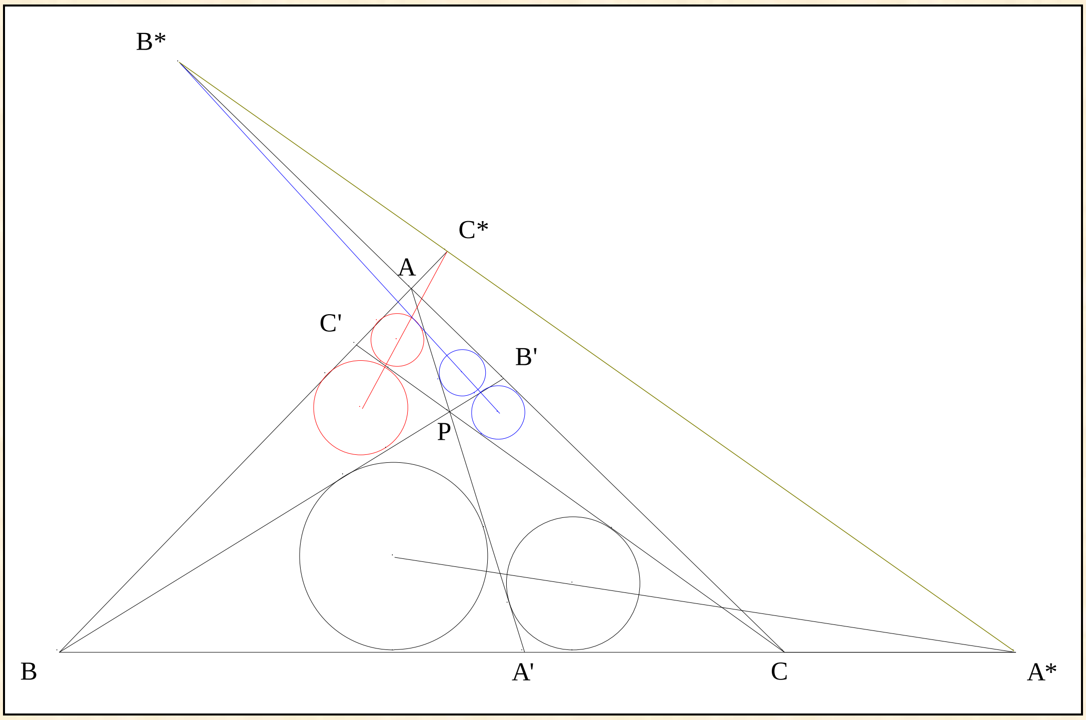
LA DROITE DE DANNEELS

DANNEELS's LINE

IN MEMORIAM

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'article présente une preuve originale de l'auteur qui a su ramener ce problème difficile d'Éric Danneels datant de 2003 à un problème équivalent en s'appuyant sur des résultats découverts en 2008.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. This article presents an original proof of the author who has been able to bring this difficult problem of Eric Danneels dating back 2003 with an equivalent problem in relying on results discovered in 2008.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

---

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 26/06/2012.

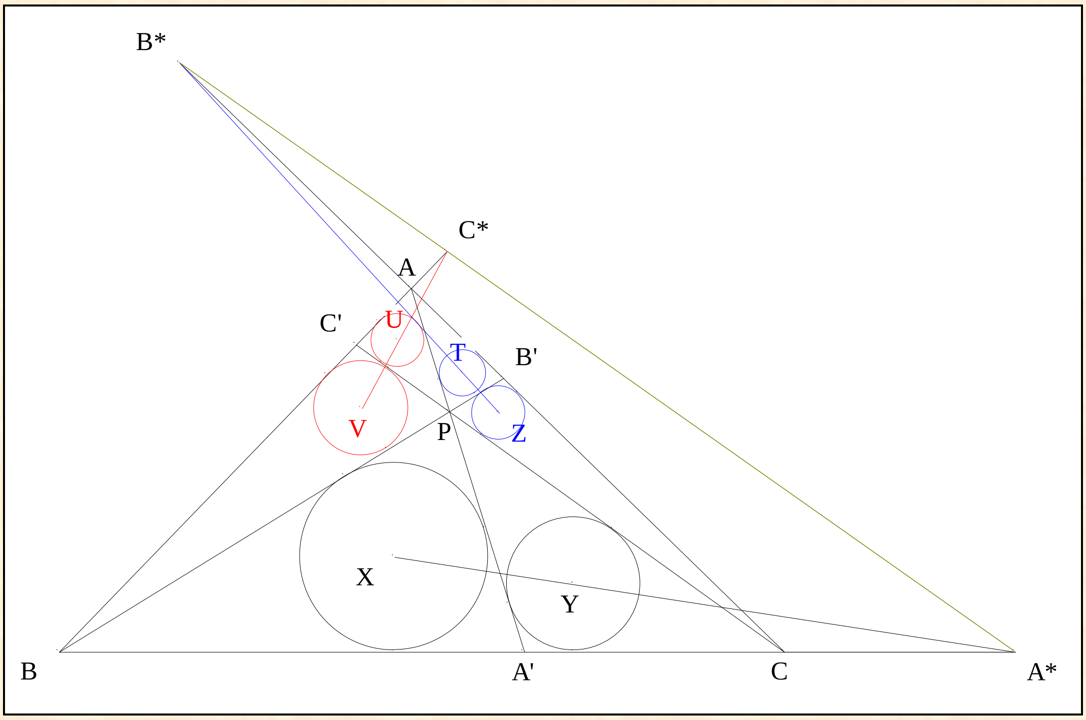
Sommaire

A. LA DROITE DE DANNEELS

1. Le résultat

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point **intérieur** à ABC,
	A'B'C'	le triangle P-cévien de ABC,
	X, Y, Z, T, U, V	les centres des triangles A'PB, A'PC, B'PC, B'PA, C'PA, C'PB
et	A*, B*, C*	les points d'intersection de (XY) et (BC), (ZT) et (CA), (UV) et (AB).

Donné : A*, B* et C* sont alignés.

Scolie : (A*B*C*) est "la P-droite de Danneels relativement à ABC".

2. Note historique

Cet élégant résultat a été présenté le mardi 16 octobre 2003 sur le site *Hyacinthos* par Éric Danneels de Bruges (Flandre-Occidentale, Belgique).

Indeed.

I found another transformation based on the cevian triangle A'B'C'
of the incenter I.
Let Ab be the incenter of the triangle IBA'.
Let Ac be the incenter of the triangle ICA'.
AbAc intersects BC in A*.
Define B* and C* cyclically.

==> A*, B* and C* are collinear

If we take the tripole of that line we get X(258).

Generalization

Moreover this seems to be true not only for the incenter but for
every point. For points outside the triangle we have to use
excircles as usual.

For the orthocenter my sketches show that the tripole becomes X(278).

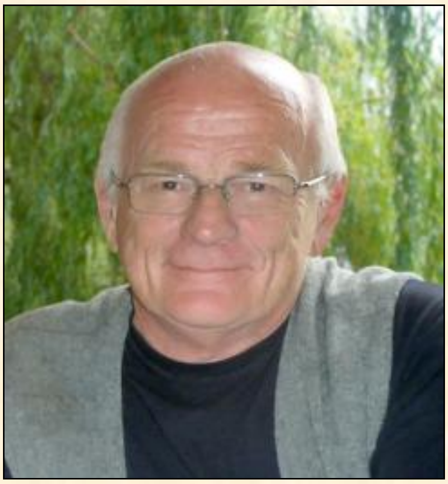
I can't find a proof of this generalization neither synthetically or
by barycentrics

Is this known ?

Greetings from Bruges

Eric [2]

3. Une courte biographie d'Éric Danneels



Éric Danneels est né à Bruges (Flandre-Occidentale, Belgique) le 21 septembre 1949. Après ses études d'ingénieur en électronique à l'Université de Gand, Belgique, il travaille dans les technologies de l'information à Bruxelles. Parallèlement, son vif intérêt pour les mathématiques et plus particulièrement pour la Géométrie du Triangle occupe ses passe-temps. Grand contributeur du site *Encyclopedia of Triangle Centers* [3] dirigé par l'américain Clark Kimberling, participant actif sur le site *Hyacinthos* [4], il s'est dernièrement intéressé

[2] Danneels E., New point related to the angular bisectors ?, Message *Hyacinthos* **# 8296** du 16/10/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/
[3] Kimberling K., ETC ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
[4] http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

aux "strong and weak points" dans un papier inachevé que le Géomètre hollandais Chris van Tienhoven [5] à insèrerer dans *Hyacinthos* Files [6] avec l'accord de sa femme Ria Vandierendonck et de sa fille Barbara.

