

# COLLECTION GÉOMÉTRIQUE

## ΣΥΝΑΓΩΓΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ

### LA BASE D'UN TRIANGLE

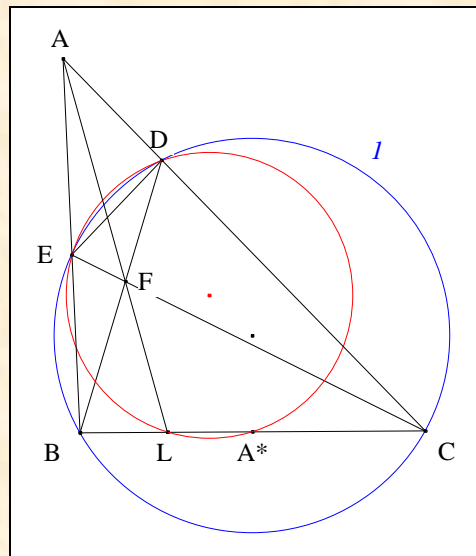
EST

### LA CORDE D'UN CERCLE

0



Jean-Louis AYME <sup>1</sup>



#### Résumé.

L'auteur présente une collection de problèmes se référant autour d'un cercle ayant pour corde la base d'un triangle. Preuves souvent originales, commentaires et notes historiques accompagnent chaque problème.

Cette collection construite d'une façon linéaire par accumulation se poursuit...

Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

#### Avertissement.

L'auteur rappelle que la vision triangulaire d'un résultat est laissée aux soins du lecteur.

Un renvoi comme "Problème 5" signifie que le lecteur se référera au "Problème 5" de

<sup>1</sup>

la même section.

Un renvoi comme "**12. Problème 5**" signifie que le lecteur se référera au "Problème 5" de "la section 12".

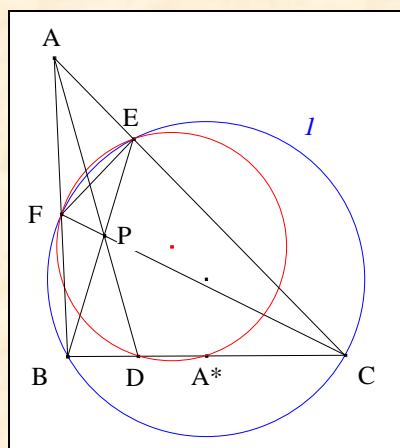
Un foot note précise une origine du problème, une signification ou renvoie à un article de l'auteur.

**Abstract.** The author presents a collection of problems referring around a circle whose chord is the base of a triangle. Often original proof, comments and historical notes accompany each problem.  
This linearly collection builds by accumulation continues...  
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

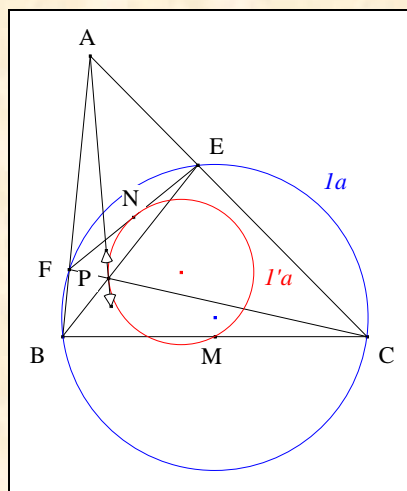
**Warning.** The author recalls that the triangular vision of a result is left to the reader care.  
A reference as "Problem 5" means that the reader refer to the "Problem 5" of the same section.  
A reference like "**12. Problem 5**" means that the reader refer to the "Problem 5" of "section 12".  
A foot note specifies an origin of the problem, a meaning or refers to an article of the author.

<b>Sommaire</b>	
<b>A. Récapitulation</b>	3
<b>B. Les problèmes résolus</b>	5
<b>C. Lexique Français-Anglais</b>	22

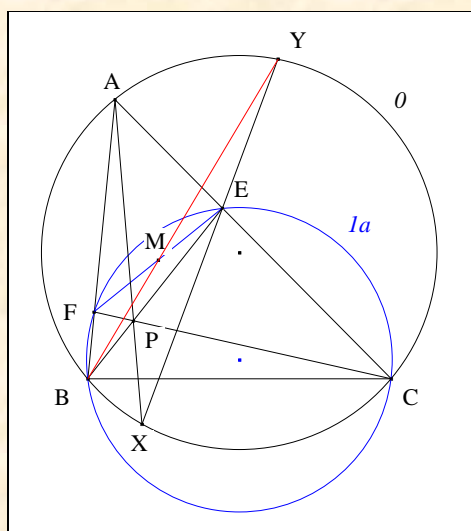
### A. RÉCAPITULATION



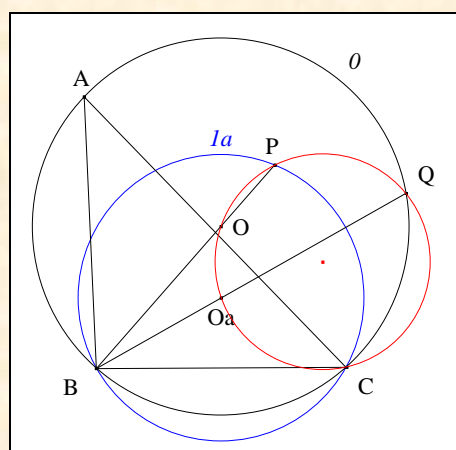
1. D, E, F and A\* are concyclic



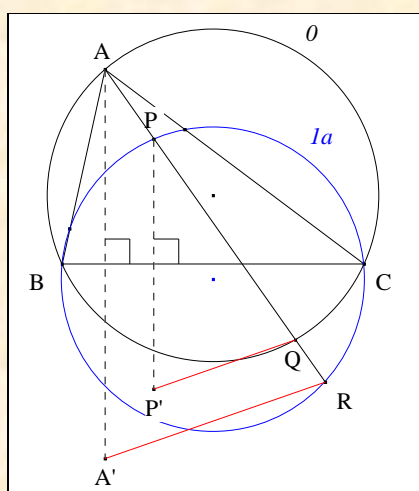
2.  $l'a$  est tangent à (AP) en P.



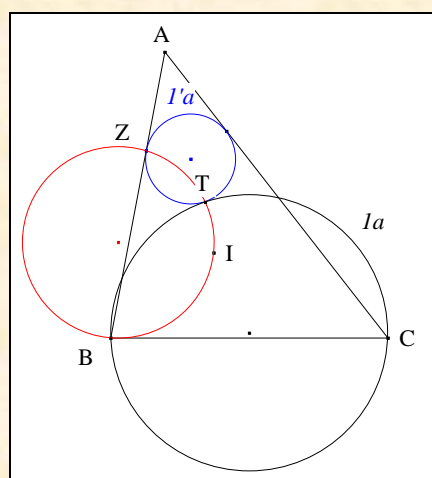
3. M est le milieu de [EF]



