

LA DROITE DE GRAY

UNE PREUVE PUREMENT SYNTHÉTIQUE

Jean-Louis AYME

Résumé. Nous présentons une preuve purement synthétique de la conjecture de Steve Gray¹ : *la droite joignant le centre au point de Gray d'un triangle est parallèle à la droite d'Euler de ce triangle.*
Deux voies, l'une longue, l'autre courte, aboutissant au point de Gray sont proposées. Un résultat catalytique est ensuite proposé sous le nom d'Ayme's trick qui permet de prouver cette conjecture.
Tous les résultats cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

I. UNE VOIE LONGUE ABOUTISSANT AU POINT DE GRAY

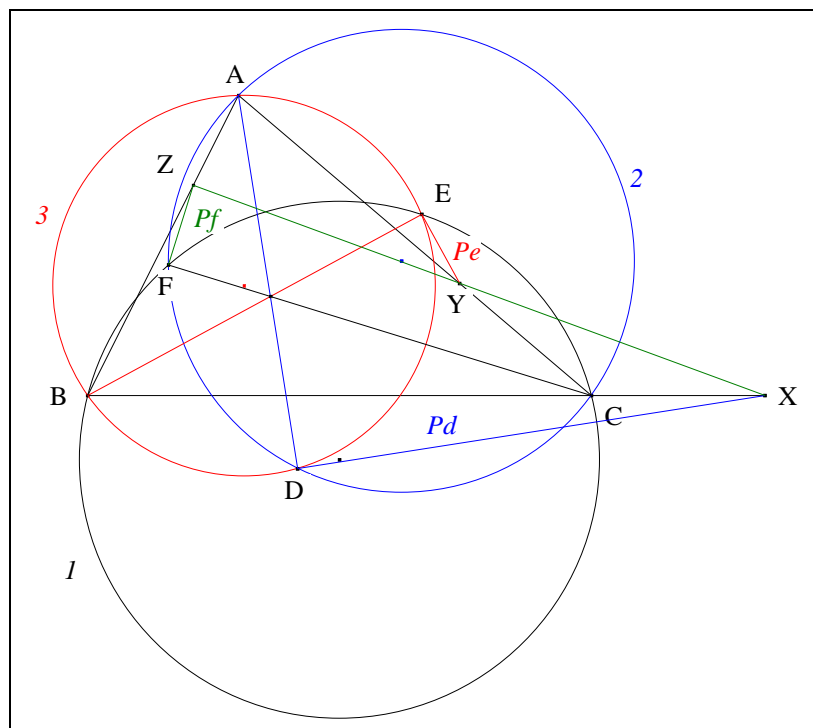
NIKOLAOS DERGIADIS²

VISION

Figure :

¹ Grinberg D., Message *Hyacinthos* # 6491 du 19/09/2001.

² Dergiades N., Orthogonal colinearity theorem, Message *Hyacinthos* # 6466 du 02/02/2003.



Traits : ABC un triangle,
 $1, 2, 3$ trois cercles passant resp. par B et C, par C et A, par A et B,
 D, E, F les seconds points d'intersection resp. de 2 et 3, de 3 et 1, de 1 et 2,
 Pd, Pe, Pf les perpendiculaires à (AD), (BE), (CF) resp. en D, E, F,
 et X, Y, Z les points d'intersection resp. de Pd et (BC), de Pe et (CA), de Pf et (AB).

Donné : X, Y et Z sont alignés.

Commentaire : l'énoncé a été reformulé et prouvé synthétiquement par l'auteur³.

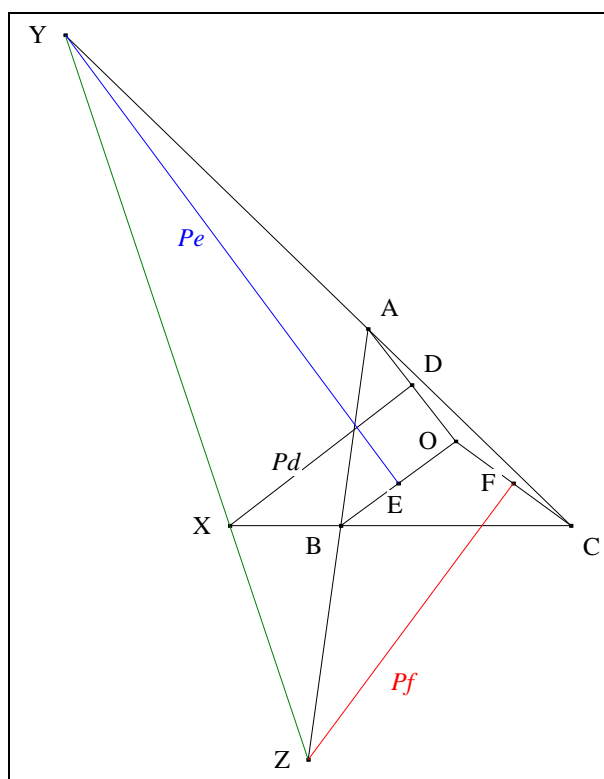
L'AUTEUR

VISION

Figure :

³

Ayme J.-L., Le point de Kosnita est l'isogonal du centre du cercle d'Euler, G.G.G. vol. 1 (2007).



