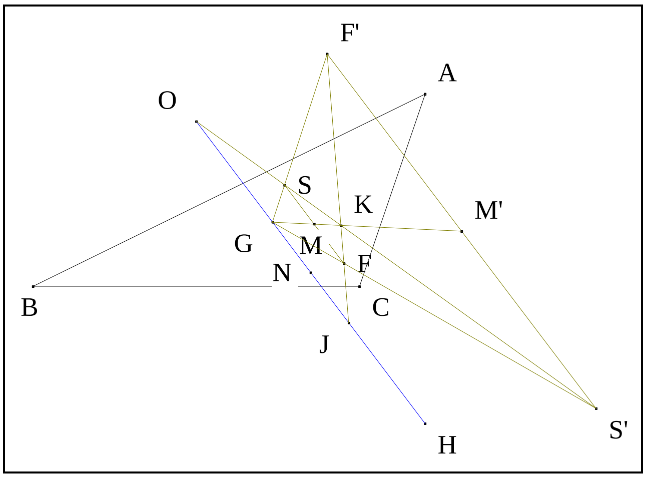
LA FASCINANTE FIGURE DE CUNDY

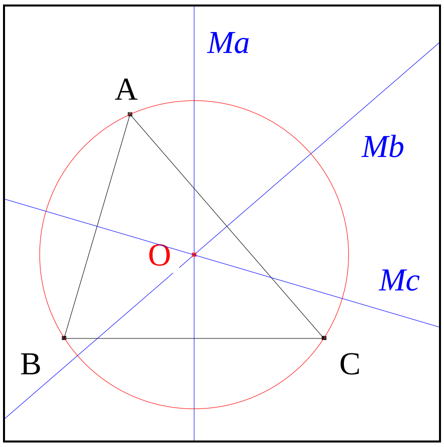
Jean-Louis AYME



Résumé. Nous présentons la figure d'Henry Martyn Cundy, enrichie d'une présentation historique des différents centres qui la compose, ainsi que d'une très courte note biographique.
En tombant sous le charme de cette fascinante figure découverte partiellement par Frank Morley et son fils Frank V., elle pourrait après avoir été complétée, comme l'affirme Cundy, dévoiler au géomètre qui la contemple avec un regard amical, une preuve simple du cercle de June A. Lester.
Les théorèmes cités en annexe peuvent être tous démontrés synthétiquement.

I. LA DROITE D'EULER

1. Euclide d'Alexandrie (vers 325 - vers 265 av J.-C.)

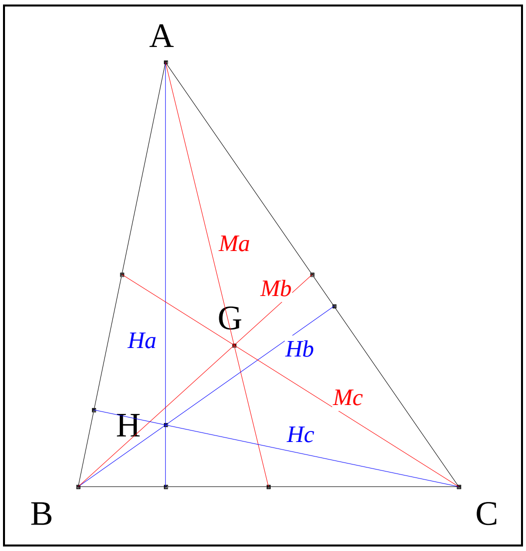


Traits : ABC un triangle
et *M*a, *M*b, *M*c les A, B, C-médiatrices de ABC.

Donnés : *M*a, *M*b et *M*c sont concourantes[1].

Scolie : ce point de concours, noté O et répertorié sous X_3 chez ETC,
est "le centre du cercle circonscrit à ABC".

2. Archimède de Syracuse (vers 287 av. J.C.-212 av. J.C.)



Traits : ABC un triangle,
*H*a, *H*b, *H*c les A, B, C-hauteurs de ABC
et *M*a, *M*b, *M*c les A, B, C-médianes de ABC.

Donnés : **(1)** *H*a, *H*b et *H*c sont concourantes
(2) *M*a, *M*b et *M*c sont concourantes.

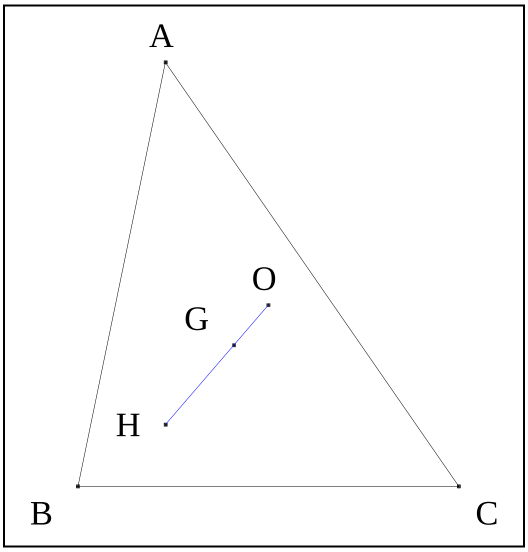
Scolies : **(1)** le point de concours de *H*a, *H*b et *H*c, noté H et répertorié sous X_4 chez ETC,
est "l'orthocentre de ABC"[2].

