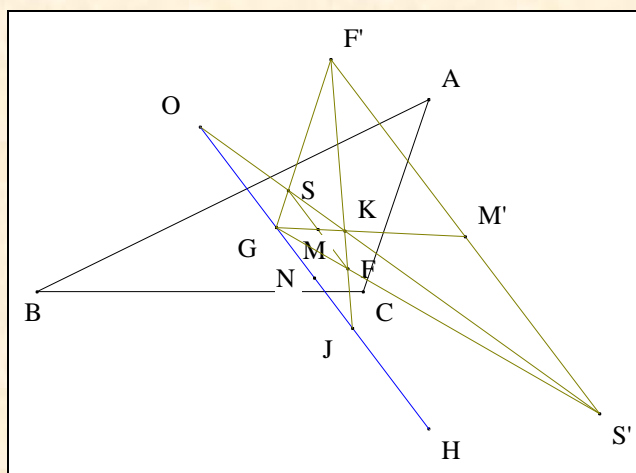


## LA FASCINANTE FIGURE DE CUNDY

†

Jean-Louis AYME <sup>1</sup>



### Résumé.

Nous présentons la figure d'Henry Martyn Cundy, enrichie d'une présentation historique des différents centres qui la compose, ainsi que d'une très courte note biographique.

En tombant sous le charme de cette fascinante figure découverte partiellement par Frank Morley et son fils Frank V., elle pourrait après avoir été complétée, comme l'affirme Cundy, dévoiler au géomètre qui la contemple avec un regard amical, une preuve simple du cercle de June A. Lester.

Les théorèmes cités en annexe peuvent être tous démontrés synthétiquement.

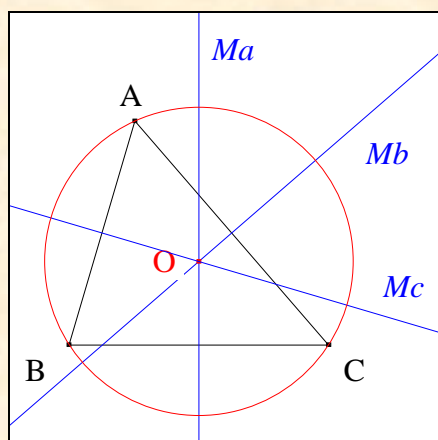
<sup>1</sup>

St-Denis, île de la Réunion.

Sommaire	
I. La droite d'Euler	
1. Euclide d'Alexandrie	3
2. Archimède de Syracuse	
3. Leonhard d'Euler	
4. Karl Feuerbach	
II. La droite de Brocard	5
1. Émile Lemoine	
2. John Casey	
3. Vecten	
III. La droite de Neuberg	12
1. Pierre Simon de Fermat	
2. Joseph Neuberg	
IV. Deux couples de points isogonaux	17
1. Une relation métrique	
2. Le triangle pédal du premier point de Hesse	
3. Les premiers points de Fermat et de Hesse	
V. Intersection en G	22
1. Un lemme	
2. Ludwig Otto Hesse	
3. Intersection en G	
VI. La figure "inachevée" des Morley	26
1. Le premier triangle de Napoléon	
2. Deux triangles homothétiques	
3. Un résultat de A. Boutin	
4. La figure "inachevée" des Morley	
VII. Le point "crucial" de Cundy	33
VIII. Une courte biographie de Henry Martyn Cundy	35
IX. Annexe	36
1. Le théorème des trois cercles	
2. Axe radical de deux cercles sécants	
3. Une quaterne harmonique	
4. Une relation angulaire	
5. Le cercle de Mathieu	
6. Le théorème faible de Desargues	
X. Notation des points d'une figure	

## I. LA DROITE D'EULER

### 1. Euclide d'Alexandrie (vers 325 - vers 265 av J.-C.)

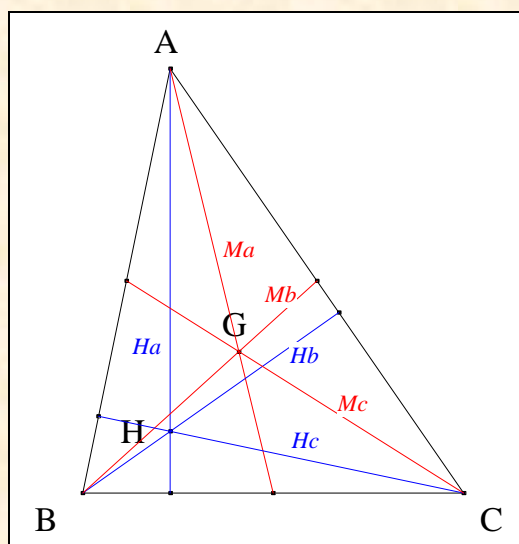


**Traits :** ABC un triangle  
 et  $Ma, Mb, Mc$  les A, B, C-médiatrices de ABC.

**Donnés :**  $Ma, Mb$  et  $Mc$  sont concourantes<sup>2</sup>.

**Scolie :** ce point de concours, noté O et répertorié sous  $X_3$  chez ETC, est "le centre du cercle circonscrit à ABC".

### 2. Archimède de Syracuse (vers 287 av. J.C.-212 av. J.C.)



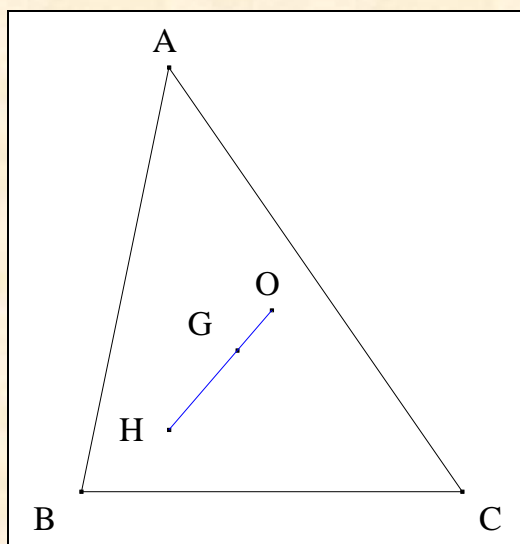
**Traits :** ABC un triangle,  
 $Ha, Hb, Hc$  les A, B, C-hauteurs de ABC  
 et  $Ma, Mb, Mc$  les A, B, C-médianes de ABC.

**Donnés :** (1)  $Ha, Hb$  et  $Hc$  sont concourantes  
 (2)  $Ma, Mb$  et  $Mc$  sont concourantes.

<sup>2</sup> Euclide, *Éléments* Livre IV, proposition 5.

- Scolies :**
- (1) le point de concours de  $H_a$ ,  $H_b$  et  $H_c$ , noté H et répertorié sous  $X_4$  chez ETC, est "l'orthocentre de ABC"<sup>3</sup>.
  - (2) Le point de concours de  $M_a$ ,  $M_b$  et  $M_c$ , noté G et répertorié sous  $X_2$  chez ETC, est "le point médian de ABC"<sup>4</sup>.

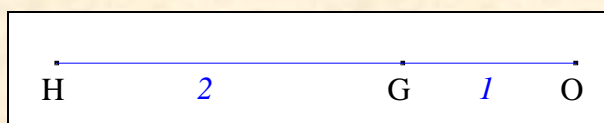
### 3. Leonhard Euler (1707 - 1783)



- Traits :**
- ABC un triangle,
  - O le centre du cercle circonscrit à ABC,
  - G le point médian de ABC
- et H l'orthocentre de ABC.

**Donné :** H, G et O sont alignés<sup>5</sup>.

- Scolies :**
- (1) suite à l'initiative de Joseph Neuberg, (HGO) est "la droite d'Euler de ABC".
  - (2) Disposition<sup>6</sup>



**Commentaire :** Leonhard Euler a été le premier géomètre à avoir l'intuition de regrouper ces trois points remarquables du triangle sur une droite ; cette démarche allait donner à la future "géométrie du triangle", le premier moule d'une synthèse d'un ordre plus élevé dont la nature allait être expliquée par ses successeurs.

<sup>3</sup> Archimède, *Scolies*, lemme 5.

Heath T. L., *Works of Archimedes*, Cambridge (1897) Lemmas 5.

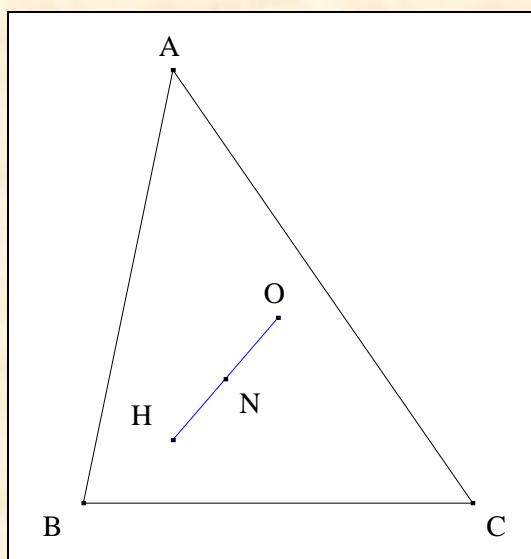
<sup>4</sup> Archimède, proposition 13, Sobre el equilibrio de los platos, Livre I (vers 225 a. J.-C.).

<sup>5</sup> Euler L., *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*, *Novi commentarii Academiae Petropolitanae* 11 (1765) 114.

Euler L., *Opera Omnia* XXVI, éd. Andr. Speiser, Zürich (1953) 139-157 et surtout 149 ; ce traité fut présenté à l'Académie de St-Petersbourg le 21 décembre 1763 en style ancien.

<sup>6</sup> Euler L., *Solutio facilis*, (1765).

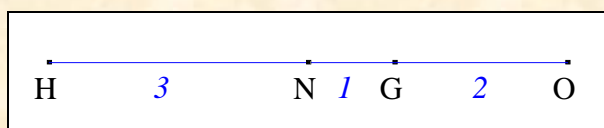
#### 4. Karl Feuerbach (1800 -1834)



**Traits :** ABC un triangle,  
 H l'orthocentre de ABC,  
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,  
 et N le centre du cercle d'Euler-Bevan de ABC.

**Donné :** N est le milieu de [HO]<sup>7</sup>.

**Scolies :** (1) ce point est répertorié sous X<sub>5</sub> chez ETC.  
 (2) Disposition

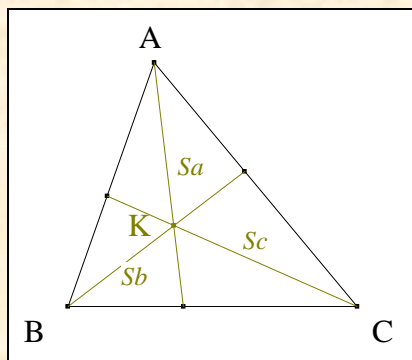


(3) La quaterne (H, G, N, O) est harmonique.

## II. LA DROITE DE BROCARD

### 1. Émile Lemoine (1840-1912)

<sup>7</sup> Feuerbach K., *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren* (1822) 38.



**Traits :** ABC un triangle  
 et Sa, Sb, Sc les A, B, C-symédianes de ABC.

**Donné :** Sa, Sb et Sc sont concourantes<sup>8</sup>.

- Scolies :**
- (1) le point de concours de Sa, Sb et Sc, noté K et répertorié sous  $X_6$  chez ETC. Suite à l'initiative de Joseph Neuberg en 1884, K est "le point de Lemoine de ABC".
  - (2) Par définition, K est l'isogonal de G relativement à ABC.
  - (3) K est à l'intérieur de ABC.

**Note historique :** c'est au congrès de Lyon en 1873 qu'Émile Lemoine, dans un papier intitulé "Sur un point remarquable du triangle", a présenté ce résultat sans démonstration. Nathan Altshiller Court dans son livre<sup>9</sup> dit que Lemoine "may be said to have laid the foundation... of the modern geometry of the triangle as a whole". Quant à Ross Honsberger, il ajoute que le point symédian peut être considéré comme "a crown jewel of modern geometry"<sup>10</sup>. D'après l'historien anglais John Sturgeon Mackay<sup>11</sup>, le point K s'est dégagé progressivement à partir de ses nombreuses propriétés.

## 2. John Casey (1820-1891)

### VISION

**Figure :**

<sup>8</sup>

Lemoine E., Sur un point remarquable du triangle, Congrès de Lyon (1873).

<sup>9</sup>

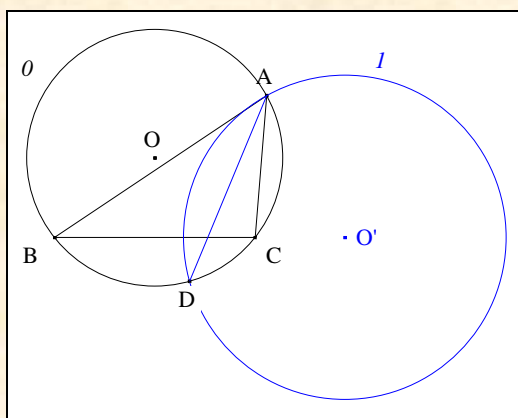
Altshiller-Court N., *College Geometry*, Barnes & Noble, Richmond (1923) 304.

<sup>10</sup>

Honsberger R., *Episodes of 19th and 20th Century Euclidean Geometry*, Math. Assoc. America (1995) 53.