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 D, E, F les milieux resp. de [OA], [OB], [OC],
Pd, Pe, Pf les médiatrices resp. de [OA], [OB], [OC],
 et X, Y, Z les points d'intersection resp. de *Pd* et (BC), de *Pe* et (CA), de *Pf* et (AB).

Donné : X, Y et Z sont alignés.

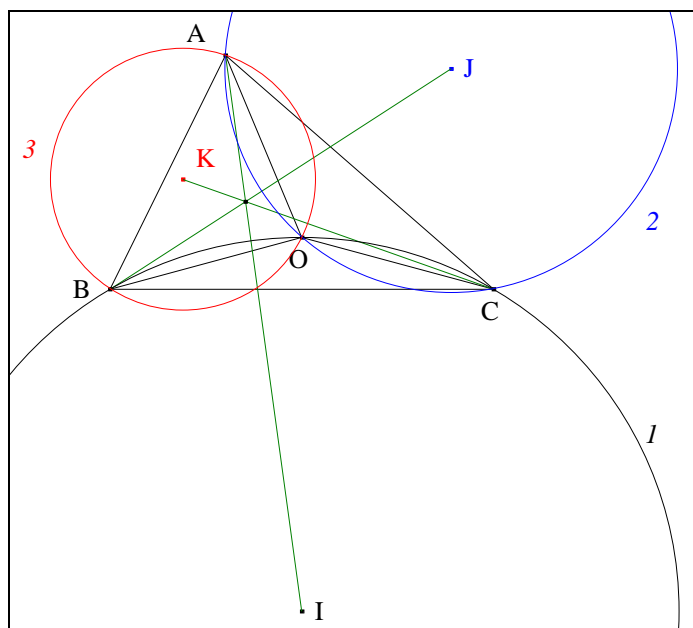
Commentaire : ce résultat a été prouvé synthétiquement par l'auteur⁴.

KOSNITA

VISION

Figure :

⁴ Ayme J.-L., Le point de Kosnita est l'isogonal du centre du cercle d'Euler, G.G.G. vol. 1 (2007).



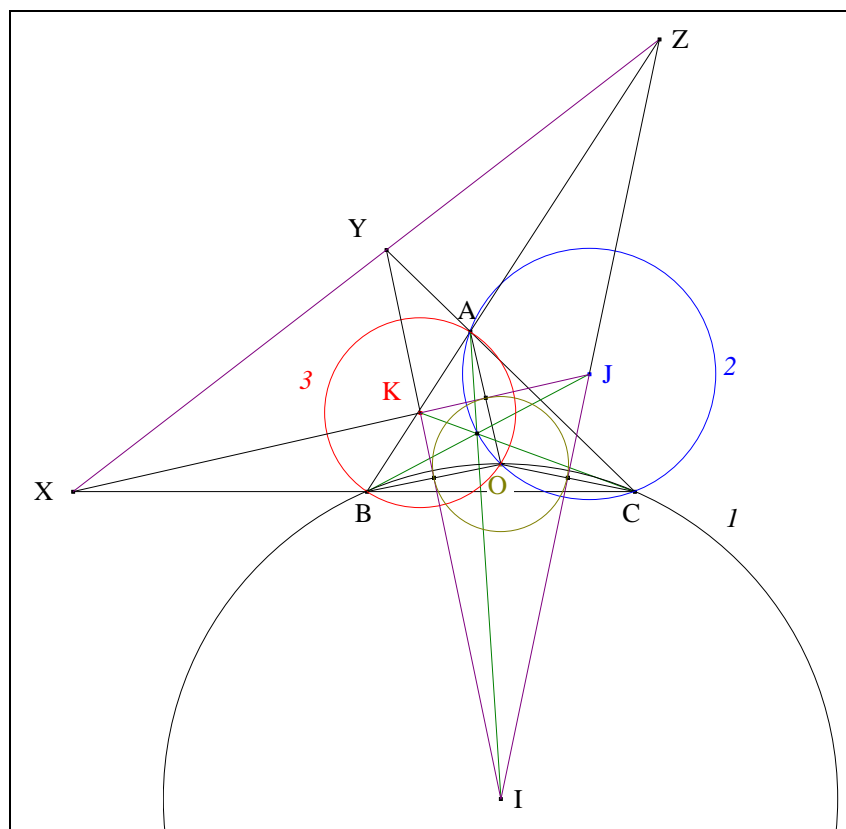
Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 1, 2, 3 les cercles circonscrits aux triangles OBC, OCA, OAB
 et I, J, K les centres de 1, 2, 3.

Donné : les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

Commentaire : ce résultat a été prouvé synthétiquement par l'auteur⁵.