May his ideas and papers inspire many. [7]

Son épouse témoigne qu'il a été optimiste jusqu'à la fin tout en travaillant constamment sur son domaine favori i.e. la Géométrie du Triangle.
Il décède suite à une longue maladie, à Bruges, le 20 mars 2012 à l'âge de 62 ans.

La Belgique et ses provinces

[5] van Tienhoven C., *Mathematics* ; http://www.chrisvantienhoven.nl/
Eric Danneels left us, message *Hyacinthos* # **20981** du 20/04/2012 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

[6] http://groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/files/EricDanneels-Strong_Weak.pdf

[7] van Tienhoven C.

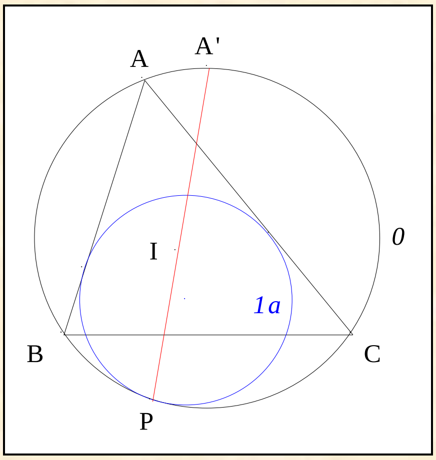
B. LE POINT DE VUE DE L'AUTEUR

Commentaire : c'est en caressant du regard les nombreuses figures présentes dans mes archives que j'ai été séduit par le charme de la figure d'Éric Danneels et que l'idée d'une preuve synthétique a jailli dans mon esprit.

1. Le résultat d'Eugène Lauvernay

VISION

Figure :



Traits :

	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	A'	le premier A-perpoint de ABC,
	1a	le cercle tangent à (AB), (AC) et intérieurement tangent à *0*,
	P	le point de contact de *1a* avec *0*
et	I	le centre de ABC.

Donné : P, I et A' sont alignés [8].

Scolie : A' est le A-point de de Longchamps de ABC.[9]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat est présentée sur le site de l'auteur.[10]

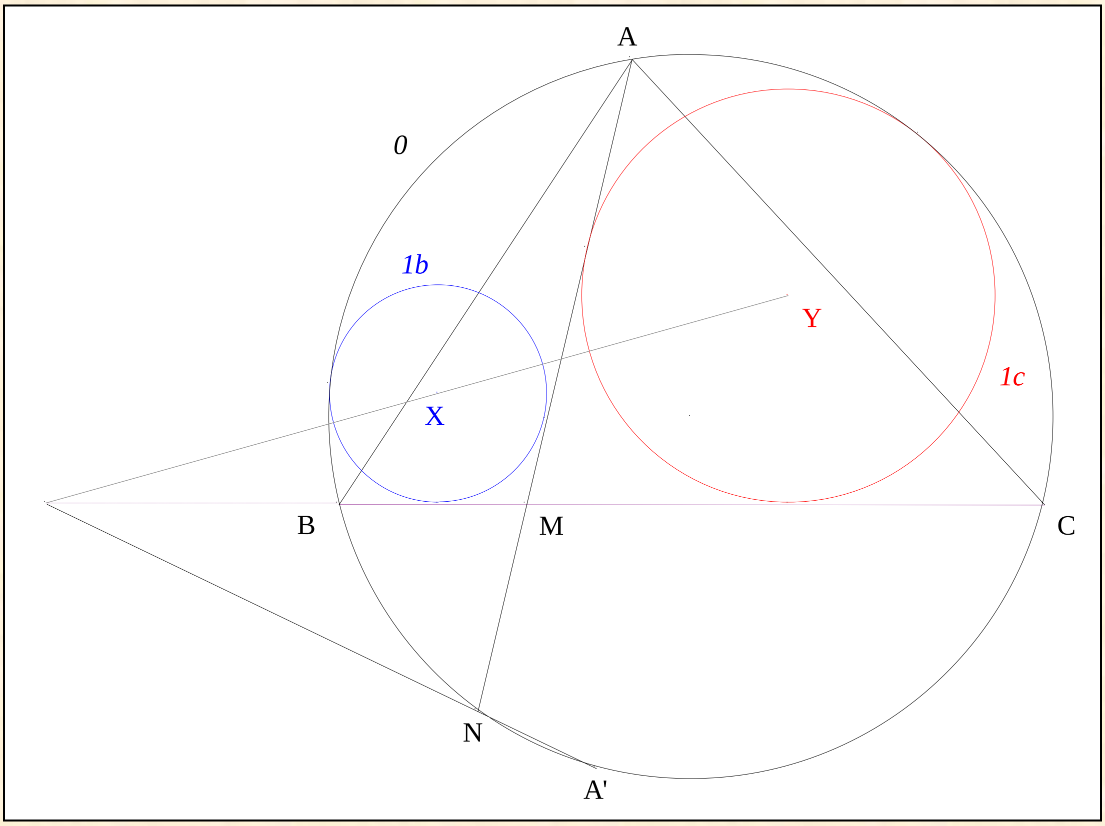
2. Le résultat de Jianhua Fang

VISION

---

[8] Lauvernay E., *Journal de Mathématique Élémentaire* (1892) 390.
[9] Ayme J.-L., A new mixtilinear incircle adventure **I**, G.G.G. vol. **4**, p. 12 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
[10] Ayme J.-L., A new mixtilinear incircle adventure **I**, G.G.G. vol. **4**, p. 17-18 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	M	un point de [BC],
	1b, *1c*	les cercles tangents à *0*, [AM], resp. à [MB], [MC],
	X, Y	les centres resp. de *1b*, *1c*,
	N	le second point d'intersection de (AM) avec *0*
et	A'	le A-point de de Longchamps de ABC.

Donné : (A'N), (XY) et (BC) sont concourantes. [11]

Scolie : *1b*, *1c* sont resp. les B, C-cercles de Thébault de ABC relativement à M.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat est présentée sur le site de l'auteur.[12]

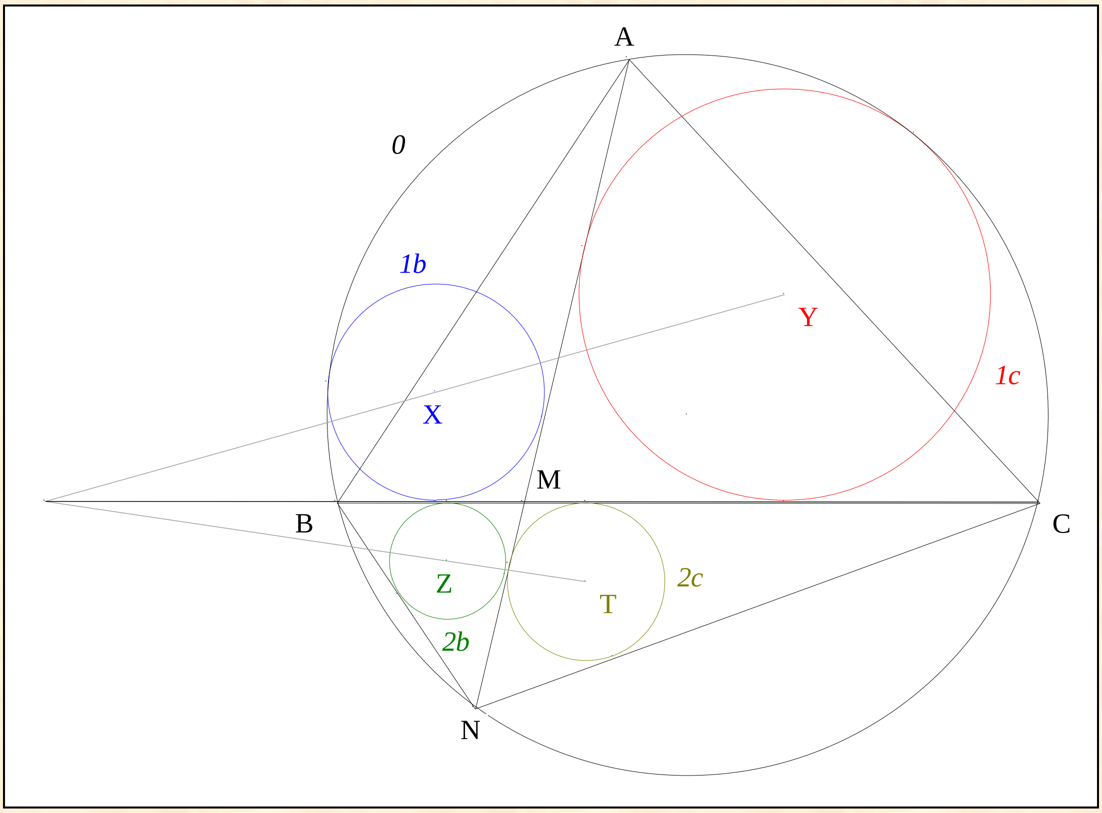
3. Le résultat de Vladimir Zajic

VISION

Figure :

[11] Fang-jh, On mixtilinear incircles and the Thebault circles, *Mathlinks* (12/07/2008) ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1968592250&t=214426.