<sup>11</sup>

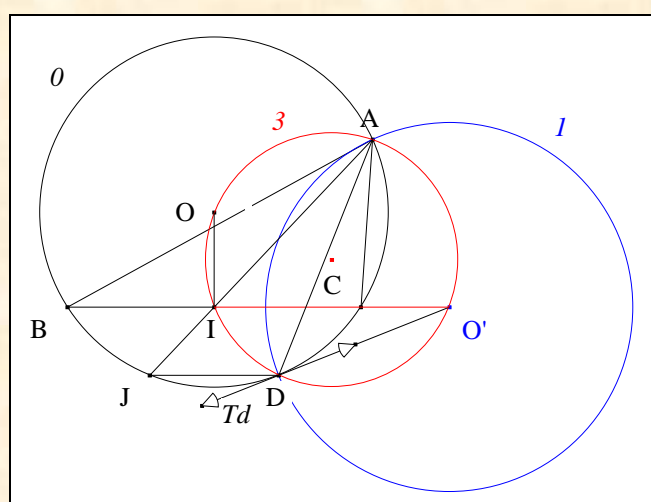
Mackay J. S., Early History of the Symmedian Point, *Proceedings of Edinburgh Math. Society* XI (1892-93) 92.



**Traits :** ABC un triangle,  
 $\theta$  le cercle circonscrit de ABC,  
 $O$  le centre de  $\theta$ ,  
 $I$  le A-cercle d'Apollonius de ABC,  
 $O'$  le centre de  $I$   
 et  $D$  le second point d'intersection de  $\theta$  et  $I$ .

**Donné :** (AD) est la A-symédiane de ABC<sup>12</sup>.

### VISUALISATION



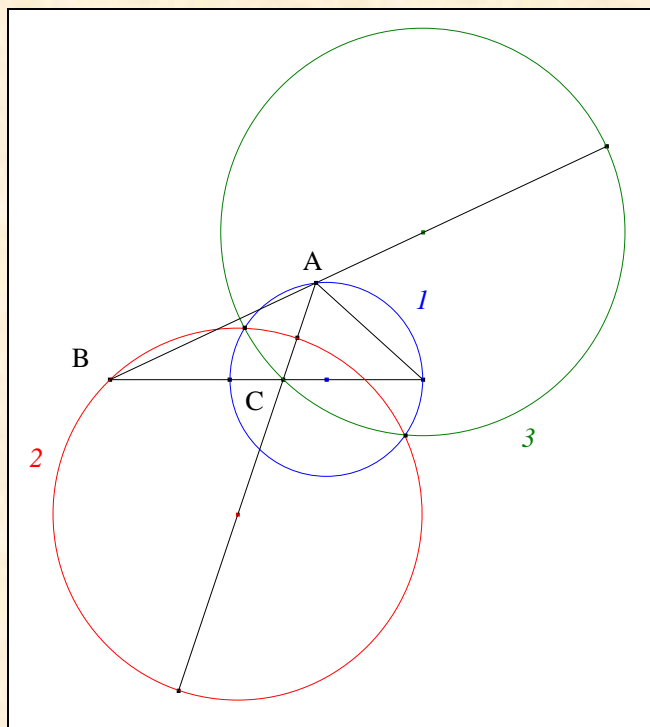
- Notons  $I$  le milieu de  $[BC]$ ,  
 et  $J$  le second point d'intersection de  $(AI)$  avec  $\theta$   
 et  $Td$  la tangente à  $\theta$  en  $D$ .
- $\theta$  et  $I$  étant orthogonaux,  $Td$  passe par  $O'$ .
- Notons  $3$  le cercle de diamètre  $[OO']$  ; il passe par  $A$ ,  $D$  et  $I$ .
- Les cercles  $3$  et  $\theta$ , les points de base  $A$  et  $D$ , les moniennes  $(IAJ)$  et  $(O'DD)$ , conduisent au théorème 3 de Reim ; il s'en suit que  $(IO') \parallel (JD)$  ;
- **Conclusion :** (AD) est la A-symédiane de ABC.

<sup>12</sup> Casey J., *Treatise on the Analytic Geometry of the Point, Line and Conic Sections*, Dublin, (1885) 146.

## 3. Vecten (vers 1819)

## VISION

Figure :



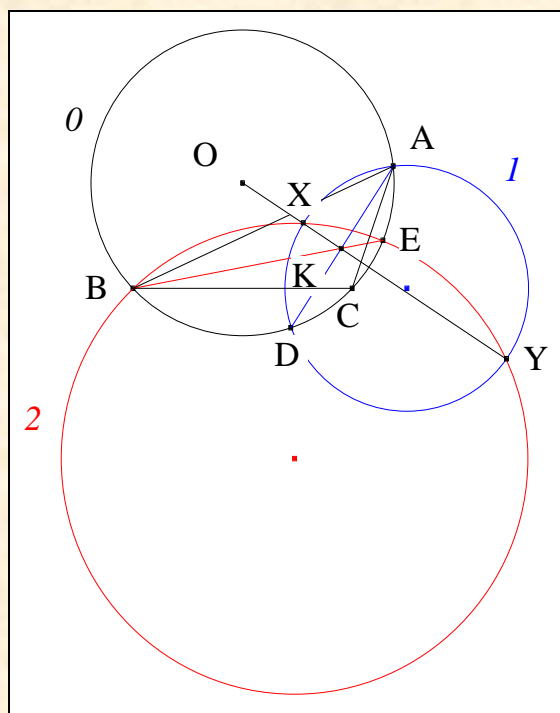
**Traits :** ABC un triangle,  
 et 1, 2, 3 les A, B, C-cercles d'Apollonius de ABC.

**Donné :** 1, 2 et 3 ont une corde commune<sup>13</sup>.

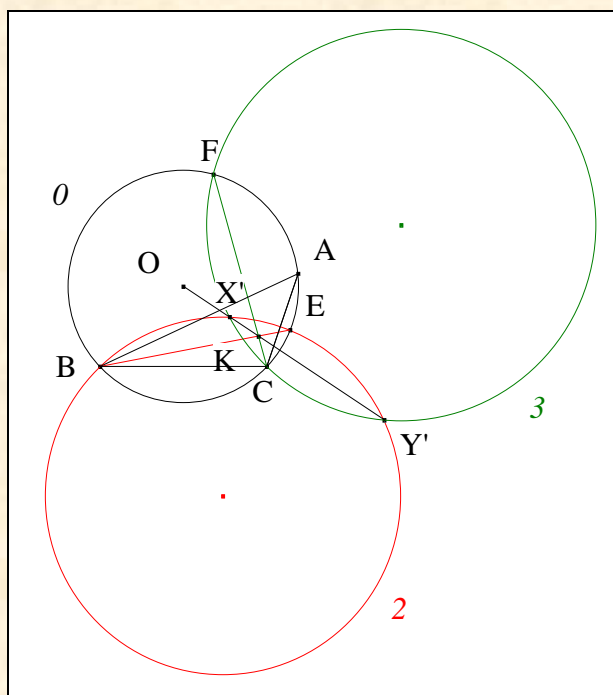
## VISUALISATION

<sup>13</sup> Vecten, *Annales de Gergonne* X (1819-20) 202-204





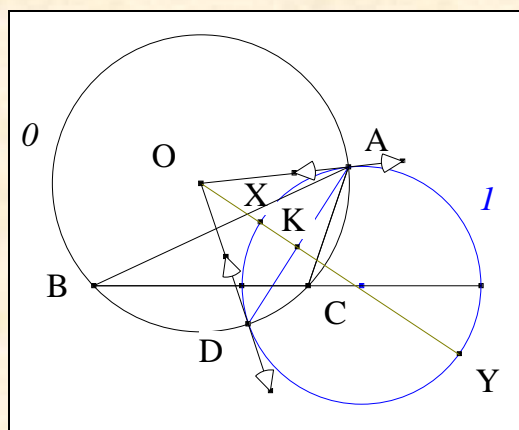
- Notons  $\theta$  le cercle circonscrit à ABC,  
 $O$  le centre de  $\theta$ ,  
 $X, Y$  les points d'intersection de  $1$  et  $2$ ,  
 $D, E$  les seconds points d'intersection de  $\theta$  resp. avec  $1, 2$   
 et  $K$  le point de Lemoine de ABC.
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 1) appliqué à  $\theta, 1, 2$ ,  
 $[AD], [BE]$  et  $[XY]$  sont concourantes.
- D'après II.1. Lemoine et II.2. Casey,  $[AD], [BE]$  et  $[XY]$  concourent en  $K$ .
- **Scolie :**  $\theta$  est orthogonal à  $1$  et  $2$ .
- D'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe 2),  
 $O$  est sur l'axe radical  $(XKY)$  de  $1$  et  $2$ .



- Notons  $X', Y'$  les points d'intersection de 2 et 3,  
et  $F$  le second point d'intersection de 0 et 3.
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 1) appliqué à 0, 2, 3,  $[BE]$ ,  $[CF]$  et  $[X'Y']$  sont concourantes.
- D'après II.1. Lemoine et II.2. Casey,  $[BE]$ ,  $[CF]$  et  $[X'Y']$  concourent en K.
- **Scolie :**  $O$  est orthogonal à 2 et 3.
- D'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe 2),  $O$  est sur l'axe radical  $(X'KY')$  de 2 et 3.
- D'après l'axiome d'incidence Ia,  $X, Y, X'$  et  $Y'$  sont sur  $(OK)$  ;  
en conséquence,  $[XY] = [X'Y']$ .
- **Conclusion :** 1, 2 et 3 ont une corde commune.

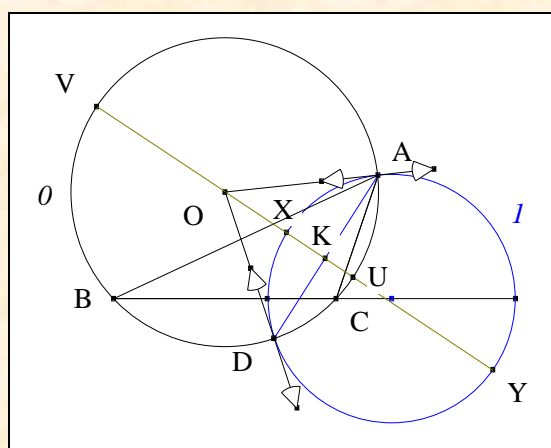
- Scolies :**
- (1)  $(OK)$  est "la droite de Brocard de ABC".
  - (2)  $X$  et  $Y$  sont "les points isodynamiques de ABC"<sup>14</sup>  
ou encore  
"les points de Hesse de ABC" ; ils sont répertoriés sous  $X_{15}$  et  $X_{16}$  chez ETC.
  - (3) Le premier point de Hesse, noté  $S_+$ , est celui qui est à l'intérieur du plus grand angle de ABC, ( $X$  dans notre figure) ; le second point de Hesse est noté  $S_-$ , ( $Y$  dans notre figure).
  - (4) Un quaterne harmonique

<sup>14</sup> Neuberg J., *Mathesis* (1885) 204, renvoi.  
Vigarié E., S. J. (1888) 200-201 et (1889) 57



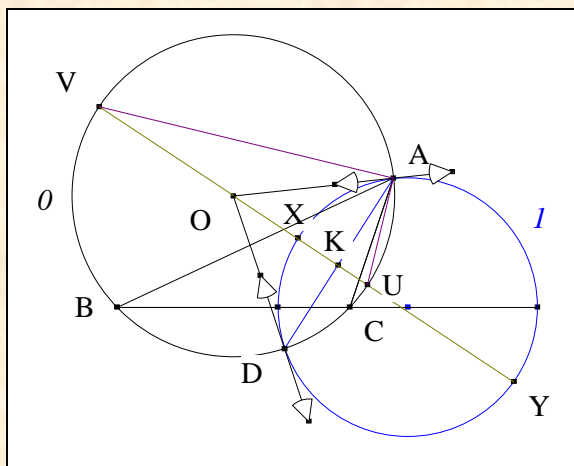
- $O$  et  $I$  étant orthogonaux,  $(OA)$  et  $(OD)$  sont tangentes à  $I$  resp. en  $A, D$ .
- **Conclusion :** d'après Apollonius "Une quaterne harmonique" (Cf. Annexe 3), la quaterne  $(O, K, X, Y)$  est harmonique.

(5) Une relation métrique



- Notons  $U, V$  les points d'intersection de  $(OK)$  avec  $I$ .
- $O$  et  $I$  étant orthogonaux, la quaterne  $(U, V, X, Y)$  est harmonique.
- **Conclusion :**  $O$  étant le milieu de  $[UV]$ ,  $OX.OY = OU^2 (= OA^2)$ .

(6) Deux bissectrices

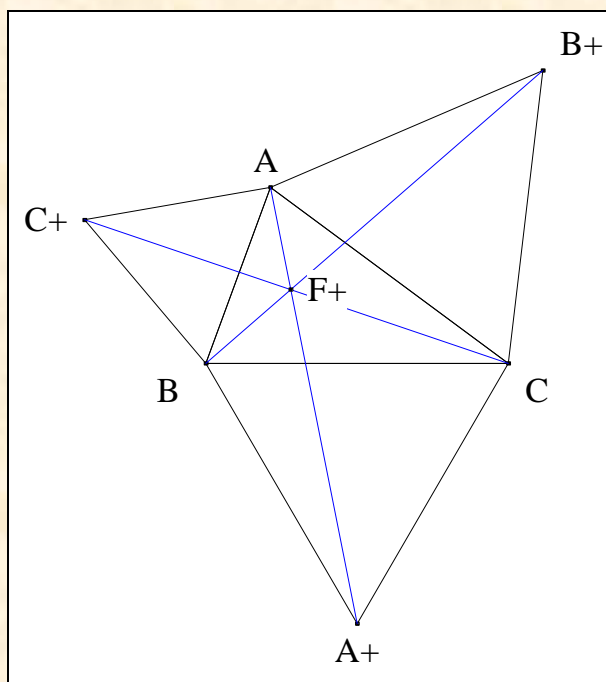


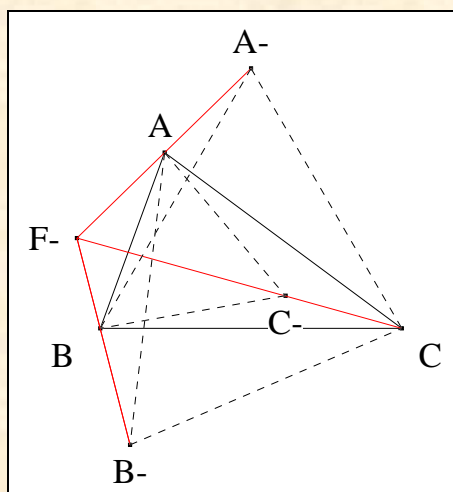
- $O$  et  $I$  étant orthogonaux, la quaterne  $(U, V, X, Y)$  est harmonique.
- **Conclusion :** le pinceau harmonique  $(A ; U, V, X, Y)$  ayant deux rayons perpendiculaires,  $(AU)$  et  $(AV)$  sont les deux bissectrices de  $\angle XAY$ .