- Scolies :**
- (1) ce point de concours, noté K_s , est "le point de Kosnita de ABC" ; il est répertorié sous X_{54} chez ETC⁶.
 - (2) IJK est "le triangle de Kosnita de ABC".
 - (3) Le point O

⁵ Ayme J.-L., Le point de Kosnita est l'isogonal du centre du cercle d'Euler, G.G.G. vol. 1 (2007).
⁶ <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html#X54>.



- **Conclusion :** (JK), (KI) et (IJ) étant resp. les médiatrices des cordes égales [OA], [OB] et [OC], O est le centre du cercle inscrit de IJK.

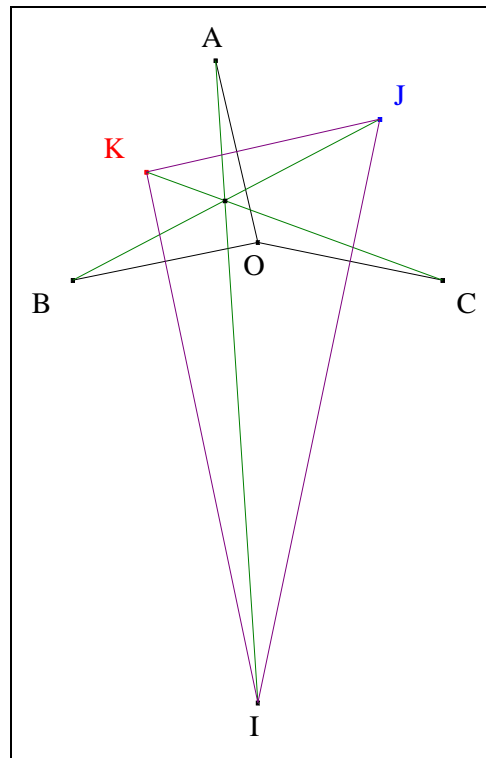
Note historique : ce point de concours, attribué à Kosnita, est apparu dans la revue roumaine *Gazeta Matematica* ce qui suggère que ce géomètre est peut être un professeur roumain. Jordan Tabov corrobore cette suggestion en précisant qu'il a trouvé une référence à Kosnita dans un livre roumain.

Commentaire : à présent, nous partirons du triangle IJK.

ÉMILE LEMOINE

VISION

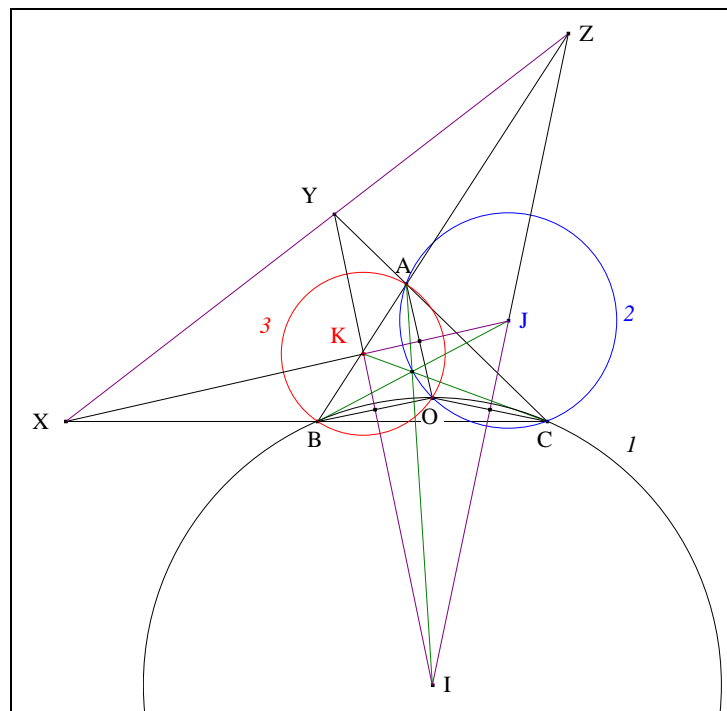
Figure :



Traits : IJK un triangle,
 O le centre de IJK
 et A, B, C les symétriques de O par rapport aux droites (JK), (KI), (IJ).

Donné : (IA), (JB) et (KC) sont concourantes.

VISUALISATION



- Reprenons les notations précédentes.

- D'après Kosnita, IJK est le triangle de Kosnita de ABC et est en perspective avec celui-ci.
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 1) appliqué aux triangles perspectifs IJK et ABC, d'axe (XYZ), (IA), (JB) et (KC) sont concourantes.

Scolie : ce point de concours, noté Gra, est "le point de Gray de IJK" ; il est noté répertorié sous X_{79} chez ETC⁷.

Note historique :

lors du congrès de l'AFAS qui s'est tenu à Paris en 1889, Émile Lemoine⁸ a présenté une généralisation de ce résultat.