---

[1] Euclide, *Éléments* Livre IV, proposition 5.
[2] Archimède, *Scolies*, lemme 5.
Heath T. L., *Works of Archimedes*, Cambridge (1897) Lemmas 5.

(2) Le point de concours de *M*a, *M*b et *M*c, noté G et répertorié sous X_2 chez ETC, est "le point médian de ABC"[3].

3. **Leonhard Euler** (1707 - 1783)

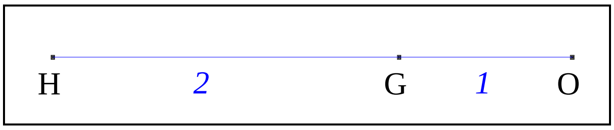


Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
G le point médian de ABC
et H l'orthocentre de ABC.

Donné : H, G et O sont alignés[4].

Scolies : **(1)** suite à l'initiative de Joseph Neuberg, (HGO) est "la droite d'Euler de ABC".

(2) Disposition[5]



Commentaire : Leonhard Euler a été le premier géomètre à avoir l'intuition de regrouper ces trois points remarquables du triangle sur une droite ; cette démarche allait donner à la future "géométrie du triangle", le premier moule d'une synthèse d'un ordre plus élevé dont la nature allait être expliquée par ses successeurs.

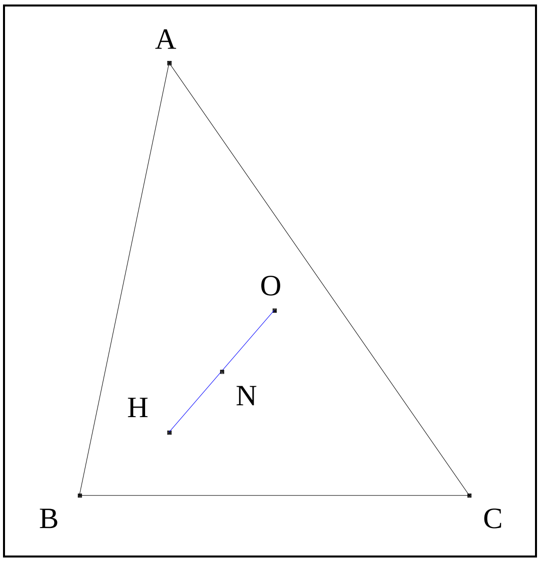
4. **Karl Feuerbach** (1800 -1834)

---

3 Archimède, proposition 13, Sobre el equilibrio de los platos, Livre I (vers 225 a. J.-C.).

4 Euler L., Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum, *Novi commentarii Academiae Petropolitanae* 11 (1765) 114.
Euler L., *Opera Omnia* XXVI, éd. Andr. Speiser, Zürich (1953) 139-157 et surtout 149 ; ce traité fut présenté à l'Académie de St-Petersbourg le 21 décembre 1763 en style ancien.

5 Euler L., *Solutio facilis* ,(1765).

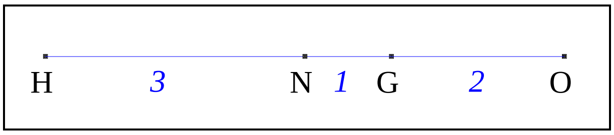


Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
et N le centre du cercle d'Euler-Bevan de ABC.

Donné : N est le milieu de [HO][6].

Scolies : **(1)** ce point est répertorié sous X_9 chez ETC.

(2) Disposition



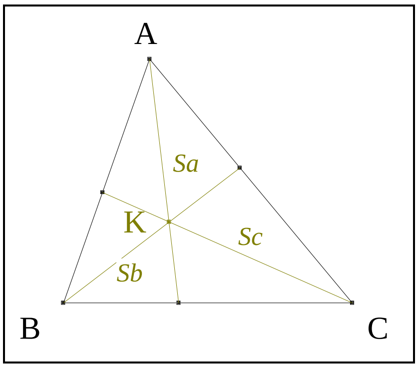
(3) La quaterne (H, G, N, O) est harmonique.

II. LA DROITE DE BROCARD

1. Émile Lemoine (1840-1912)

---

6 Feuerbach K.., *Eigenschaften einiger merkwurdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren* (1822) 38.



Traits : ABC un triangle
et *S*a, *S*b, *S*c les A, B, C-symédianes de ABC.

Donné : *S*a, *S*b et *S*c sont concourantes[7].

Scolies : **(1)** le point de concours de *S*a, *S*b et *S*c, noté K et répertorié sous X_6 chez ETC.
Suite à l'initiative de Joseph Neuberg en 1884, K est "le point de Lemoine de ABC".