**Note historique :** c'est F. Vallès, ingénieur des Ponts et Chaussée, qui a montré le premier que "la corde commune" passe par  $O$ .

### III. LA DROITE DE NEUBERG

#### 1. Pierre Simon de Fermat (1601-1665)





**Traits :** ABC un triangle,  
 BA+C, CB+A, AC+B trois triangles équilatéraux adjacents extérieurement à ABC  
 et BA-C, CB-A, AC-B trois triangles équilatéraux adjacents intérieurement à ABC.

**Donnés :** (1) (AA+), (BB+) et (CC+) sont concourantes  
 (2) (AA-), (BB-) et (CC-) sont concourantes.

**Scolies :** (1) le point de concours de (AA+), (BB+) et (CC+), noté F+,  
 est "le premier point de Fermat de ABC" ; il est répertorié sous X<sub>13</sub> chez ETC.  
 (2) Le point de concours de (AA-), (BB-) et (CC-), noté F-,  
 est "le second point de Fermat de ABC" ; il est répertorié sous X<sub>14</sub> chez ETC.  
 (3) Positions de F+ et F-  
 F+ est à l'intérieur du triangle si, aucun de ses angles n'excède 120° ;  
 chaque côté sous-tend un angle de 120°.  
 F+ est à l'extérieur du triangle si, l'un de ses angles excède 120° ;  
 par rapport au plus grand côté, il est du même côté que le sommet opposé à celui-ci ;  
 ce dernier sous-tend un angle de 120° et les deux autres, un angle de 60°.  
 F- est à l'extérieur du triangle si, aucun de ses angles ne vaut 60° et qu'un seul excède  
 120° ; par rapport au plus grand côté, il n'est pas du même côté que le sommet opposé  
 à celui-ci ; ce dernier sous-tend un angle de 120° et les deux autres, un angle de 60°.  
 F- est à l'extérieur du triangle si, deux de ses angles excèdent 60° ; par rapport au plus  
 petit côté, il n'est pas du même côté que le sommet opposé à celui-ci ; ce dernier sous-  
 tend un angle de 120° et les deux autres, un angle de 60°.  
 F- n'existe pas si le triangle est équilatéral.

**Note historique :** au printemps 1644, le père Marin Mersenne<sup>15</sup> entreprenait un pèlerinage à Rome. Aux  
 étapes de Bologne, puis de Florence, il montrait aux savants de l'époque, "le problème  
 de Fermat" qu'il emmenait avec lui dans ses bagages :

*étant donné un triangle, rechercher le point tel que la somme de ses distances aux  
 trois sommets, est minimale.*

C'est ainsi que Bonaventure Cavalieri<sup>16</sup>, Evangelista Torricelli<sup>17</sup> et Vincenzo Viviani<sup>18</sup>  
 en prendront connaissance. La solution de Toricelli publiée en 1659 par son élève

<sup>15</sup> Mersenne M. (1588-1648).

<sup>16</sup> Cavalieri B. (1598-1647).

<sup>17</sup> Torricelli E. (1608-1647).

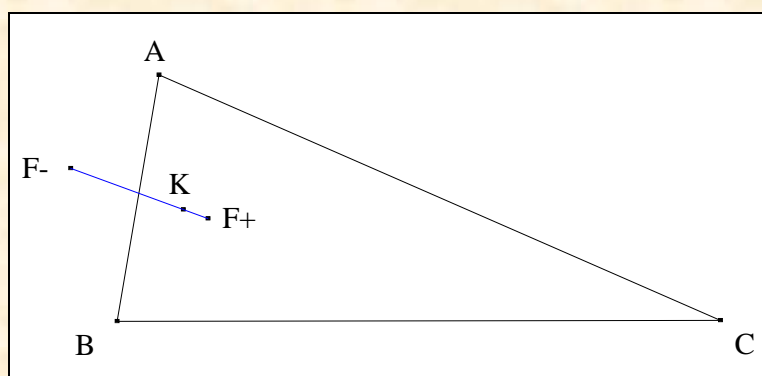
<sup>18</sup> Viviani V. (1622-1703).

Viviani, avait pour point de départ la considération des trois triangles équilatéraux construits à l'extérieur sur les côtés du triangle et de leurs trois cercles circonscrits. Reprenant l'idée de Toricelli, mais en remplaçant "extérieur" par "intérieur", Henri Brocard<sup>19</sup> obtenait le "second point de Fermat".

## 2. Joseph Neuberg (1840-1926)

### VISION

Figure :



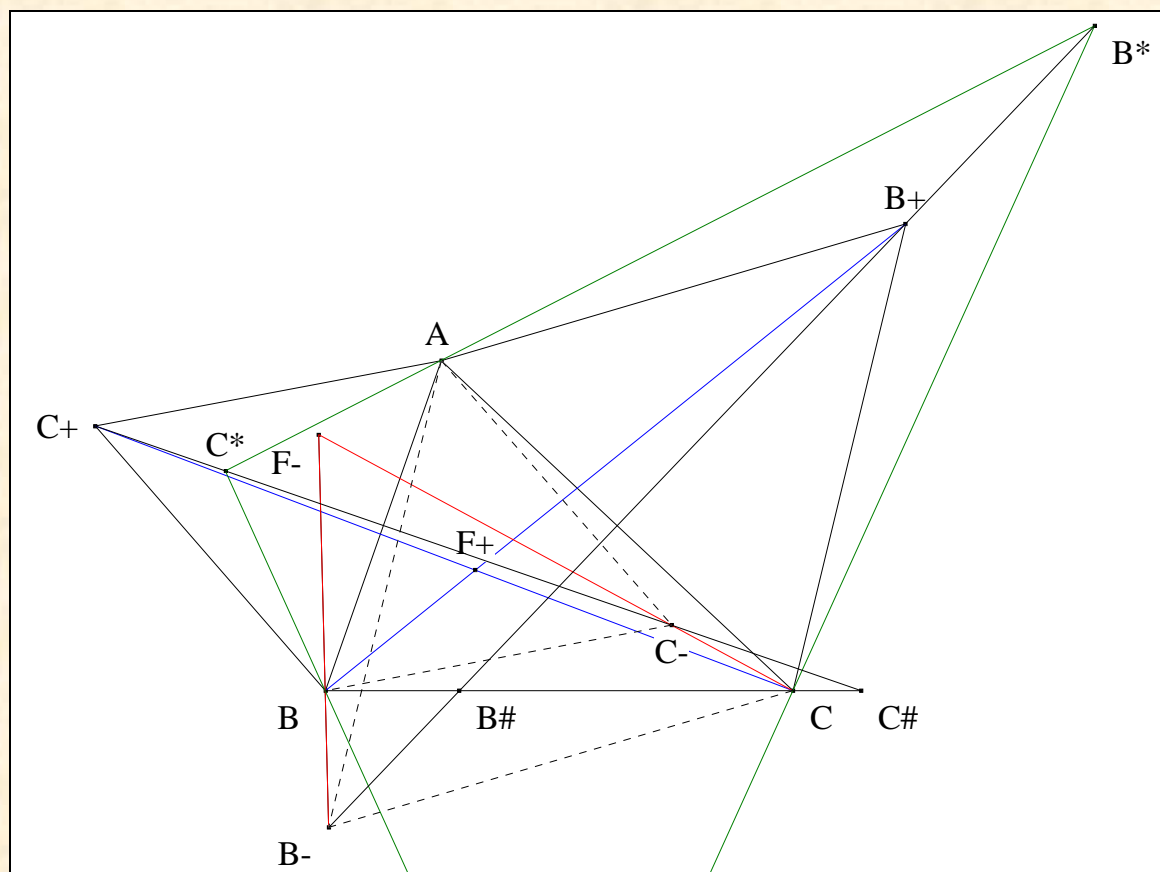
**Traits :** ABC un triangle,  
K le point de Lemoine de ABC  
et F+, F- les premier et second points de Fermat de ABC.

**Donné :** F+, F- et K sont alignés.

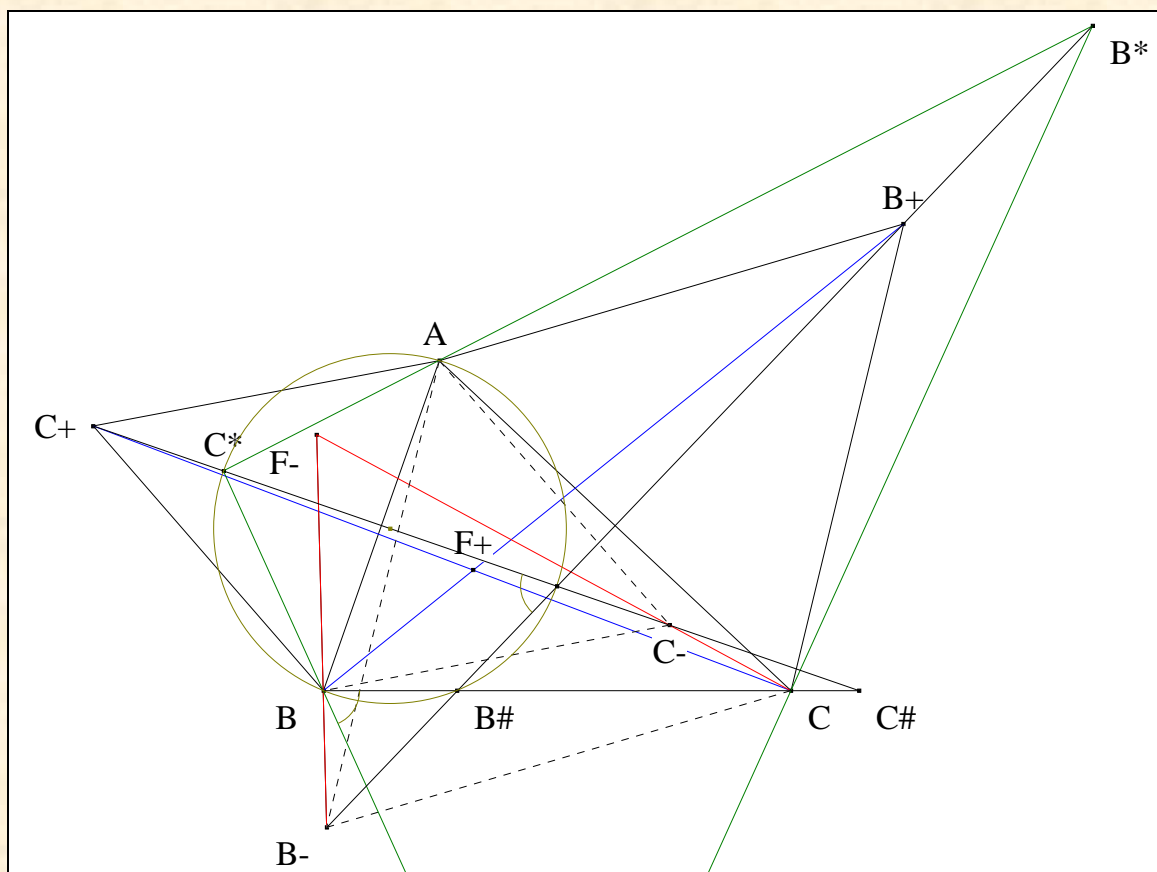
### VISUALISATION<sup>20</sup>

<sup>19</sup> Brocard H., *Nouvelle Correspondance* 3 (1876).

<sup>20</sup> <http://www.mathlinks.ro/forum/viewtopic.php?t=169837>



- Notons  $BA+C, CB+A, AC+B$  les trois triangles équilatéraux adjacents extérieurement à  $ABC$ ,  
 $BA-C, CB-A, AC-B$  les trois triangles équilatéraux adjacents intérieurement à  $ABC$ ,  
 $A^*B^*C^*$  le triangle tangential de  $ABC$   
 et  $B\#, C\#$  les points d'intersection resp. de  $(C+C-), (B+B-)$  avec  $(BC)$ .
- Considérons les pinceaux anharmoniques  $P_a = (A ; C+, C-, C^*, C\#)$   
 $P'_a = (A ; B-, B+, B\#, B^*)$ .



