PROBLÈMES REVISITÉS

VACLAV JERABEK

UN GEOMÈTRE

DE

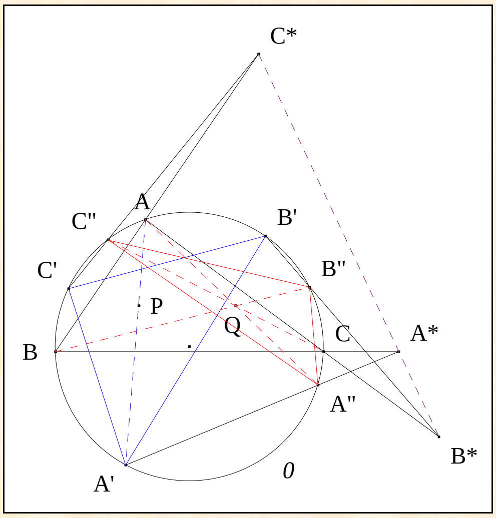
L'EMPIRE AUSTRO-HONGROIS,

PUIS

DE LA RÉPUBLIQUE TCHÈQUE

Guerre sacrée de l'Être des communautés naturelles
contre
l'Avoir d'une société de la marchandise.

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. Dans cet article, l'auteur propose de revisiter quelques résultats d'un géomètre oublié Vaclav Jerabek.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. In this article, the author proposes to revisit some results of a forgotten geometer Vaclav Jerabek.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

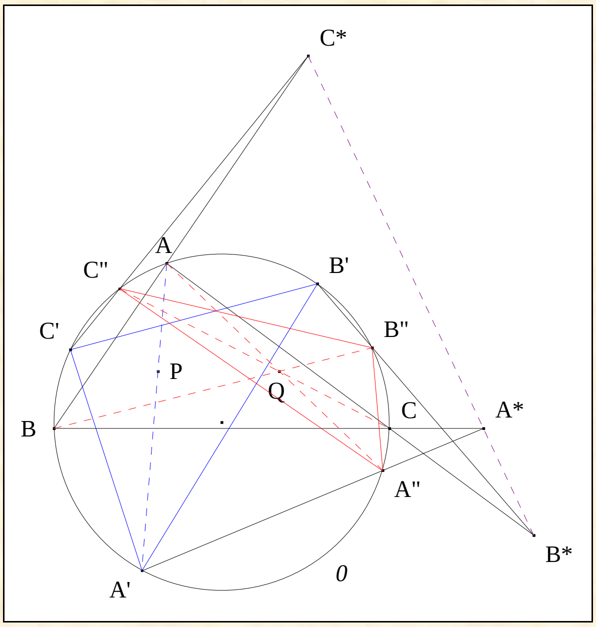
[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 02/07/2022 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sommaire

A. UN THÉORÈME APPAREMMENT ANONYME

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit de ABC,
P un point,
A'B'C' le triangle P-circumcévien de ABC,
A", B", C" trois points de *0*,
A*, B*, C* les points d'intersection de (A'A") et (BC), de (B'B") et (CA), de (C'C") et (AB)
et Q le point d'intersection (AA") et (BB")

Donné : (AA"), (BB"), (CC") sont concourantes
si, et seulement si,
A*, B* et C* sont alignés.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [2].
Ce résultat apparaît comme une généralisation du "Point de Steinbart" [3] d'Oliver Funck.

Note historique : en 20000, dans son Message *Hyacinthos*, Bernard Gibert [4] commence par

a very good friend of mine is offering you this little problem…

continue en présentant ce problème

---

2 Ayme J.-L., La promesse-Le tour-Le prestige, G.G.G. vol. **4**, p.5-11 ; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
3 Ayme J.-L., Les points de Steinbart et de Rabinowitz, G.G.G. vol. **3** ; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
4 Gibert B., A synthetical challenge, Message *Hyacinthos* # **523** du 16/03/2000 ; http://hyacinthos.epizy.com/message.php?msg=523

Let ABC a triangle inscribed in a conic [can be a circle]…

et termine par

Can you "synthetically" prove that the points A', B', C' are collinear?

La solution de Darij Grinberg [5] concernant un cercle, a recours à "la loi des sinus", puis au théorème de Jean de Céva dans sa version trigonométrique suivi du théorème de Ménélaüs d'Alexandrie.
Dans un dernier message [6], Darij Grinberg répond à une remarque de Bernard Gibert en disant

but I think the problem was posed for circles, because it
is hard to understand what means the word "synthetical" for conics.

Finalement en 2012, Florentin Smarandache et Ion Patrascu attribuent ce résultat au géomètre tchèque Vaclav Jerabek.

Archive :

Theorem 59 (Jerabeck)

If the lines which connect the vertexes of the triangle ABC with two points M', M'' intersect the second time the triangle's circumscribed circle in the points A', B', C' and A'', B'', C'', then the triangle determined by the lines $A'A'', B'B'', C'C''$ is homological with the triangle ABC.

