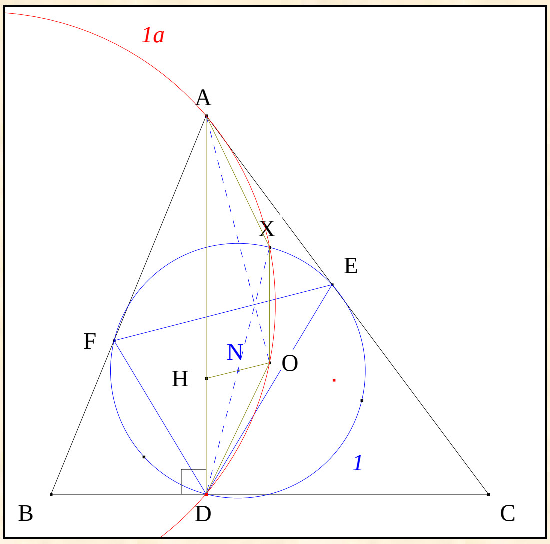
II. VISUALISATION SYNTHÉTIQUE



- D'après Karl Feuerbach [17], **(1)** N est le milieu de [OH]

  (2) OA = DX.

- Le quadrilatère DOXH ayant ses diagonales [OH] et [DX] se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ; en conséquence, (OX) // (DHA).

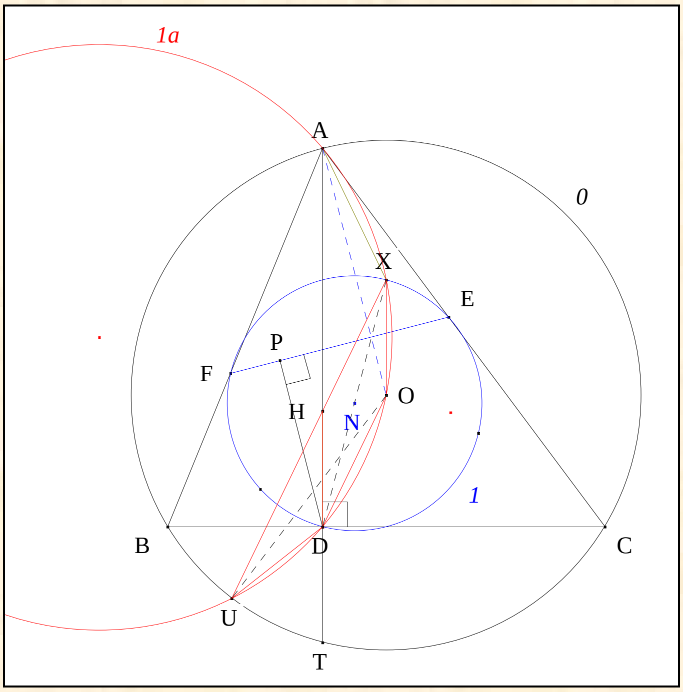


- Le quadrilatère ADOX ayant deux côté opposés parallèles est un trapèze ; celui-ci ayant ses diagonales égales, est isocèle et cyclique.

- Notons *1a* son cercle circonscrit.

---

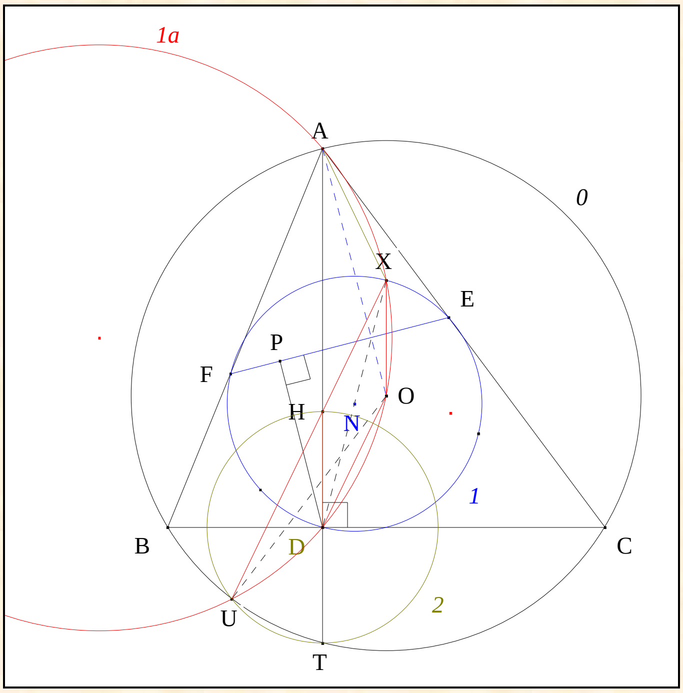
[17] Feuerbach K., *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren* (1822).
Le British Museum possède une des rares copies de ce livre qui n'a pas été traduit en anglais. Certains auteurs considèrent ce livre comme sa thèse.