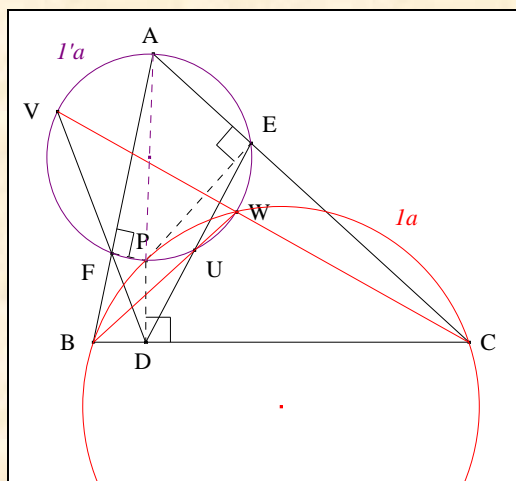
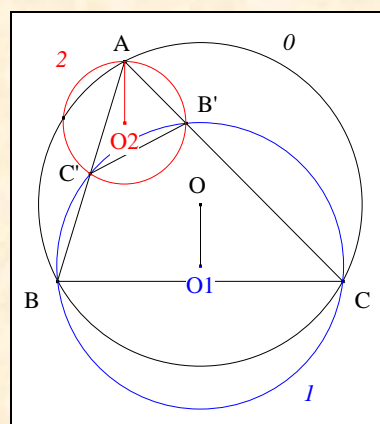
4. O, Oa, P, Q et C sont cocycliques



5. (RA') est parallèle à (QP')



6. Z, T, I et B sont cocycliques

7. W est sur  $la$ 8.  $AO_2 = 2.OO_1$

## **B. LES PROBLÈMES RÉSOLUS**



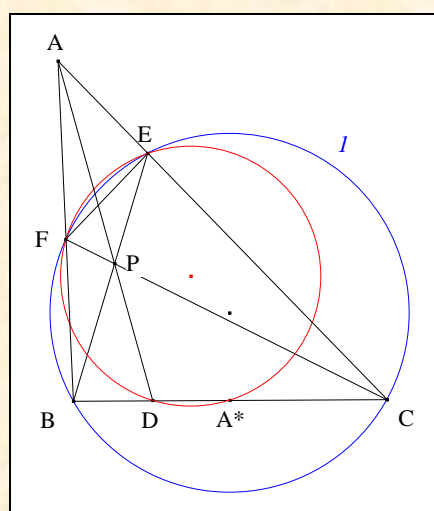
## PROBLÈME 1<sup>2</sup>

Nathan-Altshiller-Court

(1952)

### VISION

Figure:



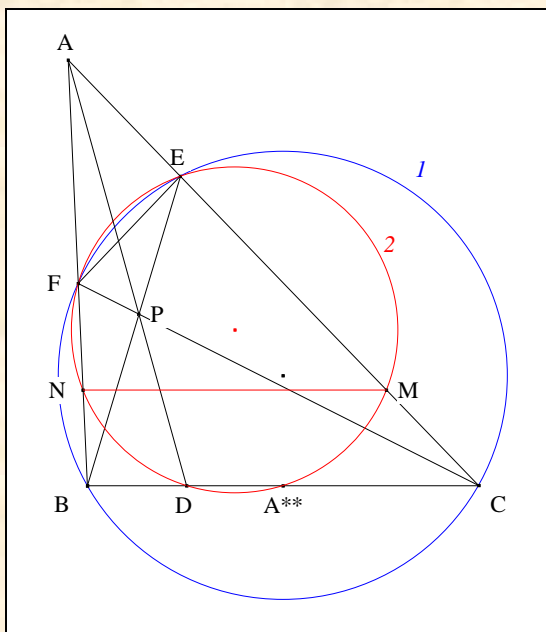
**Features :**     $ABC$     a triangle,  
                    $I$         a circle going through B and C,  
                   E, F     the second points of intersection of  $I$  with AC, AB,  
                   P        the point of intersection of BE and CF,  
                   D        the point of intersection of AP and BC,  
                   and     $A^*$     the midpoint of the segment BC.

**Given :**        D, E, F and  $A^*$  are concyclic.

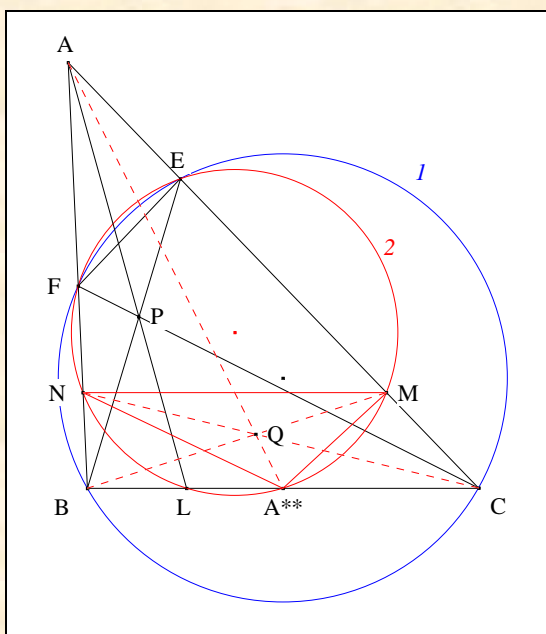
### VISUALIZATION

<sup>2</sup>

Altshiller-Court N., *College Geometry*, Richmond (1952) 247, exercice 5



- Note  $\omega_2$  the circle going through D, E, F,  
 $A^{**}$  the second point of intersection of  $\omega_2$  and BC  
 and M, N the second points of intersections of  $\omega_2$  and AC, AB.
- The circles  $I$  and  $\omega_2$ , the basic points E and F, the monians CEM and BFN, lead to Reim's theorem **0** ;  
 consequently  $CB \parallel MN$ .



- According to "The Terquem's circle" <sup>3</sup>,  
 the triangle  $A^{**}MN$  is cevian ; consequently,  $AA^{**}$ , BM and CN are concurrent.
- Note Q this point of concurs.
- According to "The complete trapeze",  
 consequently, AQ goes through  $A^*$  ;  
 $A^{**}$  are  $A^*$  identic.

<sup>3</sup> Ayme J.-L., A new point on Euler line, G.G.G. vol. 5, p. 3 ; <https://perso.orange.fr/jl.ayme>

- **Conclusion :** D, E, F and A\* are concyclic.

**Theorem :** given a triangle ABC  
and some point P with cevian triangle A'B'C' such that B'C' is antiparallel to BC  
(i. e., the points B', C', B and C lie on one circle).  
Then the midpoint A\* of BC lies on the circle through the points A', B' and C'.

**Remark :** if, P is the orthocenter of ABC then,  $\omega$  is the Euler's circle of ABC.

**Historic note :** This nice result of Nathan Altshiller-Court given as exercise in 1923 was rediscovered by Michail Tyomkyn, member of the German team for the O.I.M. of 2003 which took place in Tokyo (Japan).  
This result appears as a generalization of the Euler's circle.

IMO-Team 2003



v.l.n.r. <sup>4</sup>

Prof. Dr. Hans-Dietrich Gronau, Peter Eberhard, Friedrich Feuerstein,  
Alex Schreiber, Christian Reiher, Richard Bamler, Michael Tyomkyn, Arend Bayer

### Une courte biographie de Nathan Altshiller-Court

Nathan Court est né à Varsovie (Pologne) le 22 janvier 1881.  
Après l'obtention de son doctorat en sciences en 1911 à l'université de Gand (Belgique), il occupe un poste d'assistant à l'université d'Oklahoma en 1917.  
En 1912, il se marie avec Sophie Ravlitch qu'il a connue à Varsovie.  
Deux années après, il obtient la nationalité américaine et décide d'intégrer le nom Altshiller dans son nom.  
En 1935, il devient professeur toujours dans la même université et se retire en 1951.  
L'année suivante, il écrit un grand classique intitulé *College Geometry-An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*.  
Il est aussi connu pour avoir écrit un grand nombre d'articles dans l'*American Monthly*, le *Boletín matemático* de Buenos Aires (Argentine), dans le *Bulletin of the American Mathematical Society*, dans le *Duke Mathematical Journal* et dans *Mathematical Gazette*.  
Il décède le 20 juillet 1968 à Norman (Oklahoma, États-Unis).