(2) Par définition, K est l'isogonal de G relativement à ABC.

(3) K est à l'intérieur de ABC.

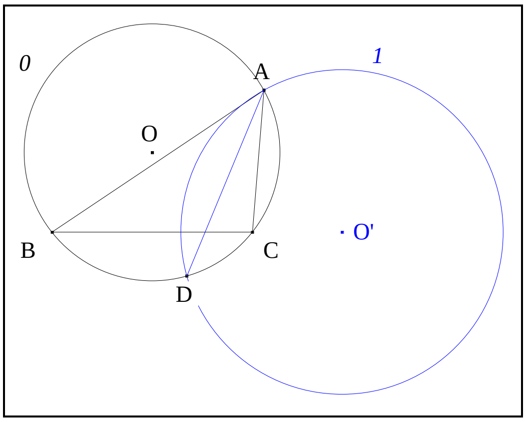
Note historique : c'est au congrès de Lyon en 1873 qu'Émile Lemoine, dans un papier intitulé "Sur un point remarquable du triangle", a présenté ce résultat sans démonstration.
Nathan Altshiller Court dans son livre[8] dit que Lemoine "may be said to have laid the foudation... of the modern geometry of the triangle as a whole". Quant à Ross Honsberger, il ajoute que le point symédian peut être considéré comme "a crown jewel of modern geometry"[9].
D'après l'historien anglais John Sturgeon Mackay[10], le point K s'est dégagé progressivement à partir de ses nombreuses propriétés.

2. John Casey (1820-1891)

VISION

Figure :

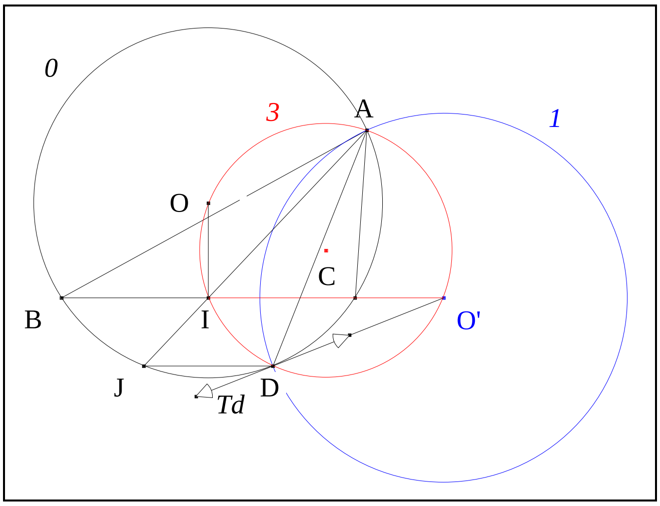
[7] Lemoine E., Sur un point remarquable du triangle, Congrès de Lyon (1873).
[8] Altshiller-Court N., *College Geometry*, Barnes & Noble, Richmond (1923) 304.
[9] Honsberger R., *Episodes of 19th and 20th Century Euclidean Geometry*, Math. Assoc. America (1995) 53.
[10] Mackay J. S., Early History of the Symmedian Point, *Proceedings of Edinburgh Math. Society* XI (1892-93) 92.



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit de ABC,
O le centre de *0*,
1 le A-cercle d'Apollonius de ABC,
O' le centre de *1*
et D le second point d'intersection de *0* et *1*.

Donné : (AD) est la A-symédiane de ABC[11].

VISUALISATION



- Notons I le milieu de [BC],
  J le second point d'intersection de (AI) avec *0*
  et Td la tangente à *0* en D.

- *0* et *1* étant orthogonaux, Td passe par O'.

- Notons *3* le cercle de diamètre [OO'] ; il passe par A, D et I.

- Les cercles *3* et *0*, les points de base A et D, les moniennes (IAJ) et (O'DD), conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (IO') // (JD) ;

- **Conclusion :** (AD) est la A-symédiane de ABC.