[12] Ayme J.-L., A new mixtilinear incircle adventure **II**, G.G.G. vol. **4**, p. 3-5 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
A new mixtilinear incircle adventure **III**, G.G.G. vol. **4**, p. 36 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	M	un point de [BC],
	1b, *1c*	les B, C-cercles de Thébault de ABC relativement à M,
	X, Y	les centres resp. de *1b*, *1c*,
	N	le second point d'intersection de (AM) avec *0*,
	2b, *2c*	les cercles inscrits des triangles BMN, CMN
et	Z, T	les centres resp. de *2b*, *2c*.

Donné : (XY), (ZT) et (BC) sont concourantes[13].

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat est présentée sur le site de l'auteur.[14]

4. Le point de vue

Le résultat de l'américain Vladimir Zajic suivant à quelque mois d'intervalle celui du chinois Jianhua Fang en 2008, m'a permis d'envisager le problème d'Éric Danneels sous le point de vue des droites (A'N).

13 Zajic V., Ordinary and Thebault incircles, Nice but difficult. Own , *Mathlinks* du 07/12/2008 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=244007
Ayme J.-L., Conjecture with Thebault's circles and incircles, *Mathlinks* du 10/11/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=444912

14 Ayme J.-L., Forme et mouvement, G.G.G. vol. **20**, p. 17-20 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

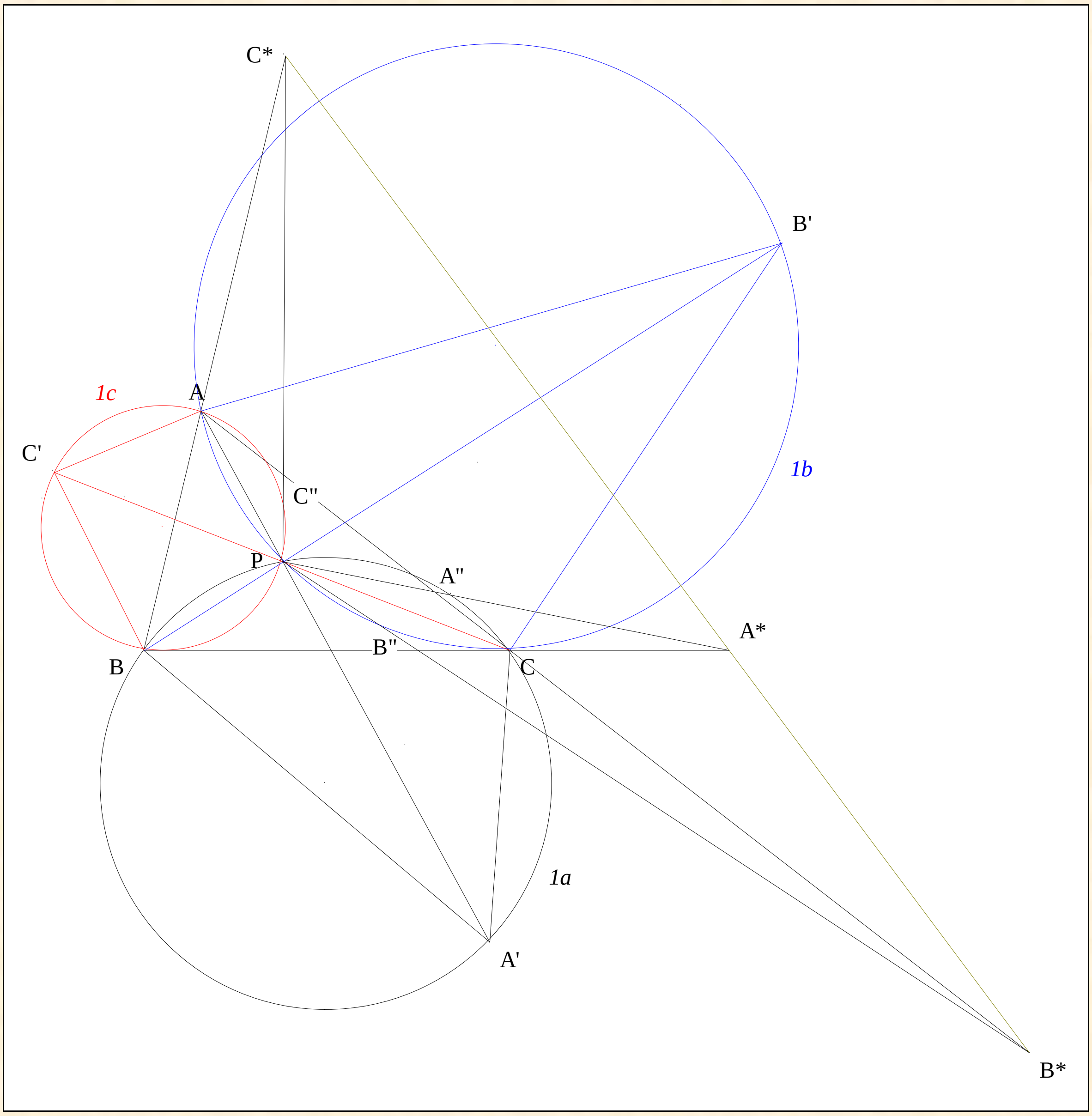
C. LE PROBLÈME DE DANNEELS

REVISITÉ

PAR L'AUTEUR

VISION

Figure :



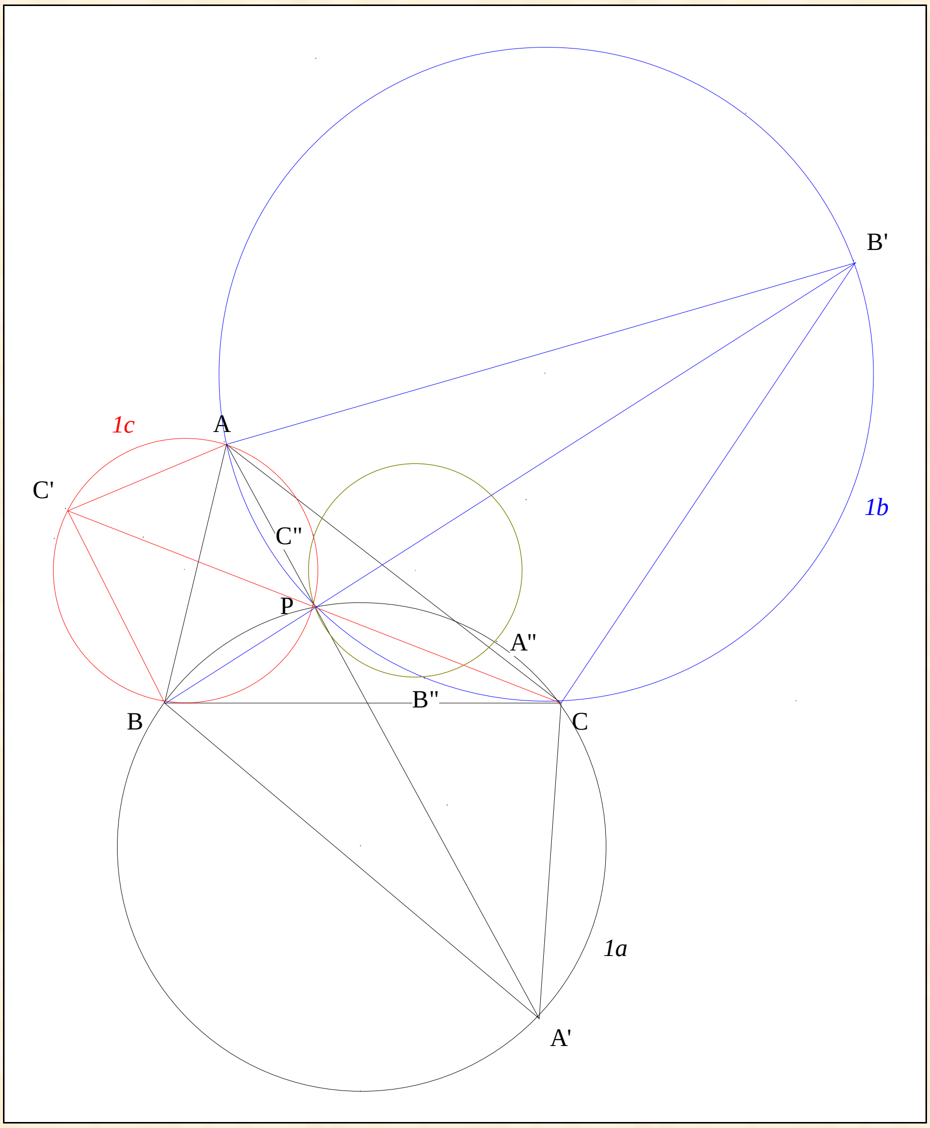
Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point **intérieur** à ABC,
	A'B'C'	le triangle P-cévien de ABC,
	1a, *1b*, *1c*	les cercles circonscrits resp. aux triangles PBC, PCA, PAB,
	A', B', C'	les seconds points d'intersection de (AP), (BP), (CP) resp. avec *1a*, *1b*, *1c*,
	A", B", C"	les A', B', C-points de de Longchamps resp. aux triangles A'BC, B'CA, C'AB,
et	A*, B*, C*	les points d'intersection de (PA") et (BC), (PB") et (CA), (PC") et (AB).

