Lời giải của Jean-Louis Ayme cho bài toán tiếp tuyến chung của hai đường tròn nội tiếp

Nguyễn Văn Linh

Năm 2016

Tóm tắt nội dung

Trong bài viết này xin giới thiệu tới bạn đọc lời giải của tác giả Jean-Louis Ayme cho bài toán của tôi về tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn nội tiếp dựng trên hình vuông. Bài toán đã được tôi giảng dạy cho đội tuyển IMO của Việt Nam năm 2015, phát biểu như sau.

Bài toán. *Cho hình vuông $ABCD$. P là điểm bất kì trên AB. Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác ADP, CBP. DI_1, CI_2 cắt AB lần lượt tại E, F. Đường thẳng qua E song song với AC cắt BD tại M, đường thẳng qua F song song với BD cắt AC tại N. Chứng minh rằng MN là tiếp tuyến chung của (I_1) và (I_2).*

1 Tiểu sử tác giả Jean-Louis Ayme

Bản tiếng Anh sau được trích từ lời giải gốc bằng tiếng Pháp của tác giả.

Une courte biographie de Jean-Louis Ayme

Jean-Louis Ayme, Doctor-Professor of Mathematics, has done all is scolarity in Germany and in France.
After being a student of the Prytanée militaire in La Flèche where René Descartes had spent some time, and later at the military officers Ecole de l'Air of Salon-de-Provence, he joined the University of Science in Marseille before becoming a Professor of mathematics.
After teaching in France for a few years, he continued all his carrier abroad in the following countries : Tunisia, Afghanistan, Marocco, South Africa, Canada, and, finally, on Reunion Island situated in the Indian ocean.

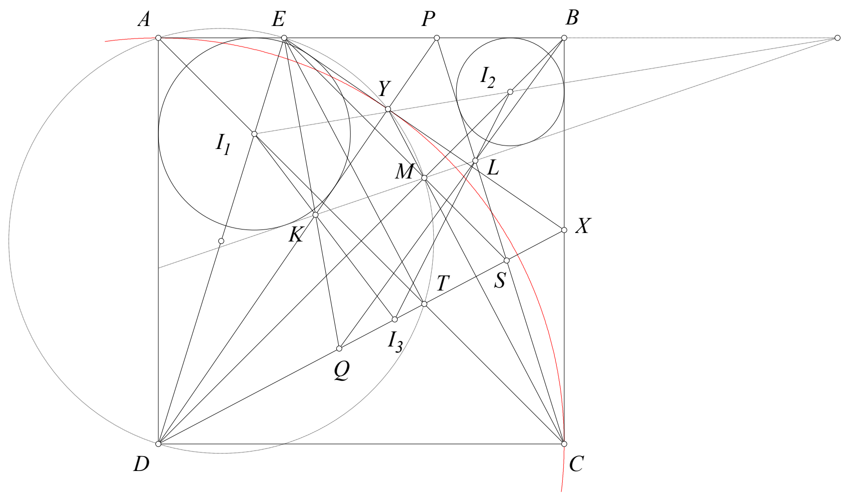
His passion for Geometry allowed him to publish a book entitled *Méthodes et Techniques en Géométrie* [1]
And to create and direct until today the Website *Geometry * Géométrie * Geometria* [2].

2 Phép chứng minh của Jean-Louis Ayme

Chứng minh. Ta phát biểu một bổ đề.

Bổ đề 1. Các đường tròn nội tiếp các tam giác APD, BPC, DPC có chung một tiếp tuyến.

Chứng minh. Xem phần lời giải của tác giả bài toán.
Trở lại bài toán.



Gọi K, L lần lượt là giao của tiếp tuyến chung ngoài thứ hai của (I_1) và (I_2) với PD, PC, I_3 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PDC. Gọi Q là giao của EK và BL.