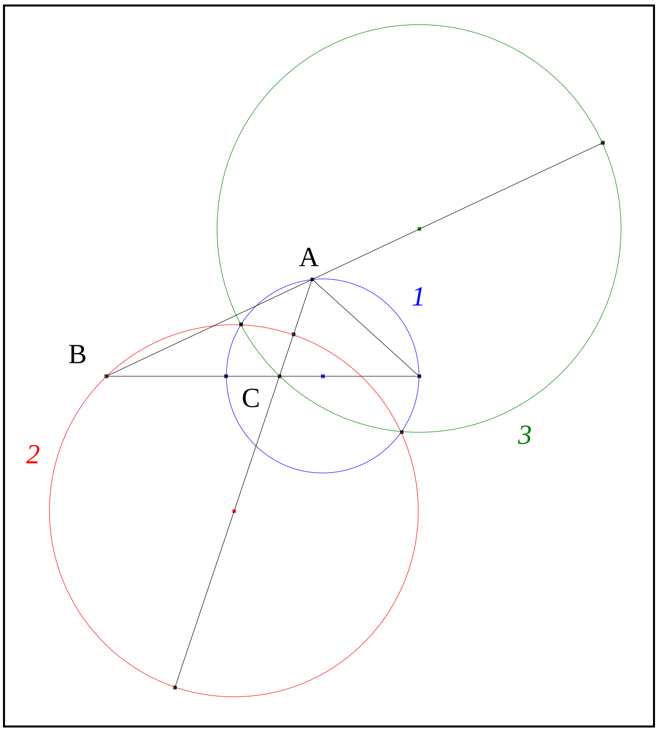
---

[11] Casey J., *Treatise on the Analytic Geometry of the Point, Line and Conic Sections*, Dublin, (1885) 146.

3. Vecten (vers 1819)

VISION

Figure :

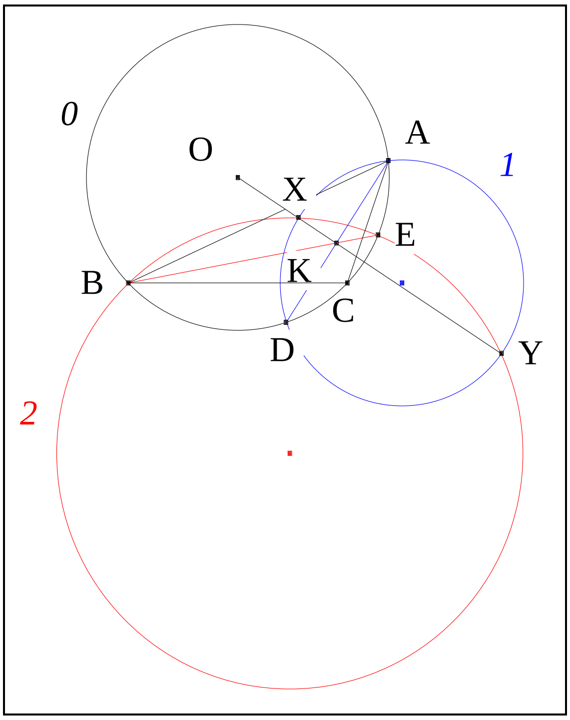


Traits : ABC un triangle,
et *1*, *2*, *3* les A, B, C-cercles d'Apollonius de ABC.

Donné : *1*, *2* et *3* ont une corde commune[12].

VISUALISATION

[12] Vecten, *Annales* de Gergonne X (1819-20) 202-204



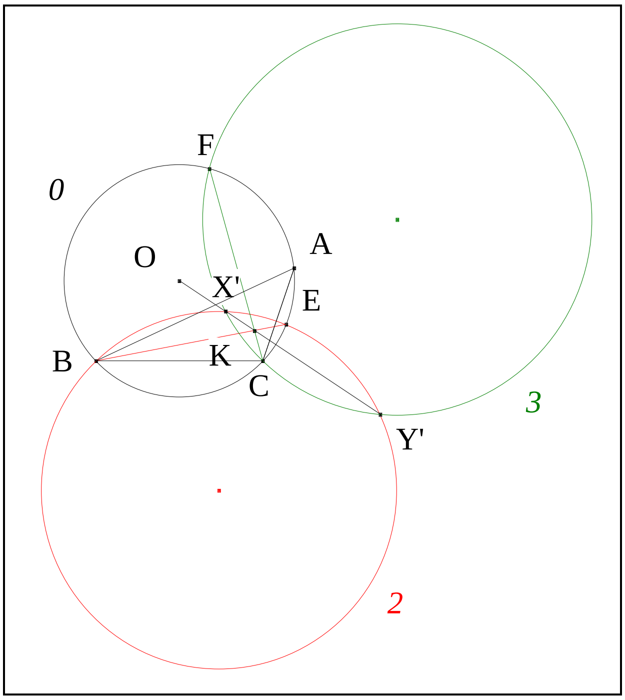
- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  O le centre de *0*,
  X, Y les points d'intersection de *1* et *2*,
  D, E les seconds points d'intersection de *0* resp. avec *1*, *2*
  et K le point de Lemoine de ABC.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 1) appliqué à *0*, *1*, *2*,
  [AD], [BE] et [XY] sont concourantes.

- D'après II.1. Lemoine et II.2. Casey, [AD], [BE] et [XY] concourent en K.

- **Scolie :** *0* est orthogonal à *1* et *2*.

- D'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe 2),
  O est sur l'axe radical (XKY) de *1* et *2*.



- Notons X', Y' les points d'intersection de *2* et *3*,
  et F le second point d'intersection de *0* et *3*.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 1) appliqué à *0*, *2*, *3*,
  [BE], [CF] et [X'Y'] sont concourantes.

- D'après II.1. Lemoine et II.2. Casey, [BE], [CF] et [X'Y'] concourent en K.

- **Scolie :** *0* est orthogonal à *2* et *3*.