<sup>4</sup> von link nach recht i.e. de gauche à droite





## PROBLÈME 2<sup>5</sup>

MO Shortlist 2009 - Problem G4

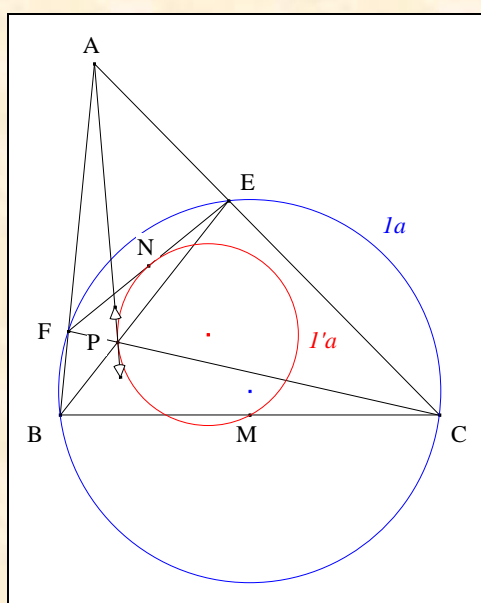
Proposed

by

David Monk (United Kingdom)

### VISION

Figure :



**Traits :**

ABC	un triangle,
$I_a$	un cercle passant par B et C,
E, F	les seconds points d'intersection de $I_a$ resp. avec (AC), (AB),
P	le point d'intersection de (BE) et (CF),
M, N	les milieux resp. de [BC], [EF]

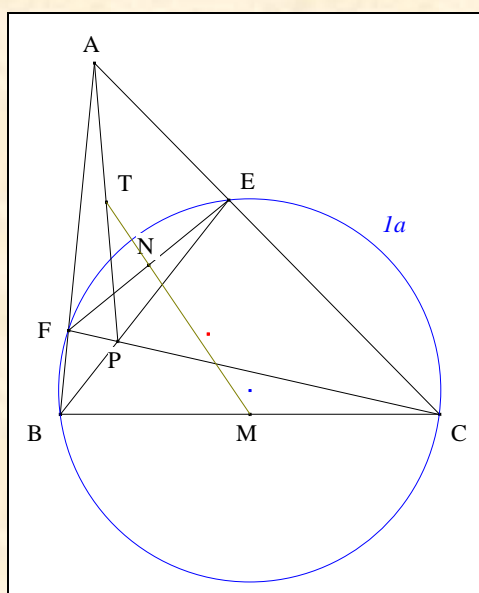
et  $I'_a$  le cercle circonscrit au triangle PMN.

**Donné :**  $I'_a$  est tangent à (AP) en P.

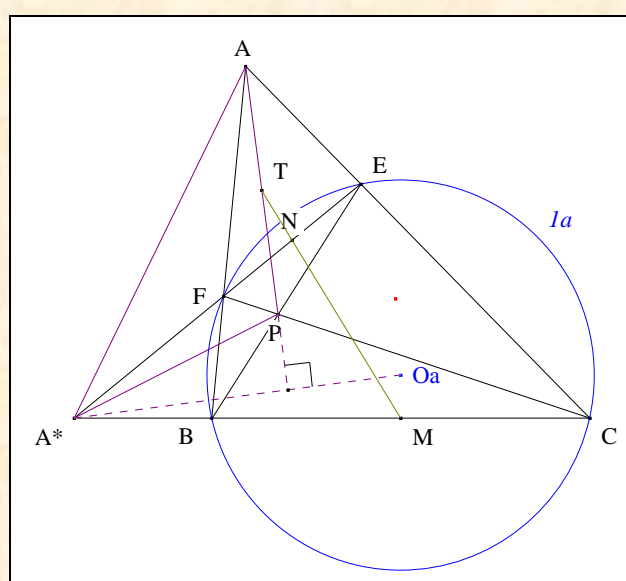
### VISUALISATION

<sup>5</sup>

conyclic quadrilateral, AoPS du 20/02/2010 ; <http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h332969p1781563>  
 MO Shortlist 2009 - Problem G4, AoPS du 05/07/2010  
<http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h355791p1932936>  
 Romanian contest, problema 2, concurs Nicolae Coculescu, baraj seniori (cls. 9-12), publié le 07/12/2010 ;  
<http://forum.gil.ro/viewtopic.php?f=25&t=255&p=400#p400>

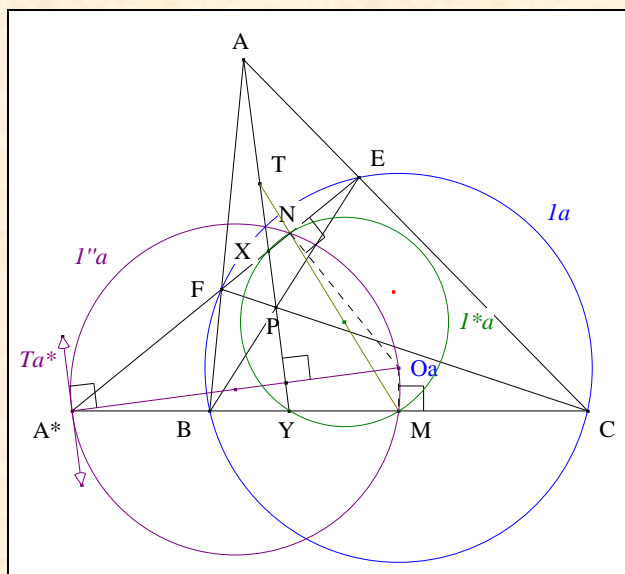


- Notons  $T$  le milieu de  $[AP]$ .
- D'après "La droite de Gauss-Newton"<sup>6</sup> appliqué au quadrilatère complet  $BCEF$ ,  $M, N$  et  $T$  sont alignés.

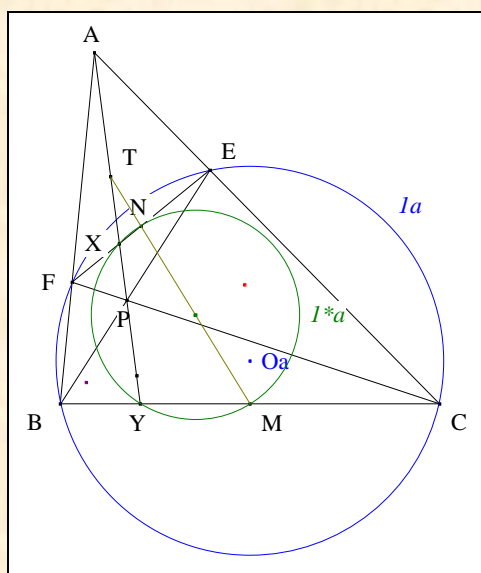


- Notons  $O_a$  le centre de  $I_a$   
et  $A^*$  le point d'intersection de  $(EF)$  et  $(BC)$ .
- D'après Henri Brocard "Orthocentre d'un triangle diagonal"<sup>7</sup> appliqué au quadrilatère cyclique  $BCEF$ ,  $O_a$  est l'orthocentre du triangle  $PAA^*$ .
- **Conclusion partielle :**  $(AP) \perp (A^*O_a)$ .