L'année suivante, Boutin⁹ a poursuivi l'étude de ce résultat dans le *Journal de Mathématiques Spéciales*. En 1896, V. Retali de Milan, puis Speckman¹⁰ d'Arnhem ont publié à nouveau cette généralisation. En 1904, Kariya de Tokyo publie une partie de ce résultat ainsi qu'une preuve longue et peu élégante dans *l'Enseignement mathématique*¹¹ et la *Revista de mathematicas*¹² de Santiago du Chili. L'article de Kariya aura un succès retentissant et provoquera de nombreuses remarques, démonstrations et extensions. Parmi toutes ces réactions, citons celles de Barbarin de Bordeaux, de Demoulin de Gand, d'Harold Hilton de Bangor, de Daniels de Fribourg (Suisse), de Franke de Berlin, de P. Faure de Paris, de Cantoni de Mantoue et de Neuberg¹³. Rappelons que Kariya demandera qu'on lui attribue ce point et précisons que Lemoine et Boutin ne s'y opposeront pas.

Pour terminer disons qu'il arrive fréquemment, dans les recherches sur la *Géométrie du triangle*, qu'un géomètre redécouvre un résultat déjà connu.

Darij Grinberg¹⁴ qui a attribué ce point à Steve Gray précise que celui-ci l'a découvert en cherchant autre chose et qu'il a énoncé, sans preuve, sa découverte dans *Geometry-research* du 19-09-01.

II. UNE VOIE COURTE ABOUTISSANT AU POINT DE GRAY

VISION

Figure :

⁷ <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html#X79>.

⁸ Lemoine E., *AFAS* (1889) 202-206.

⁹ Boutin A., Sur un groupe de quatre coniques remarquables du plan d'un triangle, *J.M.S.* (1890) 105, 124, 265.

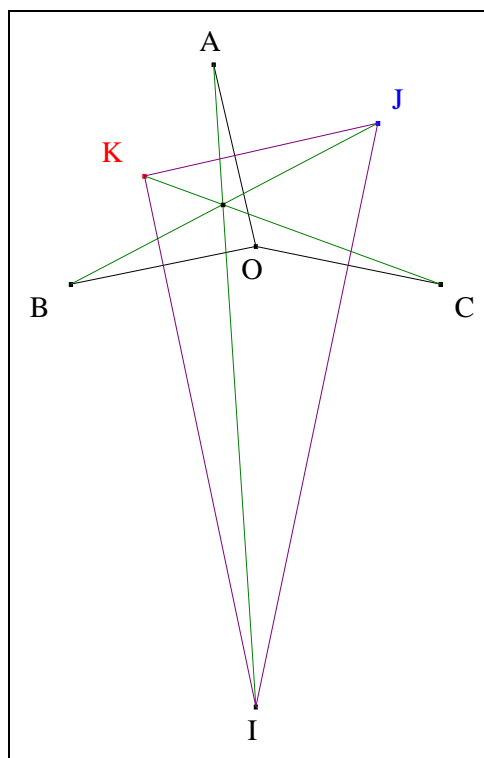
¹⁰ Speckman H.-A.-W., *Mathesis* (1905) 265.

¹¹ Kariya, *Enseignement mathématique* VI (1904) 131, 236, 406.

¹² Kariya, *Revista mathematicas* (1905) 439.

¹³ Neuberg J., *Mathesis* (1905) 117-118.

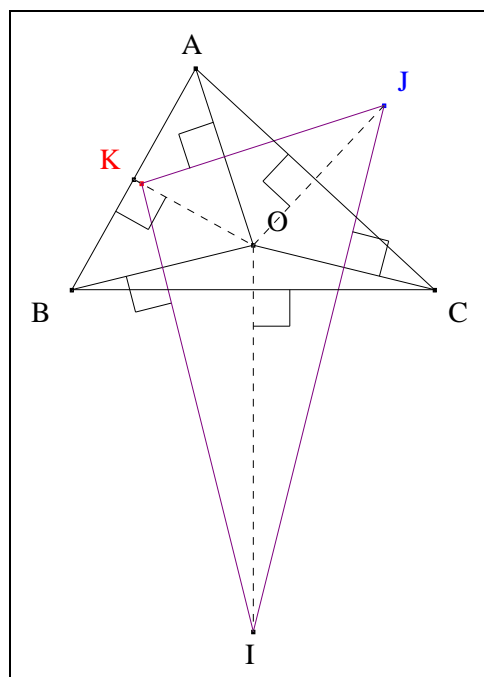
¹⁴ Grinberg D., Message *Hyacinthos* # 6491 du 19/09/2001.



Traits : IJK un triangle,
 O le centre de IJK
 et A, B, C les symétriques de O par rapport aux droites (JK), (KI), (IJ).

Donné : (IA), (JB) et (KC) sont concourantes.