Proof

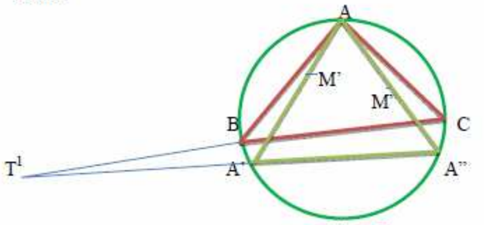


Fig. 74

[7]

Jerabek theorem:

Let $\triangle P_aP_bP_c$ be the circumcevian triangle of P WRT $\triangle ABC$.
Let $\triangle Q_aQ_bQ_c$ be the circumcevian triangle of Q WRT $\triangle ABC$.

Then the triangle formed by P_aQ_a, P_bQ_b, , P_cQ_c is perspective with $\triangle ABC$.

[8]

5 Grinberg D., Proof of a "synthetical challenge", Message *Hyacinthos* # **6208** du 25/12/2002 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/6208

6 Grinberg D., Proof of a "synthetical challenge", Message *Hyacinthos* # **6214** du 26/12/2002 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/6214

7 Florentin Smarandache et Ion Patrascu, *The geometry of homological triangles* (2012) 111

8 Telv Cohl ; https://artofproblemsolving.com/community/q1h610802p3640309

B. DES PROBLÈMES

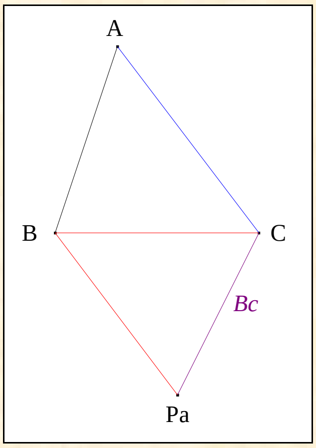
DE

VACLAV JERABEK

1. Un lemme

VISION

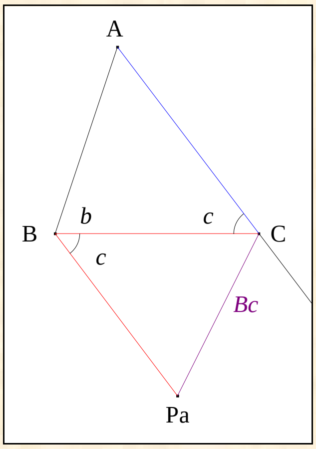
Figure :



Traits : ABC un triangle,
Bc la C-bissectrice extérieure de ABC,
et Pa le point d'intersection de *Bc* et de la parallèle à (CA) passant par B.

Donné : le triangle BCPa est B-isocèle.

VISUALISATION



- Notons <BAC = a, <CBA = b, <ACB = c.

- Une chasse angulaire :

* par "Angles alternes-internes", <PaBC = c

* par "Angle extérieur" et "bissectrice", <BCPa = (Π – c)/2

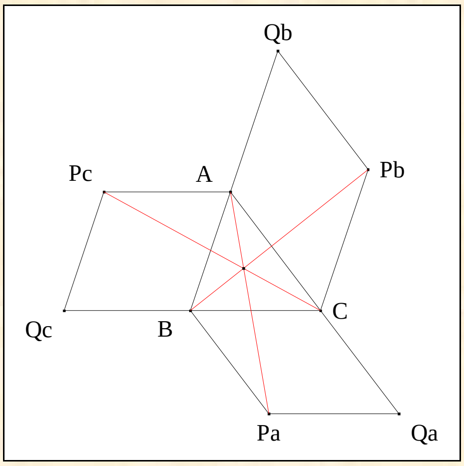
* par "Le théorème 180", <CPaB = (Π – c)/2.

- **Conclusion :** le triangle BCPa ayant deux angles à la base égaux, est B-isocèle.

2. Un triangle bordé de losanges

VISION

Figure :

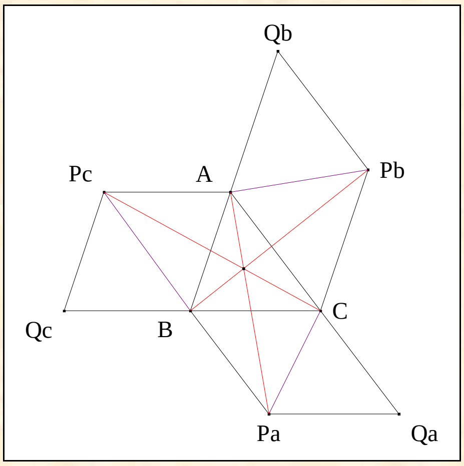


Traits : ABC un triangle,
Bc la C-bissectrice extérieure de ABC,
Pa le point d'intersection de *Bc* et de la parallèle à (CA) issue de B,
Qa le point tel que CBPaQa soit un parallélogramme

et circulairement, Ba, Pb, Qb, Bc, Pc,Qc.

