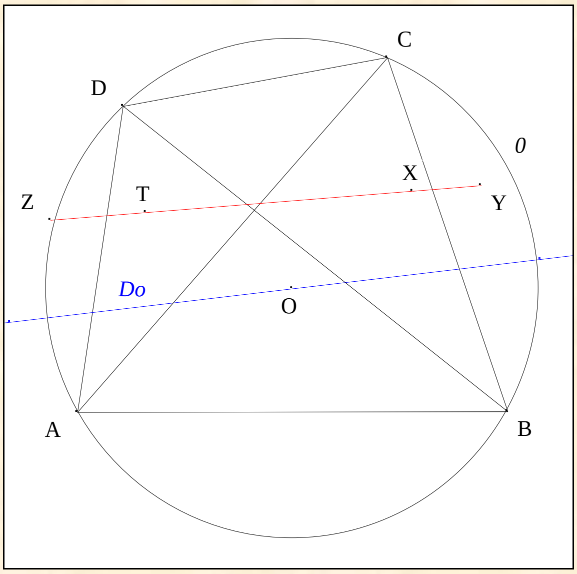
LA DROITE DE JORDAN TABOV

OU

FOUR COLLINEAR GRIFFITHS POINTS

†

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente une preuve purement synthétique d'un résultat du professeur bulgare Jordan Tabov datant de 1995 et concernant l'alignement de quatre points de Griffiths. Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents a purely synthetic proof of a result of the Bulgarian Professor Jordan Tabov dating from 1995 and concerning the alignment of four Griffiths points. The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

Sommaire

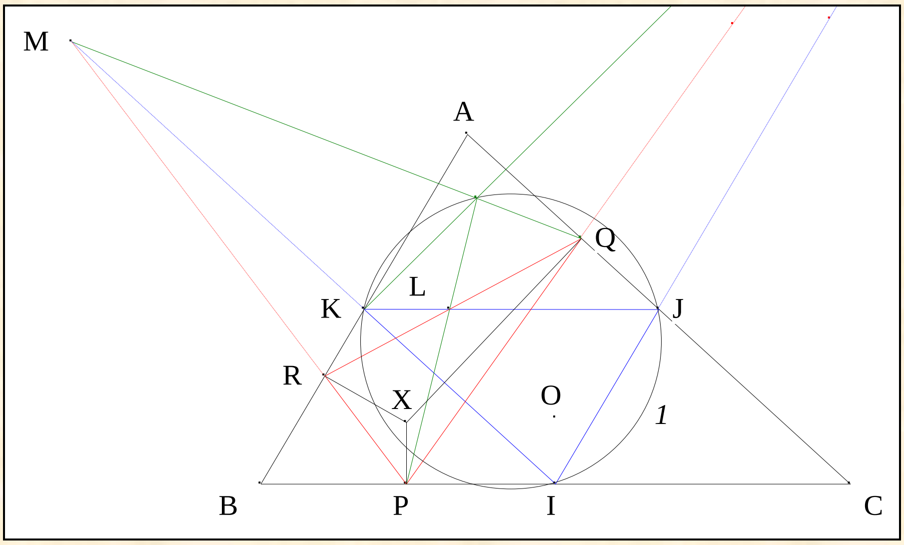
[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 25/11/2010 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

I. GEORGES FONTENÉ (1848-1922)

1. Le premier théorème de Fontené [2]

VISION

Figure :

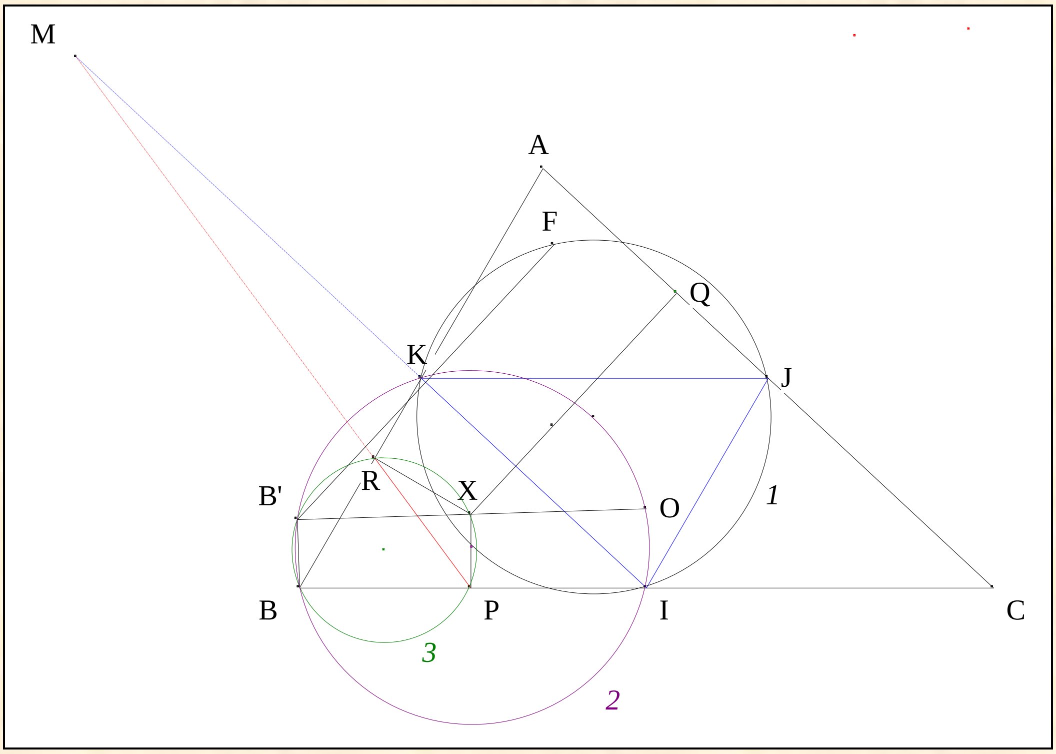


Traits :	ABC	un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	IJK	le triangle médian de ABC,
	1	le cercle d'Euler de ABC,
	X	un point,
	PQR	le triangle X-pédal de ABC
et	L, M, N	les points d'intersection de (QR) et (JK), de (RP) et (KI), de (PQ) et (IJ)

