

L'AXIOMATIQUE DE CHOQUET¹

1. Schéma général :

un plan est un ensemble, noté P , muni d'une structure par la donnée d'un ensemble de parties de P appelées droites. Chaque droite est elle-même munie d'une structure que précisent les axiomes, et les structures des diverses droites sont reliées entre elles par d'autres axiomes dits axiomes de passage.

2. Axiome 0 :

le plan contient au moins deux droites distinctes, et toute droite contient au moins deux points distincts².

3. Axiomes d'incidence :

axiome Ia :

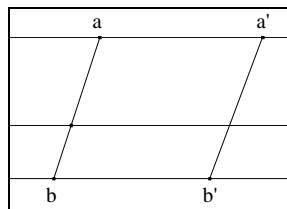
pour toute couple de points distincts de P , il existe une droite et une seule contenant ces deux points.

axiome Ib :

pour toute droite et pour tout point, il passe par ce point une parallèle et une seule à cette droite³.

4. Axiomes d'ordre :

axiome IIa : à toute droite sont associées deux structures d'ordre total, opposées l'une de l'autre.



axiome de passage IIb :

pour tout couple (A,B) de droites parallèles, et pour tout points a, b, a', b' tels que $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$, toute parallèle à ces droites qui rencontre $[ab]$ rencontre aussi $[a'b']$.

5. Axiomes de structure affine :

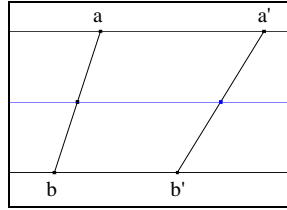
axiome IIIa : au plan P est associé une application de $P \times P$ dans \mathbb{R}_+ , appelée distance, telle que

- (1) pour tous x, y de P , $d(x, y) = d(y, x)$
- (2) pour toute droite orientée D , tout x de D , et tout nombre $l \geq 0$, il existe dans D un point y unique tel que $x \leq y$ et $d(x, y) = l$
- (3) $x \in [ab] \Rightarrow d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)$

¹ Choquet Gustave, *L'enseignement de la géométrie*, 1964, Hermann, Paris.

² Cet axiome résulte de l'axiome IIIa que toute droite contient au moins deux points distincts et de l'axiome IVa que le plan contient au moins deux droites distinctes.

³ Postulat d'Euclide reformulé par le mathématicien et physicien écossais John Playfair (1748-1819).



axiome de passage IIIb :

pour tout couple (A, B) de droites parallèles, et pour tous points a, b, a', b' tels que $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$, la parallèle à ces droites qui passe par le milieu de (a, b) passe aussi par le milieu de (a', b') .

6. Axiome des perpendiculaires :

axiome IVa :

- (1) $A \perp B \Leftrightarrow B \perp A$
- (2) $A \perp B \Rightarrow [A \text{ et } B \text{ ne sont pas parallèles}]$
- (3) pour toute droite A , il existe une droite B telle que $A \perp B$
- (4) pour tout couple (A, B) tel que $A \perp B$ on a l'équivalence :
 $B // B' \Leftrightarrow A \perp B'$.

axiome de passage IVb :

pour tout couple (A, B) de demi-droites de même origine, on a $c(A, B) = c(B, A)$ ⁴.

⁴ Rapport de projection projeté sur projetant.