VISUALISATION



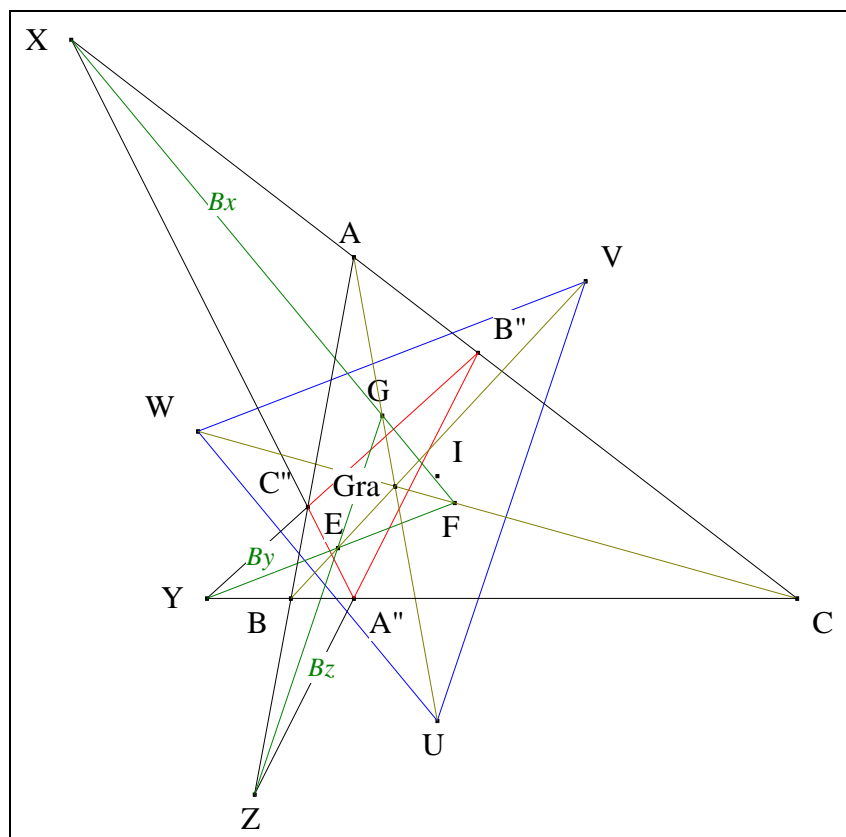
- **Scolies :**
 - (1) O est le pôle d'orthologie de IJK par rapport à ABC
 - (2) O est le pôle d'orthologie de ABC par rapport à IJK.

- Par définition, IJK et ABC sont bilogiques.
- **Conclusion** : (IA) , (JB) et (KC) sont concourantes¹⁵.

III. AYME's TRICK

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC ,
	UVW	le triangle de Gray de ABC ,
	$A''B''C''$	le triangle orthique de ABC ,
	X, Y, Z	les points d'intersection resp. de $(A''C'')$ et (AC) , de (BC) et $(B''C'')$, de (AB) et $(A''B'')$,
	Bx, By, Bz	les parallèles à (WU) , (VW) , (UV) passant resp. par X, Y, Z ,
	E, F, G	les points d'intersection resp. de By et Bz , de By et Bx , de Bx et Bz ,
et	Gra	le point de Gray de ABC .

Donné : les triangles GEF , UVW et ABC sont en perspective de centre Gra .

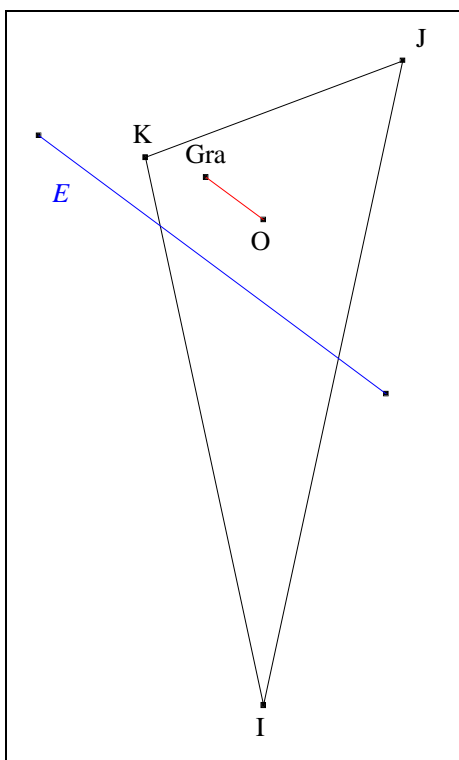
Commentaire : ce résultat a été prouvé synthétiquement par l'auteur¹⁶.

¹⁵ Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. 1.

IV. LA CONJECTURE DE STEVE GRAY

VISION

Figure :

