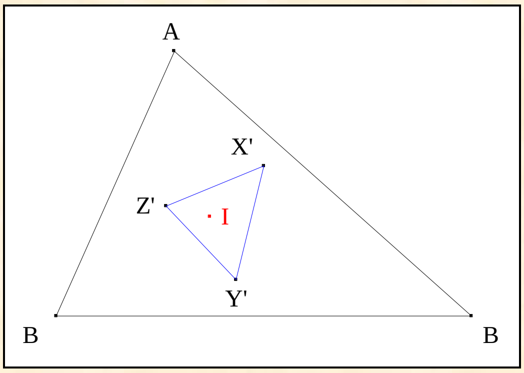
L'ORTHOCENTRE DU TRIANGLE DE FUHRMANN

PREMIERE PREUVE SYNTHÉTIQUE [1]

†

Jean - Louis AYME



Résumé. Nous présentons la première preuve purement synthétique du résultat de Milorad Stevanovic concernant l'orthocentre du triangle de Fuhrmann ainsi qu'un historique de sa genèse.

Sommaire

A. Présentation 2
1. Le triangle de Fuhrmann
2. Le résultat de Milorad Stevanovic
3. Une courte biographie de Milorad Stevanovic

B. Un historique de la preuve 3
1. Les trois perpendiculaires de Grinberg
3. Les trois cercles de Grinberg
3. Un point remarquable sur chaque perpendiculaire de Grinberg
4. Deux triangles en perspective et l'étonnant résultat de Stevanovic

C. Annexe 12
1. Triangles orthologiques
2. Un théorème de Catalan
3. Le théorème de Schoute
4. Un résultat de Carnot
5. Le théorème de Reim
6. Un résultat de Poncelet
7. Le théorème faible de Desargues

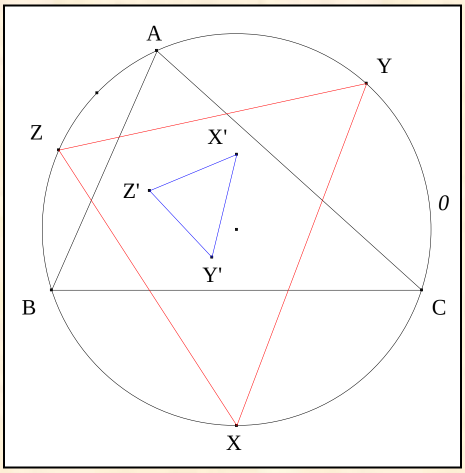
D. Références 15

[1] Ayme J.-L., Revistaoim (Espagne) 23 (2006).

A. PRÉSENTATION

1. Le triangle de Fuhrmann

C'est en 1890 qu'apparaît, pour la première fois, à la page 107 du traité de Géométrie intitulé *Synthetische Beweise Planimetrischer Sätze* [1] écrit par le géomètre allemand Wilhelm Furhmann (1833-1904) alors professeur au Gymnasium de Königsberg, le célèbre triangle qui aujourd'hui porte le nom de son auteur et qu'il appelait en allemand dans le texte "Das Spiegeldreieck" i.e. "le triangle réfléchi".

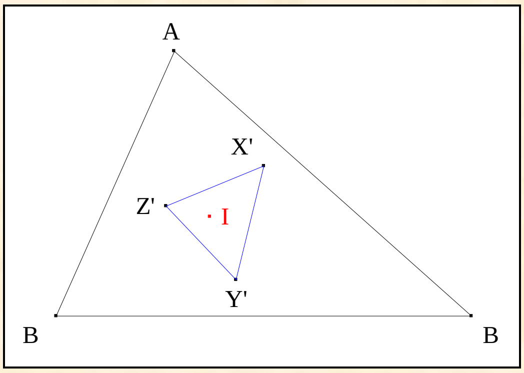


Hypothèses : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
X, Y, Z les milieux des arcs BC, CA, AB ne contenant pas respectivement A, B, C
et X', Y', Z' les symétriques de X, Y, Z par rapport à (BC), (CA), (AB).

Définition : X'Y'Z' est le triangle de Fuhrmann de ABC.

2. Le résultat de Milorad Stevanovic

Le 20 septembre 2002, Milorad Stevanovic [2] communiquait au groupe *Hyacinthos* [3] le résultat suivant :



Hypothèses : ABC un triangle,
I le centre de ABC
et X'Y'Z' le triangle de Fuhrmann de ABC.

Conclusion : I est l'orthocentre du triangle X'Y'Z'.