- Une chasse angulaire montre que  $P'a$  est l'image de  $Pa$  sous la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\sphericalangle BAC$  ( $2 \cdot \Pi$ ) ;  
en conséquence,  $(A ; C+, C-, C*, C\#) = (A ; B-, B+, B\#, B^*)$ .
- En permutant simultanément les deux premiers et les deux derniers points de  $P'a$ ,  
le pinceau anharmonique  $P'a$  reste inchangé :  
par changement d'origine de  $A$  en  $B$ ,  $(A ; B-, B+, B\#, B^*) = (A ; B+, B-, B^*, B\#)$  ;  
 $(A ; B+, B-, B^*, B\#) = (B ; B+, B-, B^*, B\#)$  ;  
par transitivité de la relation = entre pinceaux anharmoniques de même centre,  
 $(C ; C+, C-, C*, C\#) = (B ; B+, B-, B^*, B\#)$ .
- **Scolies :**
  - (1)  $(CC+), (CC-), (CC^*)$  et  $(CC\#)$  sont les rayons du pinceau à gauche de l'égalité
  - (2)  $(BB+), (BB-), (BB^*)$  et  $(BB\#)$  sont les rayons du pinceau à droite de l'égalité.
- Ces deux pinceaux ayant le rayon  $(BC)$  en commun, les points d'intersection des rayons homologues  $(CC+)$  et  $(BB+)$ ,  $(CC-)$  et  $(BB-)$ ,  $(CC^*)$  et  $(BB^*)$  sont alignés.
- **Conclusion :**  $F+, F-$  et  $K$  sont alignés.

- Scolies :**
- (1)  $(F+F-)$  est "la droite de Neuberg de  $ABC$ "
  - (2)  $K$  est entre  $F+$  et  $F-$ .

**Note historique :** le nom de Neuberg est associé à ceux de Lemoine et de Brocard, comme le troisième cofondateur de la géométrie moderne<sup>21</sup>.

<sup>21</sup>

Court-Altshiller N..

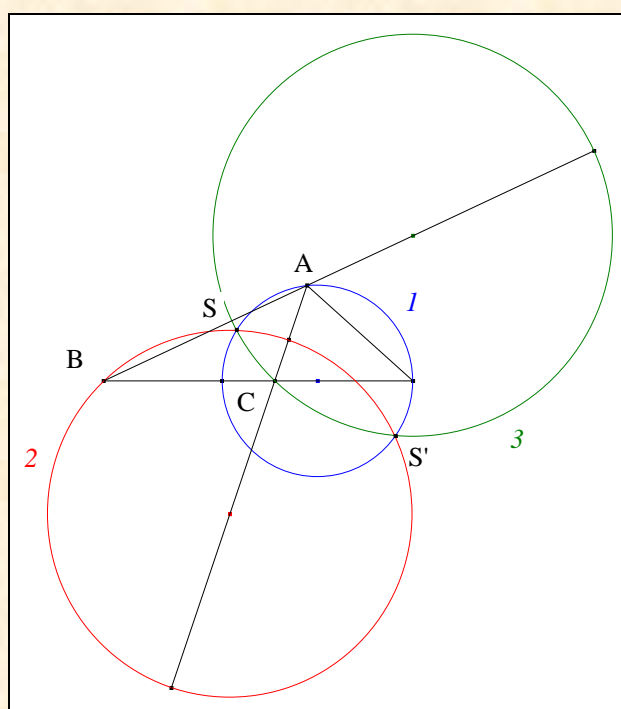


#### IV. DEUX COUPLES DE POINTS ISOGONAUX

##### 1. Une relation métrique

##### VISION

Figure :



**Traits :** ABC un triangle,  
 1, 2, 3 les trois A, B, C-cercles d'Apollonius de ABC  
 et S, S' les premier, second points de Hesse de ABC.

**Donné :** SA.BC = SB.CA = SC.AB.

##### VISUALISATION

- Par définition des cercles d'Apollonius,

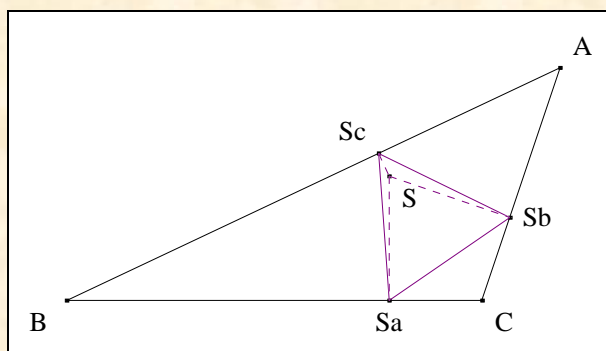
$$\frac{SB}{SC} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{SC}{SA} = \frac{BC}{BA}, \quad \frac{SA}{SB} = \frac{CA}{CB}.$$

- Conclusion :** par "produit en croix", SA.BC = SB.CA = SC.AB.

##### 2. Le triangle pédal du premier point de Hesse

##### VISION

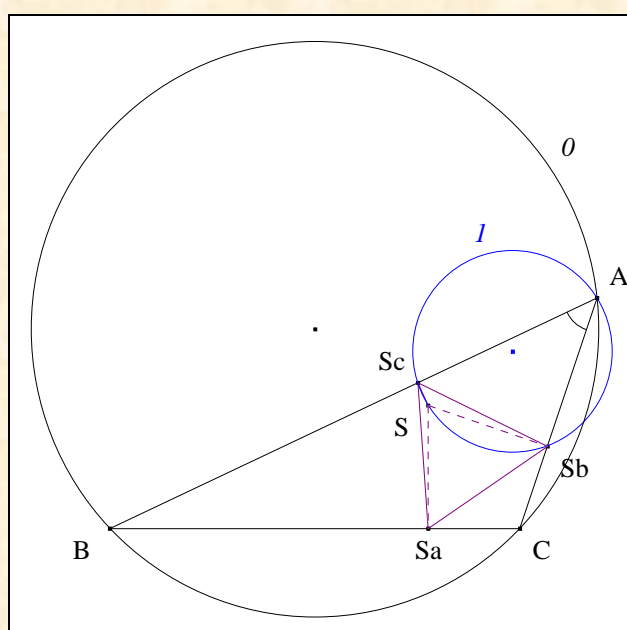
Figure :



**Traits :**  $ABC$  un triangle,  
 $S$  le premier point de Hesse de  $ABC$   
 et  $SaSbSc$  le triangle  $S$ -pédal de  $ABC$ .

**Donné :**  $SaSbSc$  est équilatéral.

### VISUALISATION



- Notons  $O$  le cercle circonscrit de  $ABC$ ,  
 $R$  le rayon de  $O$   
 et  $I$  le cercle de diamètre  $[SA]$  ; il passe par  $Sb$  et  $Sc$ .

- Les mesures des angles sont définies à  $2.\Pi$  près.

- D'après la loi des sinus appliqué (1) à  $O$ ,  $SbSc = SA.\sin \angle BAC$   
 (2) à  $I$ ,  $BC = 2R.\sin \angle BAC$  ;

par substitution,

$$SbSc = SA.BC / 2R.$$

- D'après la loi des sinus appliqué (1) à  $O$ ,  $ScSa = SB.\sin \angle CBA$   
 (2) à  $I$ ,  $CA = 2R.\sin \angle CBA$  ;

par substitution,

$$S_c S_a = SB \cdot CA / 2R.$$

- D'après IV. 1. Une relation métrique,

$$SA \cdot BC = SB \cdot CA.$$

- **Conclusion partielle :**

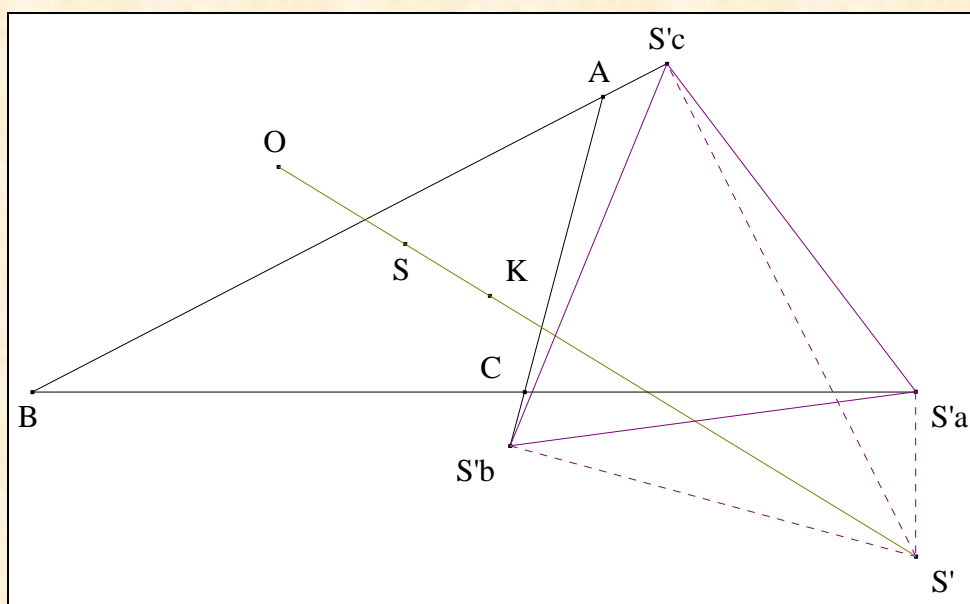
$$S_b S_c = S_c S_a.$$

- Mutatis mutandis, nous montrerions que

$$S_c S_a = S_a S_b.$$

- **Conclusion :**  $S_a S_b S_c$  ayant trois côtés égaux, est équilatéral.

**Scolie :** un autre triangle équilatéral



- Notons  $S'$  le second point de Hesse de ABC  
et  $S'aS'bS'c$  le triangle  $S'$ -pédal de ABC.

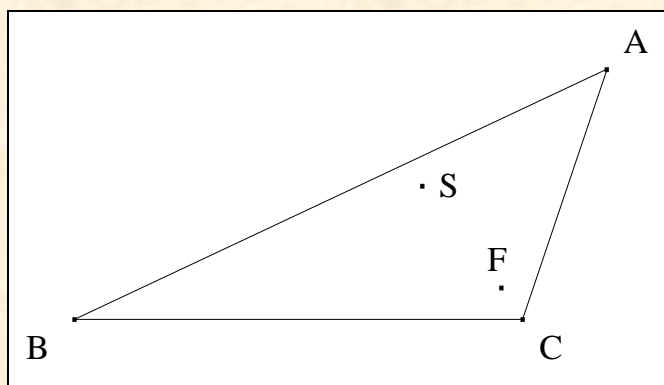
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que  $S'aS'bS'c$  est équilatéral.

**Commentaire :** l'aurait aurait préféré présenter une solution non métrique.

### 3. Les premiers points de Fermat et de Hesse

#### VISION

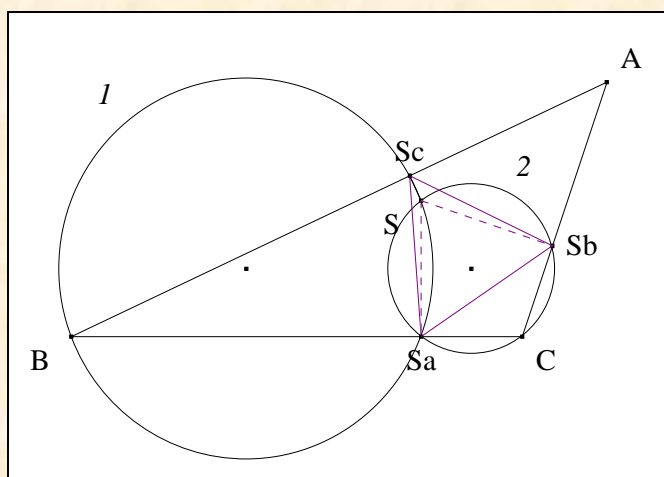
**Figure :**



**Traits :** ABC un triangle,  
S le premier point de Hesse de ABC  
et F le premier point de Fermat de ABC.

**Donné :** F est l'isogonal de S relativement à ABC.

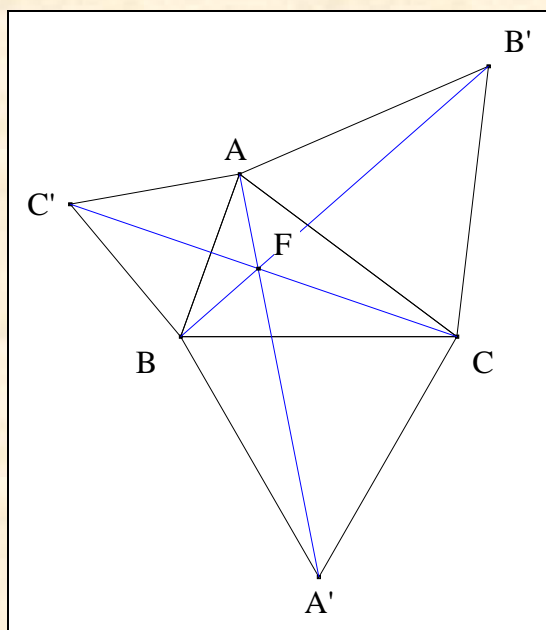
### VISUALISATION



- Notons  $S^*$  le conjugué isogonal de S relativement à ABC,  
 $SaSbSc$  le triangle S-pédal de ABC  
et  $1$  le cercle de diamètre [BS] ; il passe par  $Sa$  et  $Sc$  ;  
 $2$  le cercle de diamètre [CS] ; il passe par  $Sa$  et  $Sc$ .