Do 3 đường tròn $(I_1), (I_2), (I_3)$ có chung một tiếp tuyến nên tứ giác $DKLC$ ngoại tiếp đường tròn (I_3). Suy ra I_1K giao I_2L tại I_3.

Ta có EB, I_1I_2, KL đồng quy tại tâm vị tự ngoài của hai đường tròn (I_1) và (I_2) nên hai tam giác EI_1K và BI_2L thấu xạ. Theo định lý Desargues, giao điểm của các cặp đường thẳng EI_1 và BI_2, EK và BL, I_1K và I_2L thẳng hàng hay $Q \in DI_3$.

Gọi Y là hình chiếu của E trên DP, EY giao BC tại X. Ta có DE là phân giác $\angle ADY$ nên $DY = DA = DC$. Suy ra $\triangle XYD = \triangle XCD$. Từ đó $X \in DI_3$.

Gọi T là giao của DX với AC, ta có $\angle EDX = \dfrac{1}{2}\angle ADC = 45° = \angle TAE$, suy ra tứ giác $AETD$ nội tiếp. Suy ra $\angle ETD = 90°$.

Do $EM \parallel AC$ nên $EM \perp BD$. Suy ra các điểm A, E, Y, M, T, D cùng thuộc đường tròn đường kính DE.

Suy ra $\angle MYX = \angle MDE = \angle BDE = \angle XDC = \angle CYX$. Ta thu được Y, M, C thẳng hàng.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm A, E, Y, M, T, D ta có $AE \cap DY = \{P\}$, $EM \cap DT = \{S\}$, $YM \cap AT = \{C\}$ thẳng hàng.

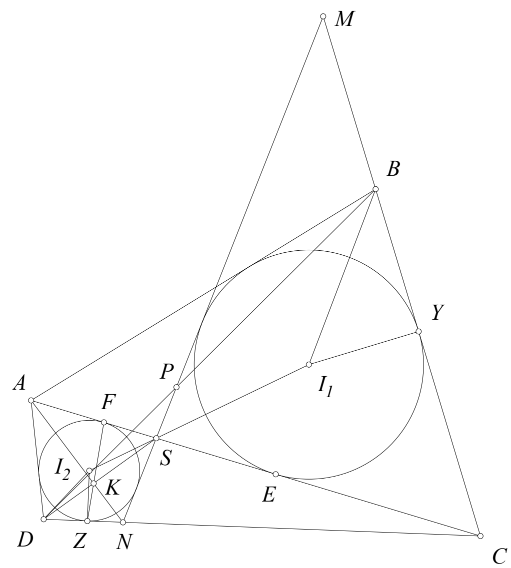
Áp dụng định lý Pappus cho 2 bộ 3 điểm (E, P, B) và (D, Q, S) ta có $EQ \cap PD = \{K\}$, $ES \cap BD = \{M\}$, $PS \cap BQ = \{L\}$ thẳng hàng. Vậy M nằm trên tiếp tuyến chung ngoài của (I_1) và (I_2).

Chứng minh tương tự suy ra MN là tiếp tuyến chung ngoài của (I_1) và (I_2). □

3 Phép chứng minh của tác giả bài toán

Chứng minh. Ta phát biểu một bổ đề.

Bổ đề 2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi (I_1, r_1) và (I_2, r_2) lần lượt là đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ và $\triangle ADC$. Tiếp tuyến chung trong ℓ khác AC của (I_1) và (I_2) cắt BD tại P. Khi đó $\dfrac{BP}{DP} = \dfrac{\cot \angle ABI_1}{\cot \angle ADI_2}$.