3. Une courte biographique de Milorad Stevanovic

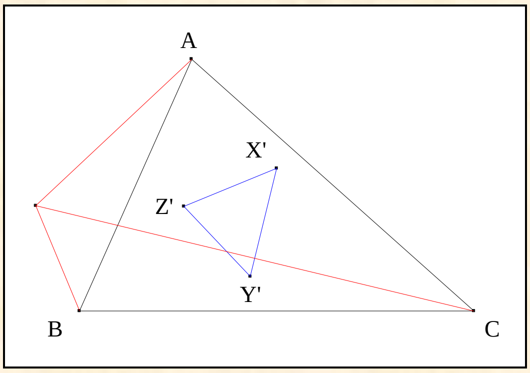
Le Professeur Milorad Stevanovic a été très actif durant ces dix dernières années dans le domaine de la géométrie du triangle. Plus d'une dizaines de centres portent son nom dans la nomenclature de Clark Kimberling.[2]
De son mariage naîtra deux filles.
Atteint d'un cancer très rare du système lymphatique qui affecte moins de 0,1% des patients américains suivi, la chimiothérapie sera sans succès.
Même à l'hôpital, il a continué à travailler sur certains problèmes géométriques et a toujours acceuilli avec un large sourire ses collègues.
La plupart de ses derniers résultats sont écrits à la main. Leurs mises au propre et leurs publications reviendront à sa première fille qui actuellement étudie les mathématiques.
Il décède le 17 décembre 2010 à 8h 30 en Serbie.

B. UNE HISTORIQUE DE LA PREUVE

1. Les trois perpendiculaires de Grinberg

Le 9 janvier 2003, le jeune géomètre allemand Darij Grinberg [4] proposait un résultat équivalent à celui de Stevanovic à savoir que "les cercles d'Euler d'un triangle et de son triangle de Fuhrmann sont concentriques" et le résultat suivant obtenu par orthologie (cf. Annexe 1) :

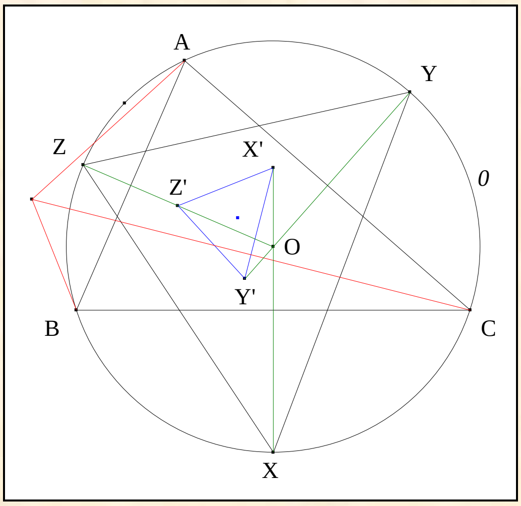
[2] Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.



Hypothèses : ABC un triangle,
X'Y'Z' le triangle de Fuhrmann de ABC
et *Pa*, *Pb*, *Pc* les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur (Y'Z'), (Z'X'), (X'Y').

Conclusion : *Pa*, *Pb* et *Pc* sont concourantes.

Schéma de démonstration :



- Notons *0* le cercle circonscrit de ABC,
  O le centre de *0*
  et X, Y, Z les milieux des arcs BC, CA, AB ne contenant pas A, B, C.

- Par construction, (XX'), (YY'), (ZZ') sont les médiatrices des côtés [BC], [CA], [AB] ;
  en conséquence, (XX'), (YY') et (ZZ') sont concourantes en O.

- Par définition, X'Y'Z' est orthologique à ABC ;
  l'orthologie étant une relation symétrique, ABC est orthologique à X'Y'Z'.

- **Conclusion :** *Pa*, *Pb* et *Pc* sont concourantes.

- Notons P ce point de concours.

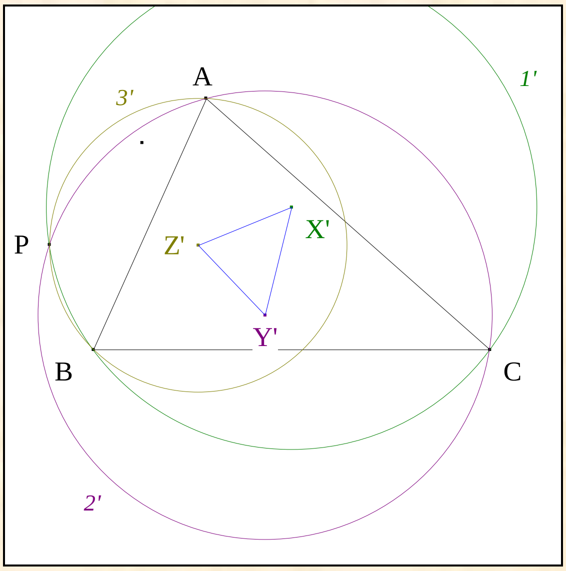
Note historique : dans le même message, Darij Grinberg conjecturait de plus que ce point de concours est le symétrique du centre I par rapport au point de Feuerbach du triangle, que ce point est répertorié sous X(80) chez ETC [5] et il concluait en disant

but I suppose it schould be not so easy to prove that the concurrence is X(80).