<sup>6</sup> Ayme J.-L., La droite de Gauss et..., G.G.G. vol. 4 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>  
<sup>7</sup> Henri Brocard, *Nouvelle Correspondance* 3 (1877) 173  
 Ayme J.-L., 4. Quickies 2, G.G.G. vol. 15 ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>



- Notons  $I''a$  le cercle de diamètre  $[A^*Oa]$ ,  
 $Ta^*$  la tangente à  $I''a$  en  $A^*$   
 et  $X, Y$  les points d'intersection de  $(AP)$  resp. avec  $(EF), (BC)$ .
- **Scolie :**  $Ta^* \parallel (XY)$ .
- Le cercle  $I''a$ , les points de base  $M$  et  $N$ , les monienens naissantes  $(A^*MY)$  et  $(A^*NX)$ , les parallèles  $Ta^*$  et  $(YX)$ , conduisent au théorème 1'' de Reim ; en conséquence,  $M, N, Y$  et  $X$  sont cocycliques.
- Notons  $I^*a$  ce cercle.



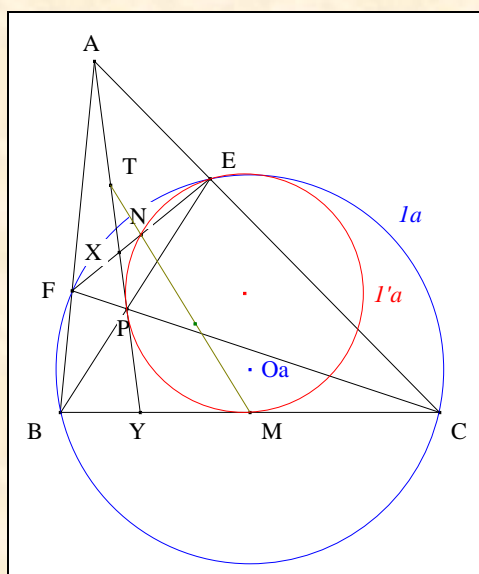
- D'après Pappus d'Alexandrie "Diagonales d'un quadrilatère complet"<sup>8</sup>  
 appliqué au quadrilatère AEPF, le quaterne  $(A, P, X, Y)$  est harmonique.
- D'après "La relation de Newton",  $TP^2 = TX.TY$ .
- D'après Jakob Steiner "Puissance d'un point relativement à un cercle"  
 appliqué à  $I^*a$ ,  $TX.TY = TM.TN$

<sup>8</sup> Pappus d'Alexandrie, *Collections*, Livre 7, proposition 131

par transitivité de =,

$TP^2 =$

TM.TN.



- **Conclusion :** d'après Feuerbach-Steiner,  $l'a$  est tangente à (AP) en P.

### Une réflexion sur le choix d'un problème pour une olympiade :

as a matter of fact, exactly this problem had been proposed at an olympiad in St. Petersburg ([10th grade, problem 7](#)) several months before the shortlist was formed (14.12.2008).

I was in the Problem Selection Committee for the 2008 IMO in Madrid. We looked everywhere for precedents in competitions, magazines or online site (such as this one) of the longlisted problems. We scratched quite a few problems due to the fact that, either the exact problem, or a subtle variation which introduced no concept variation, had already been proposed/published/solved. Imagine our distress and shame when it was pointed out that still a couple of shortlisted problems (I don't remember exactly whether 2 or 3) had in fact been proposed in some competition; at least, these problems had not been given a wide exposure to the public and, if I remember correctly, no online source for the material could be quoted, just the booklet from the competition; nonetheless we learnt the hard way that it is close to impossible to check everything... there is just too much material out there (which is great for students preparing themselves for the competition, but not for submission of original problems). The only thing that can be done is, when you are on a PSC or Jury, do your best in order to find the problems that, through happenstance or just plain bad will (I will always prefer to believe in the first case if I do not have enough evidence against - innocent until proven guilty), slipped into the longlist/shortlist.

And of course, encourage fair play with your own example...

There is something else that also distresses me quite a bit: shortlists are supposed to be kept secret until the following year's IMO, but we find here and there these problems breaking out into the open. I think shortlist problems are a very valuable material for student training/selection, but whenever such a problem is used, it should be made sure that the students who are exposed to them, know very well that it is "top-secret" stuff and should not be discussed or commented outside of the team... And just for the sake of extra security, I only work with students on the previous year IMO shortlist about 1-2 weeks before the following IMO...

### Une très courte biographie de David Monk

David Monk a étudié les Mathématiques au Trinity College de Cambridge (Angleterre, Royaume-Uni) où il passa son PhD sous la direction du professeur John Arthur Todd.

Il a été Professeur à l'université de Hull (Yorkshire, Angleterre) durant trois années, puis à l'université d'Edinburgh (Écosse, Edinburgh) jusqu'à sa retraite.

En 2009, il publie *New Problems in Euclidean Geometry*.



### PROBLÈME 3<sup>9</sup>

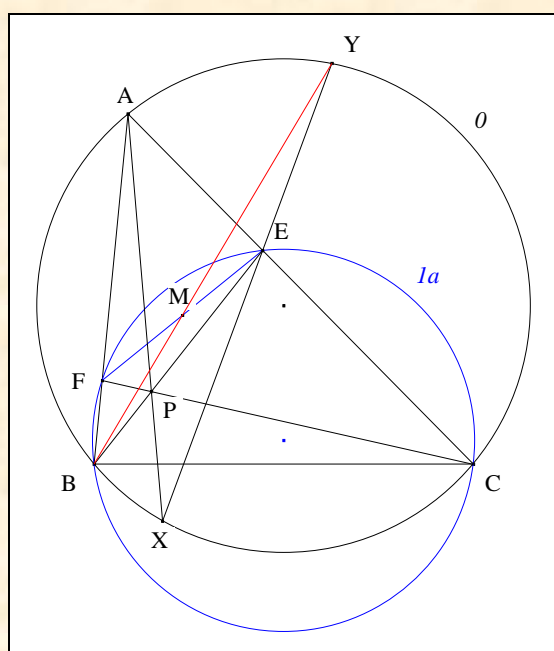
Tran Quang Hung

*elipson magazine* 3

(2015)

### VISION

Figure :



**Traits :**

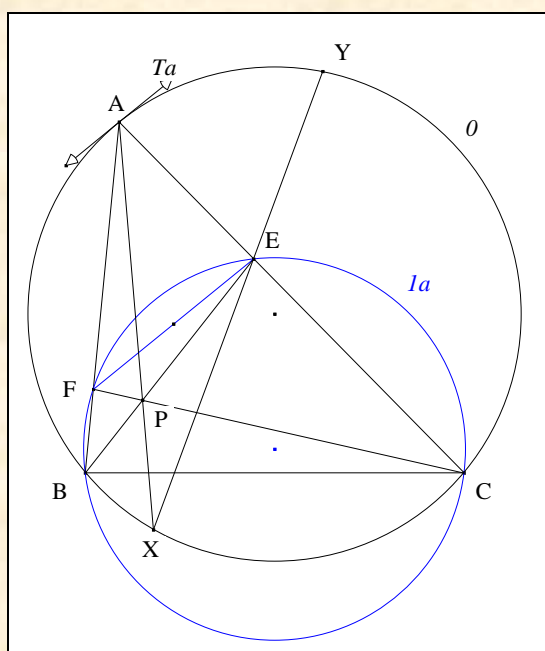
- ABC un triangle,
- $O$  le cercle circonscrit à ABC,
- $Ia$  un cercle passant par B et C,
- E, F les seconds points d'intersection de  $Ia$  resp. avec (AC), (AB),
- P le point d'intersection de (BE) et (CF),
- X le second point d'intersection de (AP) avec  $O$ ,
- Y le second point d'intersection de (XE) avec  $O$ ,

et M le point d'intersection de (BY) et (EF).