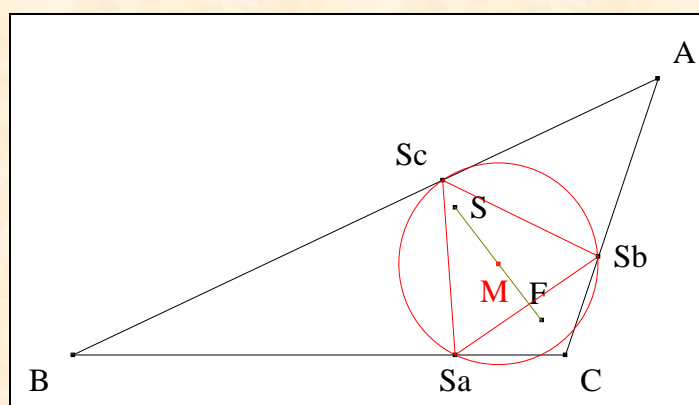
- Une chasse angulaire :  
d'après "Une relation angulaire" (Cf. Annexe 4)  $\angle BSC + \angle BS^*C = \angle BAC$  ;  
d'après la relation de Chasles,  $\angle BSC = \angle SBA + \angle BAC + \angle ACS$  ;  
d'après le théorème de l'angle inscrit,  $\angle BSC = \angle SSaSc + \angle BAC + \angle SbSaS$  ;  
par associativité,  $\angle BSC = \angle SbSaSc + \angle BAC$  ;  
en conséquence,  $\angle BS^*C + \angle SbSaSc = 0$ .

- Le triangle  $SbSaSc$  étant équilatéral,  $\angle SbSaSc = \frac{\pi}{3}$  à  $2\pi$  près.



- La figure ci-dessus rappelle la construction du premier point de Fermat.
- Nous avons :  $\angle BFC = \angle CA'B$  i.e.  $\frac{\Pi}{3}$  à  $2.\Pi$  près.  
 en conséquence,  $\angle BFC = \angle BS^*C$ .
- **Conclusion partielle :** F est sur l'isogonale de (BS) relativement à ABC.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que F est sur l'isogonale de (CS) relativement à ABC  
 en conséquence, F est sur l'isogonale de (AS) relativement à ABC ;  
 F et S\* sont confondus.
- **Conclusion :** F est l'isogonal de S relativement à ABC.

**Scolies :** (1) centre du cercle circonscrit à SaSbSc<sup>22</sup>



- Notons M le milieu de [SF].
- D'après "Le cercle de Mathieu" (Cf. Annexe 5), M est le centre du cercle circonscrit à SaSbSc.

(2) Les seconds points de Fermat et de Hesse

<sup>22</sup> Boutin A..

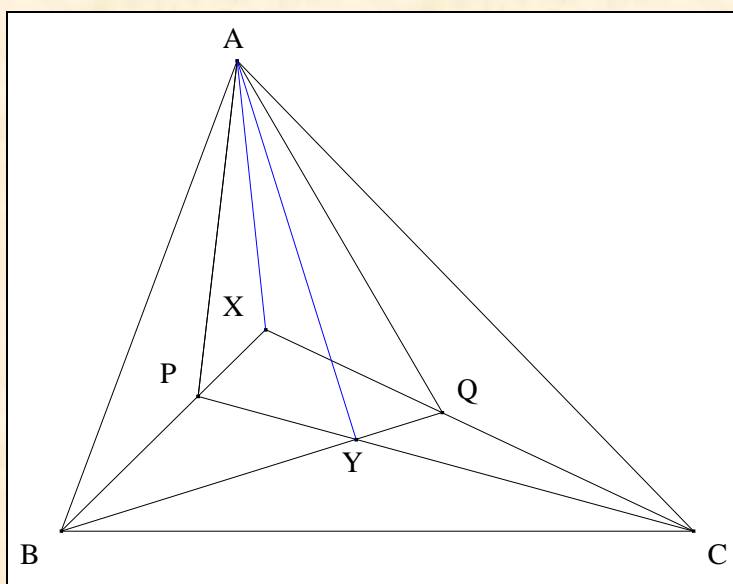
- Notons  $S'$  le second point de Hesse de ABC  
et  $F'$  le second point de Fermat de ABC.
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que  $F'$  est l'isogonal de  $S'$  relativement à ABC.

## V. INTERSECTION EN G

### 1. Un lemme

#### VISION

Figure :

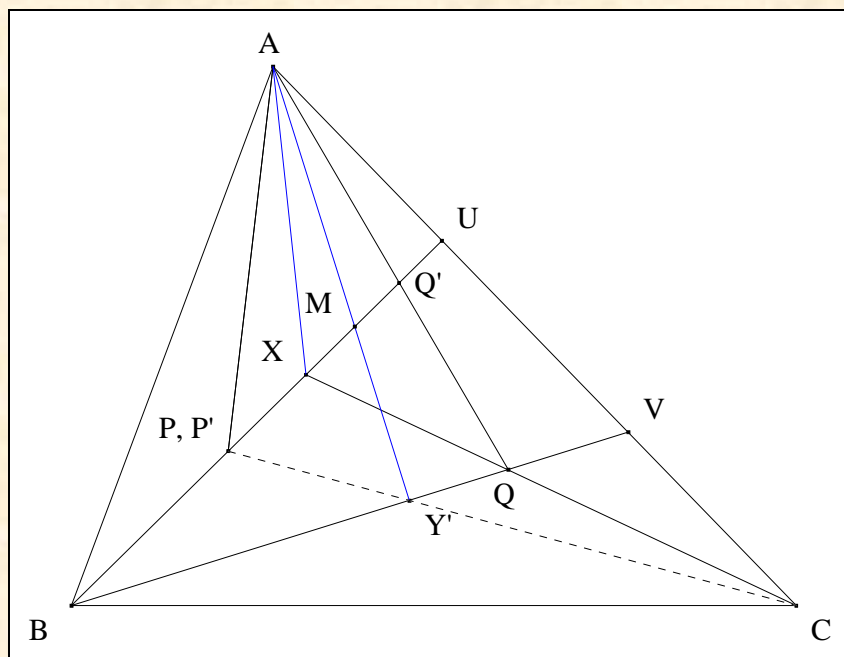


**Traits :** ABC un triangle,  
P, Q deux points tels que (AP) et (AQ) soient deux A-isogonales de ABC  
et X, Y les points d'intersection de (BP) et (CQ), de (BQ) et (CP).

**Donné :** (AX) et (AY) sont deux A-isogonales de ABC.

#### VISUALISATION



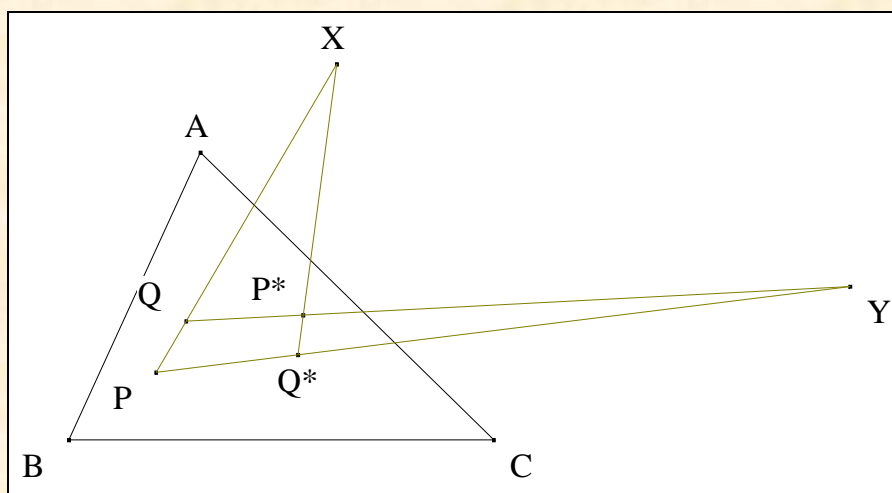


- Notons  $P'$  le point d'intersection de  $(CY')$  et  $(AP)$ .
- Les deux derniers pincesaux ayant le rayon  $(AC)$  en commun,  
 les points d'intersection de  $(CY')$  et  $(AP)$ , de  $(CQ)$  et  $(AX)$ , de  $(CB)$  et  $(AB)$  sont alignés  
 i.e.  $P', X$  et  $B$  sont alignés ;  
 en conséquence,  $P'$  et  $P$  sont confondus ;  
 il s'en suit que  $Y'$  et  $Y$  sont confondus.
- **Conclusion :**  $(AX)$  et  $(AY)$  sont deux A-isogonales de  $ABC$ .

## 2. Ludwig Otto Hesse<sup>23</sup> (1811-1874)

### VISION

Figure :



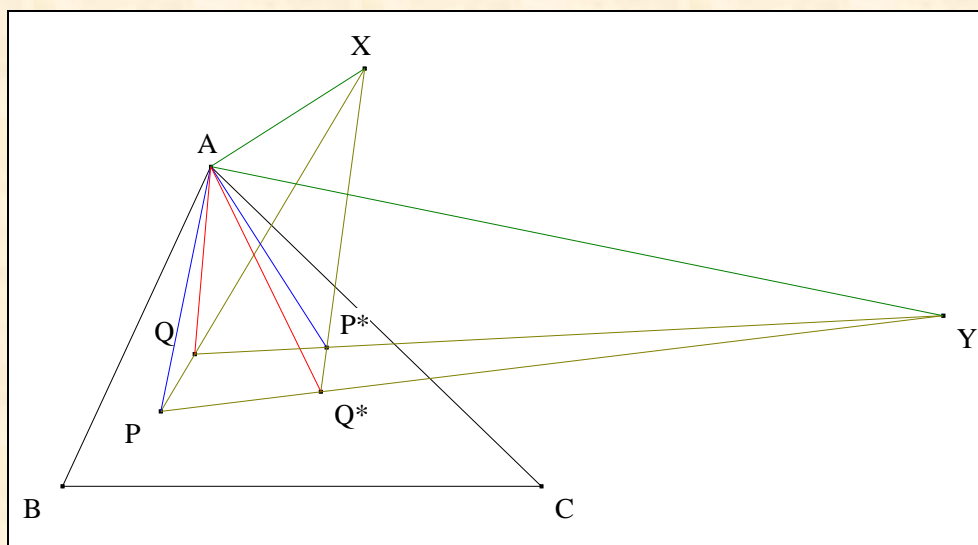
<sup>23</sup> Hesse L. O., *Journal de Crelle* vol. 20 (1840).



**Traits :** ABC un triangle,  
 P un point,  
 P\* l'isogonal de P relativement à ABC,  
 Q un point,  
 Q\* l'isogonal de P relativement à ABC,  
 et X, Y les points d'intersection de (PQ) et (P\*Q\*), de (PQ\*) et (P\*Q).

**Donné :** Y est l'isogonal de X relativement à ABC.

### VISUALISATION

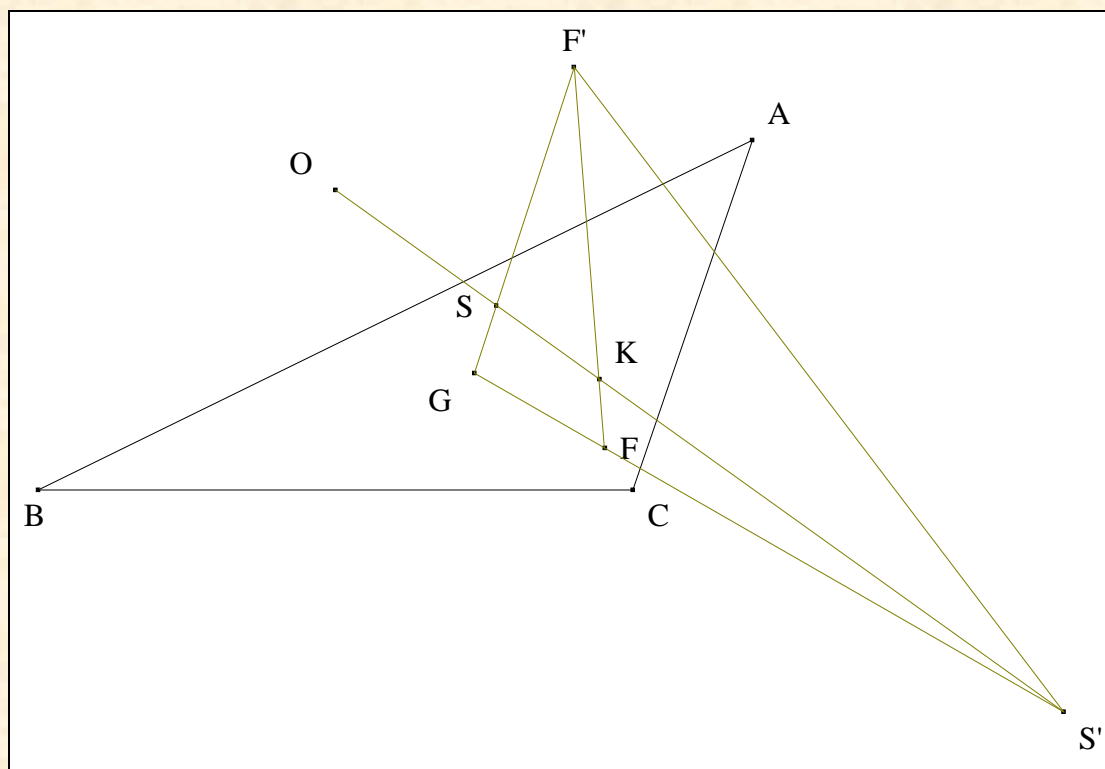


- **Scolies :**
  - (1) (AP) et (AP\*) sont deux A-isogonales de ABC
  - (2) (AQ) et (AQ\*) sont deux A-isogonales de ABC
  - (3) (AX) et (AY) sont deux A-isogonales du triangle APP\*.
- D'après V. 1. Un lemme, appliqué au triangle APP\* et aux points Q et Q\*, (AX) et (AY) sont deux A-isogonales de ABC.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BX) et (BY) sont deux B-isogonales de ABC  
 (CX) et (CY) sont deux C-isogonales de ABC.
- **Conclusion :** Y est l'isogonal de X relativement à ABC.

### 3. Intersection en G

### VISION

Figure



**Traits :** ABC un triangle,  
 G le point médian de ABC,  
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,  
 K le point de Lemoine de ABC  
 et S, S' les premier, second points de Hesse de ABC.