Donné : (APa), (BPb) et (CPc) sont concourantes.

VISUALISATION



- D'après Lemme **1**, en conséquence, CBPaQa ayant deux côtés consécutifs égaux (BC et BPa) est un losange [9] ; ABC est bordé de losanges.

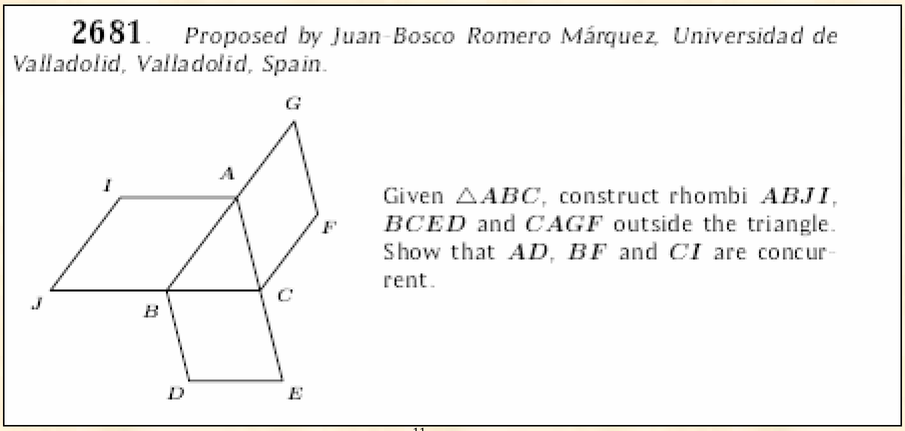
- D'après Lemme **1**,
  * <CPaB = (Π – c)/2
  * <APbC = (Π – a)/2
  * <BPcA = (Π – b)/2.

- Par addition membre à membre et "Le théorème 180", <CPaB + < APbC + < BPcB = Π.

- **Conclusion :** d'après Samuel Leroy Greitzer (Cf. **D.** Appendice **1**), (APa), (BPb) et (CPc) sont concourantes.

Note historique : ce problème a été redécouvert en 2006 par le géomètre espagnol Juan-Bosco Romero Marquez [10].

Archive :


2681. *Proposed by Juan-Bosco Romero Márquez, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain.*

Given $\triangle ABC$, construct rhombi $ABJI$, $BCED$ and $CAGF$ outside the triangle. Show that AD, BF and CI are concurrent.

[11]

9 Anciennement, il était appelé rhombe du grec ρόμβος
10 Romero Marquez J.-B., *Mathlinks* du 04/12/2006.
11 Romero Marquez J.-B., Problème **2681**, *Crux Mathematicorum* (2001) **27**, n7, p. 461 ; https://smc.math.ca/publications/crux-fr/

3. Un triangle bordé de parallélogrammes particuliers [12]

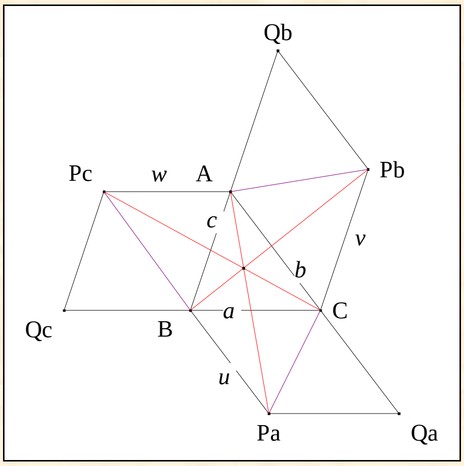
Une généralisation

de

Juan-Bosco Romero Marquez

VISION

Figure :



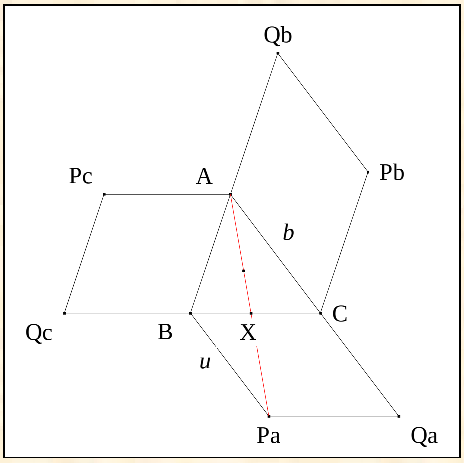
Traits :	ABC	un triangle,
	a, b, c	les longueurs BC, CA, AB,
	BPaQaC	un parallélogramme extérieur à ABC tel que (BPa) soit parallèle à (CA),
	CPbQbA	un parallélogramme extérieur à ABC tel que (CPb) soit parallèle à (AB),
	APcQcB	un parallélogramme extérieur à ABC tel que (APc) soit parallèle à (BC)
et	u, v, w	les longueurs BPa, CPb, APc.

Donné : (APa), (BPb) et (CPc) sont concourantes *si, et seulement si*, u.v.w = a.b.c.