Donné : A*, B* et C* sont alignés. [15]

D. UN LEMME DE L'AUTEUR

VISION

Figure :



Traits :

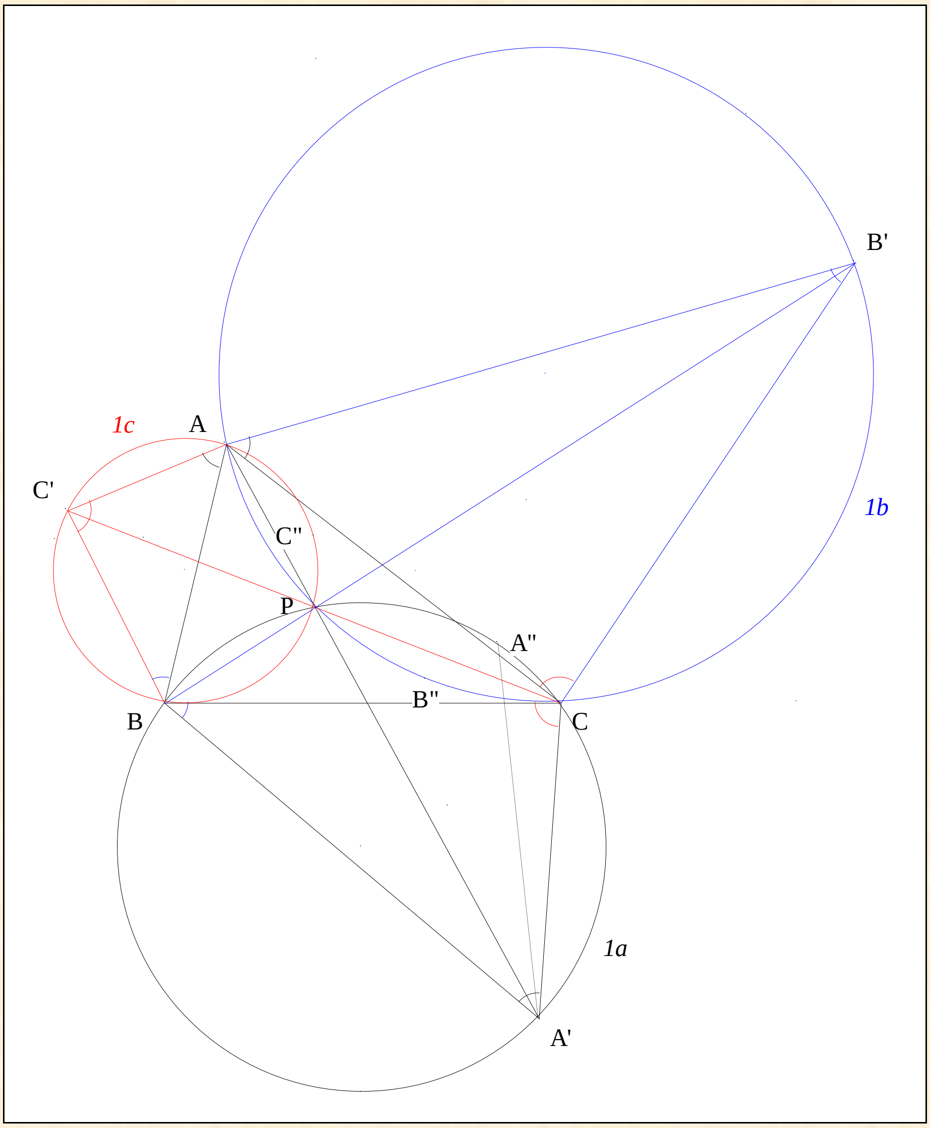
ABC	un triangle,
P	un point **intérieur** à ABC,
A'B'C'	le triangle P-cévien de ABC,
1a, *1b*, *1c*	les cercles circonscrits resp. aux triangles PBC, PCA, PAB,
A', B', C'	les seconds points d'intersection de (AP), (BP), (CP) resp. avec *1a*, *1b*, *1c*

15 Ayme J.-L., A new central line, *Mathlinks* du 09/05/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=478830

et A", B", C" les A', B', C-points de de Longchamps resp. aux triangles A'BC, B'CA, C'AB.

Donné : A", B", C" et P sont cocycliques. [16]