- D'après Gaultier "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe 2),
  O est sur l'axe radical (X'KY') de *2* et *3*.

- D'après l'axiome d'incidence Ia, X, Y, X' et Y' sont sur (OK) ;
  en conséquence, [XY] = [X'Y'].

- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* ont une corde commune.

Scolies :

(1) (OK) est "la droite de Brocard de ABC".

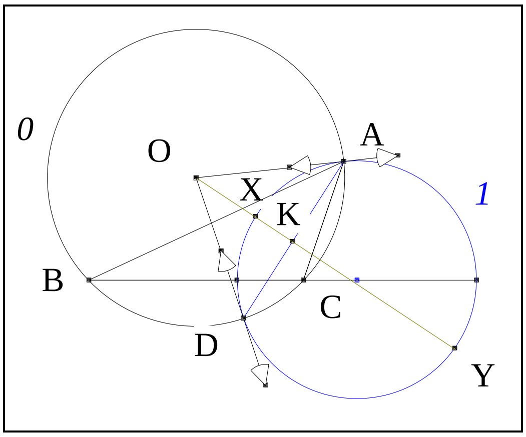
(2) X et Y sont "les points isodynamiques de ABC"[13]
ou encore
"les points de Hesse de ABC" ; ils sont répertoriés sous X_{15} et X_{16} chez ETC.

(3) Le premier point de Hesse, noté S+, est celui qui est à l'intérieur du plus grand angle de ABC, (X dans notre figure) ; le second point de Hesse est noté S-, (Y dans notre figure).

(4) Une quaterne harmonique

---

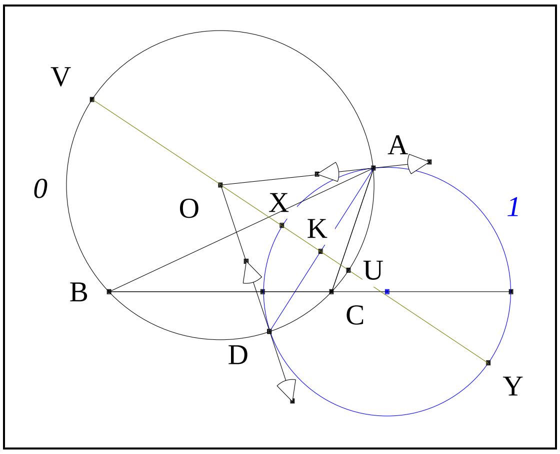
[13] Neuberg J., *Mathesis* (1885) 204, renvoi.



- *0* et *1* étant orthogonaux, (OA) et (OD) sont tangentes à *1* resp. en A, D.

- **Conclusion :** d'après Apollonius "Une quaterne harmonique" (Cf. Annexe 3), la quaterne (O, K, X, Y) est harmonique.

(5) Une relation métrique

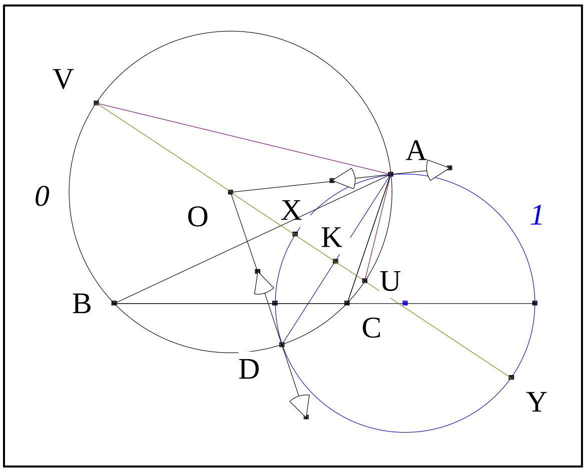


- Notons U, V les points d'intersection de (OK) avec *1*.

- *0* et *1* étant orthogonaux, la quaterne (U, V, X, Y) est harmonique.

- **Conclusion :** O étant le milieu de [UV], $OX.OY = OU^2$ $(= OA^2)$.

(6) Deux bissectrices



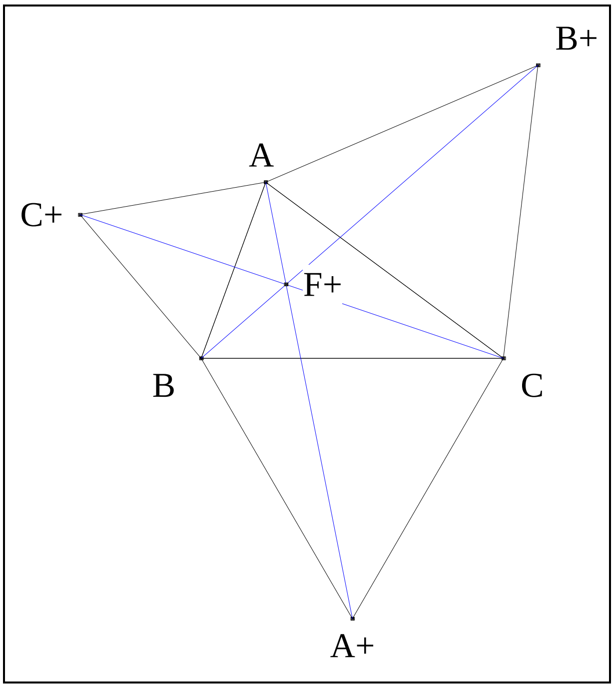
- *0* et *1* étant orthogonaux, la quaterne (U, V, X, Y) est harmonique.