Donné : (LP), (MQ) et (NR) concourent sur *1*.

VISUALISATION

[2] Fontené G., Extension du théorème de Feuerbach, *Nouvelles Annales* **5** (1905) 504-506
Fontené G., Sur les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec les cercles tangents aux trois côtés, *Nouvelles Annales* **5**, (1905) 529-538
Fontené G., Sur le cercle pédal, *Nouvelles Annales* **65** (1906) 55-58



- Notons F l'orthopôle de (OX) relativement à ABC,
  B' le pied de la perpendiculaire abaissée de B sur (OX),
  2 le cercle de diamètre [BO]
  et *3* le cercle de diamètre [BX].

- D'après Soons [3] "Orthopôle d'un diamètre" [4], (OX) étant une droite diamétrale de *1*, F est sur *1*.

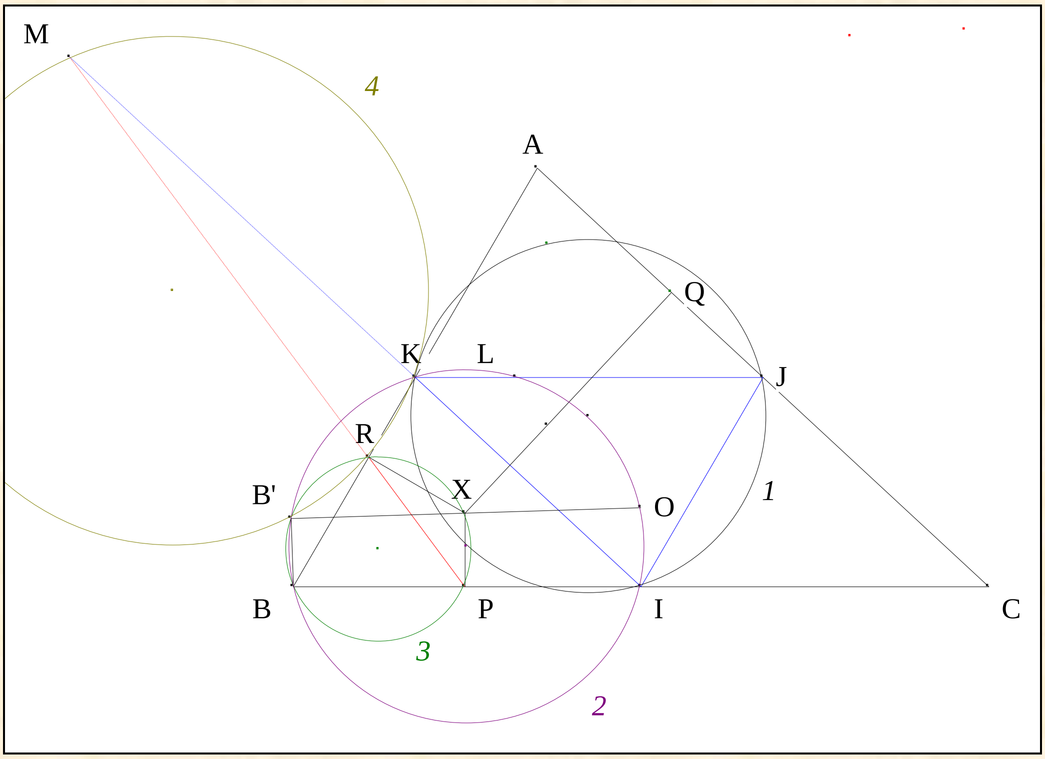
- **Scolies :** **(1)** 2 passe par B', I et K
  (2) *3* passe par B', P et Q
  (3) *1* et *2* sont symétriques par rapport à (IK).

- **Conclusion partielle :** F est le symétrique de B' par rapport à (IK).

- **Scolie :** O étant l'orthocentre de IJK, (OX) est la droite de Steiner de F
  ou encore, F est l'antipoint de Steiner de (OX).