**Donné :** (FS') et (F'S) sont concourantes en G.

### VISUALISATION

- **Scolies :** (1) K est l'isogonal de G relativement à ABC  
 et, par symétrie de la relation "est l'isogonal de",  
 G est l'isogonal de K relativement à ABC  
 (2) F est l'isogonal de S relativement à ABC  
 (3) F' est l'isogonal de S' relativement à ABC  
 (4) K est le point d'intersection de (FF') et (SS').

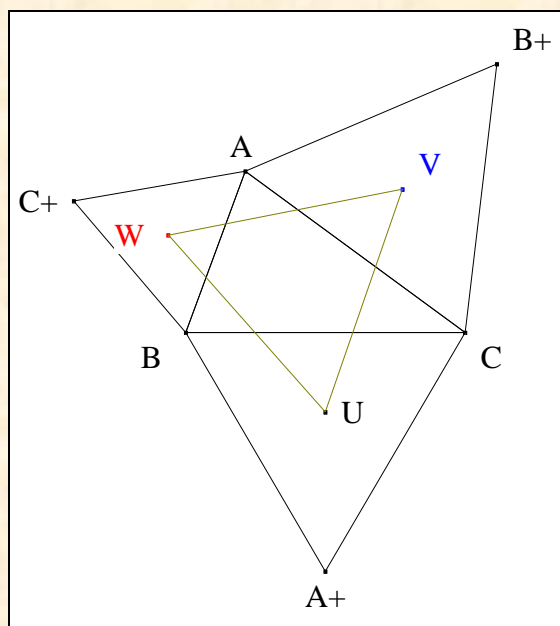
- D'après V. 2. Hesse, (FS') et (F'S) concourent à l'isogonal de K.

- **Conclusion :** (FS') et (F'S) sont concourantes en G.

**Note historique :** A. Boutin s'est intéressé aux points de Hesse en 1869 et à cette intersection.

## VI. LA FIGURE "INACHEVÉE" DES MORLEY

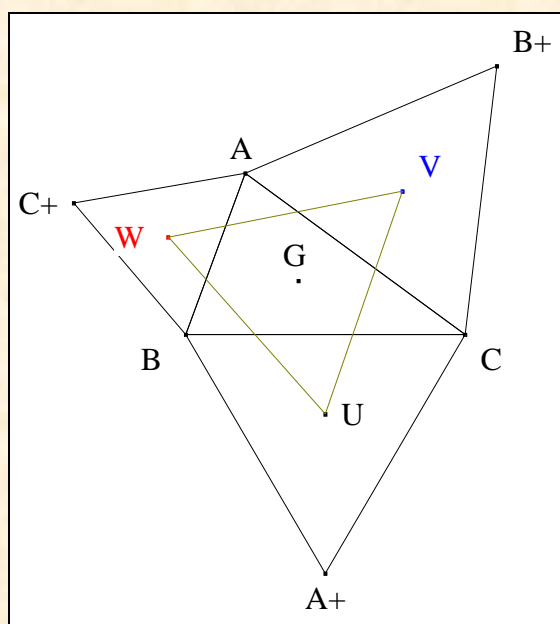
### 1. Le premier triangle de Napoléon



**Traits :**  $ABC$  un triangle,  
 $BA+C$ ,  $CB+A$ ,  $AC+B$  trois triangles équilatéraux adjacents extérieurement à  $ABC$   
 et  $U, V, W$  les centres de  $BA'C$ ,  $CB'A$ ,  $AC'B$

**Donné :** le triangle  $UVW$  est équilatéral.

**Scolies :** (1)  $UVW$  est "le premier triangle de Napoléon relativement à  $ABC$ ".  
 (2) Le point médian de  $UVW$



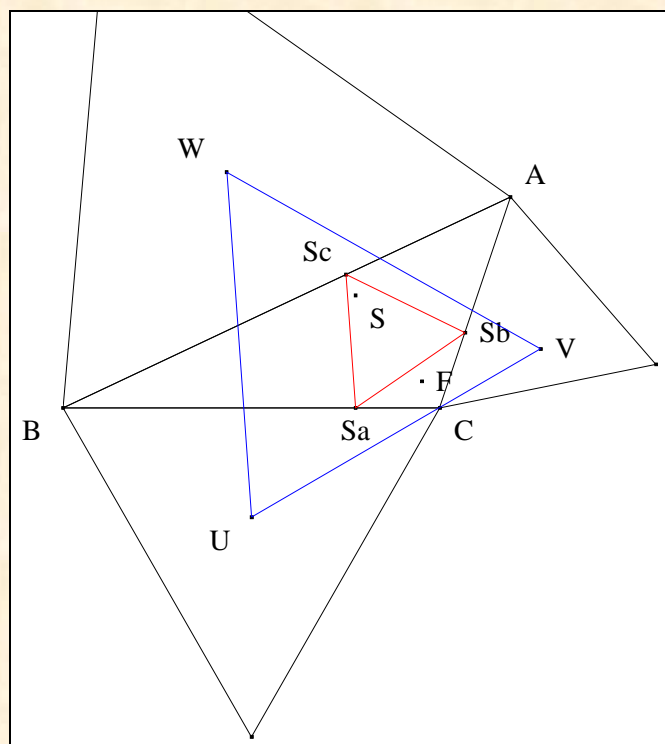
• Notons  $G$  le point médian de  $ABC$ .

• **Conclusion :**  $G$  est le point médian de  $UVW$ .

## 2. Deux triangles homothétiques

### VISION

Figure :



**Traits :** ABC un triangle,  
 UVW le premier triangle de Napoléon relativement à ABC,  
 S le premier point de Hesse de ABC,  
 SaSbSc le triangle S-pédal de ABC  
 et F le premier point de Fermat de ABC.

**Donné :** UVW est homothétique à SaSbSc.

### VISUALISATION

- **Scolie :** UVW est homothétique au triangle F-antipédal de ABC.
- Sachant que le triangle antipédal d'un point est homothétique au triangle pédal de l'isogonal de ce point, le triangle F-antipédal de ABC est homothétique à SaSbSc.<sup>24</sup>
- **Conclusion :** par transitivité de la relation "est homothétique à", UVW est homothétique à SaSbSc.

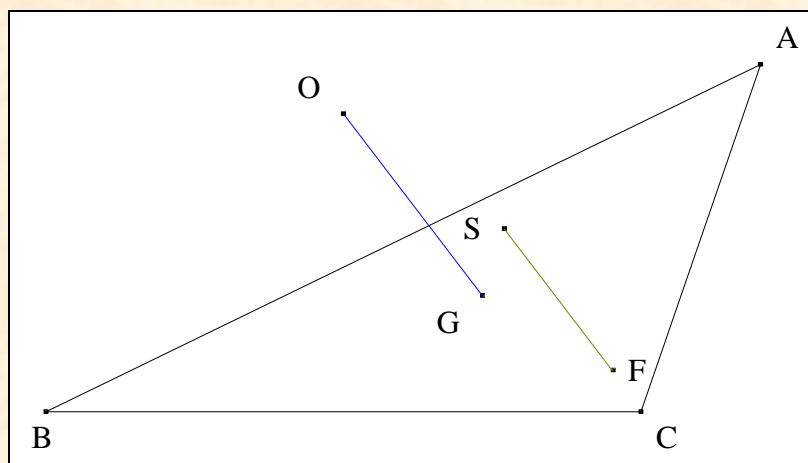
**Scolies :** (1) SaSbSc étant équilatéral, UVW est équilatéral.  
 (2) Mutatis mutandis, nous montrerions que U'V'W' est homothétique à S'aS'bS'c.

<sup>24</sup> F.G.M., *Exercices de Géométrie*, 6th ed., 1920, Rééditions Jacques Gabay, Paris, 1991; Théorème 1003 p. 1164.

### 3. Un résultat de A. Boutin<sup>25</sup>

#### VISION

Figure



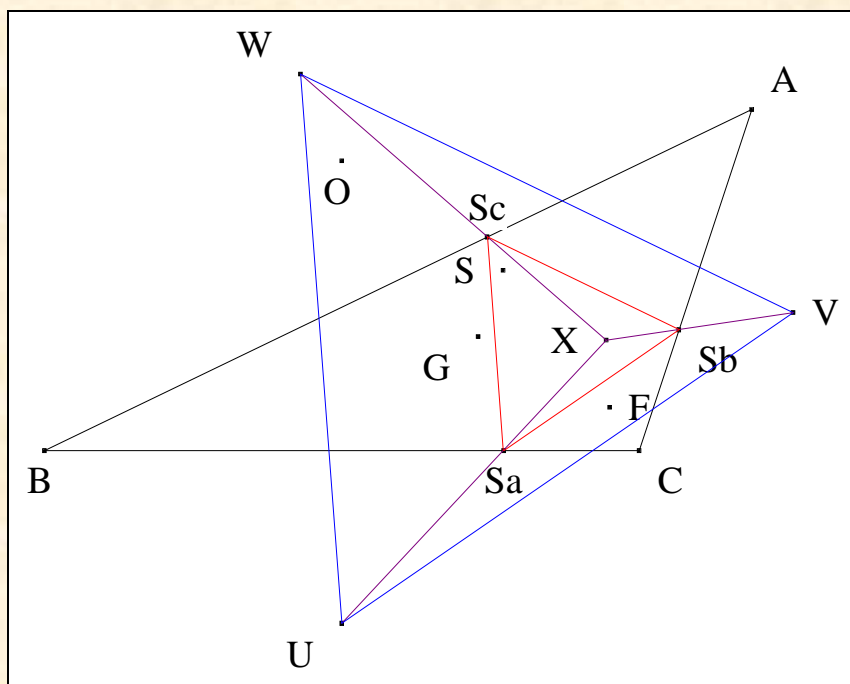
**Traits :** ABC un triangle,  
 G le point médian de ABC,  
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,  
 S le premier point de Hesse de ABC  
 et F le premier point de Fermat de ABC.

**Donné :** (FS) est parallèle à (OG).

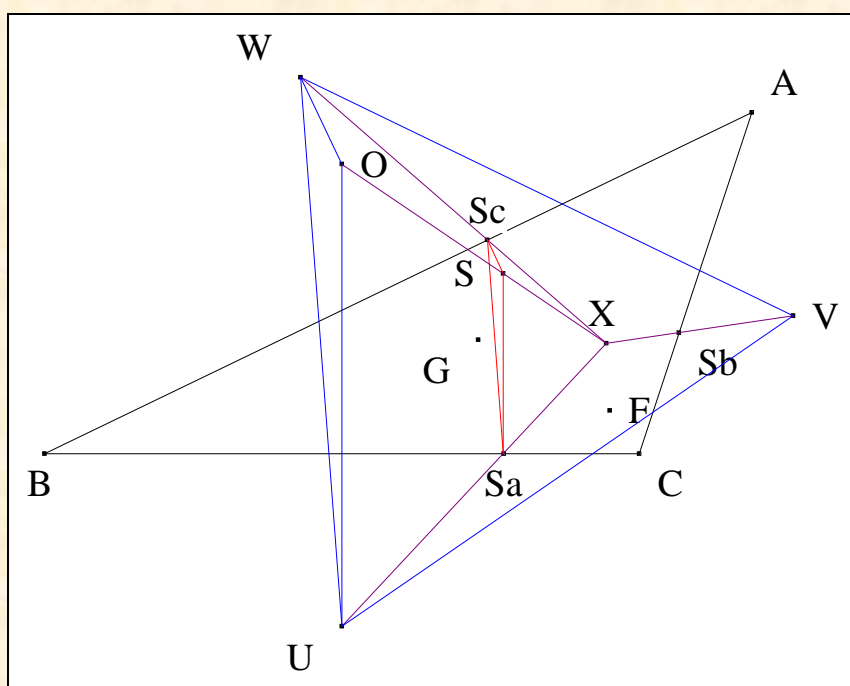
#### VISUALISATION

**Solie :** (OG) est "la droite d'Euler de ABC".

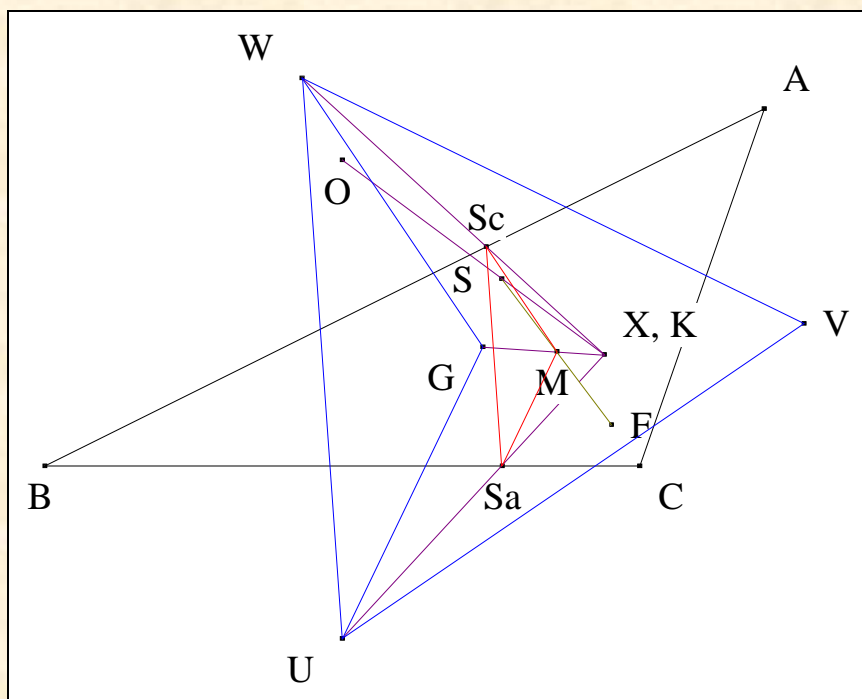
<sup>25</sup> Boutin A., *Journal de Mathématiques* de G. de Longchamps (1889).