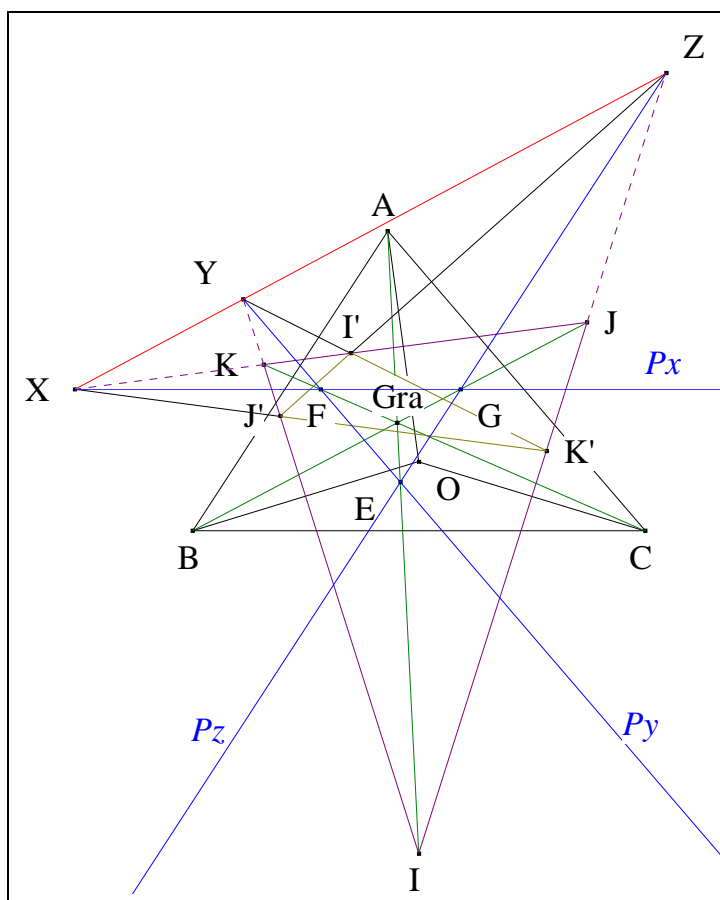


Traits : IJK un triangle,
E la droite d'Euler de IJK,
 O le centre de IJK
 et Gra le point de Gray de IJK.

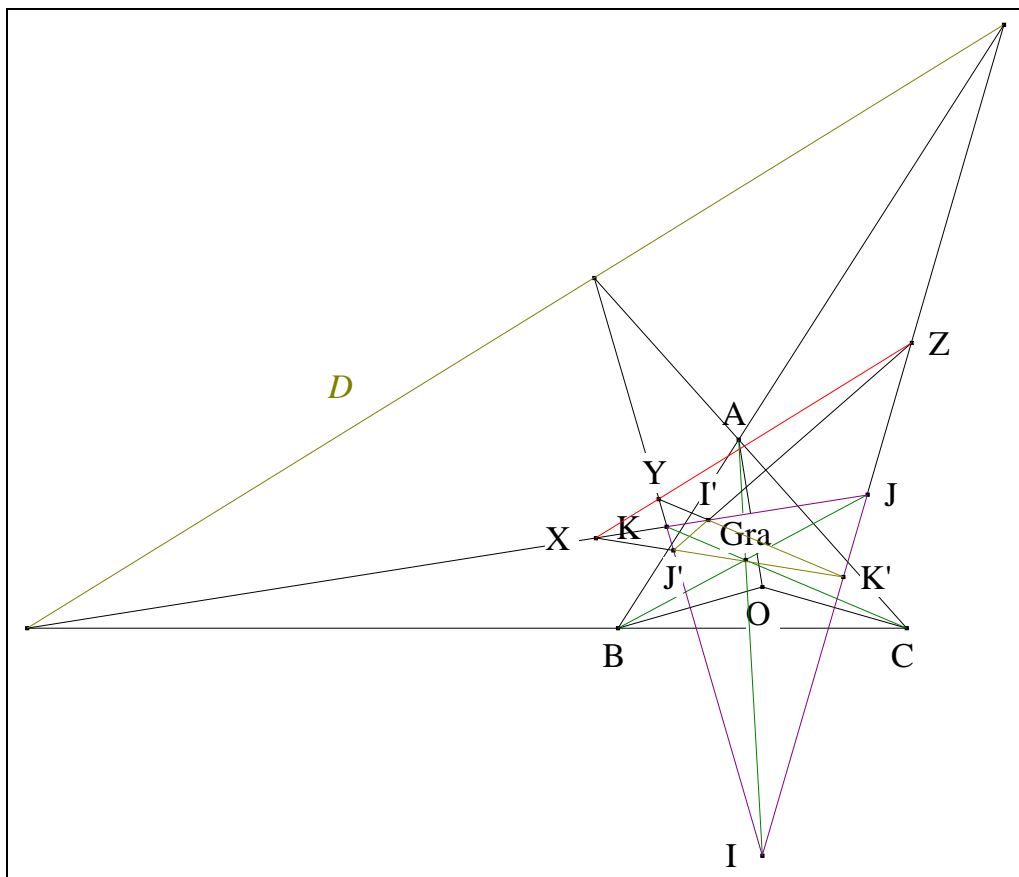
Donné : (OGra) est parallèle à *E*.

VISUALISATION

- **Scolie :** (XYZ) est l'axe orthique de IJK .