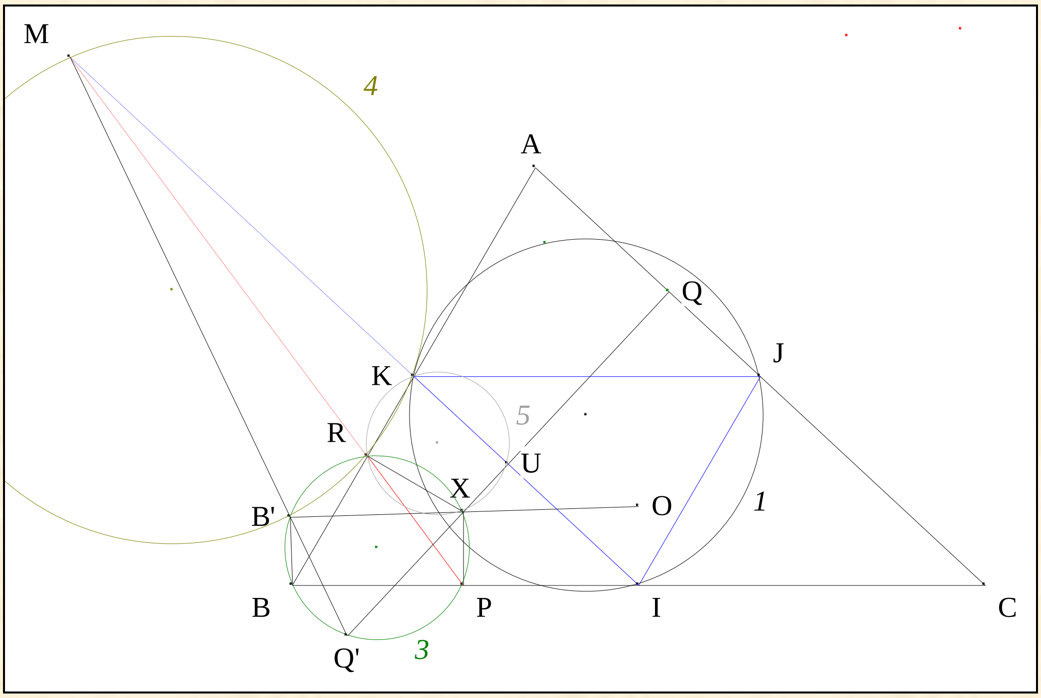
---

3 Soons M., Théorème de Géométrie, *Mathesis* **6** (1896) 57-59
4 Ayme J.-L., Orthopôle d'une droite relativement à un triangle, G.G.G. vol. **8** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons *4* le cercle passant par les points M, K et R.

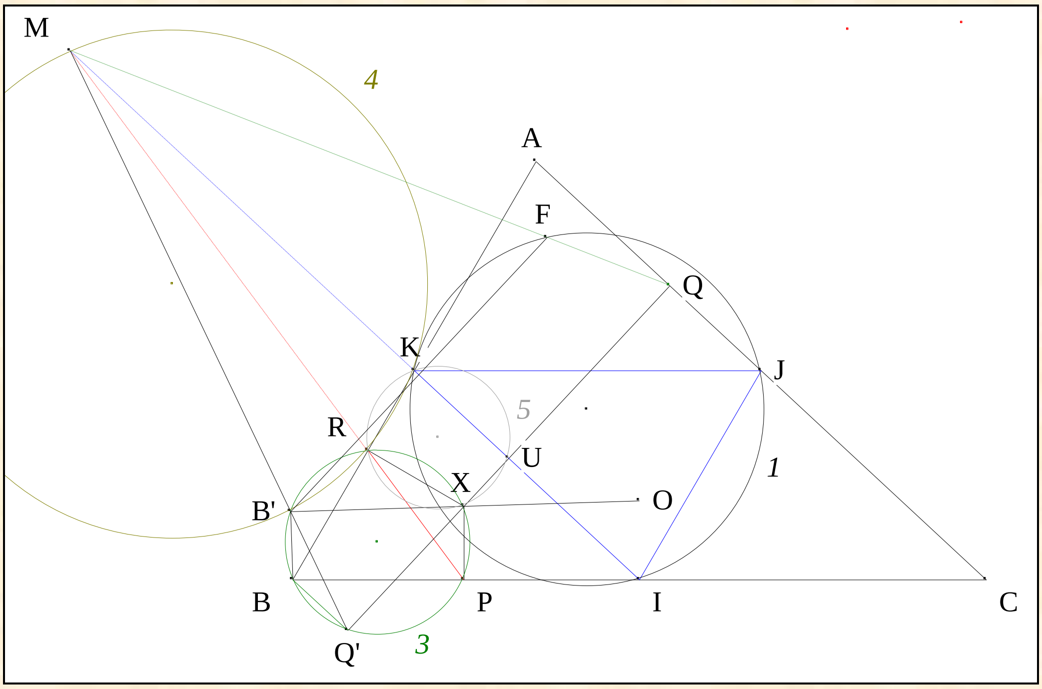
- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe **1**) appliqué au triangle MIP avec K sur (MI), B sur (IP) et R sur (PM), *4*, *2* et *3* sont concourent en B'.



- Notons U le point d'intersection de (XQ) et (IK),
  5 le cercle de diamètre [XK]
  et Q' le second point d'intersection de (XQ) avec *3*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", *5* passe par U et R.

- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe **1**)
  appliqué au triangle MUQ' avec K sur (MU), X sur (UQ') et aux cercles concourants *4*, *5* et *3*,
  Q', B' et M sont alignés.