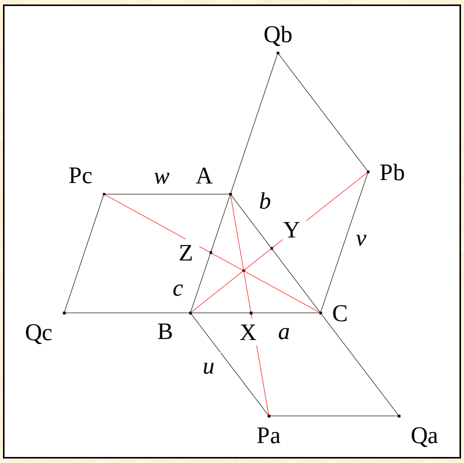
VISUALISATION DOUBLE [13]

[12] Romero Marquez J.-B., Universidad de Valladolid, Valladolid (Spain)
Mathlinks du 04/12/2006.

[13] Solution : Laversha G., Sy. Paul's school, London (England)



- Notons X le point d'intersection de (APa) et (BC).
- Les triangles BXPa et CXA étant semblables, XB/XC = BPa/CA = u/b.



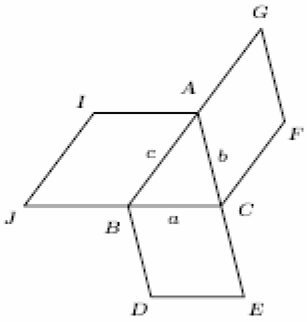
- Notons Y, Z les points d'intersection de (BPb) et (CA), (CPc) et (AB).
- Mutatis mutandis, nous montrerions que YC/YA = v/c et ZA/ZB = w/a.
- Évaluation le produit de rapports : XB/SC . YC/YA . ZA/ZB = (u.v.w)/(b.c.a).
- **Conclusion :** en se référant au théorème de Ménélaüs d'Alexandrie,

  (APa), (BPb) et (CPc) sont concourantes *si, et seulement si*, u.v.w = a.b.c.

Scolie : pour J.-B. Romero Marquez, u = √ab , v = √bc , w = √ca.

Archive :

2680. *Proposed by Juan-Bosco Romero Márquez, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain.*



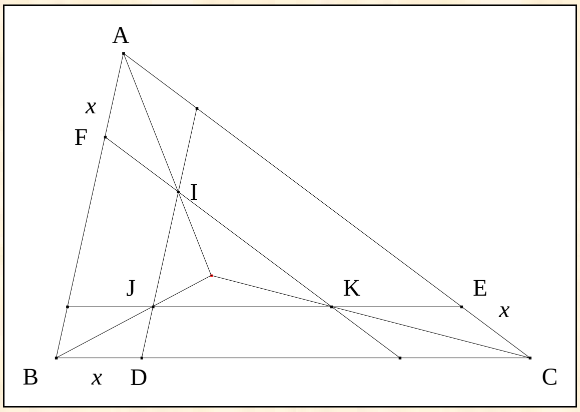
Given $\triangle ABC$, construct parallelograms $ABJI$, $BCED$ and $CAGF$ outside the triangle such that $AI = \sqrt{ca}$, $BD = \sqrt{ab}$ and $CF = \sqrt{bc}$. Show that AD, BF and CI are concurrent.

[14]

4. Un curieux problème de Jerabek [15]

VISION

Figure :



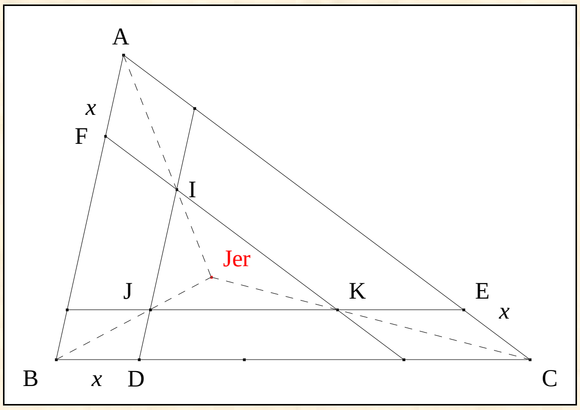
Traits :	ABC	un triangle,
	D, E, F	trois points de [BC], [CA], [AB] tels que AF = BD = CE
	I	le point d'intersection des parallèles à (AB), (AC) issues resp. de D, F,
	J	le point d'intersection des parallèles à (BC), (BA) issues resp. de E, D
et	K	le point d'intersection des parallèles à (CA), (CB) issues resp. de F, E.