- Notons $\quad 0 \quad$ le cercle circonscrit à ABC
  et $\quad$ U $\quad$ le second point d'intersection de *1a* avec *0*.

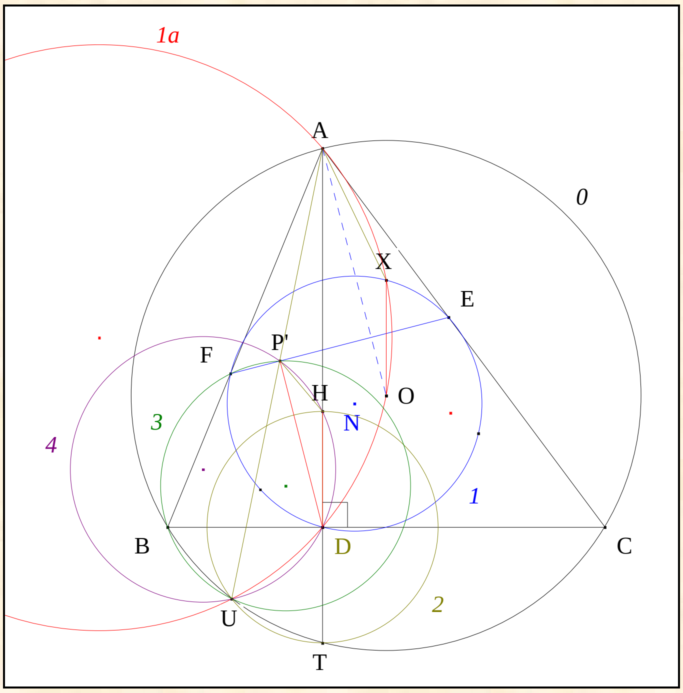
- Le quadrilatère cyclique UDOX ayant ses diagonales [DX] et [OU] égales, est un trapèze isocèle ;
  en conséquence, (UX) // (DO) ;
  nous savons que (DO) // (HX) ;
  par transitivité de //, (UX) // (HX) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (UX) = (HX) ;
  en conséquence, U, H et X sont alignés.

- **Conclusion partielle :** DU =OX = DH.



- Notons $\quad$ T $\quad$ le second point d'intersection de (AD) avec *0*
  et $\quad 2 \quad$ le cercle de centre D passant par H ; il passe par T.

- **Conclusion partielle :** *2* passe par U.

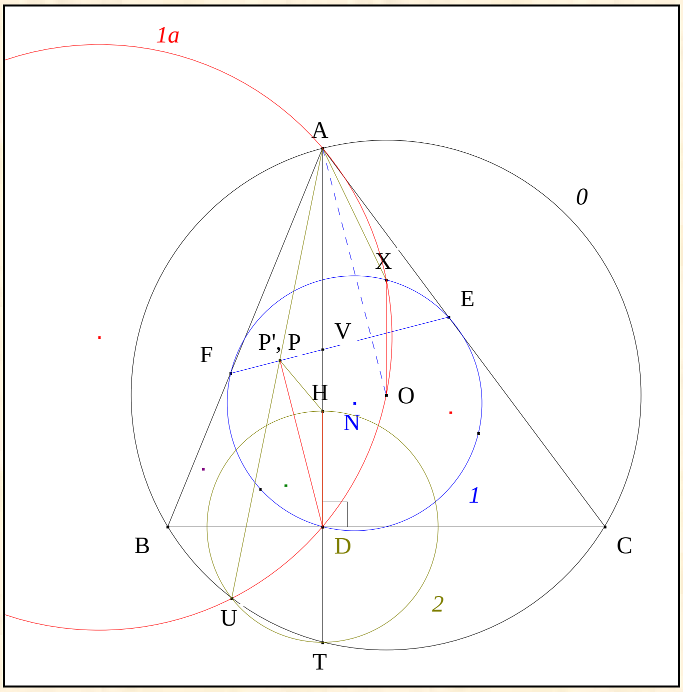


- Notons P' le second point d'intersection de (AU) et (EF).
- Une chasse angulaire :

  * par une autre écriture, <AFP' = <AFE
  * la quadrilatère BCEF étant cyclique, <AFE = <ECB
  * par une autre écriture, <ECB = <ACB
  * par "Angles inscrits", <ACB = <AUB
  * par une autre écriture, <AUB = <P'UB
  * par transitivité de =, <AFP' = <P'UB
  * en conséquence, F, P', U et B sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.
- D'après Gaspard Monge "Le théorème des trois cordes" [18], P', H, D et U sont cocycliques.
- Notons *4* ce cercle.
- **Scolie :** DU = DH
- **Conclusion partielle :** (P'D) est la P'-bissectrice intérieure du triangle P'HU.