Le jour suivant i.e. le 10 janvier 2003, Milorad Stevanovic [6] donnait une preuve métrique de son résultat. Le même jour, Stevanovic adressait un second Message [7] dans lequel il confirmait la conjecture précédente de Grinberg.

2. Les trois cercles de Grinberg

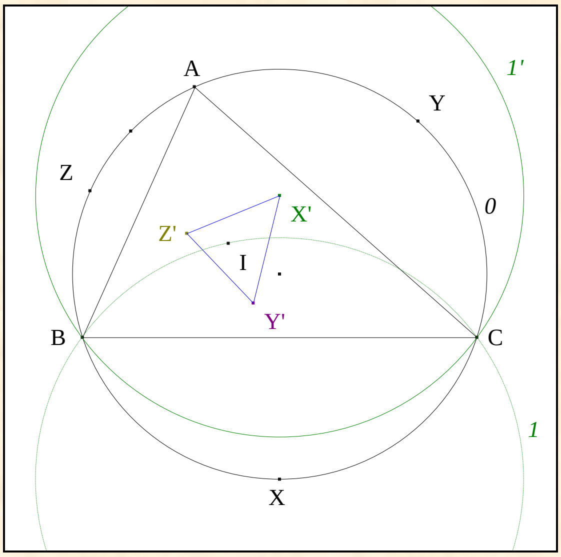
Les notations sont les mêmes que précédemment.
Le 19 avril 2004, le talentueux géomètre Darij Grinberg proposait et démontrait la conjecture suivante :



Hypothèses supplémentaires : *1*', *2*', *3*' les cercles de centres X', Y', Z' passant par B, C, A.

Conclusion : *1*', *2*' et *3*' sont concourants en P.

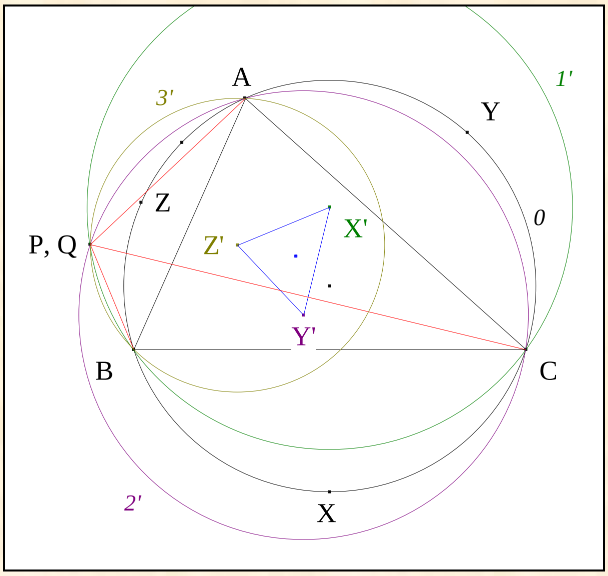
Schéma de démonstration de l'auteur :



- Notons *1, 2, 3* les cercles de centres X, Y, Z passant par B, C, A
  et I le centre de ABC.

- D'après "Un théorème de Catalan" (cf. Annexe 2), *1*, *2* et *3* passent par I.

- **Scolies :** **(1)** *1* et *1*' sont symétriques par rapport à (BC)
  (2) *2* et *2*' sont symétriques par rapport à (CA)
  (3) *3* et *3*' sont symétriques par rapport à (AB).



- D'après "Le théorème de Schoute" (cf. Annexe 3), *1*', *2*' et *3*' sont concourants.

- Notons Q ce point de concours.

- D'après "Le théorème de la médiatrice", (Y'Z'), (Z'X'), (X'Y') sont les médiatrices de [AQ], [BQ], [CQ].
  en conséquence, P et Q sont confondus.

- **Conclusion :** *1*', *2*' et *3*' sont concourants en P.

Note historique : la lourde preuve de Darij Grinberg recourait au point de Poncelet d'un quadrilatère pour unifier P avec le point de concours de ces trois cercles.
Le 19 avril 2004, Grobber [8] partant du résultat de Stevanovic, attirait l'attention des membres du groupe *Hyacinthos* en démontrant que

(X'Y') *est la médiatrice de* [AX(80)].