- Notons P_x, P_y, P_z les parallèles à $(BC), (CA), (AB)$ passant resp. par X, Y, Z
et E, F, G les points d'intersection resp. de P_y et P_z , de P_y et P_x , de P_x et P_z .
- D'après III. Ayme's trick, les triangles EGF, ABC et IJK sont en perspective de centre Gra .
- Notons D l'axe de perspective de ABC et IJK .
- **Scolies :** (1) la droite à l'infini est l'axe de perspective des triangles homothétiques EGF et ABC
(2) (ZXY) est l'axe de perspective des triangles EGF et IJK .
- D'après John Casey "Trois triangles deux à deux en perspective" (Cf. Annexe 2) appliqué aux triangles EGF, ABC et IJK , leur axe de perspective sont parallèles.
- **Conclusion partielle :** D et (ZXY) sont parallèles.



- **Scolies :**
 - (1) O est le pôle d'orthologie du triangle ABC par rapport au triangle IJK
 - (2) O est le pôle d'orthologie du triangle IJK par rapport au triangle ABC
 - (3) Gra est le centre de perspective de ABC et IJK.

- D'après Sondat "Le petit théorème"¹⁷ (Cf. Annexe 3), nous savons que d'après l'axiome IVa des perpendiculaires,

$(OGra) \perp D$;
$D \parallel (ZXY)$;
$(OGra) \perp (ZXY)$.

- D'après "La droite d'Euler est perpendiculaire à l'axe orthique"¹⁸, d'après l'axiome IVa des perpendiculaires,

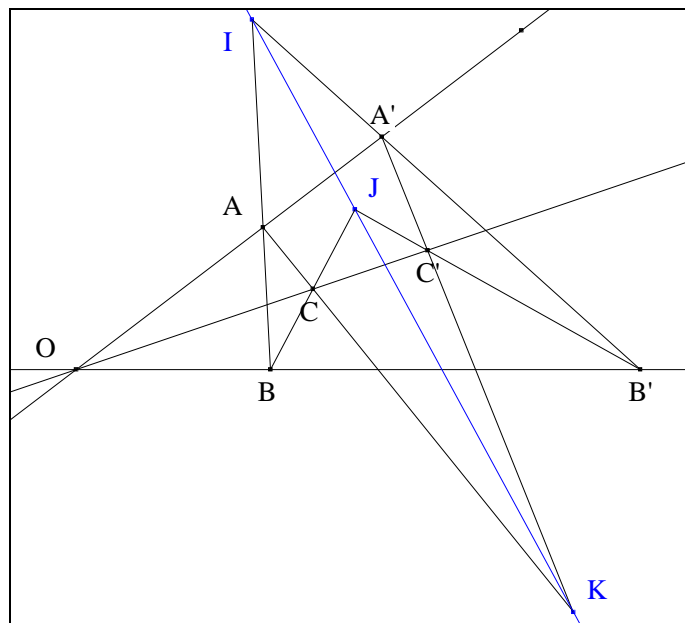
$(ZXY) \perp E$;
$(OGra) \parallel E$.

- **Conclusion :** $(OGra)$ est parallèle à E .

Note historique : c'est en cherchant autre chose que Steve Gray¹⁹ a découvert en 2001 un résultat d'Émile Lemoine i.e. le point X(79), et une parallèle à la droite d'Euler d'un triangle i.e. la droite (IGra). Darij Grinberg²⁰ a fait connaître ce résultat en 2003 au groupe *Hyacinthos* par un message dans lequel il propose de donner le nom de Gray à X(79). Signalons que la droite de Gray a été prouvée par le biais des coordonnées trilineaires par Antreas Hatzipolakis²¹.

¹⁷ Ayme J.-L., *Revistaom* n° (200) ; <http://www.campus-oei.org/oim/revistaom/>
¹⁸ Ayme J.-L., La droite d'Euler est perpendiculaire à l'axe orthique, *G.G.G.* vol. 1 (2007).
¹⁹ Gray S., New? triangle theorem, *Math Forum* du 19/09/2001.
²⁰ Grinberg D., Gray point X(79) and X(80) Message *Hyacinthos* #6491 du 05/02/2003.
²¹ Hatzipolakis A., Messages *Hyacinthos* # 7908 du 15-09-03.

ANNEXE

1. Le théorème des deux triangles de Desargues²²

Traits :