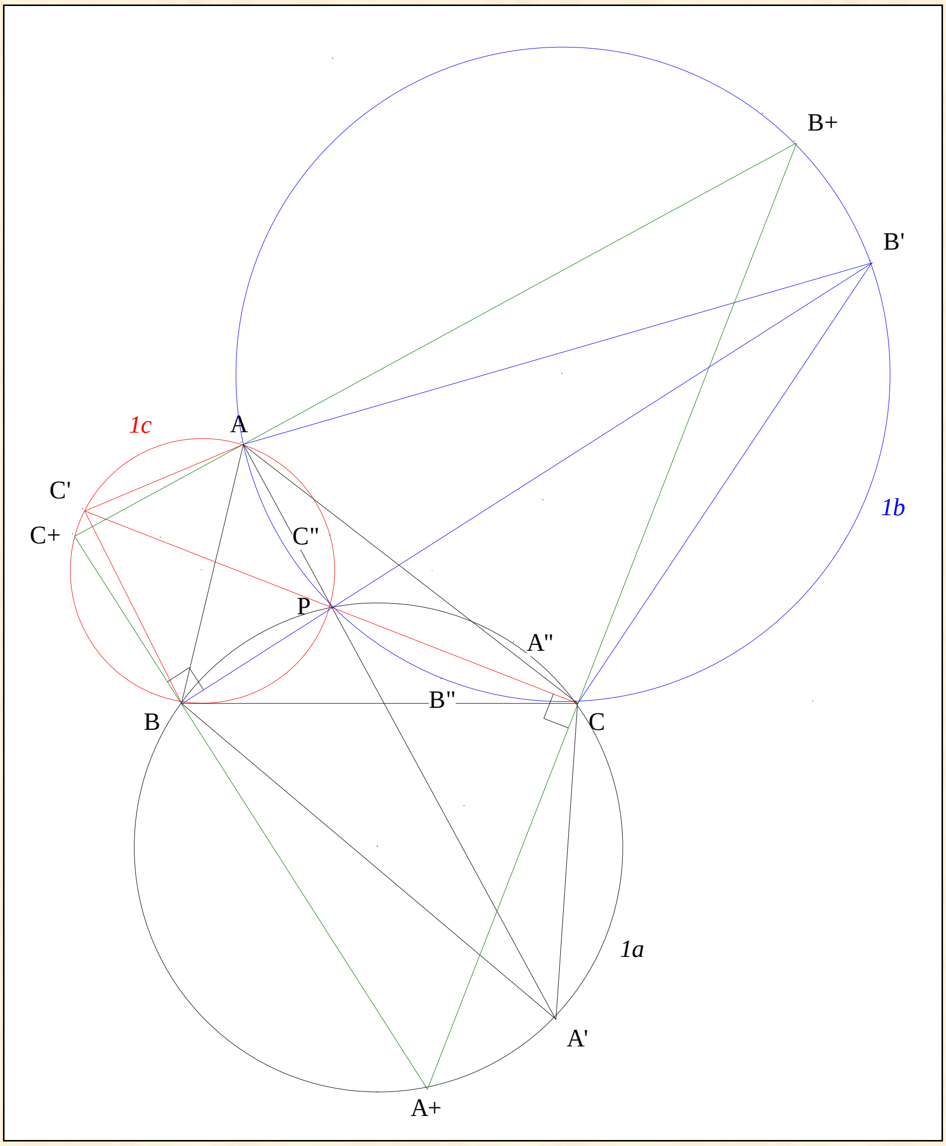
VISUALISATION



- D'après "Un triangle de Möbius" (Cf. Annexe **1**)
  appliqué à
  * *1b* et *1c*, <CAB' = <C'AB
  * *1c* et *1a*, <ABC' = <A'BC
  * *1a* et *1b*, <BCA' = <B'CA.

- **Scolies :** **(1)** (A'A") est la A'-droite de de Longchamps de A'BC
  (2) les triangles A'BC, B'CA et C'AB sont directement semblables.

[16] Ayme J.-L., A new central circle, *Mathlinks* du 08/05/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=478701

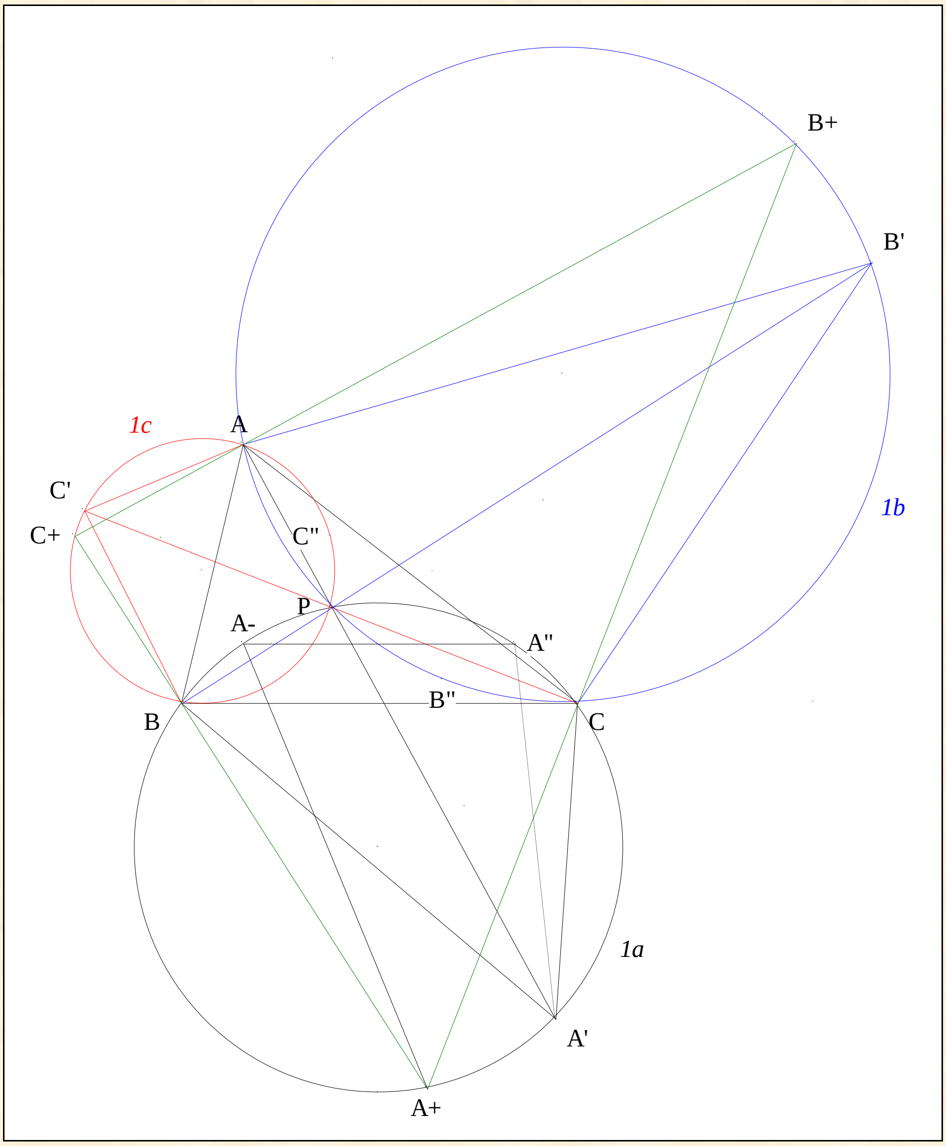


- Notons A+B+C+ le P-antipédal de ABC.

- **Scolies :** **(1)** A+, B+, C+ sont les antipôles de P relativement à *1a*, *1b*, *1c*
  (2) les triangles A'BC et A+B+C+ sont indirectement semblables.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (PA) ⊥ (A+A").

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (PB) ⊥ (B+B")
  (PC) ⊥ (C+C").



- Notons A- le second point d'intersection de la parallèle à (BC) issue de A" avec *1a*
  et B-, C- les points obtenus par permutation circulaire de A, B et C.

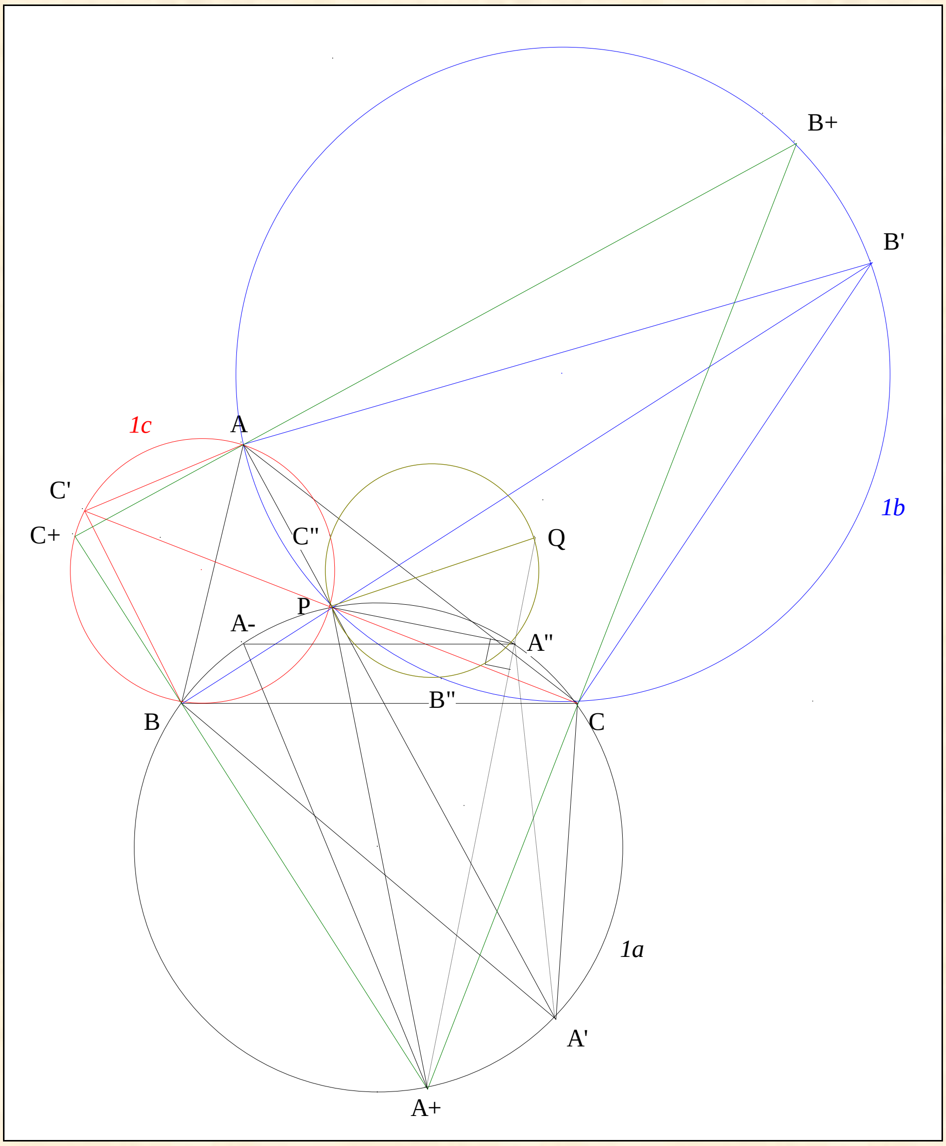
- Le quadrilatère cyclique BCA"A- étant un trapèze, <CA'A" = <A-A+B.