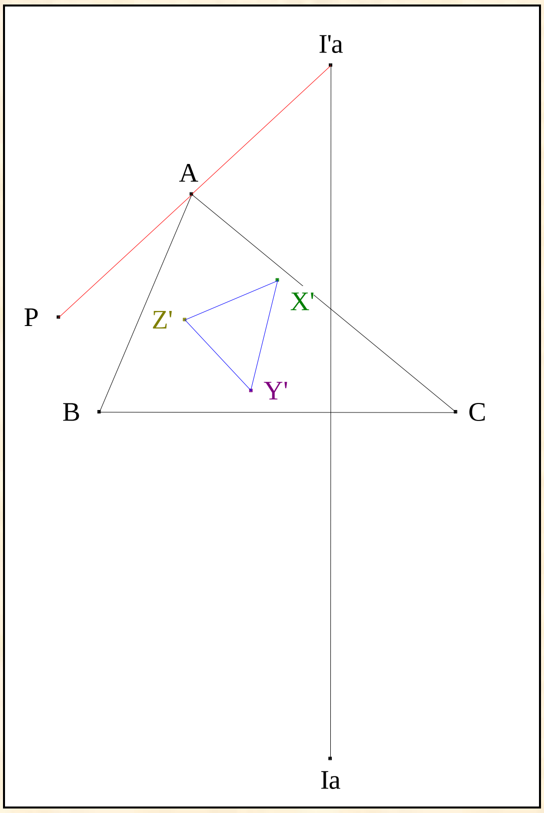
Suite à cette remarque pertinente, Darij Grinberg [9] lui répondait le même jour en disant

this remark of you about perpendicular bisssectors
has opened my eyes to see
a much simpler proof.

et, dans la foulée, proposait une preuve plus légère montrant que les trois perpendiculaires concourent au même point que les trois cercles.

3. Un point remarquable sur chaque perpendiculaire de Grinberg

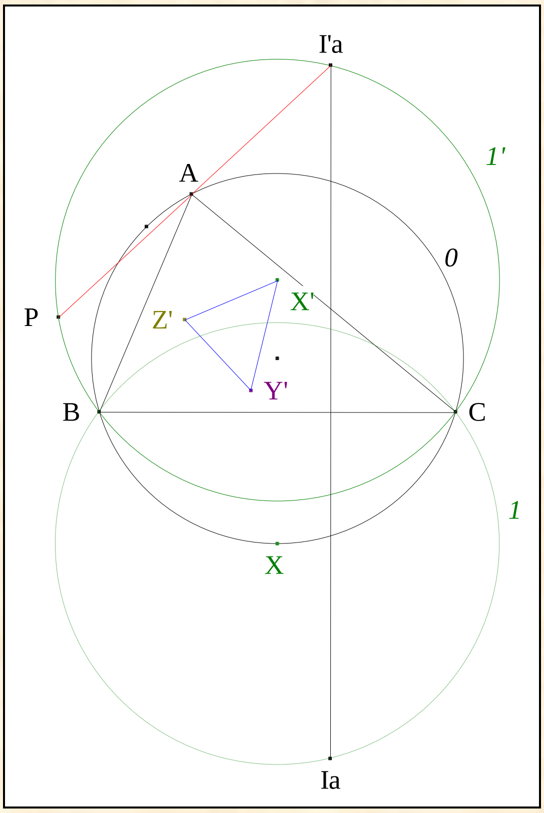
Les notations sont les mêmes que précédemment.
Rappelons que le 5 février 2003, le lycéen Darij Grinberg [10] de Karlsruhe (Allemagne) avait déjà proposé et démontré par le calcul barycentrique le résultat suivant :



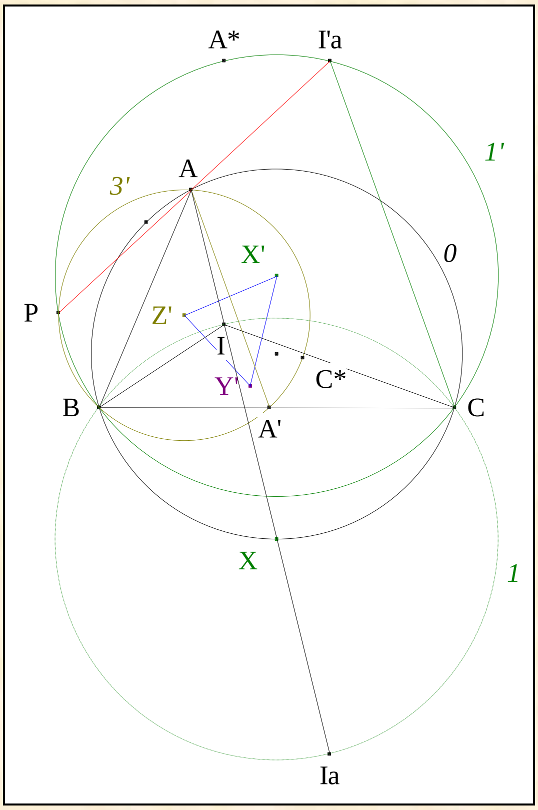
Hypothèses supplémentaires : Ia le A-excentre de ABC
et I'a le symétrique de Ia par rapport à (BC).