**Donné :** M est le milieu de [EF].

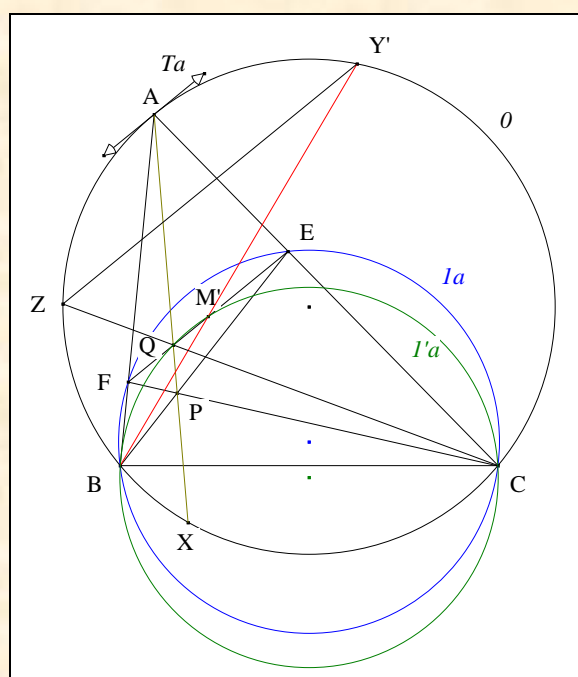
### VISUALISATION

<sup>9</sup> Geometry: Prove that:  $KC'=KB'$ , AoPS du 11/10/2015 ;  
[http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1150730\\_geometry\\_prove\\_that\\_kckb](http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1150730_geometry_prove_that_kckb)



- Notons  $Ta$  la tangente à  $O$  en  $A$ .
- Les cercles  $O$  et  $Ia$ , les points de base  $B$  et  $C$ , les médiennes  $(ABF)$  et  $(ACE)$ , conduisent au théorème 1 de Reim ; il s'en suit que

$$Ta \parallel (FE).$$

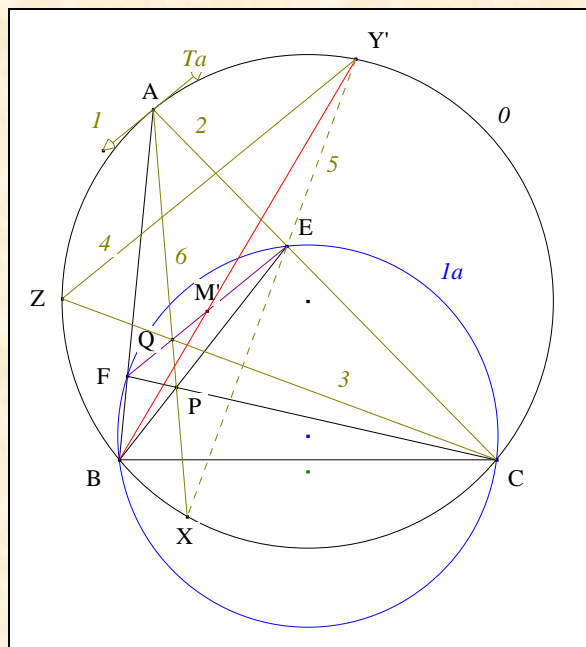


- Notons  $M'$  le milieu de  $[EF]$   
et  $Q$  le point d'intersection de  $(AP)$  et  $(EF)$ .
- D'après Nathan Altshiller-Court <sup>10</sup>, Problème 1, appliqué au triangle  $AEF$  et aux  $E, F$ -cévianes se coupant en  $P$ ,  $B, C, Q$  et  $M'$  sont cocycliques.
- Notons  $I'a$  ce cercle

<sup>10</sup> Altshiller-Court N., *College Geometry*, Richmond (1923) 247, exercice 5  
Ayme J.-L., Two parallel tangent theorems, G.G.G. vol. 11, p. 21-23 ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

et  $Y', Z$  les seconds points d'intersection de  $(BM')$ ,  $(CQ)$  avec  $\theta$ .

- Les cercles  $\theta$  et  $I'a$  et  $\theta$ , les points de base  $B$  et  $C$ , les moyennes  $(Y'BM')$  et  $(ZCQ)$ , conduisent au théorème 0 de Reim ; il s'en suit que  $(Y'Z) \parallel (M'Q)$ .
- **Conclusion partielle :**  $Ta$ ,  $(Y'Z)$  et  $(EF)$  sont parallèles entre elles.



- D'après Lazare Carnot "Pentagramma mysticum" <sup>11</sup> (EQ) étant la pascalle de l'hexagone dégénéré  $Ta CZY'XA$ ,  $X, Y'$  et  $E$  sont alignés ;  
en conséquences, (1)  $Y'$  et  $Y$  sont confondus  
(2)  $M'$  et  $M$  sont confondus.
- **Conclusion :**  $M$  est le milieu de  $[EF]$ .

### Une courte biographie de Tran Quang Hung

"My name is Tran Quang Hung.

I was born in 1986. I have been a geometry teacher at High School for Gifted Students of Science (HSGS, Hanoi, Vietnam) since 2009.

I loved geometry and had been interested in studying it since I was a 7th grader. During the course of studying Euclidean geometry, I had some articles on *Forum Geometricorum*, but the two articles I posted on *Arxiv* were that I liked the most. Here it is

- \* <https://arxiv.org/abs/1908.00974>
- \* <https://arxiv.org/abs/1904.02011>

This is a forum I created about geometry

- \* [https://artofproblemsolving.com/community/c374081\\_geometric\\_problems](https://artofproblemsolving.com/community/c374081_geometric_problems)

The problem in this note is my own, I proposed it on my contest "Problem weekly" on my blog, but I am closing my blog for upgrade."