- D'après Gohierre de Longchamps [17], les A', B, C-droites de de Longchamps de A'BC sont concourantes.

- **Conclusion partielle :** A+B+C+ et A'BC étant inversement semblables,
  (A+A-), (B+B-) et (C+C-) sont concourantes.

---

[17] Longchamps (Gohierre de) G., Question **659** *Mathesis* **IX** (1889) 207
Ayme J.-L., Anew mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. **4**, p. 22 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- **Scolie :** (A+A") et (A+A-) sont deux A+ **-** isogonales de A+B+C+.

- D'après Mathieu "The isogonal theorem" (Cf. Annexe **2**), les (A+A-), (B+B-) et (C+C-) étant concourantes, les (A+A"), (B+B") et (C+C") le sont aussi.

- Notons Q ce point de concours.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", A", B", C" sont sur le cercle de diamètre [PQ].

- **Conclusion :** A", B", C" et P sont cocycliques.

Note historique : Chandan Banerjee [18] de Serampore (Inde) plus connu sous le pseudonyme de "RSM" sur le site *Art of Problem Solving* [19] (anciennement *Mathlinks*) a trouvé le germe de cette preuve en rappelant que A'BC est inversement semblable à A+B+C+ ce qui renvoyait à un résultat connu de l'auteur. Dans sa réponse, il en donnait une généralisation.

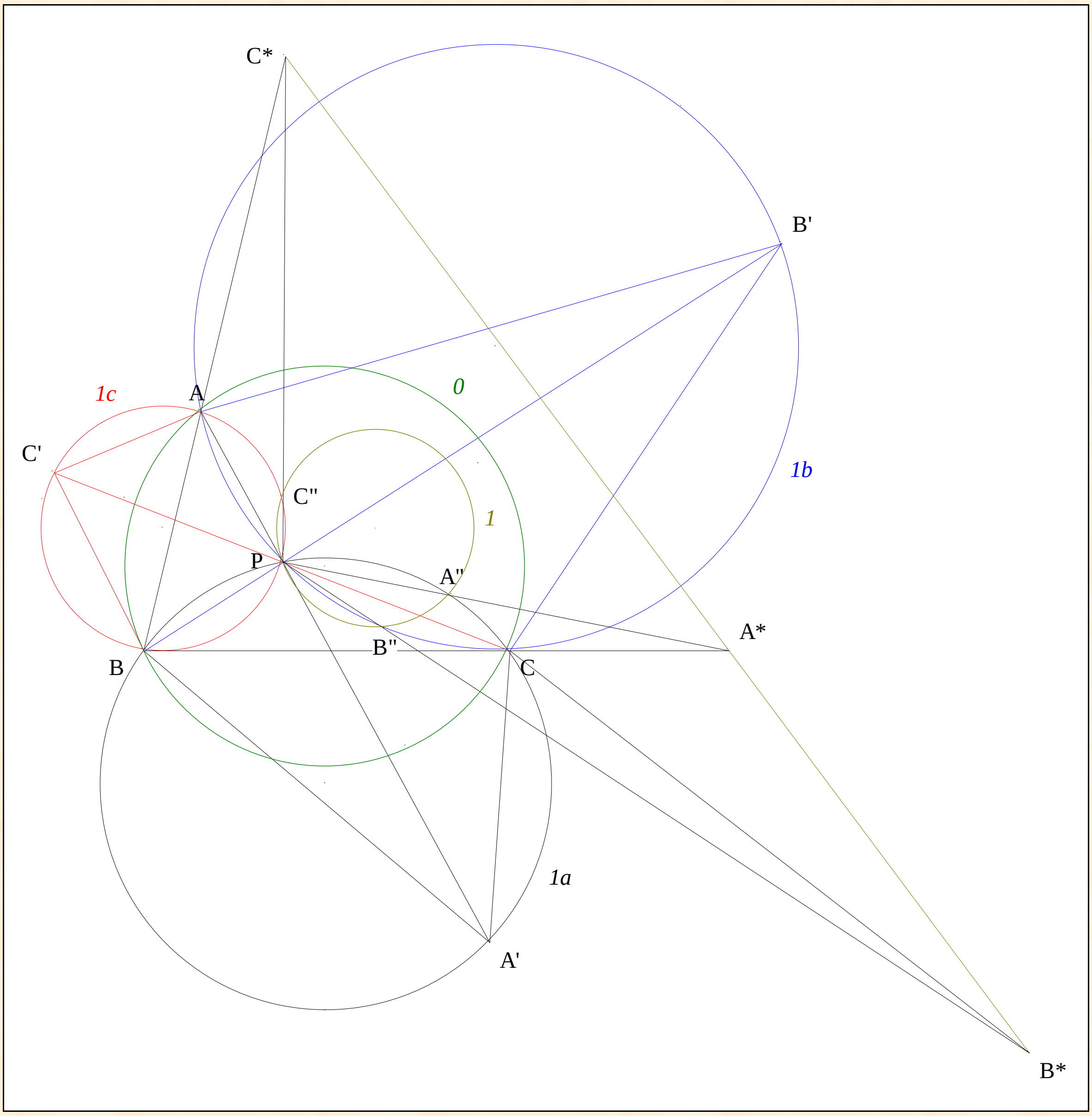
---

18 RSM, A new central circle #**2**, *Mathlinks* du 08/05/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=478701

19 AoPS ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/portal.php?ml=1

E. DEUX PREUVES

1. La voie courte



- Notons i un cercle,
  M un point
  et P_i (M) la puissance de M par rapport à *i*.

- Une chasse de puissance

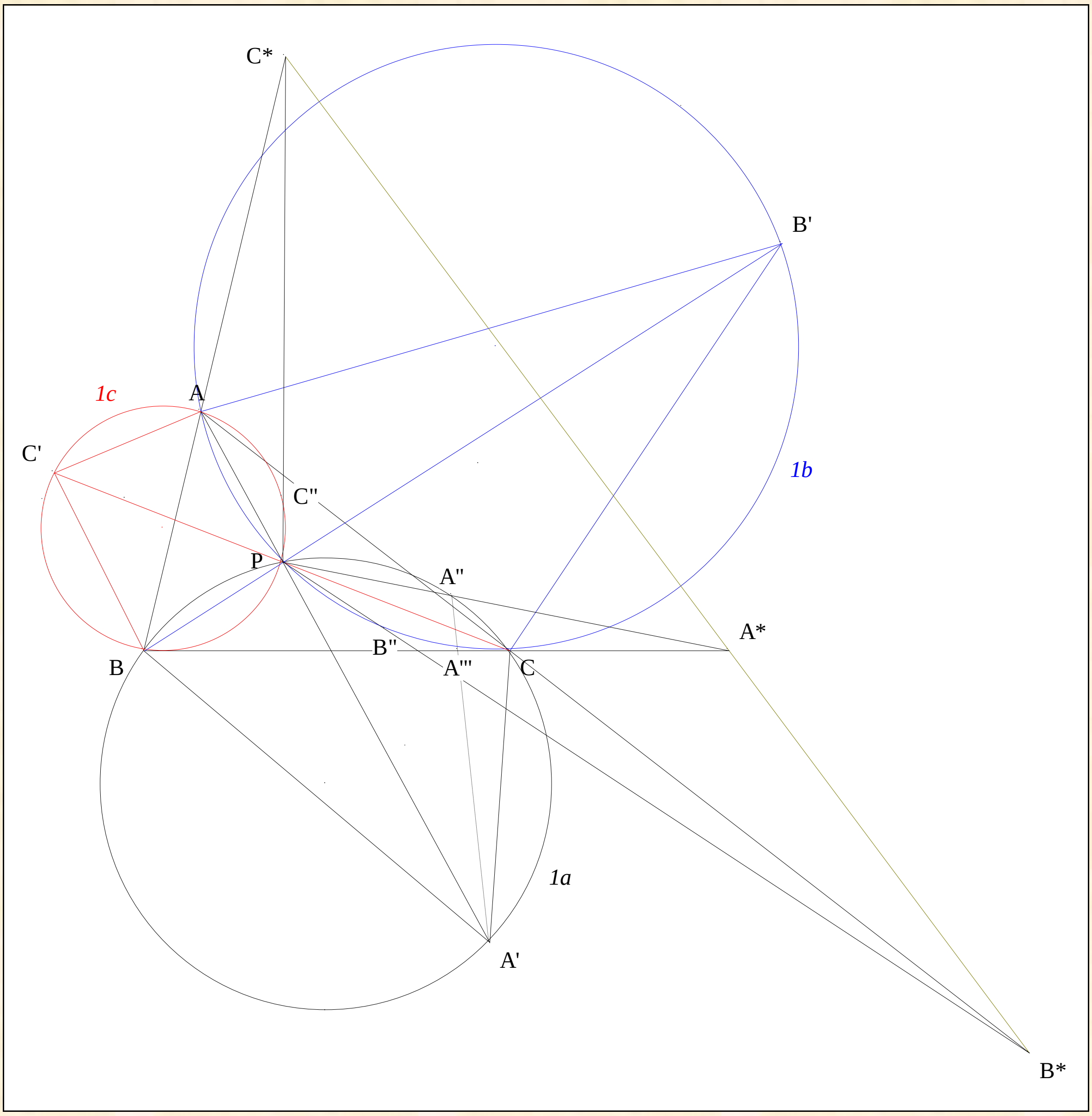
  A* étant sur l'axe radical de *1* et *1a*, P_1 (A*) = P_{1a} (A*) ;
  A* étant sur l'axe radical de *1a* et *0*, P_{1a} (A*) = P_0 (A*) ;
  par transitivité de la relation =, P_1 (A*) = P_0 (A*).