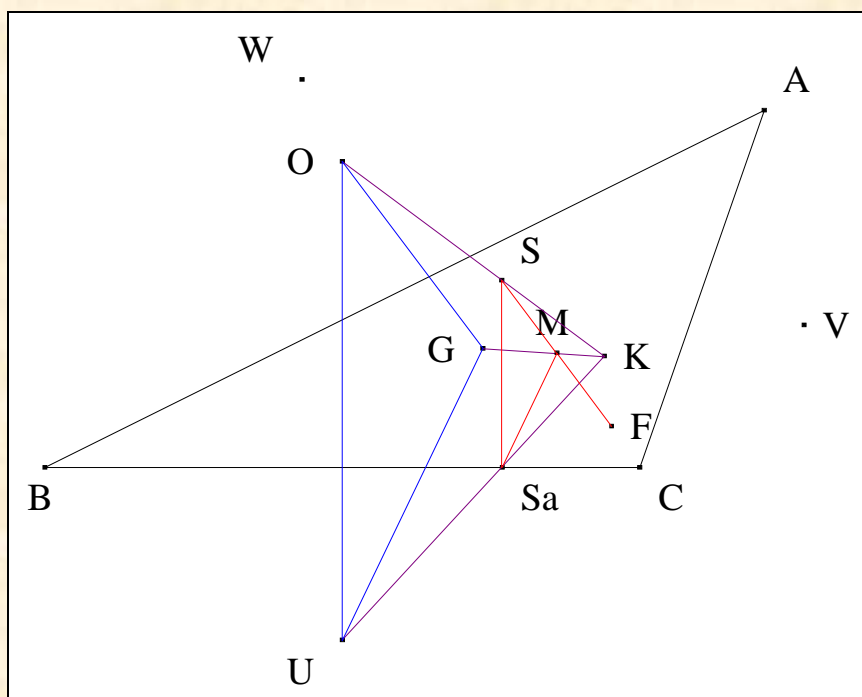
- Notons  $SaSbSc$  le triangle S-pédal de ABC.
- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 6), appliqué à UVW et  $SaSbSc$ ,  $(USa)$ ,  $(VSb)$  et  $(WSc)$  sont concourantes.
- Notons  $X$  ce point de concours.



- **Scolie :** les triangles OWU et SScSa sont homothétiques.
- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 6), appliqué à OWU et SScSa,  $(OS)$ ,  $(WSc)$  et  $(USa)$  sont concourantes en X.

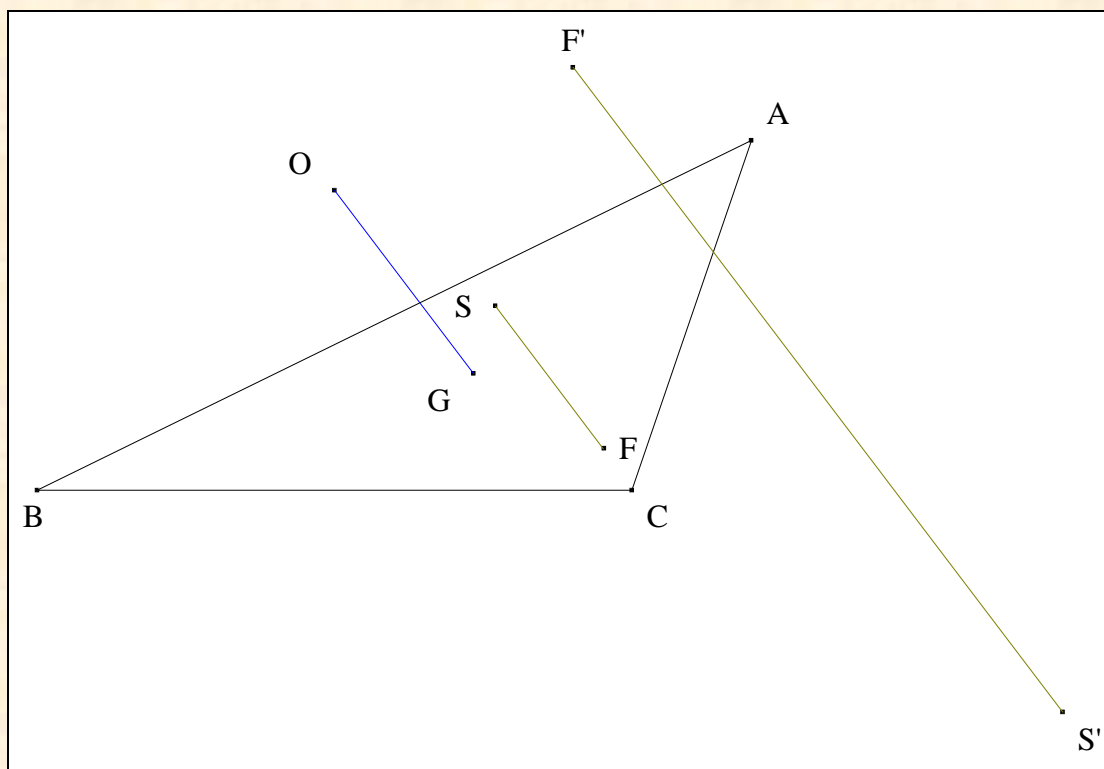


- Notons  $M$  le milieu de  $[SF]$   
et  $K$  le point de Lemoine de  $ABC$ .
- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 6),  
appliqué à  $UGW$  et  $SaMSc$ ,  $(USa)$ ,  $(GM)$  et  $(WSc)$  sont concourantes en  $X$ .
- $(GM)$  et  $(OS)$  étant concourantes en  $K$ ,  $X$  et  $K$  sont confondus.



- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 6),  
appliqué aux triangles perspectifs  $OGU$  et  $SMSa$ ,  $(OG)$  est parallèle à  $(SM)$ .
- **Conclusion :**  $(FS)$  est parallèle à  $(OG)$ .

- Scolies :**
- (1)  $K$  est le centre d'homothétie de  $UVW$  et  $SaSbSc$ .
  - (2) Mutatis mutandis, nous montrerions que  $K$  est le centre d'homothétie de  $U'V'W'$  et  $S'aS'bS'c$ .
  - (3) Une autre parallèle à la droite d'Euler

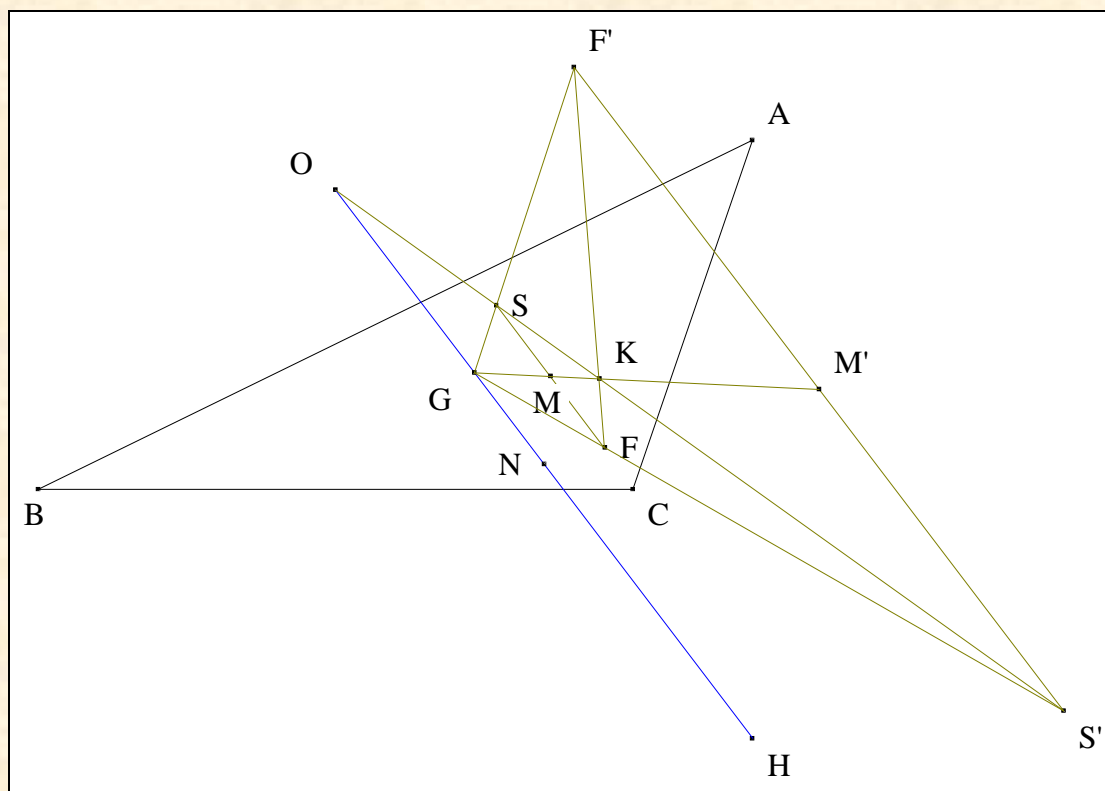


- Notons  $S'$  le second point de Hesse de  $ABC$   
et  $F'$  le second point de Fermat de  $ABC$ .

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que  $(F'S')$  est parallèle à  $(OG)$ .

#### 4. La figure "inachevée" des Morley





- Reprenons tous les résultats obtenus sur la figure ci-dessus.
- Notons  $M'$  le milieu de  $[S'F]$ .
- Le quadrilatère  $SFS'F'$  étant un trapèze,  $G$ ,  $M$  et  $M'$  sont alignés.

**Commentaire :** la photo ci-dessus est "la figure inachevée de Frank Morley et de son fils Frank V"<sup>26</sup>.

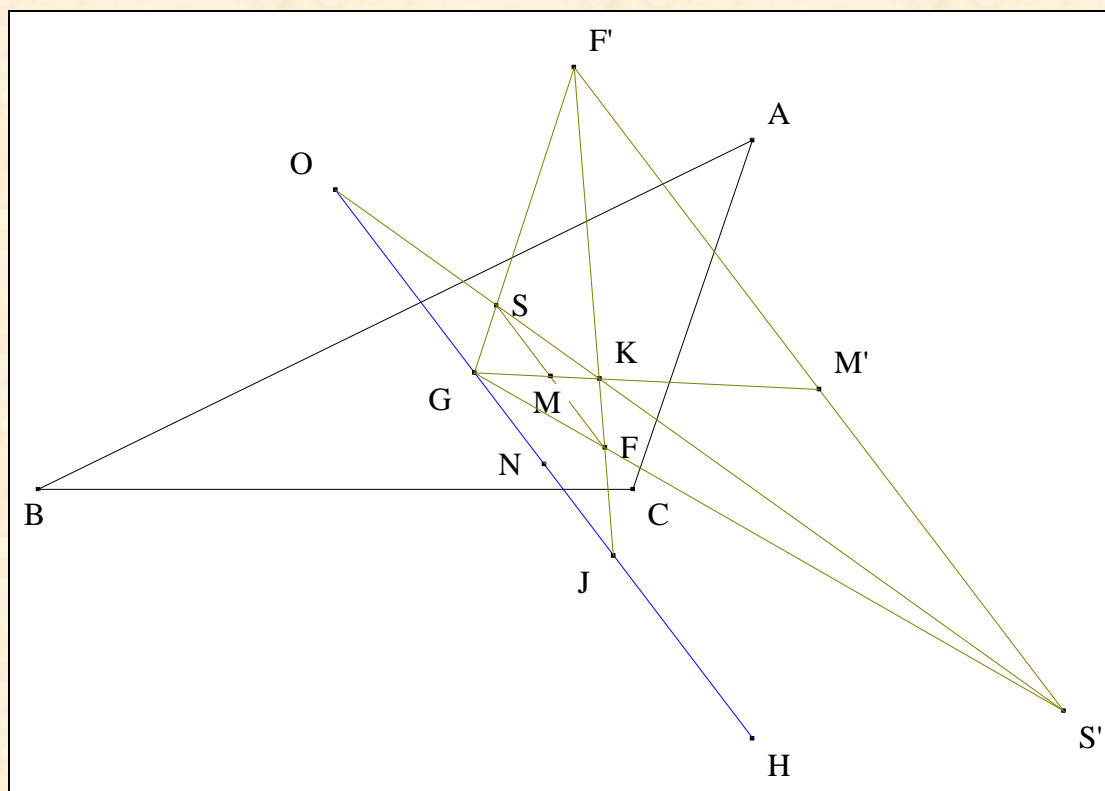
**Note historique :** les preuves données par les Morley sont analytiques.

## VII. LE POINT "CRUCIAL" DE CUNDY

### VISION

**Figure**

<sup>26</sup> Morley F. and F. V., Inversive geometry, G. Bell, London (1933) 209.