<sup>11</sup> Carnot L. N. M., *De la corrélation des figures de Géométrie* (1801) 455-456



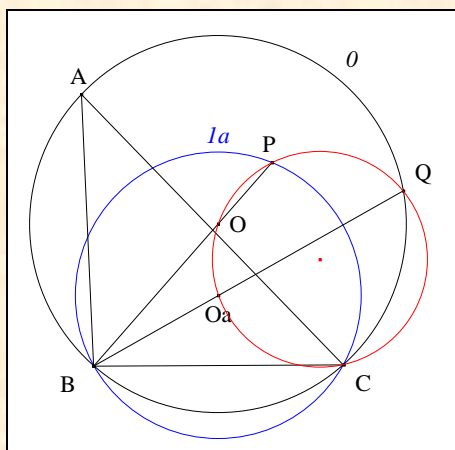
#### PROBLÈME 4

Frank Morley

(1860 – 1937)

#### VISION

**Figure:**



**Traits :**

ABC	a triangle,
$O$	le cercle circonscrit,
$O$	le centre de $O$ ,
$Ia$	un cercle passant par B et C,
$Oa$	le centre de $Ia$ ,

et

P, Q	les seconds points d'intersection de (BO) avec $Ia$ , (CO) avec $O$ .
------	---

**Donné :**  $O, Oa, P, Q$  et C sont cocycliques.

**Commentaire :** une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. <sup>12</sup>

#### Une courte biographie de Frank Morley

Frank Morley est né le 9 septembre 1860 à Woodbridge dans le Suffolk en Angleterre.

Après des études à Cambridge, il émigre au cours de l'année 1887 en Pennsylvanie (États-unis) où il enseigne à Haverford College jusqu'en 1900 avant de devenir professeur avec chaire à l'université Johns Hopkins.

Éditeur de *American Journal of Mathematics*, il est élu pour l'année 1919-20, président de l'*American Journal of Mathematics*.

Ce père de trois fils dont l'un Christopher écrira la nouvelle *Thunder on the Left*, excellait si bien aux échecs qu'il battit une fois un champion mondial en titre, Emmanuel Lasker.

<sup>12</sup>



L'ingénieux théorème qui aujourd'hui porte son nom, a été conjecturé par hasard après de nombreuses figures en 1904 lorsque Morley travaillait à partir de 1899 sur les centres des cardioïdes tangentes aux trois côtés d'un triangle. Morley qui n'avait pas démontré ce résultat en parla à Richmond de Cambridge et à Wittaker d'Edinburgh qui le répandit en 1904 dans le monde comme un sujet de recherche. C'est E. J. Ebden qui le premier le mis en forme et le répandit en 1908 dans l'*Educational Times*<sup>13</sup> sans faire référence à Morley. Deux solutions furent envoyées l'année suivante; la première trigonométrique de Satyanarayana<sup>14</sup> et la seconde par Delahaye et Lez dans *Mathesis*<sup>15</sup>.

L'année suivante l'indien M.T. Naraniengar<sup>16</sup> proposait une solution géométrique qui sera suivie d'une douzaine d'autres par la suite dont celle de W. E. Philip en 1914, de Raoul Bricard<sup>17</sup> en 1922 et de J. M. Child<sup>18</sup> la même année. Morley publiait enfin en 1924 au Japon<sup>19</sup> sa lourde démonstration qui mettait en jeu une cardioïde, puis un article en 1929 dans l'*American Journal of Mathematics*<sup>20</sup>.

Rappelons qu'à la solution de Naraniengar s'ajoutait la traduction d'une carte que Morley avait envoyée au professeur japonais T. Hayasi lui demandant de publier son résultat ainsi qu'un commentaire de Léon Bankoff concernant les diverses démonstrations déjà connues.

Il décède le 17 octobre 1937 à Baltimore (Maryland, Etats-Unis) sans jamais avoir renoncé à sa citoyenneté britannique.

<sup>13</sup> Ebden E. J., *The Educational Times* New Series, 61, 1908, 81, problem n° **16381**, p. 307-308

<sup>14</sup> Satyanarayana M., Solution to problem n° **16381**, *The Educational Times* New Series, **61** (Juliet 1908) 308

<sup>15</sup> Delahaye T., Lez H., *Mathesis*, problem n° **1655**, 3-ième Série, **8**, 1908, p. 138-139

<sup>16</sup> Naraniengar M. T., *Mathematical Questions and Solutions* from *The Educational Times*, New Series **15** (1909) 47

Elle sera redécouverte par J. M. Child en 1922

<sup>17</sup> Bricard R. (1870-1944), a été ingénieur à Dijon, puis répétiteur à l'École Polytechnique et rédacteur des *Nouvelles Annales* en 1903 ; il signa quelques articles par R. B.

<sup>18</sup> Child J. M., A proof of Morley's theorem, *Mathematical Gazette* (1922) 171

<sup>19</sup> Morley F., *Mathematical Association of Japan for Secondary Mathematics*, vol. 6 (December 1924) 260-262

<sup>20</sup> Morley F., *American Journal of Mathematics*, **51** (1929) 465-472

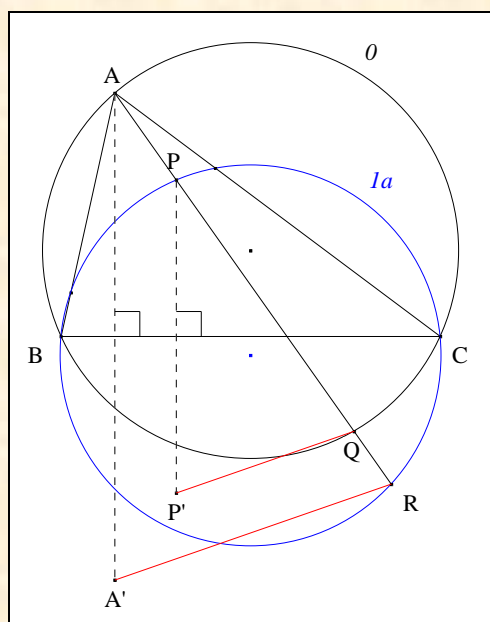


## PROBLÈME 5<sup>21</sup>

Jean-Louis Ayme

### VISION

Figure:

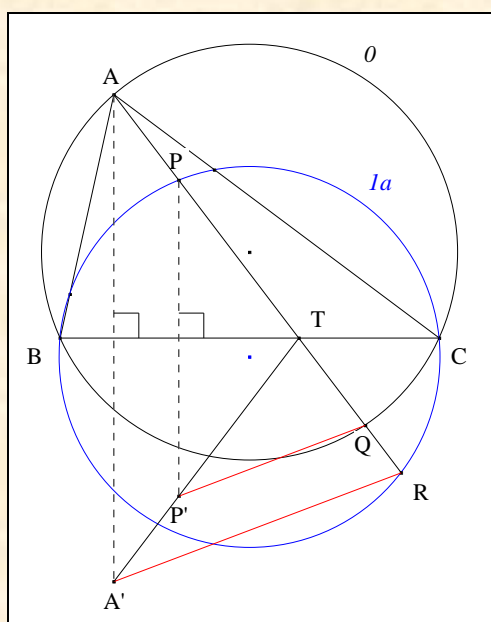


**Traits :**       $ABC$     a triangle,  
                    $O$         le cercle circonscrit,  
                    $Ia$         un cercle passant par B et C,  
                    $P$         un point de  $Ia$ ,  
                    $A', P'$     les symétriques A, P par rapport à (BC)  
 et                 $Q, R$     les seconds points d'intersection (AP) resp. avec  $O, Ia$ .