- **Conclusion partielle :** A* est sur l'axe radical de *0* et *1*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que B* est sur l'axe radical de *0* et *1*
  C* est sur l'axe radical de *0* et *1*.

- **Conclusion :** A*, B* et C* sont alignés sur l'axe radical de *0* et *1*.

2. La voie longue



Commentaire : l'idée de l'auteur consiste à appliquer le théorème de Ménélaüs.

- Notons A''', B''', C''' les points d'intersection de (A'A") et (BC), (B'B") et (CA), (C'C") et (AB),
  k_a le rapport anharmonique (B, C, A''', A*),
  k_b le rapport anharmonique (C, A, B''', B*)
  et k_c le rapport anharmonique (A, B, C''', C*).

- Évaluation[20] de ces trois rapports anharmoniques

  * relativement à *1a*, k_a = (B, C, A''', A*) = (A'' ; B, C, A', P) = A'B/A'C : PB/PC

  * relativement à *1b*, k_b = (C, A, B''', B*) = (B'' ; C, A, B', P) = B'C/B'A : PC/PA

  * relativement à *1c*, k_c = (A, B, C''', C*) = (C'' ; A, B, C', P) = C'A/C'B : PA/PB

- Par multiplication membre à membre, k_a. k_b. k_c = A'B/A'C . B'C/B'A . C'A/C'B

- Les triangles A'BC, B'CA et C'AB étant directement semblables,
  A'B/A'C = A'B/A'C
  B'C/B'A = BC/BA'
  C'A/C'B = CA'/CB.

- **Conclusion partielle :** par substitution, k_a. k_b. k_c = A'B/A'C . BC/BA' . CA'/CB = 1.

- Reprenons
  k_a = A'B/A'C : PB/PC ou encore A'B/A'C = k_a . PB/PC
  k_b = B'C/B'A : PC/PA ou encore B'C/B'A = k_b . PC/PA
  k_c = C'A/C'B : PA/PB ou encore C'A/C'B = k_c . PA/PB

  par multiplication membre à membre, A'B/A'C . B'C/B'A . C'A/C'B = 1.

- **Scolie :** P étant à l'intérieur de ABC, A*, B* et C* sont à l'extérieur de ABC.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème de Ménélaüs", A*, B* et C* sont alignés.

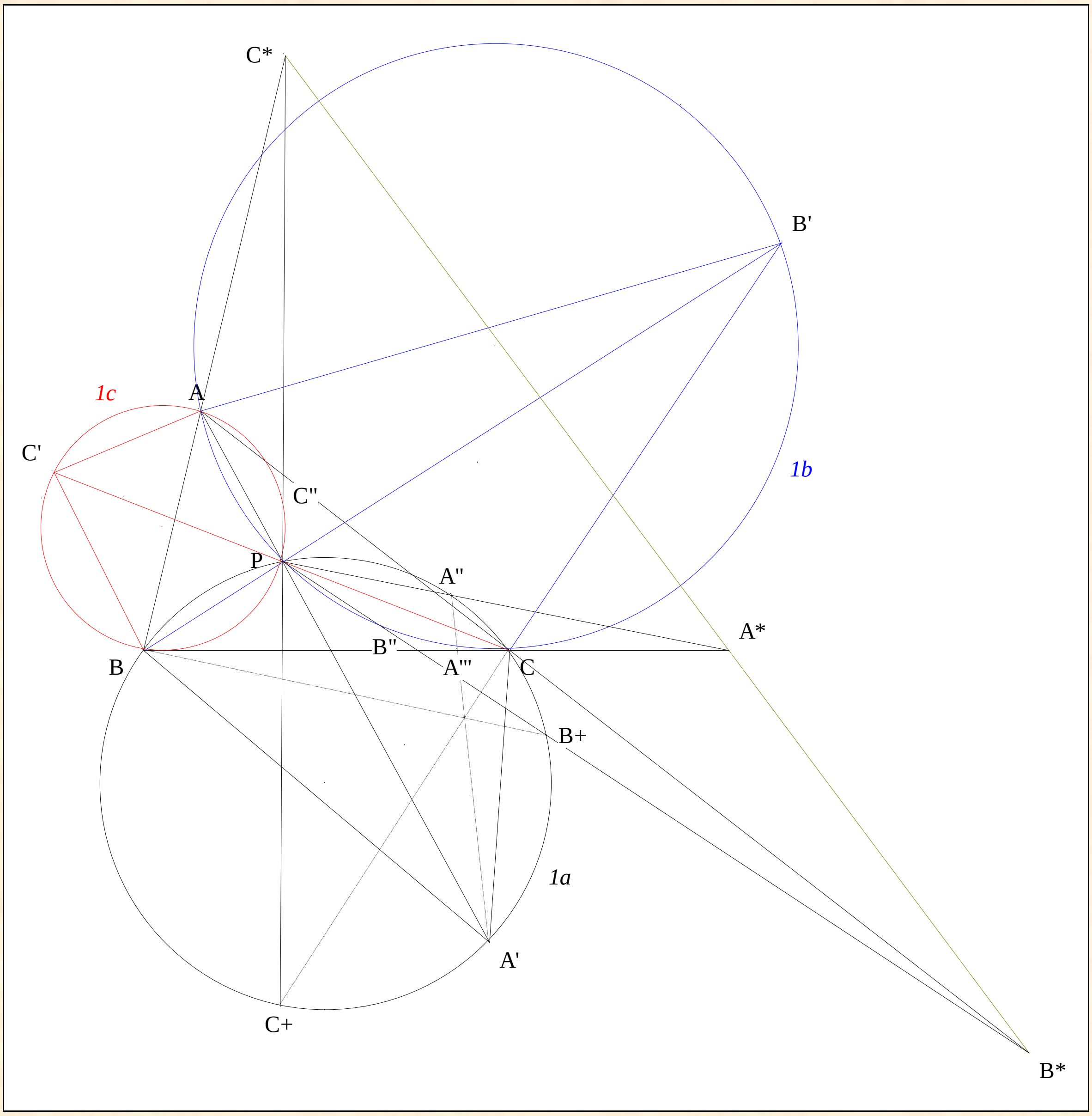
Note historique : Luis González[21] en a donné une preuve trigonométrique

Scolie : deux points remarquables

---

[20] Pour alléger, nous confondrons un quaterne et sa valeur.

[21] Ayme J.-L., A new central line, *Mathlinks* du 09/05/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=478830



- Notons B+, C+ les seconds points d'intersection de (PB"), (PC").