Donné : (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

VISUALISATION

[14] Romero Marquez J.-B., Problème **2680**, *Crux Mathematicorum* (2001) **27**, n**7**, p. 461 ; https://smc.math.ca/publications/crux-fr/
Solution de Gerry Laversha : *Crux Mathematicorum* (2002) **28**, n**7**, p. 476-478 ; https://smc.math.ca/publications/crux-fr/

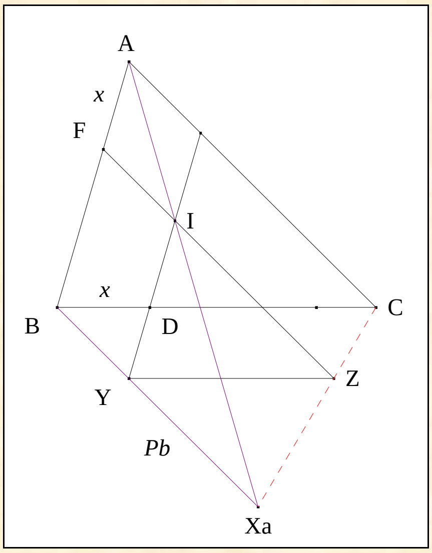
[15] Ayme J.-L., Un problème de Jerabek, *Les-Mathematiques.net* ;
https://les-mathematiques.net/vanilla/index.php?p=/discussion/2330651/un-probleme-de-jerabek#latest



- **Conclusion :** d'après Thalès de Milet [16], les triangle IJK et ABC étant homothétiques, (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

- Notons Jer ce point de concours.

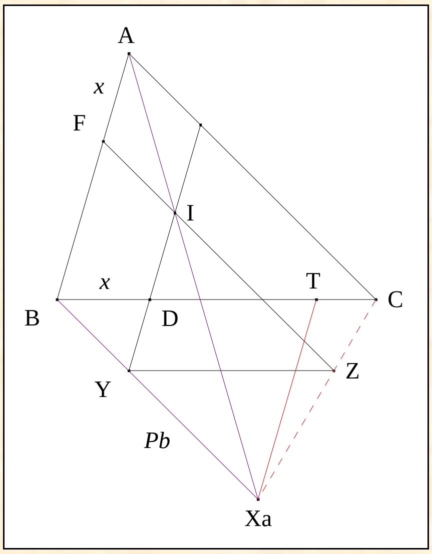
Scolie : Jer est un point fixe [17]



- Notons *Pb* la parallèle à (AC) issue de B,
  Xa, Y les points d'intersection de *Pb* resp. avec (AI), (DI)
  et Z le point d'intersection de (FF) et de la parallèle à (BC) issue de Y.

- Les triangles ABC et IYZ étant homothétiques, C, Z et Xa sont alignés.

[16] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. 6, p. ; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[17] Concur at a fix point, AoPS du 28/06/2022 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h2873013_concur_in_a_fix_point

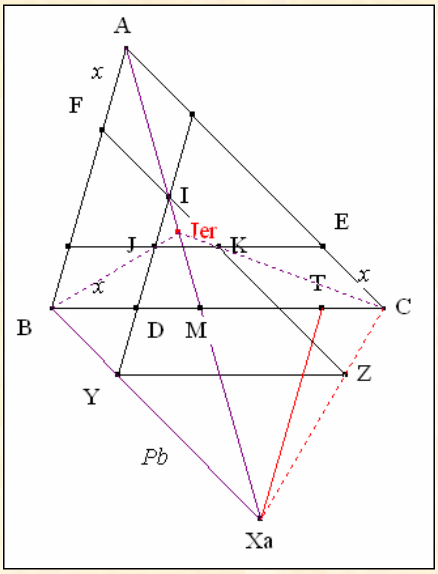


- Notons T le point de [BC] tel que BT = AB.
- Par déplacement, *si*, F se déplace sur (AB) en B

  alors, I est en Y , Z en Xa, D en T ;

  en conséquences, **(1)** (XaT) // (YD) (BD/BT = x/c = FI/BXa = BY/BXa)

  (2) le triangle XaTB est semblable au triangle ABC.



- Une chasse segmentaire :

  * XaTB étant semblable à ABC, BXa/CA = BT/CB

  * par substitution, BT/CB = AB/BC

  * par transitivité de =, BXa/CA = AB/BC.

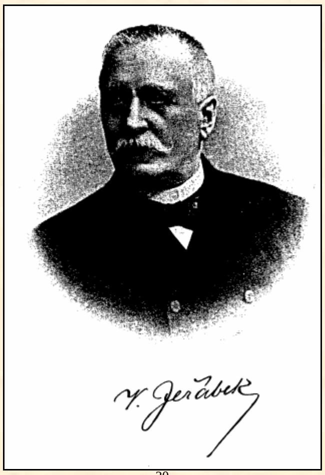
- Notons Xb, Xc les points définis d'une façon analogue à Xa.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que, * CXb/AB = BC/CA

* AXc/BC = CA/AB.

- Par multiplication membre à membre, BXa/CA . CXb/AB . AXc/BC = 1.
- **Conclusion :** d'après **B. 3.** et axiome d'incidence **Ia**, (AXa), (BXb), (CXc) concourent au point fixe Jer.