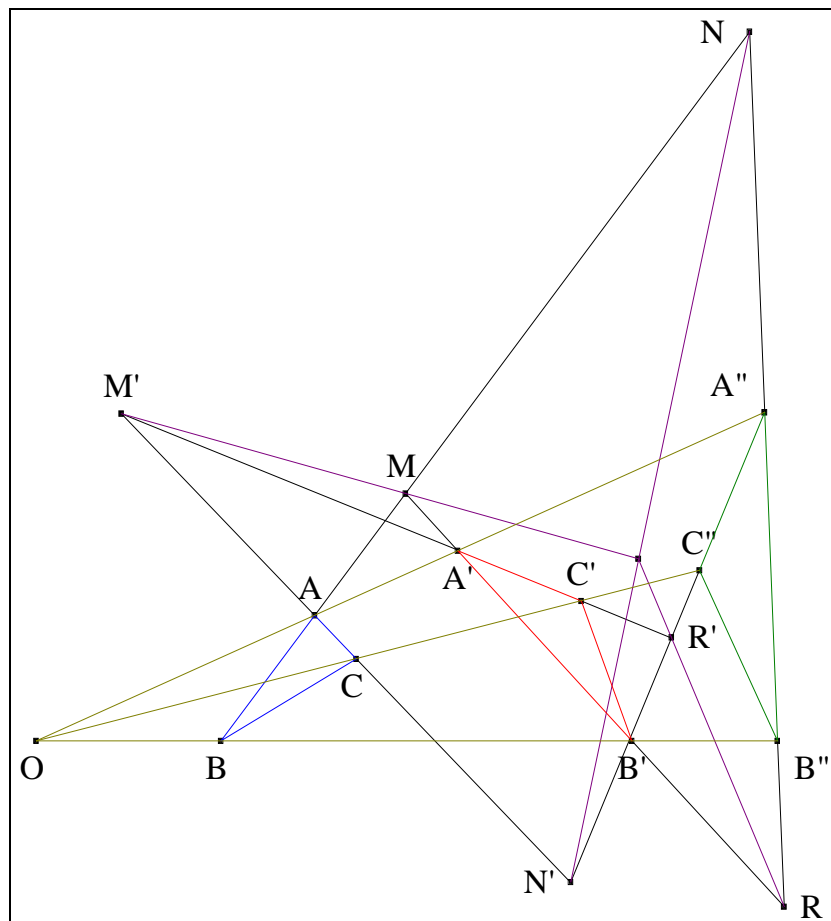
	ABC	un triangle,
	A'B'C'	un triangle tel que les droites (AA') et (BB') soient concourantes,
	O	le point de concours de (AA') et (BB'),
	I	le point d'intersection des droites (AB) et (A'B'),
	J	le point d'intersection des droites (BC) et (B'C')
et	K	le point d'intersection des droites (CA) et (C'A').

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* les points I, J et K sont alignés.

2. Trois triangles deux à deux en perspective de John Casey²³

²² Bosse A. (1602-1676), *Perspective et de la Coupe des pierres*.

²³ Casey J., *A sequel to Euclid*, propositions 14 (1881) 77.



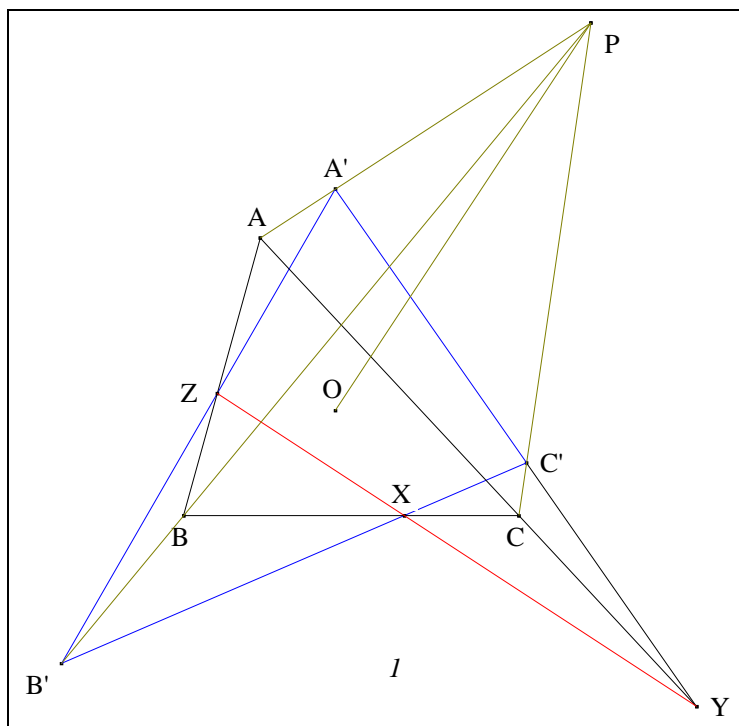
Traits : $ABC, A'B'C', A''B''C''$ trois triangles deux à deux en perspective,
 O le centre de perspective de ABC et $A''B''C''$, de ABC et $A'B'C'$,
de $A'B'C'$ et $A''B''C''$,
 M, M' les points de concours de (AB) et $(A'B')$, de (AC) et $(A'C')$,
 N, N' les points de concours de (AB) et $(A''B'')$, de (AC) et $(A''C'')$,
et R, R' les points de concours de $(A'B')$ et $(A''B'')$, de $(A'C')$ et $(A''C'')$.

Donné : si, O est le centre commun de perspective
alors, $(MM'), (NN')$ et (RR') sont concourantes.

3. Le petit théorème de Sondat ²⁴

²⁴

Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. 1 (2007).



Traits : ABC, A'B'C' deux triangles biogiques,
 O le centre commun d'orthologie de ABC et A'B'C',
 P le centre de perspective de ABC et A'B'C',
 et (XYZ) l'axe de perspective de ABC et A'B'C'.

Donné : (OP) et (XYZ) sont perpendiculaires.