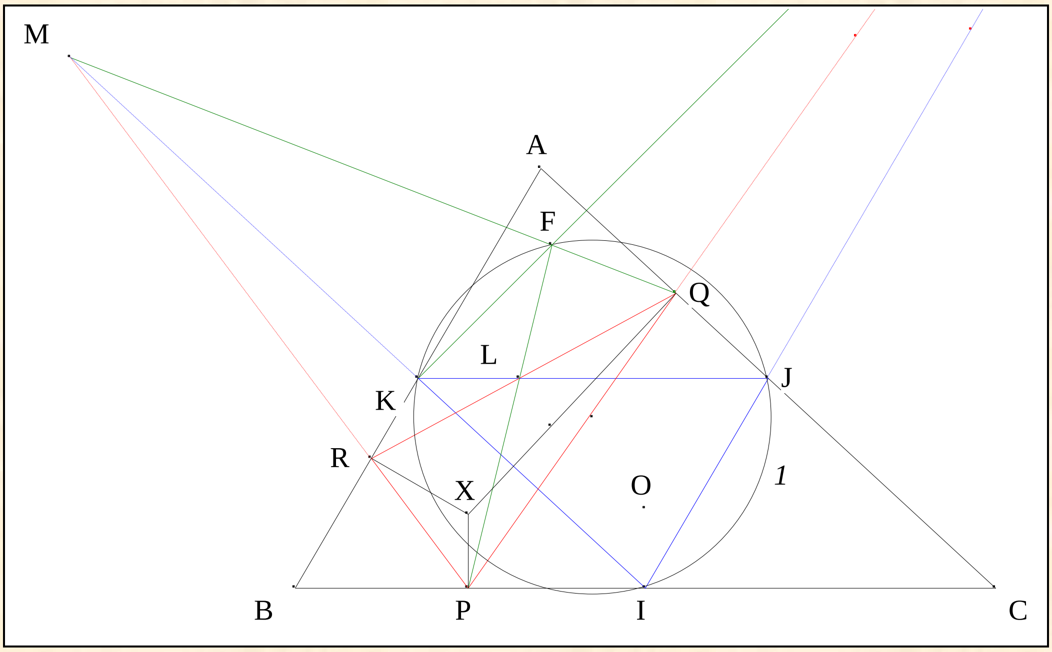


- Les cercles *3* et *5*, les points de base R et X, les moniennes (BRK) et (Q'XU),
  conduisent au théorème **0** de Reim ;
  il s'en suit que (BQ') // (KUI) ;
  d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué à ABC, (KI) // (AC) ;
  par transitivité de la relation //, (BQ') // (AC).

- D'après l'axiome de passage IIIb appliqué à la bande de frontière (BQ') et (AC),
  l'axe médian (KI) passe par le milieu de [QQ'] ;
  en conséquence, U est le milieu de [QQ'].

- Nous avons : (KI) // (AC) ;
  (KI) ⊥ (B'F) et (AC) ⊥ (QQ') ;
  la relation // étant compatible avec la relation ⊥ , (B'F) // (QQ') ;
  en conséquence, le quadrilatère FB'Q'Q est un trapèze ;
  (IK) étant la médiatrice des côtés parallèles, le trapèze FB'Q'Q est isocèle.

- **Conclusion partielle :** Q, F et M sont alignés ou encore (MQ) passe par F.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (NR) passe par F
  (LP) passe par F.

- **Conclusion :** (LP), (MQ) et (NR) concourent sur *1*.

Note historique : cette visualisation s'inspire de celle de Darij Grinberg [5]. Rappelons que celle présentée par Roger Arthur Johnson [6] s'appuie sur celle de Raoul Bricard [7] qui a signé son article par les initiales "R.B" dans les *Nouvelles Annales* de 1906.
Signalons que ce résultat redécouvert par Georges Fontené était connu de John Griffiths dès 1857.

Scolies : **(1)** En honneur à son auteur, F est "le point de Fontené de ABC relativement à (OX)".

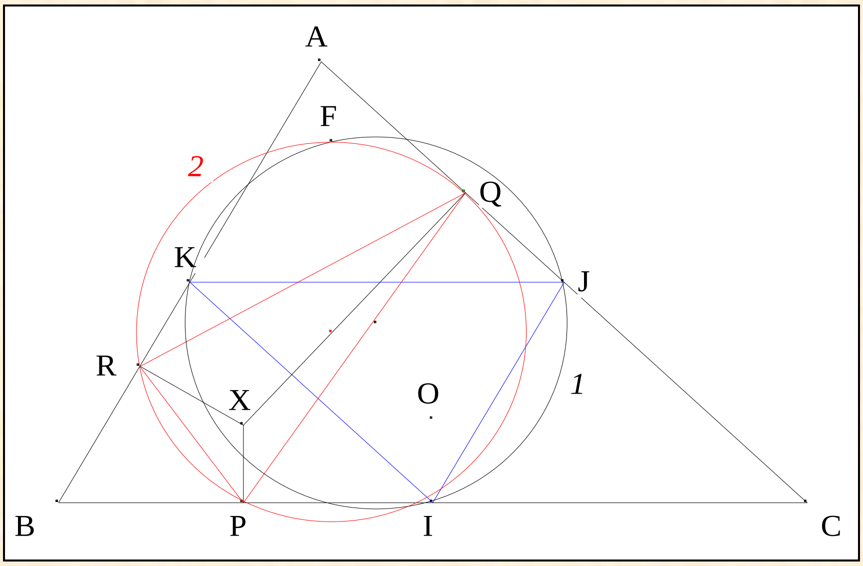
(2) Ce résultat constitue "Le premier théorème de Fontené" en se référant au site *Wolfram Mathworld* d'Eric W. Weisstein [8] ouvert en 1997.