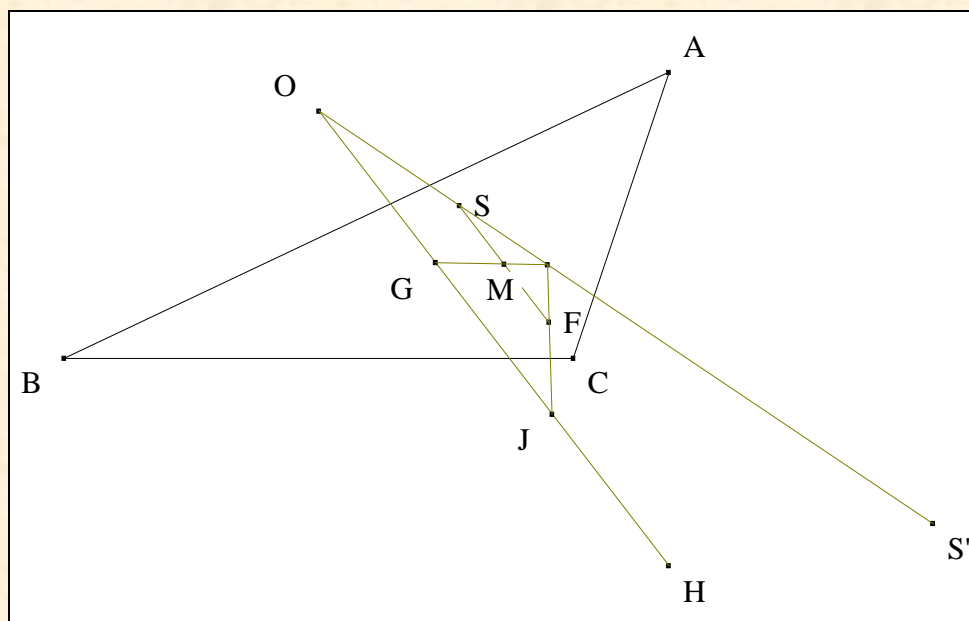


**Traits :** ABC un triangle,  
 G, H le point médian, l'orthocentre de ABC,  
 N le centre du cercle d'Euler de ABC,  
 K le point de Lemoine de ABC,  
 F, F' les premier, second points de Fermat de ABC,  
 S, S' les premier, second points de Hesse de ABC,  
 M, M' les milieux de [FS], [F'S']  
 et J le point d'intersection de (FF') et (GH).

**Donné :** J est le milieu de [GH].<sup>27</sup>

### VISUALISATION

<sup>27</sup> Cundy H. M., A journey round the triangle, Lester's circle, Kiepert's hyperbola and a configuration from Morley, *Mathematical Gazette* 87, n° 509 (July 2003) 217-229.



- Notons et J le symétrique de O par rapport à G  
K le point de Lemoine de ABC.
- **Scolies :** (1) le quadrilatère SFJO est un trapèze  
(2) M et G sont les milieux de ses bases.
- **Conclusion :** (OS), (GM) et (JF) sont concourantes en K

**Scolie :** J est "le point de Cundy de ABC".

**Commentaire :** la figure "inachevée" de Frank Morley et de son Frank V. enrichie du point de Cundy conduit à "la fascinante figure de Cundy".

Henry Martyn Cundy dit que la contemplation de cette figure peut conduire à une preuve simple du cercle de June A. Lester<sup>28</sup>. L'auteur ayant trouvé une nouvelle preuve de ce cercle à partir du point de Cundy, l'a qualifié de "crucial".

Ajoutons que Lawrence S. Evans<sup>29</sup> a encore complété cette figure en considérant les deux points de Napoléon.

<sup>28</sup> Lester J. A., problème 19, Triangle III : Complex triangle functions, *Aequationes Mathematicae* 53 (1997).  
<sup>29</sup> Evans L. S., A rapid Construction of Some Triangle Centers, *Forum Geometricorum* Vol. 2 (2002) 67-70.

## VIII. UNE COURTE BIOGRAPHIE

DE

**HENRY MARTYN CUNDY** <sup>30</sup>



Henry Martyn Cundy est né à Derby le 23 décembre 1913.

Fils d'un prêtre évangélique de l'Église d'Angleterre qui n'aimait rester longtemps dans la même paroisse, Henry Martyn connaît de nombreux déménagements comme enfant avant de rentrer au pensionnat de Monkton Combe School en 1927. Passionné par les Mathématiques, il rejoint le Trinity College de Cambridge en 1932, devient wrangler en 1934, obtient le prix Rayleigh en 1937 et passe son doctorat en 1938. L'année suivante, il se marie à une étudiante en mathématiques de Cambridge, Kathleen Hemmings, futur professeur de Mathématiques, et avec qui il aura trois fils, Ian qui deviendra évêque de Peterborough, David et Tim qui deviendront professeurs de Mathématiques.

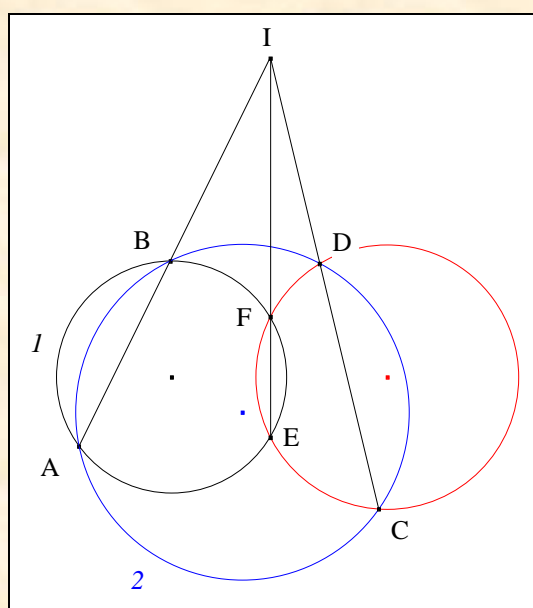
Après son doctorat, Cundy qui a la possibilité de rejoindre une université, préfère enseigner à Sherborne School où il y restera jusqu'en 1966. Prenant la direction du School Mathematics Project de 1966 à 1968, il professe ensuite à l'Université du Malawi de 1968 à 1975, et, enfin, se déplacera deux fois dans le cadre d'une évaluation financée par le British Council, au Swaziland et Lesotho, et dans les Caraïbes.

Rappelons que Cundy a écrit plus de 50 articles et notes dans *Mathematical Gazette*. Notons qu'un des ses papiers de 2003 sera reconnu comme étant "l'article de l'année". Il publie aussi des articles de recherche dans *Journal of Geometry* dont l'un apparaîtra d'une façon posthume.

Randonneur averti, chanteur enthousiaste, organiste à l'Église St Thomas de Kendal, chrétien actif et poète, cette remarquable personnalité se sentira meurtrie par le décès de son épouse en 1992. Il décède le 25 février 2005 à Kendal.

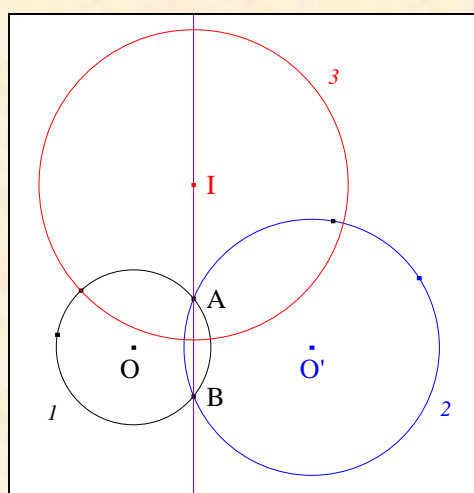
<sup>30</sup> Geoffrey Howson, journaliste au *The Independent* ; article du 08/03/2005.

## IX. ANNEXE

1. Le théorème des trois cordes<sup>31</sup>

**Traits :**  $1, 2$  deux cercles sécants,  
 $A, B$  les points d'intersection de  $1$  et  $2$ ,  
 $C, D$  deux points de  $2$ ,  
 $E, F$  deux points de  $1$   
 et  $I$  le point d'intersection des droites  $(AB)$  et  $(CD)$ .

**Donné :** les points  $C, D, E$  et  $F$  sont cocycliques  
*si, et seulement si,*  
 les droites  $(AB), (CD)$  et  $(EF)$  sont concourantes en  $I$ .

2. Axe radical de deux cercles sécants<sup>32</sup>

**Traits :**  $1, 2$  deux cercles sécants,

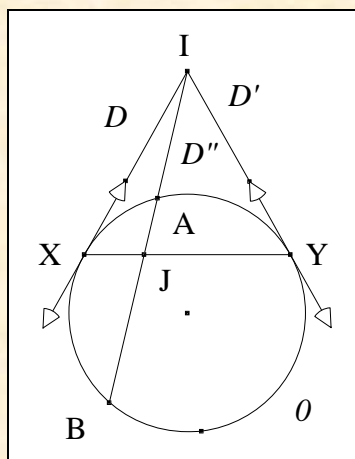
<sup>31</sup> Monge, d'après Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, I (1822) 40.

<sup>32</sup> Gaultier (de Tours) Louis, Les contacts des cercles, *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier 16 (1813) 124-214.

$O, O'$  les centres de  $1, 2$ ,  
 $A, B$  les points d'intersection de  $1$  et  $2$ ,  
 $3$  un cercle orthogonal à  $2$   
 et  $I$  le centre de  $3$ .

**Donné :**  $I$  est sur la droite  $(AB)$  si, et seulement si,  $3$  est orthogonal à  $2$ .

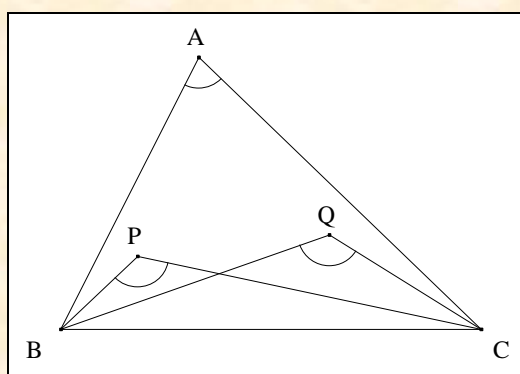
### 3. Une quaterne harmonique<sup>33</sup>



**Traits :**  $O$  un cercle,  
 $I$  un point extérieur à  $O$ ,  
 $D, D'$  deux droites passant par  $I$  et tangentes à  $O$ ,  
 $X, Y$  les points de contact de  $D, D'$  avec  $O$ ,  
 $D''$  une droite passant par  $I$  et sécante à  $O$ , en  
 et  $A, B$  les points d'intersection de  $D''$  avec  $O$   
 $J$  le point d'intersection de  $D''$  avec la corde  $[XY]$ .

**Donné :** la quaterne  $(I, J, A, B)$  est harmonique.

### 4. Une relation angulaire

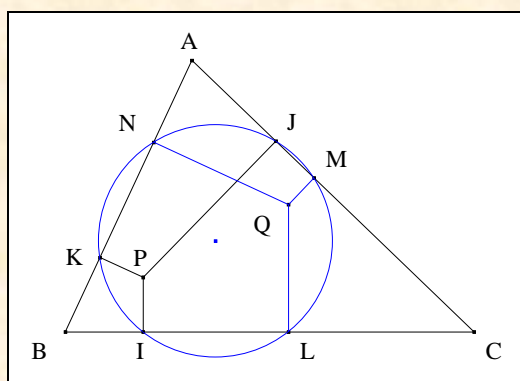


**Traits :**  $ABC$  un triangle,  
 $P$  un point non situé sur le cercle circonscrit de  $ABC$   
 et  $Q$  l'isogonal de  $P$  relativement à  $ABC$ .

**Donné :**  $\angle BPC + \angle BQC = \angle BAC$ .

<sup>33</sup> Apollonius, *Collections*, Livre III, proposition 37.

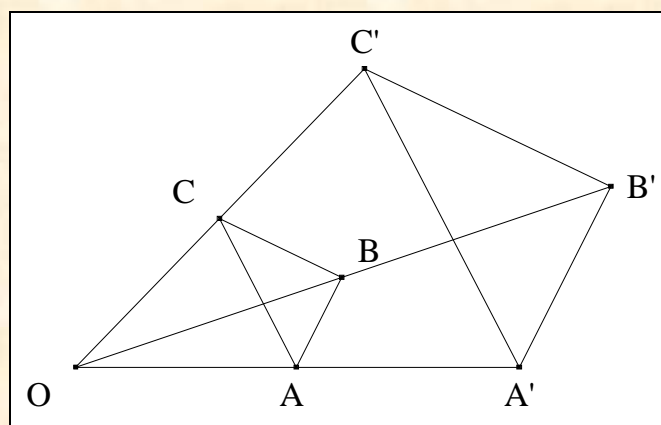
### 5. Le cercle de Mathieu



**Traits :** ABC un triangle,  
 P un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC,  
 IJK le triangle P-pédal de ABC,  
 Q l'isogonal de P relativement à ABC  
 et LMN le triangle Q-pédal de ABC.

**Donné :** I, J, K, L, M et N sont cocycliques.

### 6. Le théorème faible de Desargues



**Traits :** ABC un triangle,  
 et A'B'C' un triangle tel que

- (1) (AA') et (BB') soient concourantes en O
- (2) (AB) soit parallèle à (A'B')
- (3) (BC) soit parallèle à (B'C')

**Donné :** (CC') passe par O si, et seulement si, (AC) est parallèle à (A'C').

## X. NOTATION DES POINT D'UNE FIGURE

Un point (du latin *punctum*, piqûre, du verbe *pungere*, poindre) est représenté par une croix ou un point, et est nommé par les premières lettres majuscules de l'alphabet latin s'il est fixe, et par les dernières s'il est variable.

Cette façon de noter était déjà très en vogue chez les anciens grecs comme Hippocrate de Chios (440 a.J.C.).

Un point est défini dans la définition 1 du Livre I d'Euclide d'Alexandrie de la façon suivante :

*Un point est ce qui n'a aucune partie.*

Dans une note des *Éléments* datant de 1926 de T. L. Heath, celui-ci décrit comment le terme *sêmeion* utilisé par Euclide et qui partout signifie une marque de ponctuation, remplace le terme *stigmê* qui signifie une piqûre. Les latins dans leurs traductions utiliseront le mot *punctum*.