[18] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons V le point d'intersection de (AD) et (EF).

- D'après Pappus d'Alexandrie "Diagonales d'un quadrilatère complet" [19]
  appliqué au quadrilatère AFHE, le quaterne (A, H, V, D) est harmonique ;
  en conséquence, le pinceau (P' ; A, H, V, D) est harmonique.

- D'après Apollonius de Perge [20], (P'D) étant la P'-bissectrice extérieure du triangle P'AH,
  (P'V) en est la P'-bissectrice intérieure.

- **Conclusion partielle :** **(1)** (P'D) ⊥ (P'V) i.e. (EF)

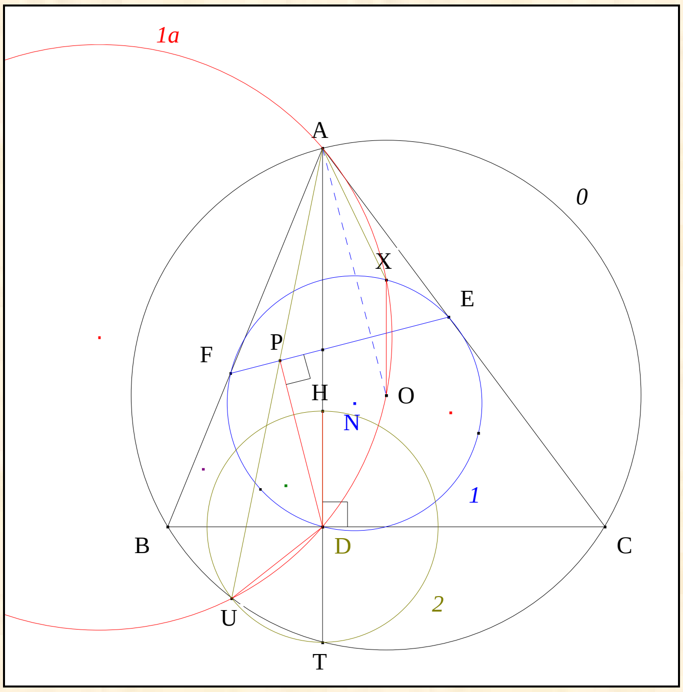
  (2) P' et P sont confondus. [21]

---

[19] Pappus d'Alexandrie, *Collections*, Livre **7**, proposition **131**

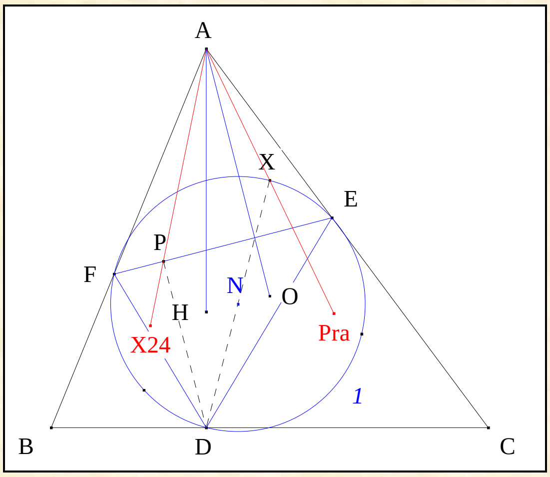
[20] Apollonius de Perge, *Plane Loci*, Livre **2**

[21] Ayme J.-L., Collinear, AoPS du 29/05/2019 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1847817_collinear
La preve proposée est celle de Khanh connu sous le pseudonyme de "Khanhnx" sur *Art of Problem Solving* (AoPS)

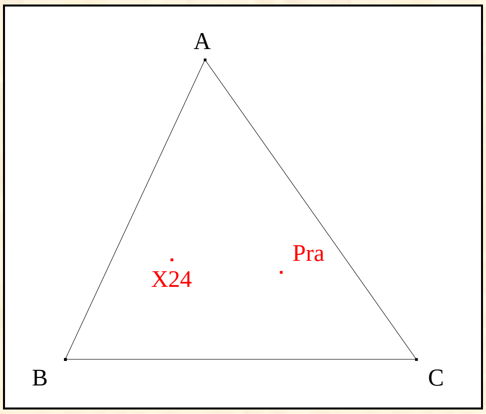


- Une chasse angulaire :

*	par une autre écriture,	<PAH = UAD
*	par "Angles interceptant deux cordes égales",	<UAD = <OAX
*	par transitivité de =,	<PAH = <OAX.



- O étant l'isogonal de H relativement à ABC, (AP) et (AX) sont deux A-isogonales de ABC.



- **Conclusion :** par "visualisation triangulaire" et
  par définition, X_{24} est l'isogonal de Pra.