2. Le deuxième théorème de Fontené

VISION

Figure :

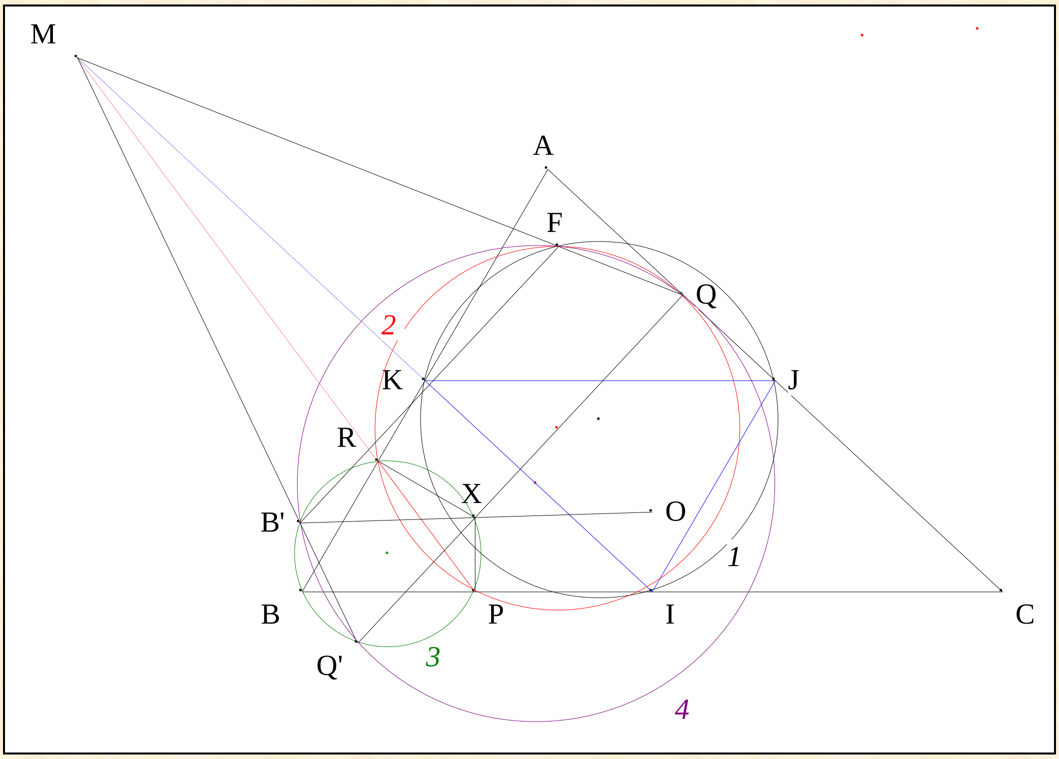
[5] Grinberg D., Generalization of the Feuerbach point ; http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/
[6] Johnson R. A, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, 1960, New York. (from 1929 original)
[7] Bricart R., Note au sujet de Sur le cercle pédal, *Nouvelles Annales* **6** (1906) 59-61
[8] http://mathworld.wolfram.com/



Traits :	ABC	un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	IJK	le triangle médian de ABC,
	1	le cercle d'Euler de ABC,
	X	un point,
	PQR	le triangle X-pédal de ABC,
	F	le point de Fontené de ABC relativement à (OX)
et	*2*	le cercle circonscrit à PQR.

Donné : *2* passe par F.

VISUALISATION



- Notons M le point d'intersection de (RP) et (KI),
  B' le pied de la perpendiculaire abaissée de B sur (OX),

	3	le cercle de diamètre [BX]
et	Q'	le second point d'intersection de la droite (XQ) avec *3*.

- D'après **I. 1.** Le premier théorème de Fontené, **(1)** Q, F et M sont alignés
  (2) Q', B' et M sont alignés
  (3) FB'Q'Q est un trapèze isocèle.

- **Scolie :** FB'Q'Q est cyclique.

- Notons *4* le cercle circonscrit à FB'Q'Q.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes"[9] (Cf. Annexe **2**), P, Q, R et F sont cocycliques.

- **Conclusion :** *2* passe par F.

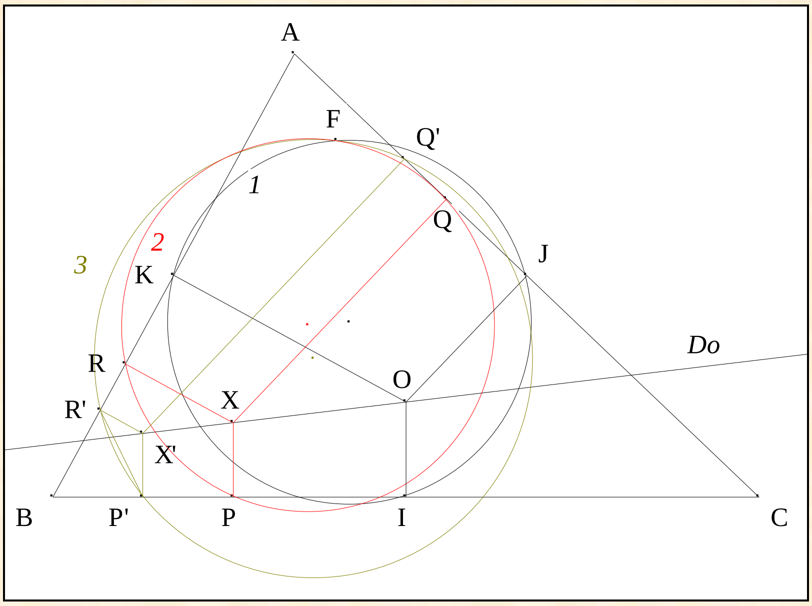
Scolie : ce résultat constitue "Le deuxième théorème de Fontené" en se référant au site *Wolfram Mathworld* d'Eric W. Weisstein[10] ouvert en 1997.