(3) Jer est un point dit "de Jerabek". [18]

5. Une courte biographie de Václav Jeřábek [19]



20

Václav Jeřábek est né le 11 décembre 1845 à Kolodeje (Pardubice, Empire d'Autriche).
Élève de la Realschule de Pardubice, puis de celle de Pisek, il entre en 1866 à l'Institut polytechnique de Vienne (Autriche).
En 1870, il enseigne à la Realschule de Litomys où il obtient le titre de professeur en 1872. L'année suivante, il enseigne à la Realschule de Telc (Moravie).
En 1881, il est nommé professeur à la Realschule de Brünn (aujourd'hui Brno). En 1901, il en devient le directeur jusqu'à sa retraite en 1907.
Dans ses dernières années, il perd complètement la vue suite à une cataracte mal soignée et décède le 20 décembre 1931 à Telc (Tchécoslovaquie, aujourd'hui Tchéquie) après avoir fait don de sa vaste bibliothèque de l'Université de Brno.

Vaclav Jerabek a été membre de la Société royale de Bohême des Sciences et membre honoraire de l'Union des mathématiciens tchèque.
Il a écrit plus de 50 articles en tchèque, allemand et français, publiés pour la plupart en *Casopis pro pestovani matematiky un fysiky*, certains d'entre eux dans le journal belge *Mathesis*.

---

[18] Quim Castellsaguer, *The Triangles Web* ; http://www.xtec.cat/~qcastell/ttw/ttweng/definicions/d_Jerabek_p.html

[19] traduit par Emil Jerabek, communiquée par Francisco Javier García Capitán ; http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Jerabek.html

[20] Sobotka, J. **Václav Jeřábek**. (Czech). Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, vol. **45** (1916), issue **3**, pp. 450-456 ; https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/109100


0 30 60 km
0 30 60 mi
POLOGNE
Sněžka
Ústí
Liberec
PRAGUE
Cheb
Plzeň
BOHÊME
Hradec Králové
SILÉSIE
Ostrava
Olomouc
MORAVIE
Brno
Austerlitz
Budějovice
ALLEMAGNE
SLOVAQUIE
AUTRICHE
HONGRIE

D. L'HYPERBOLE DE JERABEK

1. Les cercles d'Euler des triangles AHO

Proposed

by

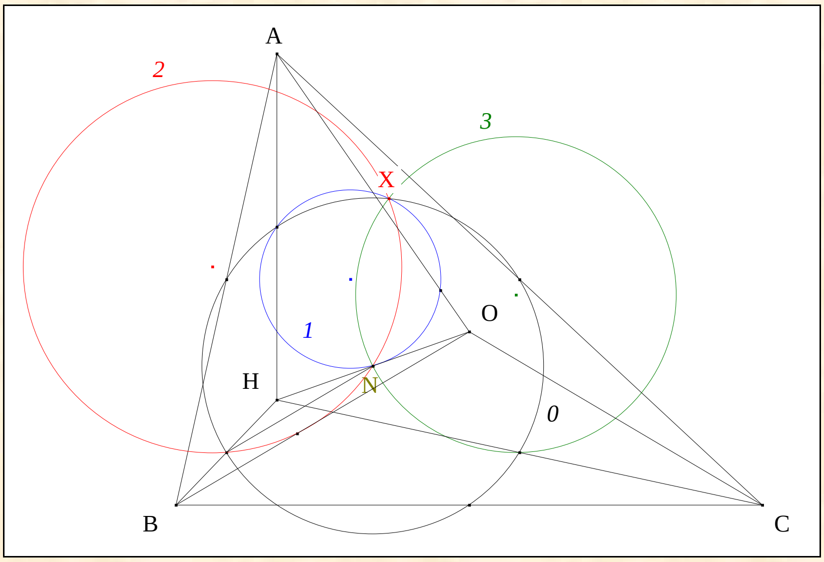
the Professor J. G. Boubals

de

l'École du Génie de Montpellier (France) en 1886

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
O, H, N le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre de ABC, le milieu de [OH],
0, *1*, *2*, *3* les cercles d'Euler des triangles ABC, AHO, BHO, CHO
et X le second point d'intersection distinct de N de *1* et *2*.

Donnés : **(1)** *1*, *2* et *3* concourent en N [21]

(2) *1*, *2* et *3* concourent en X sur *0*. [22]

Commentaire : des preuves synthétiques de ces résultats peuvent être vues sur le site de l'auteur. [23]

---

[21] Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler,…Miquel, G.G.G. vol. **2**, p. 3-5 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[22] Boubals J. G., *Journal de Mathématiques Elémentaires* p. 193
Solution de Boutin, *Journal de Mathématiques Elémentaires* **91**, p. 215
Euler's circles of AHO, AoPS du 15/03/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1063244_eulers_circles_of_aho
Nguyen van Linh ; https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2009/10/25/jerabek-point/

[23] Ayme J.-L., Les points de J. G. Boubals G.G.G. vol. **12**, p. 8 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