Conclusion : (PA) passe par I'a.

Schéma de démonstration de l'auteur :



- D'après "Un théorème de Catalan" (cf. Annexe 2), Ia est sur *1*.
- Les cercles *1* et *1*' étant symétriques par rapport à (BC), I'a est sur *1*'.



- Notons A*, C* les orthocentres des triangles IBC, IAB
  et A' le second point d'intersection de *3*' avec (BC).

- D'après "Un résultat de Carnot" (cf. Annexe 4), le symétrique de A* par rapport à (BC) est sur *1* ;
  en conséquence, A* est sur *1*'.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que C* est sur *3*'.

- D'après "Un théorème de Catalan" (cf. Annexe 2), A, I, X et Ia sont alignés.

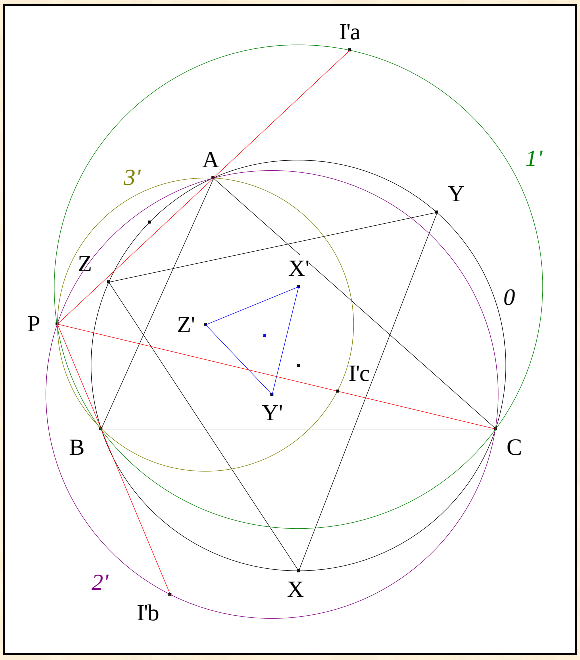
- C* étant l'orthocentre du triangle A*BC, I est l'orthocentre du triangle AC*B.

- D'après "Un résultat de Carnot" (cf. Annexe 4), le symétrique de I par rapport à (AB) est sur *3*'.

- Une chasse angulaire modulo Π :
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <AC*B = <AA'B ;
  <AC*B et <AIB sont supplémentaires ;
  par symétrie, <I'aCB = <BCIa ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <BCIa = <BIIa ;
  par transitivité de la relation =, <I'aCB = <BIIa ;
  <BIIa et <AIB sont supplémentaires ;
  en conséquence, <AA'B = <I'aCB i.e. (AA') // (A"C).

- **Conclusion :** les cercles *3'* et *1'*, les points de base B et P, la droite (A'BC), les parallèles (AA') et (A"C), conduisent au théorème de Reim (cf. annexe 5) ;
  en conséquence, A, P et I'a sont alignés i.e. (PA) passe par I'a.

Scolie : deux autres alignements



- Notons I'b, I'c les B, C-excentres de ABC.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que
  (1) (PB) passe par I'b
  (2) (PC) passe par I'c.