Note historique : agrégé de mathématiques en 1875, puis professeur à Paris au collège Rollin, actuellement lycée Jacques Decour, Georges Fontené a été promu Inspecteur dans cette même ville en 1910. Auteur de *La relativité restreinte* en 1922, puis de *La géométrie dirigée*, Fontené s'est intéressé, en particulier, aux triangles non isocèles ayant deux bissectrices extérieures égales.

II. JOHN GRIFFITHS

VISION

Figure :



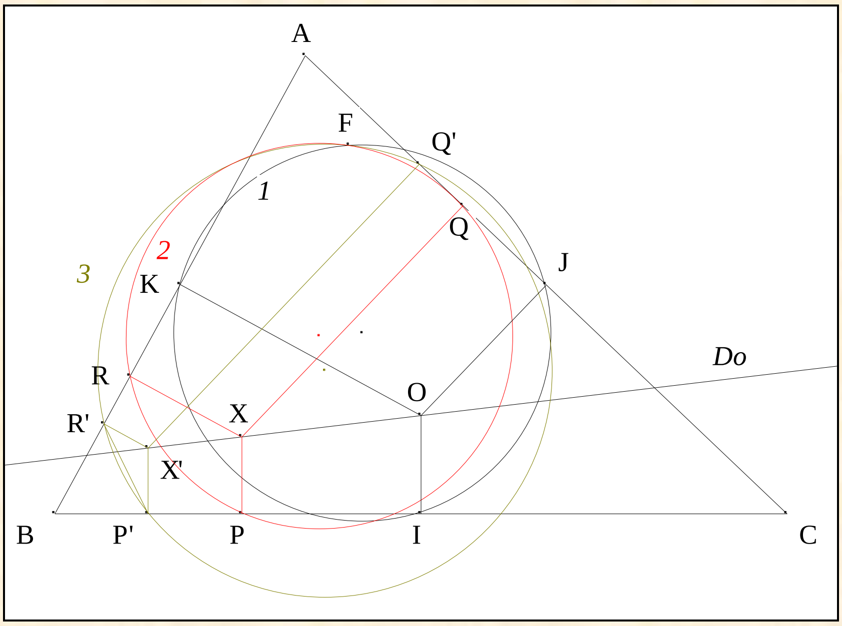
9 Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

10 http://mathworld.wolfram.com/

Traits : ABC un triangle non rectangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
1 le cercle d'Euler de ABC,
*D*o une droite passant par O,
X, X' deux points de *D*o,
PQR, P'Q'R' les triangles X, X'-pédaux de ABC
2, *3* les cercles X, X'-pédaux de ABC
et F le point de Fontené de ABC relativement à *D*o.

Donné : *3* passe par F [11].

VISUALISATION



- Notons IJK le triangle médian de ABC.
- D'après **I. 1.** Le premier théorème de Fontené, F est l'orthopôle de *D*o relativement à ABC.
- **Conclusion :** d'après **I. 2.** Le deuxième théorème de Fontené, *3* passe par F.

Énoncé traditionnel : *si,* un point se déplace sur un droite diamétrale du cercle circonscrit à un triangle
alors, son cercle pédal passe par un point fixe du cercle d'Euler
i.e. par l'orthopôle de ce diamètre relativement à ce triangle.

Notes historique : ce résultat de John Griffiths qu'il ne faut pas confondre avec le professeur H. B. Griffiths, a été redécouvert par Antoine Weill [12] en 1880, par W. S. McCay [13] en 1889 et par Georges Fontené [14] en 1906.

Scolies : **(1)** sous cet aspect dynamique,

---

11 Griffiths J., *Educational Times* (1857)
12 Weill A., Note sur le triangle inscrit et circonscrit à deux coniques, *Nouvelles Annales* séries **2**, **19** (1880) 253-261.
13 McCay W. S., On three similar figures, with extension of Feuerbach's Theorem, *Transactions of the Irish Royal Academy* **29** (1889).
14 Fontené G., Sur le cercle pédal, *Nouvelles Annales* **65** (1906) 55-58.

F est "le point fixe de Griffiths de ABC relativement à (OX)".

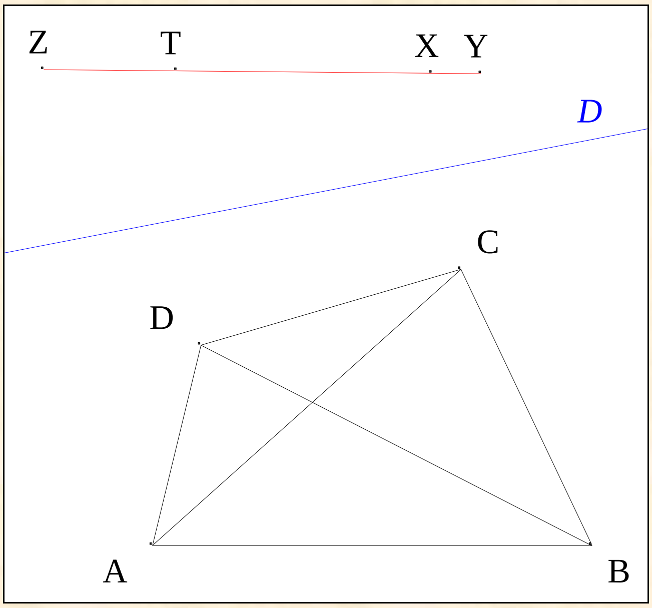
(2) Ce résultat constitue "Le deuxième théorème de Fontené" en se référant au site *Wolfram Mathworld* d'Eric W. Weisstein [15] ouvert en 1997.