2. Trois droites d'Euler concourantes [24]

Proposed

by

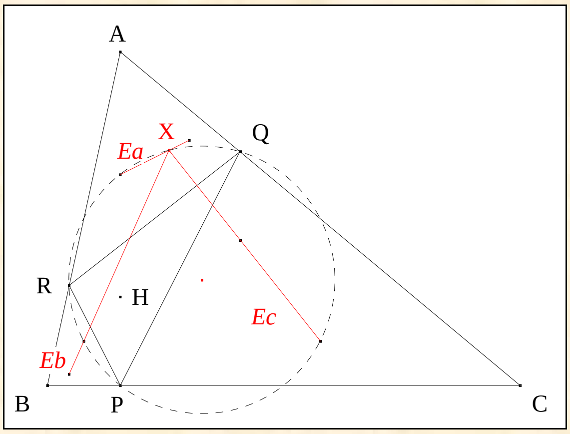
Dr. John Casey *Mathesis* (1886) 108

Diophante

Problème **D 1702**

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre,
	PQR	le triangle orthique,
	Ea, *Eb*, *Ec*	les droites d'Euler des triangles AQR, BRP, CPQ
et	X	le point d'intersection de Ea et *Eb*.

Donné : *Ea*, *Eb* et *Ec* concourent en X sur le cercle d'Euler de ABC [25]**.**

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [26].

---

[24] *Diophante* D**1702** ; http://www.diophante.fr/problemes-du-mois/5134-d1702-trois-droites-d-euler
intersection of 3 Euler Line st is point on 9-Point Circle, AoPS du 23/08/2013 ;
https://artofproblemsolving.com/community/q1h550657p3196025
Euler lines concurrent on Euler circle, AoPS du 19/02/2021 ;
https://artofproblemsolving.com/community/q1h2457609p20482968

[25] i.e. le cercle circonscrit de PQR.

[26] Ayme J.-L., *Diophante* D**1702**, Trois droites d'Euler, G.G.G. vol. **38** ; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

3. A propos de l'hyperbole de Jerabek [27]

HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

* par les trois sommets d'un triangle passe un cercle, voire une conique

* cinq points en position générale déterminent une conique

* un pascal [28] inscrit à une conique renvoie à un sixième point

* *si*, deux des sommets d'un pascal est à l'infini *alors*, cette conique est une hyperbole [29]

* une hyperbole circonscrite à un triangle est équilatère
  si, et seulement si,
  elle passe par l'orthocentre de ce triangle [30]

* le centre d'une hyperbole équilatère est sur le cercle d'Euler… [31]

HYPERBOLE DE JERABEK

* relativement à un triangle ABC,
  l'isogonale d'une ménélienne *M* est une conique *C* passant par les sommets de ce triangle [32]

* *si*, *M* coupe le cercle circonscrit à ABC *alors*, *C* est une hyperbole notée *H*

* *si*, *H* passe par l'orthocentre H de ABC
  alors, *H* est équilatère notée *He*

* *He* passe de plus par le centre O du cercle circonscrit, isogonal de H [33]

* *M* devenant la droite d'Euler de ABC, *He* est dite de Jerabek

* le centre de *He* est sur le cercle d'Euler de ABC [34]

* ce centre nommé "point de Jerabek de ABC" est répertorié sous X_{125} chez ETC [35].

LE POINT X [36]

à démontrer

* le point X défini en **D. 1** et **2,** X est "le point de Jerabek de ABC"

* relativement au cercle d'Euler de ABC, X est l'antipôle de l'antipoint d'Euler [37]…

---

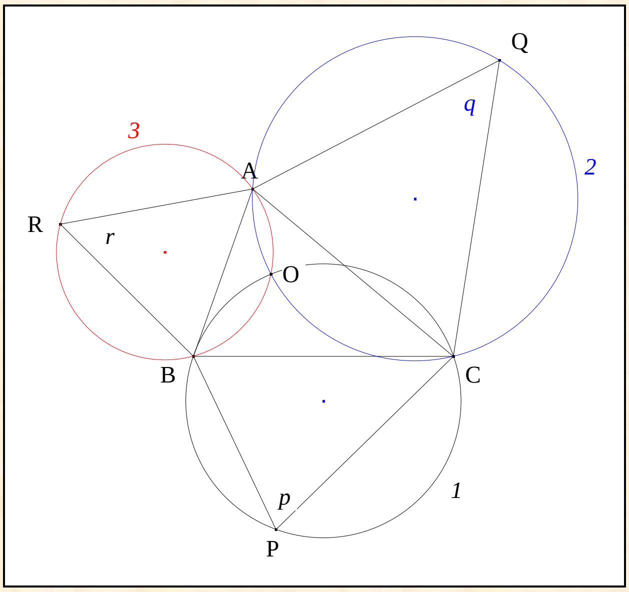
27 Jerabek V., *Mathesis* (18888) 81
28 Ayme J.-L., Approche pascalienne de l'hyperbole équilatère, G.G.G. vol. **64**, p. 3 ; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
29 Ayme J.-L., Approche pascalienne de l'hyperbole équilatère, G.G.G. vol. **64**, p. 7 ; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
30 Ayme J.-L., Approche pascalienne de l'hyperbole équilatère, G.G.G. vol. **64**, p. 13 ; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
31 Ayme J.-L., Approche pascalienne de l'hyperbole équilatère, G.G.G. vol. **64**, p. 14-16 ; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
32 Considérer les points d'intersection de *M* avec les droites latérales de ABC
33 Théorème de Brianchon-Poncelet ;
F. G.-M., *Exercices de Géométrie*, **6**th ed. (1920), Rééditions Jacques Gabay (Gabay reprint), Paris (1991) 553
34 Mathieu J. J. A., *Nouvelles Annales* 1863, p. 475-476
35 Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* ; https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
36 **D. 1** et **2**
37 Ayme J.-L., Antipoint d'Euler, G.G.G. vol. **25** ; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
Old problem about Jerabek point, AoPS du 24/10/2009 ;
https://artofproblemsolving.com/community/q1h307885p1662850