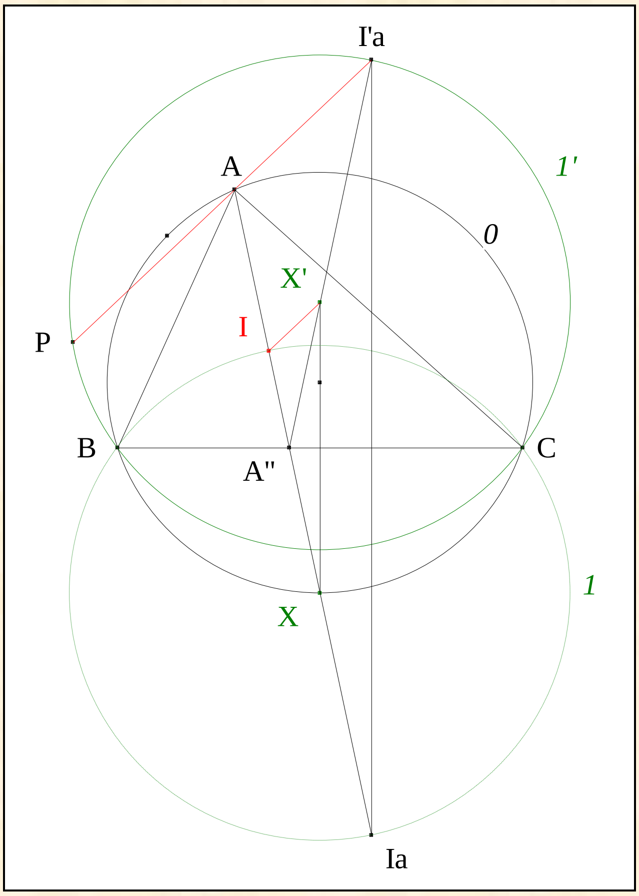
Note historique : dans ce même message, Darij Grinberg identifiait P à X(80) et donnait le nom d'antipoint de Gray, par analogie au point de Gray répertorié sous X(79) chez ETC.

4. Deux triangles en perspective et l'étonnant résultat de Stevanovic [11]

Le 8 octobre 2005, une voie s'ouvrait; ce point de vue allait me permettre de conclure avec une preuve purement synthétique du résultat de Stevanovic.

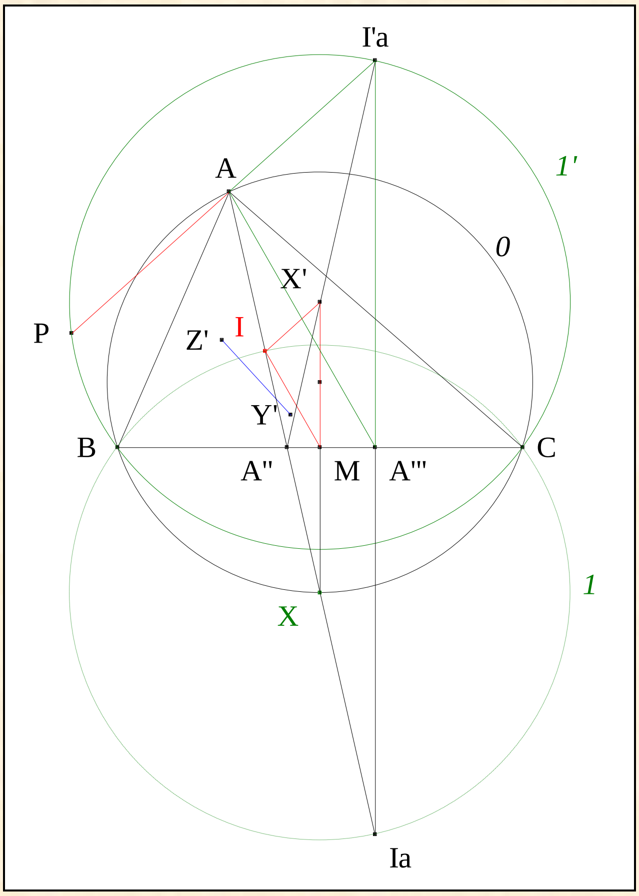
Schéma de démonstration de l'auteur :

- Les notations sont les mêmes que précédemment.



- Notons A" le point d'intersection de (AI) et (BC).

- Par symétrie d'axe (BC), A", X' et I'a sont alignés.



- Notons M le milieu de [BC]
  et A''' le point d'intersection de (IaI'a) et (BC).

- D'après "Un résultat de Poncelet" (cf. Annexe 6), (MI) // (A'''A) ;
  par construction, (MX') // (A'''I'a).

- D'après "Le théorème faible de Desargues" (cf. Annexe 7),
  les triangles MIX' et A'''AI'a étant en perspective de centre A', (IX') // (AI'a).

- Nous avons démontré en **B. 3.** et **4.**, (PAI'a) ⊥ (Y'Z') ;
  en conséquence, (IX') ⊥ (Y'Z').