III. JORDAN TABOV (1946-)

1. Le résultat de Clément Servais [16]

VISION

Figure :

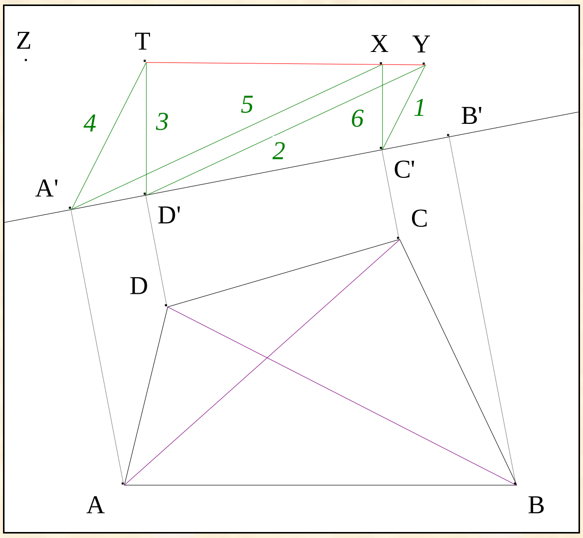


Traits : ABCD un quadrilatère,
D une droite
et X, Y, Z, T les orthopôles de *D* relativement aux triangles ABC, BCD, CDA, DAB.

Donné : X, Y, Z et T sont alignés.

VISUALISATION

[15] http://mathworld.wolfram.com/
[16] Servais C. (1922)

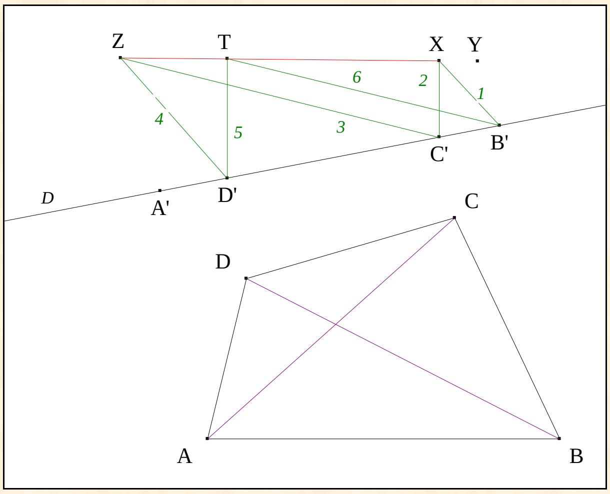


- Notons A', B', C', D' les pieds des perpendiculaires abaissées resp. de A, B, C, D sur *D*.

- D'après Goormahtigh "Orthopôle d'une ménélienne" [17], (A'X) ⊥ (BC) et (BC) ⊥ (D'Y) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (A'X) // (D'Y).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (A'T) // (C'Y) et (C'X) // (D'T).

- **Conclusion partielle :** d'après Pappus "Le petit théorème" (Cf. Annexe **3**),
  (YTX) est la pappusienne de l'hexagone C'YD'TA'XC'.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (XZT) est la pappusienne de l'hexagone B'XC'ZD'TB'.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, les orthopôles X, Y, Z et T sont alignés.

Commentaire : ce résultat de Clément Servais datant de 1923 a été redécouvert par Atul Dixit [18] en 2001 et démontré analytiquement par Nicolaos Dergiades [19] la même année.

---

17 Ayme J.-L., Orthopôle d'une droite relativement à un triangle, G.G.G. vol. **8** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

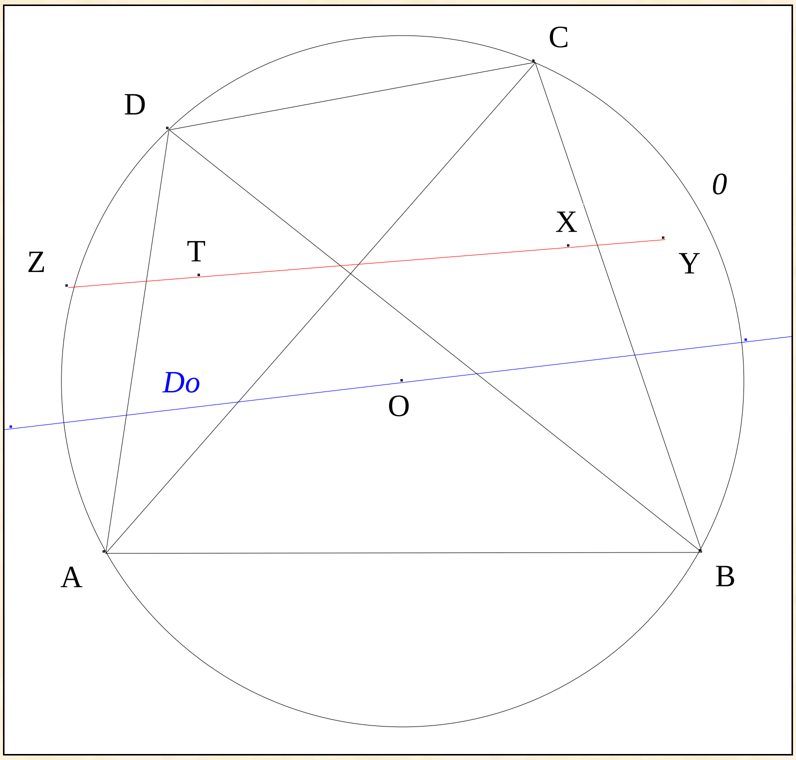
18 Dixit A., A new property of orthopole, Message Hyacinthos # **3340** du 04/08/2001 ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/3340