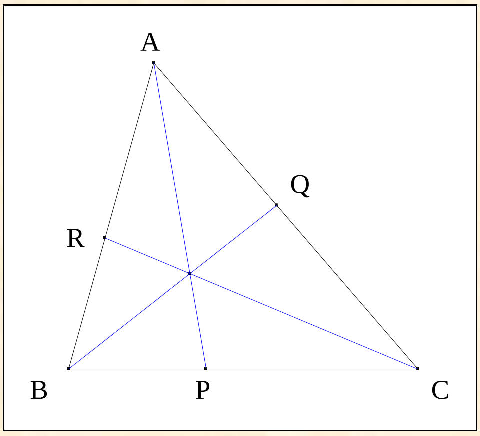
- **Conclusion :** par une chasse angulaire,
  nous montrerions que B+ est le B-point de de Longchamps de A'BC
  C+ est le C-point de de Longchamps de A'BC.

F. APPENDICE

1. Le théorème de Ceva ou des six segments [22]

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle
et P, Q, R trois points resp. de [BC], [CA], [AB].

Donné : (AP), (BQ), (CR) sont concourantes *si, et seulement si,* PB.QC.RA = PC.QA.RB.

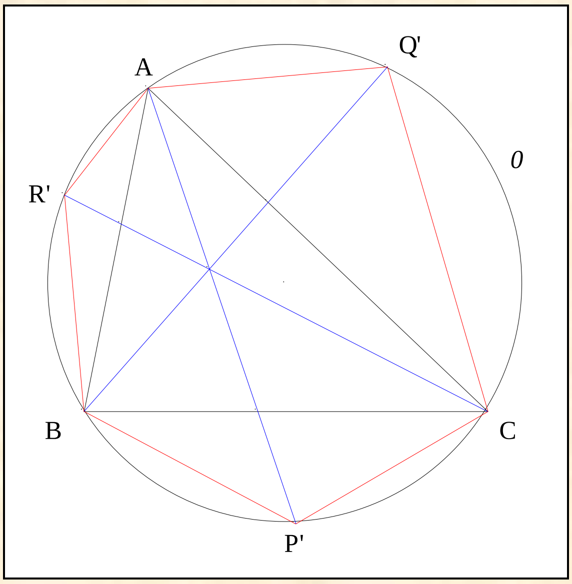
Commentaire : la visualisation nécessaire a recours au théorème de Ménélaüs et la visualisation suffisante à un raisonnement par l'absurde.
Notons que le point de concours est intérieur au triangle.

2. Le théorème ''cordal'' de Ceva

VISION

Figure:

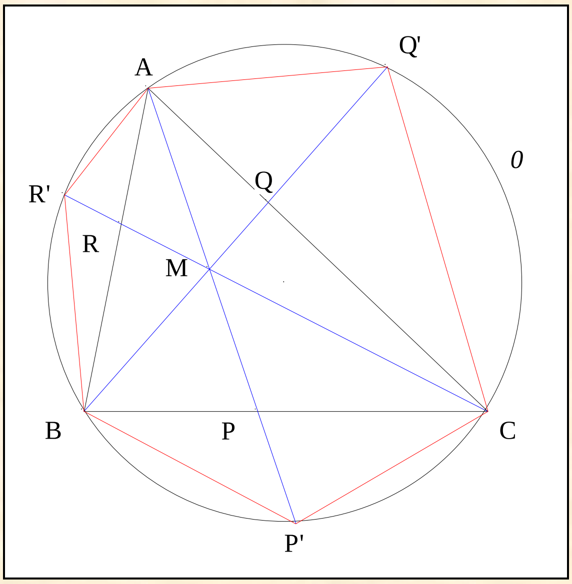
[22] Ceva G., *De lineis rectic se invicem secantibus, statica constructio* (1678).



Traits: ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
P un point **intérieur** à ABC,
P', Q', R' trois points resp. des arcs BC, CA, AB comme indiqué sur la figure.

Donné: (AP'), (BQ') et (CR') sont concourantes *si, et seulement si,* P'B.Q'C.R'A = P'C.Q'A.R'B

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons M le point d'intersection de concours de (AP'), (BQ'), (CR'),
  P, Q, R les points d'intersection resp. de (AP') et (BC), (BQ') et (CA), (CR') et (AB),
  h_a, h_b, h_c les longueurs resp. des A, B, C-hauteurs de ABC,
  S_{abp} l'aire du triangle ABP,
  a, b, c les longueurs resp. de [BC], [CA], [AB]
  et R le rayon de *0*.

- D'après Ceva "Le théorème des six segments", PB.QC.RA = PC.QA.RB ;

- Une chasse segmentaire

multiplions les deux membres par $h_a.h_b.h_c$,
appliquons "La formule égyptienne" concernant l'aire d'un triangle
et simplifions par 2,

$$S_{abp}.\ S_{bcq}.\ S_{car} = S_{acp}.\ S_{baq}.\ S_{cbr}\ ;$$

d'après Snell "La formule trigonométrique" concernant l'aire d'un triangle

$$2.S_{abp} = AB.AP.\sin<BAP$$
$$2.S_{bcq} = BC.BQ.\sin<CBQ$$
$$2.S_{car} = CA.CR.\sin<ACR$$

$$2.S_{acp} = AC.AP.\sin<ACP$$
$$2.S_{baq} = BA.BQ.\sin<BAQ$$
$$2.S_{cbr} = CB.CR.\sin<CBR\ ;$$

par substitution et simplification, $\sin<BAP.\ \sin<CBQ.\ \sin<ACR = \sin<ACP.\ \sin<BAQ.\ \sin<CBR\ ;$

ou encore, $\sin<BAP'.\ \sin<CBQ'.\ \sin<ACR' = \sin<ACP'.\ \sin<BAQ'.\ \sin<CBR'\ ;$

d'après "La loi des sinus", $2R.BP'\ .\ 2R.CQ'\ .\ 2R.AR' = 2R.CP'.\ 2R.AQ'\ .\ 2R.BR'$

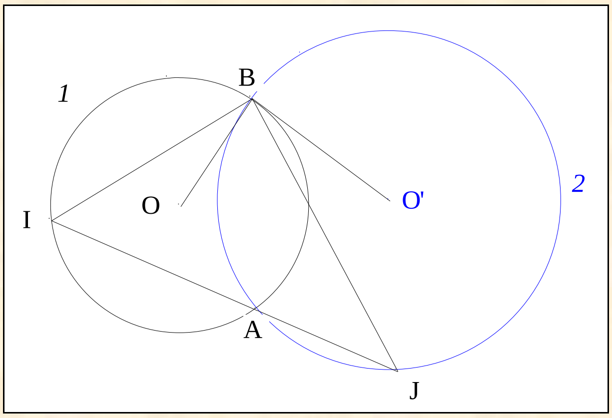
- **Conclusion :** par simplification, $BP'.CQ'.AR' = CP'.AQ'.BR'$

VISUALISATION SUFFISANTE

- Partons de $BP'.CQ'.AR' = CP'.AQ'.BR'$
- En s'appuyant sur les équivalence logique précédente,
  nous aboutissons à $PB.QC.RA = PC.QA.RB$
- **Conclusion :** d'après "Le théorème de Ceva", (AP'), (BQ') et (CR') sont concourantes.

G. ANNEXE

1. Un triangle de Möbius [23]

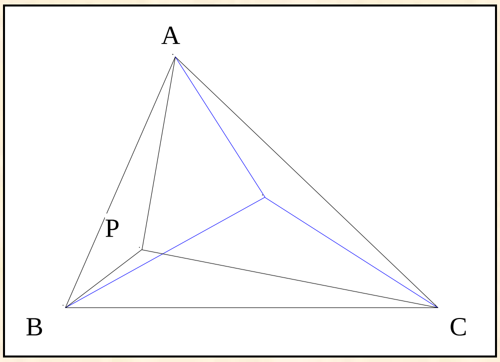


Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
O, O' les centres resp. de *1*, *2*,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
et (IBJ) une monienne brisée.

Donné : (IAJ) est une monienne *si, et seulement si,* <IBJ = <OBO'.

Scolie : BIJ est un triangle de Möbius.

2. The isogonal theorem [24]



Traits : ABC un triangle,
P un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC
et *Da* , *Db* , *Dc* les isogonales resp. de (AP), (BP), (CP).

Donné : *Da* , *Db* et *Dc* sont concourantes.

[23] Baltzer R. dans son livre *Statik* attribue ce résultat à Möbius.
[24] Mathieu J. J. A., *Nouvelles Annales* (1865) **393 ff.**, 400.