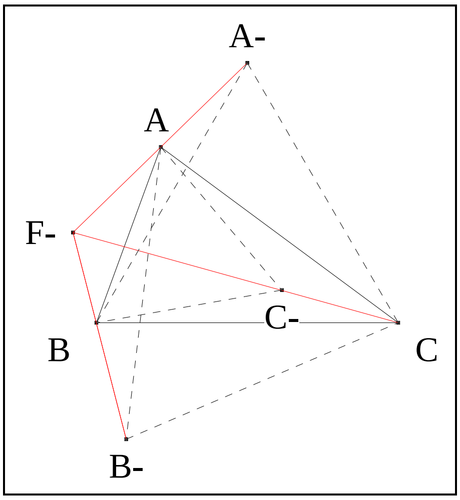
- **Conclusion :** le pinceau harmonique (A ; U, V, X, Y) ayant deux rayons perpendiculaires, (AU) et (AV) sont les deux bissectrices de <XAY.

Note historique : c'est F. Vallès, ingénieur des Ponts et Chaussée, qui a montré le premier que "la corde commune" passe par O.

III. LA DROITE DE NEUBERG

1. Pierre Simon de Fermat (1601-1665)





Traits :	ABC	un triangle,
	BA+C, CB+A, AC+B	trois triangles équilatéraux adjacents extérieurement à ABC
et	BA-C, CB-A, AC-B	trois triangles équilatéraux adjacents intérieurement à ABC.

Donnés : **(1)** (AA+), (BB+) et (CC+) sont concourantes
(2) (AA-), (BB-) et (CC-) sont concourantes.

Scolies : **(1)** le point de concours de (AA+), (BB+) et (CC+), noté F+, est "le premier point de Fermat de ABC" ; il est répertorié sous X_{13} chez ETC.

(2) Le point de concours de (AA-), (BB-) et (CC-), noté F-, est "le second point de Fermat de ABC" ; il est répertorié sous X_{14} chez ETC.

(3) Positions de F+ et F-
F+ est à l'intérieur du triangle si, aucun de ses angles n'excèdent 120° ;
chaque côté sous-tend un angle de 120°.
F+ est à l'extérieur du triangle si, l'un de ses angles excède 120° ;
par rapport au plus grand côté, il est du même côté que le sommet opposé à celui-ci ;
ce dernier sous-tend un angle de 120° et les deux autres, un angle de 60°.
F- est à l'extérieur du triangle si, aucun de ses angles ne vaut 60° et qu'un seul excède 120° ; par rapport au plus grand côté, il n'est pas du même côté que le sommet opposé à celui ci ; ce dernier sous-tend un angle de 120° et les deux autres, un angle de 60°.
F- est à l'extérieur du triangle si, deux de ses angles excèdent 60° ; par rapport au plus petit côté, il n'est pas du même côté que le sommet opposé à celui ci ; ce dernier sous-tend un angle de 120° et les deux autres, un angle de 60°.
F- n'existe pas si le triangle est équilatéral.

Note historique : au printemps 1644, le père Marin Mersenne[14] entreprenait un pèlerinage à Rome. Aux étapes de Bologne, puis de Florence, il montrait aux savants de l'époque, "le problème de Fermat" qu'il emmenait avec lui dans ses bagages :

étant donné un triangle, rechercher le point tel que la somme de ses distances aux trois sommets, est minimale.

C'est ainsi que Bonaventure Cavalieri[15], Evangelista Torricelli[16] et Vincenzo Viviani[17] en prendront connaissance. La solution de Toricelli publiée en 1659 par son élève

---

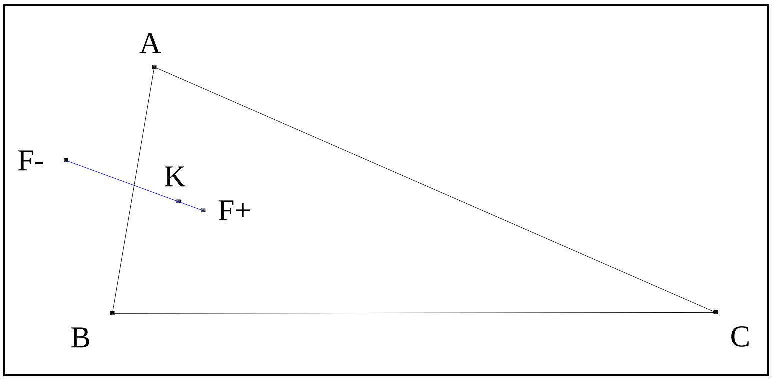
14 Mersenne M. (1588-1648).
15 Cavalieri B. (1598-1647).
16 Torricelli E. (1608-1647).
17 Viviani V. (1622-1703).