19 Dergiades N., A property of orthopole, Message *Hyacinthos* # **3352** du 05/08/2001 ; https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/3352

2. Le résultat de Jordan Tabov

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un quadrilatère cyclique,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	O	le centre de *0*,
	*D*o	une droite passant par O,
et	X, Y, Z, T	les points de Griffiths des triangles ABC, BCD, CDA, DAB relativement à *D*o.

Donné : X, Y, Z et T sont alignés.[20]

VISUALISATION

- **Scolie :** X, Y, Z et T sont les orthopôles de *D*o relativement à ABC, BCD, CDA, DAB.
- **Conclusion :** d'après **III. 1.** Le résultat de Servais, X, Y, Z et T sont alignés.

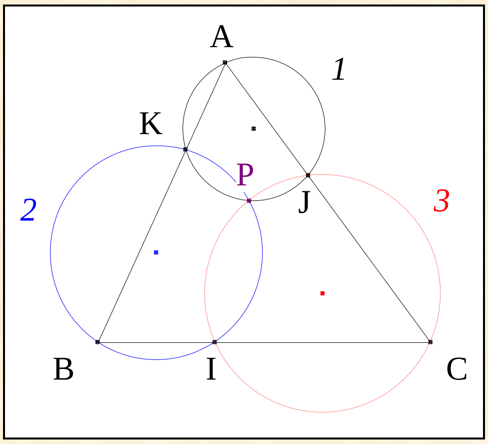
Note historique : la preuve de Jordan Tabov est analytique. Elle est basée sur l'utilisation des nombres complexes.

[20] Tabov J., Four Collinear Griffiths Points, *Mathematics Magazine* vol. **68** n° **1** (February 1995) 61-64

Jordan Tabov et Francisco Bellot Rosado

IV. ANNEXE

1. Le théorème du pivot [21]



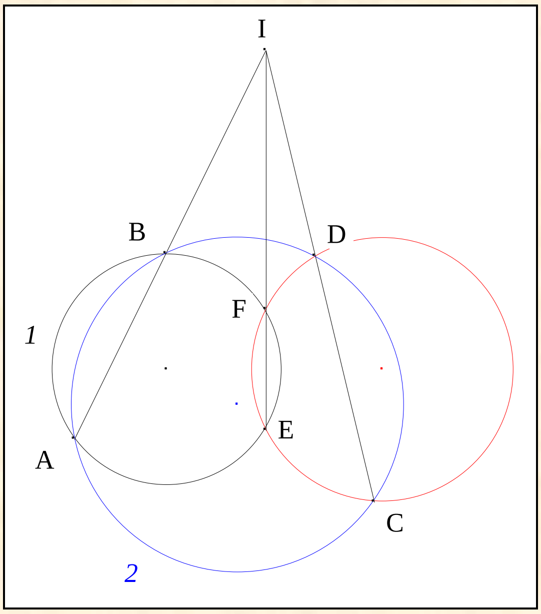
Traits :	*1, 2, 3*	trois cercles sécants deux à deux,
	K, P	les points d'intersection de *1* et *2*,
	I	l'un des points d'intersection de *2* et *3*,
	J	l'un des points d'intersection de *3* et *1*,
	A	un point de *1*,
	B	le second point d'intersection de la monienne (AK) avec *2*
et	C	le second point d'intersection de la monienne (BI) avec *3*.

Donné : (CJA) est une monienne de *3* et *1* *si, et seulement si,* *3* passe par P.

2. Le théorème des trois cordes [22]

[21] Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. **1**, **3** (1838) 485-487

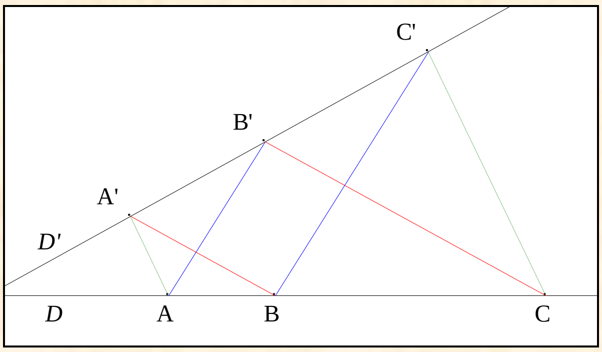
[22] Monge, d'après Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, **I** (1822) 40



Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	C, D	deux points de *2*,
	E, F	deux points de *1*
et	I	le point d'intersection de (AB) et (CD).

Donné : C, D, E et F sont cocycliques
si, et seulement si,
(AB), (CD) et (EF) sont concourantes en I.

3. Le petit théorème de Pappus [23]



Traits :	*D*, *D'*	deux droites,
	A, B, C	trois points pris dans cet ordre sur *D*,
	B'	un point
et	A', C'	deux points de *D'* tels que (AB') // (BC') et (A'B) // (B'C).

Donné : B' est sur *D'* *si, et seulement si,* (AA') et (CC') sont parallèles.

---

[23] Pappus, *Collections* Livre **VII**