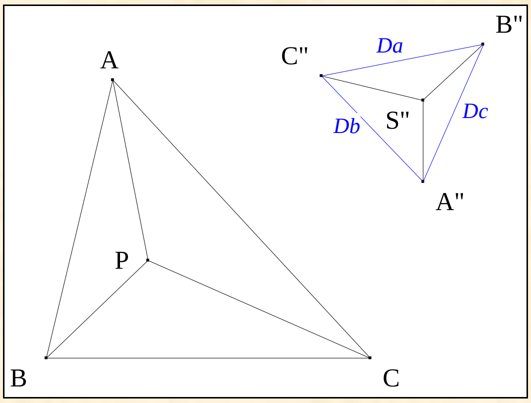
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (IY') ⊥ (Z'X')
  (IZ') ⊥ (X'Y').

- **Conclusion :** I est l'orthocentre du triangle X'Y'Z'.

C. ANNEXE

Les notations sont les mêmes que précédemment.

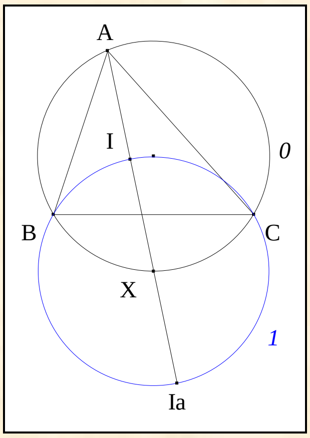
1. Triangles orthologiques [12]



Hypothèses :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	Da	une perpendiculaire à (PA),
	Db	une perpendiculaire à (PB),
	Dc	une perpendiculaire à (PC),
	A", B", C"	les points d'intersection de *Db* et *Dc*, de *D*c et *D*a, de *Da* et *Db*,
	Da"	la perpendiculaire à (BC) passant par A",
	Db"	la perpendiculaire à (CA) passant par B"
et	S"	le point d'intersection de *Da"* et *Db"*.

Conclusion : (C"S") et (AB) sont perpendiculaires.

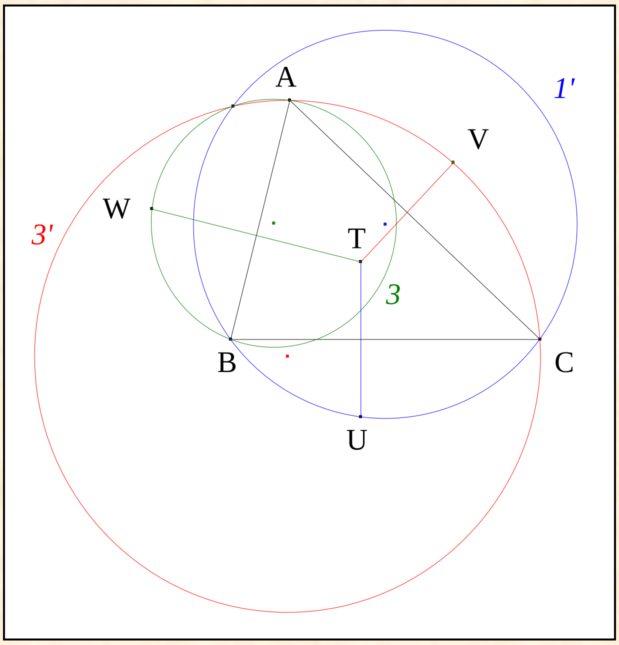
2. Un théorème de Catalan [13]



Hypothèses :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	I	le centre de ABC,
	X	le point d'intersection de (IA) avec *0*,
	Ia	le A-excentres de ABC
et	*1*	le cercle de diamètre [IIa].

Conclusion : *1* passe par les sommets B et C, et a pour centre X.

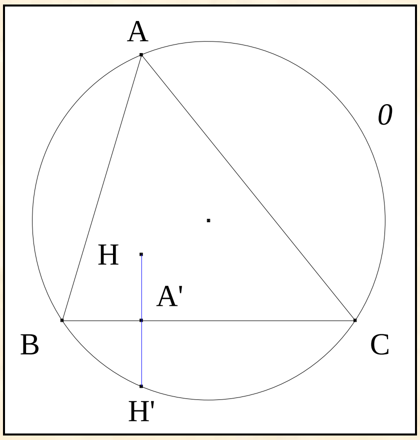
3. Le théorème de Schoute [14]



Hypothèses : ABC un triangle,
T un point,
U, V, W les symétriques de T par rapport à (BC), (CA), (AB),
et *1'*, *2'*, *3'* les cercles circonscrits aux triangles UBC, VCA, WAB

Conclusion : *1'*, *2'* et *3'* sont concourants.