Viviani, avait pour point de départ la considération des trois triangles équilatéraux construits à l'extérieur sur les côtés du triangle et de leurs trois cercles circonscrits. Reprenant l'idée de Toricelli, mais en remplaçant "extérieur" par "intérieur", Henri Brocard[18] obtenait le "second point de Fermat".

2. Joseph Neuberg (1840-1926)

VISION

Figure :

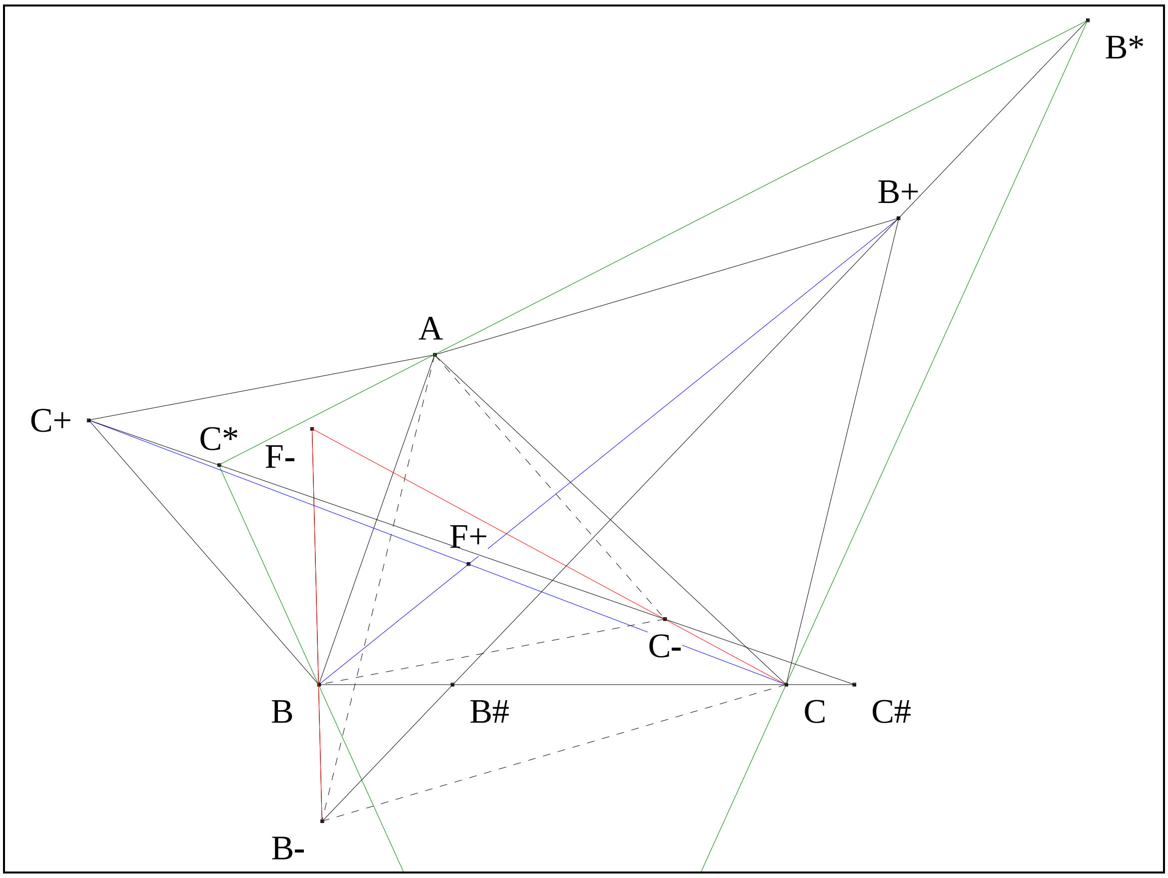


Traits : ABC un triangle,
K le point de Lemoine de ABC
et F+, F- les premier et second points de Fermat de ABC.

Donné : F+, F- et K sont alignés.