D. APPENDICE

1. Le point de Samuel Greitzer

VISION

Figure :



Traits : ABC		un triangle,
PBC, QCA, RAB		trois triangles extérieurs à ABC,
1, *2*, *3*		les cercles circonscrits à PCB, QCA, RAB
et O		le second point d'intersection de *1* et *2*.

Donné : <P + <Q + <R = 180° *si, et seulement si,* *1*, *2* et *3* sont concourants.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [38].

Scolie : le point O, point de concours de *1*, *2’ 3*, est "le point de Greitzer de ABC".

Note historique : ce résultat qui a fasciné le Dr. Samuel Leroy Greitzer, a donné l'idée à Greeg Patruno, auteur de l'article "Blib Alleys" dans la revue *Arbelos* [39] , d'appelé "Point de Greitzer", le point de concours des trois cercles de la situation traitée ci-avant.
Ce résultat a fait l'objet d'un Message *Hyacinthos* de Darij Grinberg [40].

Une courte biographie de Samuel Leroy Greitzer

[38] Ayme J.-L., Deux triangles semblables adjacents…, G.G.G. vol. **16**, p.26-28 ; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[39] *Arbelos*, Volume **5**, chapter **4**, p. 92
[40] Grinberg D., Message *Hyacinthos* du 07-08-03

Samuel Leroy Greitzer est né le 10 août 1905 en Russie.
En 1906, les parents de Samuel Greitzer quittent Odessa (Russie) pour émigrer aux États-Unis.
Professeur à l'université Yeshiva où il a obtenu son titre de docteur, puis à l'Institut Polytechnique de Brooklyn, il enseigne enfin, à l'université Rutgers. De 1974 à 1983, il est le coach de l'équipe américaine aux Olympiades Mathématiques nationales et internationales. De 1982 à 1987, il met son expérience au service de jeunes et talentueux mathématiciens désirant se perfectionner dans ce domaine, en publiant la revue *Arbelos*.
Il décède le 22 février 1988.

E. LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A	
aligné	collinear
annexe	annex
axiome	axiom
appendice	appendix
adjoint	associate
a propos	by the way btw
acutangle	acute angle
axiome	axiom
B	
bissectrice	bisector
bande	strip
C	
centre	incenter
centre du cercle circonscrit	circumcenter
cercle circonscrit	circumcircle
cévienne	cevian
colinéaire	collinear
concourance	concurrence
coincide	coincide
confondu	coincident
côté	side
par conséquence	consequently
commentaire	comment
D	
d'après	according to
donc	therefore
droite	line
d'où	hence
distinct de	different from
E	
extérieur	external
F	
figure	figure
H	
hauteur	altitude
hypothèse	hypothesis
I	
intérieur	internal
identique	identical
i.e.	namely
incidence	incidence
L	
lemme	lemma
lisibilité	legibility
M	
mediane	median
médiatrice	perpendicular bissector
milieu	midpoint
N	
Notons	name
nécessaire	necessary
note historique	historic note
O	
orthocentre	orthocenter
ou encore	otherwise
P	
parallèle	parallel
parallèles entre elles	parallel to each other
parallélogramme	parallelogram
pédal	pedal
perpendiculaire	perpendicular
pied	foot
point de vue	point of view
postulat	postulate
point	point
pour tout	for any
Q	
quadrilatère	quadrilateral
R	
remerciements	thanks
reconnaissance	acknowledgement
respectivement	respectively
rapport	ratio
répertorier	to index
S	
semblable	similar
sens	clockwise in this
order	
segment	segment
Sommaire	summary
symédiane	symmedian
suffisante	sufficient
sommet (s)	vertex (vertice)
T	
trapèze	trapezium
tel que	such as
théorème	theorem
triangle	triangle
triangle de contact	contact triangle
triangle rectangle	right-angle triangle