Chứng minh. Gọi ℓ cắt CB, CD, CA lần lượt tại M, N, S. (I_1) tiếp xúc với CA, CB lần lượt tại E, Y, (I_2) tiếp xúc với CA, CD lần lượt tại F, Z. Do tứ giác $ADNS$ ngoại tiếp nên AN, DS, FZ đồng quy tại K. Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle DSC$, với cát tuyến $\overline{ANK}$, ta có:

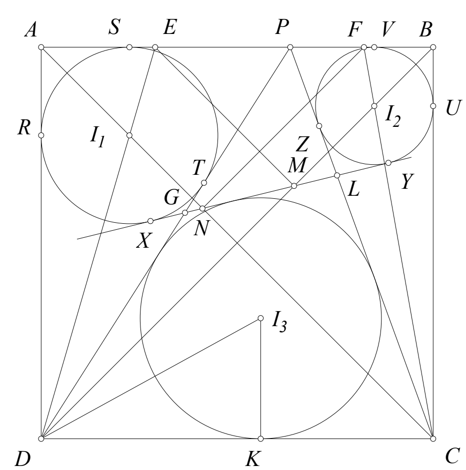
$\dfrac{CN}{ND} = \dfrac{AC}{AS} \cdot \dfrac{KS}{DK} = \dfrac{AC}{AS} \cdot \dfrac{SF}{DZ}$.

Chứng minh tương tự, $\dfrac{MB}{CM} = \dfrac{AS}{AC} \cdot \dfrac{BY}{SE}$

Lại áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle BCD$ với cát tuyến ℓ, ta thu được:

$\dfrac{BP}{DP} = \dfrac{MB}{CM} \cdot \dfrac{CN}{ND} = \dfrac{SF}{SE} \cdot \dfrac{BY}{DZ} = \dfrac{r_2}{r_1} \cdot \dfrac{BY}{DZ} = \dfrac{\cot \angle ABI_1}{\cot \angle ADI_2}$.

Trở lại bài toán.



Gọi (I_3) là đường tròn nội tiếp tam giác PCD.

Ta sẽ chứng minh 3 đường tròn $(I_1), (I_2), (I_3)$ có chung một tiếp tuyến.

Gọi XY là tiếp tuyến chung ngoài khác AB của (I_1) và (I_2), XY giao PD, PC lần lượt tại G, L. (I_1) tiếp xúc với AD, DP, PA lần lượt tại R, T, S; (I_2) tiếp xúc với BC, CP, PB lần lượt tại U, Z, V.

Tứ giác $GLCD$ ngoại tiếp khi và chỉ khi $GL + CD = DG + CL$.

$\Leftrightarrow XY - GX - LY + CD = DT - GT + CZ - LZ$

$\Leftrightarrow SV + CD = DT + CZ = DR + CU = AD - AR + BC - BU$.

$\Leftrightarrow AB - AS - BV + CD = AD - AR + BC - BU$.

$\Leftrightarrow AB + CD = AD + BC$, luôn đúng.

Kẻ $I_3K \perp CD$. Ta có $\angle I_1DI_3 = \dfrac{1}{2}\angle ADC = \angle BDC$ nên $\angle EDM = \angle I_3DK$.

Do đó $\triangle EDM \sim \triangle I_3DK$. Suy ra $\dfrac{DM}{MB} = \dfrac{DM}{ME} = \dfrac{DK}{KI_3} = \cot\angle I_3DC = \dfrac{\cot\angle I_3DC}{\cot 45^\circ} = \dfrac{\cot\angle I_3DC}{\cot\angle I_2BC}$.

Áp dụng bổ đề trên suy ra M nằm trên tiếp tuyến chung trong của (I_2) và (I_3). Chứng minh tương tự suy ra MN là tiếp tuyến chung của (I_1) và (I_2). $\square$

Tài liệu

[1] Ayme J.-L., *Méthodes et Techniques en Géométrie, A propos de la Droite de Newton, Ellipses*, Paris, 2003 ; ISBN 2-7298-I585-6

[2] http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[3] AoPS topic *Common tangent in square*, http://www.artofproblemsolving.com/community/u57217h1112721p5554173

[4] Nguyễn Văn Linh, *Vietnam IMO training 2015*, Euclidean Geometry Blog. https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2016/01/21/vietnam-imo-training-2015/

Email: ***Lovemathforever@gmail.com***