**Donné :**         $(RA')$  est parallèle à  $(QP')$ .

### VISUALISATION

<sup>21</sup> Ayme J.-L., Two surprising parallels II, AoPS du 10/08/2011 ;  
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=430168>



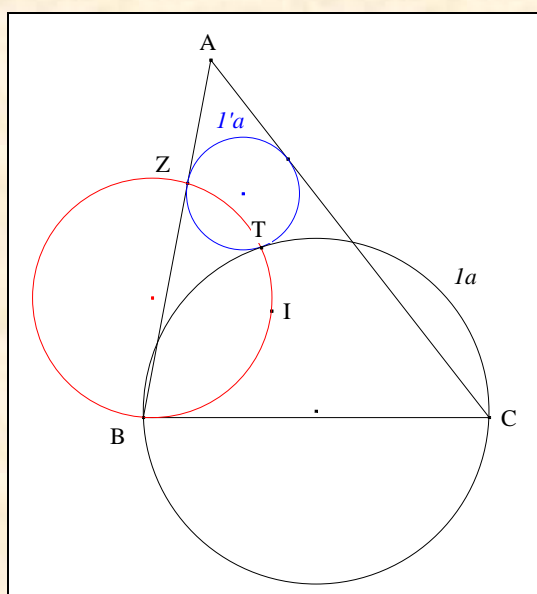
- Notons  $T$  le point d'intersection de  $(AP)$  et  $(BC)$ .
- $AA'P'P$  étant un trapèze d'axe de symétrie  $(BC)$ ,
  - (1)  $(A'P')$  passe par  $T$
  - (2)  $TA'/TP' = TA/TP$
- $(BC)$  étant l'axe radical de  $O$  et  $Ia$ ,  $TA \cdot TQ = TP \cdot TR$  i.e.  $TA/TP = TR/TQ$ .
- Par transitivité de  $=$ ,  $TA'/TP' = TR/TQ$ .
- **Conclusion :** d'après Thalès de Milet "Rapports",  $(RA')$  est parallèle à  $(QP')$ .

PROBLÈME 6<sup>22</sup>

India MO 2001

## VISION

Figure :



**Traits :**

- ABC un triangle,
- I le centre de ABC,
- $Ia$  un cercle passant par B, C et rencontrant [BA] et [CA],
- $I'a$  le cercle tangent à (AB), (AC) et extérieurement à  $Ia$ ,
- T le point de contact de  $I'a$  et  $Ia$ ,
- et Z le point de contact de  $I'a$  avec (AB).

**Donné :** Z, T, I et B sont cocycliques.

**Commentaire :** une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur.<sup>23</sup>

<sup>22</sup> 6th Geometry problem, AoPS du 29/08/2003 : <https://artofproblemsolving.com/community/c6h554>  
 Not easy, AoPS du 30/06/2004 ; <https://artofproblemsolving.com/community/c6h6490>  
 rectangle with incircles, AoPS du 27/02/2005 ;  
<https://artofproblemsolving.com/community/c6h28200>  
 Yeti, Concyclic points with triangle incenter, *Mathlinks* (20/06/2005) ;  
<https://artofproblemsolving.com/community/q4h41667p262450>

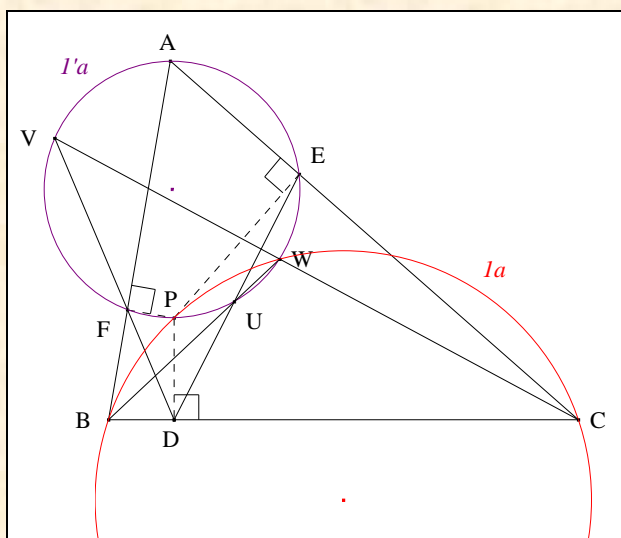
<sup>23</sup> Ayme J.-L., Un remarquable résultat de Vladimir Protassov, G.G.G. vol. 2, p. 2-4 ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

## PROBLÈME 7

Jean-Louis Ayme

### VISION

Figure :



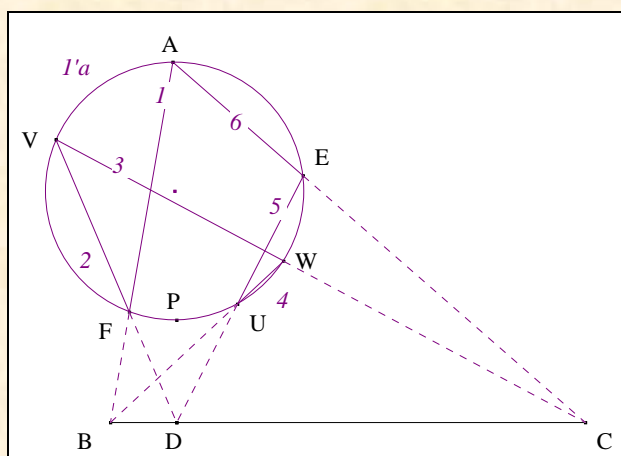
**Traits :**

- ABC un triangle acutangle,
- $Ia$  un cercle passant par B et C,
- P un point de  $Ia$ ,
- DEF le triangle P-pédal de ABC,
- $I'a$  le cercle de diamètre [AP] ; il passe par E et F ;
- U, V les seconds points d'intersection de (DE), (DF) avec  $I'a$ ,

et W le point d'intersection de (BU) et (CV).

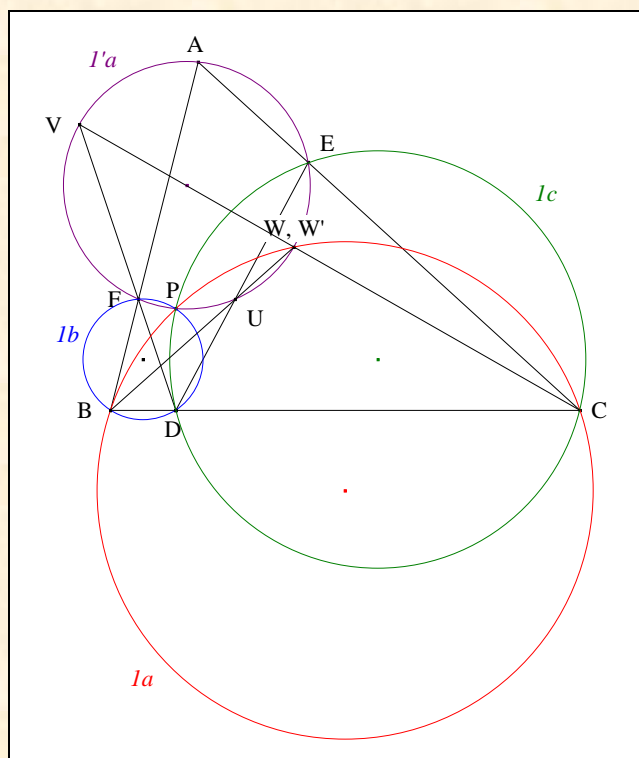
**Donné :** W est sur  $Ia$ .