4. Un résultat de Carnot [15]

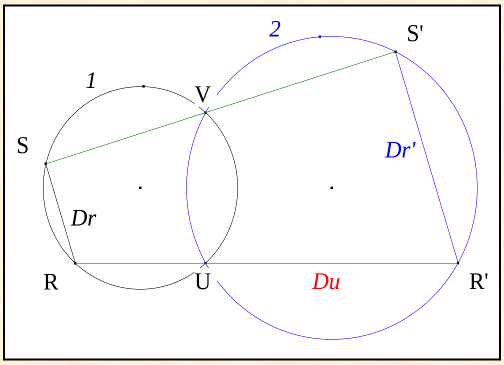


Hypothèses : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre du triangle,
A' le pied de la A-hauteur de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC
et H' le pied de la A-hauteur de ABC sur *0*.

Conclusion : A' est le milieu de [HH'].

5. Le théorème de Reim

au début du XX-ième siècle, le Frère Gabriel - Marie présente ce théorème [16] dans son livre intitulé *Exercices de Géométrie*, dont nous présentons une réciproque :

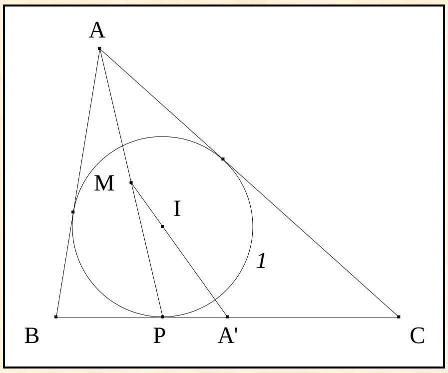


Hypothèses : *1*, *2* deux cercles sécants,
U, V les points d'intersection de *1* et *2*,
Du une droite passant par U,
R, R' les seconds points d'intersection de *Du* avec *1*, *2*,
Dr, *Dr'* deux parallèles passant par R, R'
et S, S' les seconds points d'intersection de *Dr* avec *1*, de *Dr'* avec *2*.

Conclusion : S, V et S' sont alignés.

Scolie : *si*, S et V coïncident *alors*, (SVS') est tangente à *1* en V.

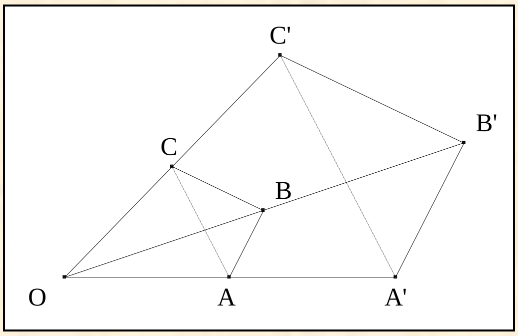
6. Un résultat de Poncelet [17]



Hypothèses : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
I le centre de *1*,
P le point de contact de *1* avec (BC),
A' le milieu de [BC]
et M le point d'intersection de (A'I) et (AP).

Conclusion : M est le milieu de [AP].

7. Le théorème faible de Desargues



Hypothèses : ABC un triangle
et A'B'C' un triangle tel que **(1)** (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes en O
(2) (AB) soit parallèle à (A'B')
(3) (BC) soit parallèle à (B'C').

Conclusion : (AC) est parallèle à (A'C').

Commentaire : ces sept résultats cités en Appendice peuvent tous être démontrés synthétiquement.

D. RÉFÉRENCES

[1] Fuhrmann W., *Synthetische Beweise Planimetrischer Sätze*, Berlin (1890).
[2] Stevanovic M., Orthocenter of Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 5897 du 20/09/2002.
[3] http:/groups.yahoo.com/group/Hyacinthos.
[4] Grinberg D., Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 6301du 09/01/2003.
[5] *Encyclopedia of Triangle Centers*; http://www2.evansville.edu/ck6/encyclopedia/
[6] Stevanovic M., Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 6309 du 10/01/2003.
[7] Stevanovic M., Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 6316 du 10/01/2003.
[8] Grobber, Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 9724 du 19/04/2004.
[9] Grinberg D., Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 9725 du 19/04/2004.
[10] Grinberg D., Gray Point X(79) and X(80), Message *Hyacinthos* # 6491du 05/02/2003.
[11] Stevanovic M., Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 5897 du 20/08/2002.
[12] Steiner J., Problème 54, *Journal* de Crelle vol. 2, 3.
[13] Catalan E, Théorème 20, *Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaire*, Dunod, Paris (1879) 44.
[14] Schoute P. H. (1846-1913), *Journal de Mathématiques Spéciales* n° 93, p. 57.
[15] Carnot, n° 142, De la corrélation des figures géométriques, (1801) 101.
[16] F. G.-M., Théorème 124, *Exercices de Géométrie*, sixième édition (1920), Rééditions Jacques Gabay, Paris (1991) 283.
[17] Poncelet J. V., *Annales* de Gergonne 12.