### VISUALISATION



• **Scolie :** A, F, V, U et E sont sur  $Ia$ .

- D'après Blaise Pascal "Hexagramma mysticum"<sup>24</sup>,  
(BDC) étant la pascale de l'hexagone AFVWUEA, W est sur  $l'a$ .



- Notons  $l'b, l'c$  les cercles de diamètres [BP], [CP] ; ils passent par D ;  
et  $W'$  le second point d'intersection de  $l'a$  et  $l'a$ .
- D'après Auguste Miquel "Le théorème du pivot"<sup>25</sup>,  
appliqué à  $l'a, l'b, l'c$  concourants en P, P en est le pivot.
- D'après Auguste Miquel "Le théorème des trois cercles concourants"<sup>26</sup>  
appliqué à  $l'a, l'c, l'a$  concourants en P, U, W' et B sont alignés.
- D'après Auguste Miquel "Le théorème des trois cercles concourants"<sup>27</sup>  
appliqué à  $l'a, l'b, l'a$  concourants en P, V, W' et C sont alignés.
- En conséquence, W' et W sont confondus.
- **Conclusion :** W est sur  $l'a$ .

**Commentaire :** une réciproque est envisageable<sup>28</sup>.

<sup>24</sup> Ayme J.-L., Hexagramma mysticum, G.G.G. vol. 12, p. 4-8 ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

<sup>25</sup> Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. 13, p. 4-6 ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

<sup>26</sup> Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. 13, p. 4-6 ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

<sup>27</sup> Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. 13, p. 4-6 ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

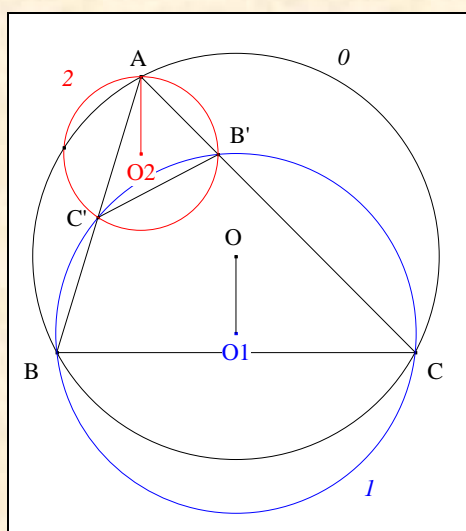
<sup>28</sup> Conyclic, AoPS du 09/07/2012 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=488169>

## PROBLÈME 8

Une généralisation de la formule de Lazare Carnot

### VISION

Figure :



**Traits :**

- ABC un triangle,
- $\theta$  le cercle circonscrit à ABC,
- O le centre de  $\theta$ ,
- $I$  un cercle passant par B et C,
- O1 le centre de  $I$ ,
- B', C' les seconds points d'intersection resp. de (AC), (AB) avec  $I$ ,
- 2 le cercle circonscrit à AB'C'

et O2 le centre de  $\theta$ .

**Donné :**  $AO2 = 2.OO1$ .<sup>29</sup>

**Commentaire :** une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur <sup>30</sup>.

<sup>29</sup> Ayme J.-L., Two equal segments, *Mathlinks* du 07/05/2010 ;

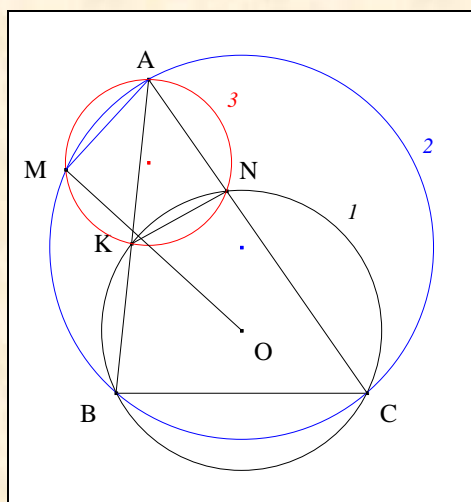
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=348309>

<sup>30</sup> Ayme J.-L., Une généralisation de la formule de Carnot, G.G.G. vol. 8, p. 6-10 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

## 7. Problème 5 de la 26-ème O.I.M. (1985)

## VISION

Figure :



**Traits :**       $ABC$     un triangle non isocèle,  
                    $I$         un cercle passant par  $B$  et  $C$ ,  
                    $O$         le centre de  $I$ ,  
                    $K, N$     les seconds points d'intersection de  $I$  resp. avec  $[AB], [AC]$ ,  
                    $2, 3$     les cercles circonscrits resp. aux triangles  $ABC, AKN$   
 et                 $M$         le second point d'intersection de  $2$  et  $3$ .

**Donné :**         $(OM)$  est perpendiculaire à  $(AM)$ .<sup>31</sup>

**Commentaire :** une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur.<sup>32</sup>

<sup>31</sup> Problème 5 de la 26-ème O.I.M. (1985) ;  
 Circle center  $O$  passes through the vertices  $A$  and  $C$ , *Mathlinks* du 11/11/2005 ;

<sup>32</sup> <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=60787&start=0>.  
 Ayme J.-L., La ponctuelle (MH), G.G.G. vol. 7, p. 19-21 ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>



## C. LEXIQUE

## FRANÇAIS - ANGLAIS

<b>A</b>			<b>N</b>	
aligné	collinear		Notons	name
annexe	annex		nécessaire	necessary
axiome	axiom		note historique	historic note
appendice	appendix		<b>O</b>	
adjoint	associate		orthocentre	orthocenter
a propos	by the way btw		ou encore	otherwise
acutangle	acute angle		<b>P</b>	
axiome	axiom		parallèle	parallel
<b>B</b>			parallèles entre elles	parallel to each other
bissectrice	bisector		parallélogramme	parallelogram
bande	strip		pédal	pedal
<b>C</b>			perpendiculaire	perpendicular
centre	incenter		ped	foot
centre du cercle circonscrit	circumcenter		point de vue	point of view
cercle circonscrit	circumcircle		postulat	postulate
céviennne	cevian		point	point
colinéaire	collinear		pour tout	for any
concourance	concurrence		<b>Q</b>	
coincide	coincide		quadrilatère	quadrilateral
confondu	coincident		<b>R</b>	
côté	side		remerciements	thanks
par conséquence	consequently		reconnaissance	acknowledgement
commentaire	comment		respectivement	respectively
<b>D</b>			rapport	ratio
d'après	according to		répertorié	to index
donc	therefore		<b>S</b>	
droite	line		semblable	similar
d'où	hence		sens	clockwise in this
distinct de	different from		order	
<b>E</b>			segment	segment
extérieur	external		Sommaire	summary
<b>F</b>			symédiane	symmedian
figure	figure		suffisante	sufficient
<b>H</b>			sommet (s)	vertex (vertice)
hauteur	altitude		<b>T</b>	
hypothèse	hypothesis		trapèze	trapezium
<b>I</b>			tel que	such as
intérieur	internal		théorème	theorem
identique	identical		triangle	triangle
i.e.	namely		triangle de contact	contact triangle
incidence	incidence		triangle rectangle	right-angle triangle
<b>L</b>				
lemme	lemma			
lisibilité	legibility			
<b>M</b>				
mediane	median			
médiatrice	perpendicular bisector			
milieu	midpoint			