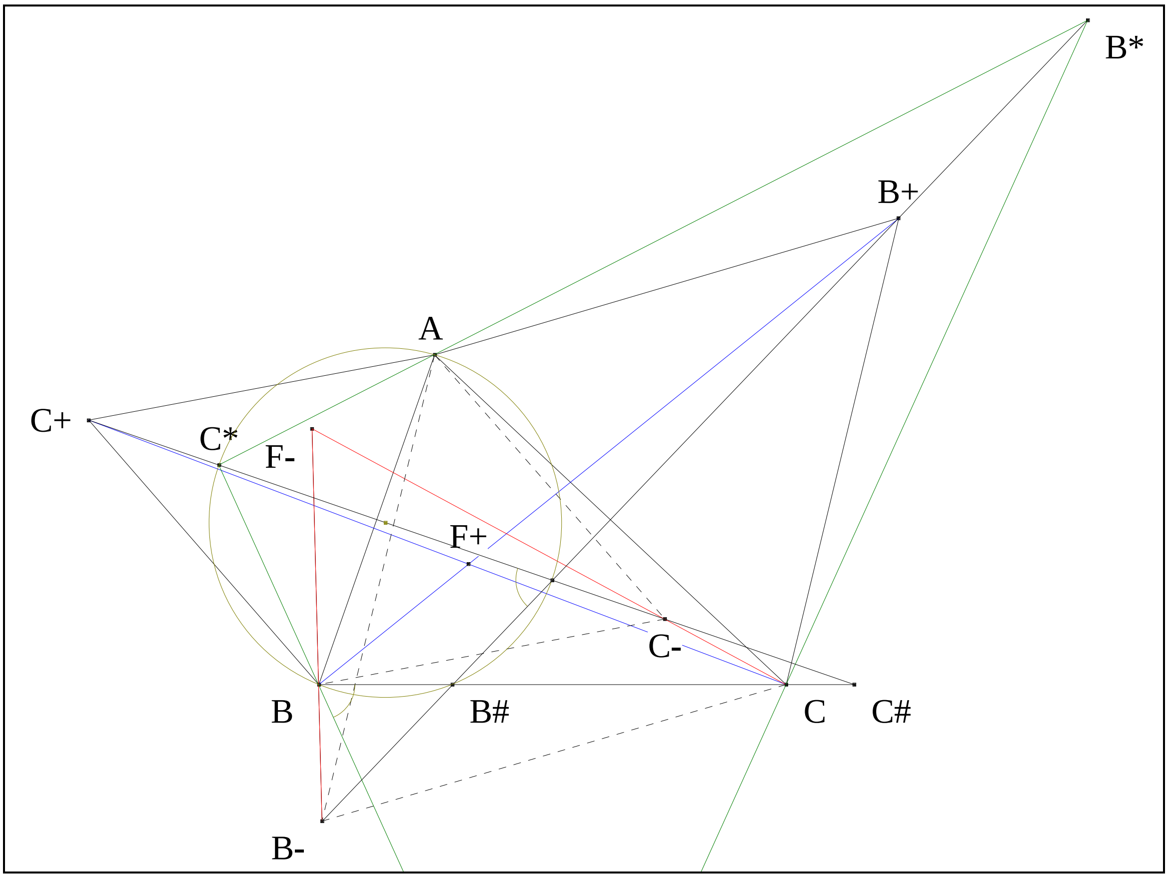
VISUALISATION[19]

18 Brocard H., *Nouvelle Correspondance* 3 (1876).
19 http://www.mathlinks.ro/forum/viewtopic.php?t=169837



- Notons BA+C, CB+A, AC+B les trois triangles équilatéraux adjacents extérieurement à ABC,
  BA-C, CB-A, AC-B les trois triangles équilatéraux adjacents intérieurement à ABC,
  A*B*C* le triangle tangentiel de ABC
  et B#, C# les points d'intersection resp. de (C+C-), (B+B-) avec (BC).

- Considérons les pinceaux anharmoniques *P*a = (A ; C+, C-, C*, C#)
  *P'*a = (A ; B-, B+, B#, B*).



- Une chasse angulaire montre que
  *P'*a est l'image de *P*a sous la rotation de centre A et d'angle <BAC (2. Π) ;
  en conséquence, (A ; C+, C-, C*, C#) = (A ; B-, B+, B#, B*).

- En permutant simultanément les deux premiers et les deux derniers points de *P'*a,
  le pinceau anharmonique *P'*a reste inchangé :
  (A ; B-, B+, B#, B*) = (A ; B+, B-, B*, B#) ;
  par changement d'origine de A en B, (A ; B+, B-, B*, B#) = (B ; B+, B-, B*, B#) ;
  par transitivité de la relation = entre pinceaux anharmoniques de même centre,
  (C ; C+, C-, C*, C#) = (B ; B+, B-, B*, B#).

- **Scolies :** **(1)** (CC+), (CC-), (CC*) et (CC#) sont les rayons du pinceau à gauche de l'égalité
  (2) (BB+), (BB-), (BB*) et (BB#) sont les rayons du pinceau à droite de l'égalité.

- Ces deux pinceaux ayant le rayon (BC) en commun, les points d'intersection des rayons homologues (CC+) et (BB+), (CC-) et (BB-), (CC*) et (BB*) sont alignés.

- **Conclusion :** F+, F- et K sont alignés.

Scolies : **(1)** (F+F-) est "la droite de Neuberg de ABC"

(2) K est entre F+ et F-.

Note historique : le nom de Neuberg est associé à ceux de Lemoine et de Brocard, comme le troisième cofondateur de la géométrie moderne[20].

---

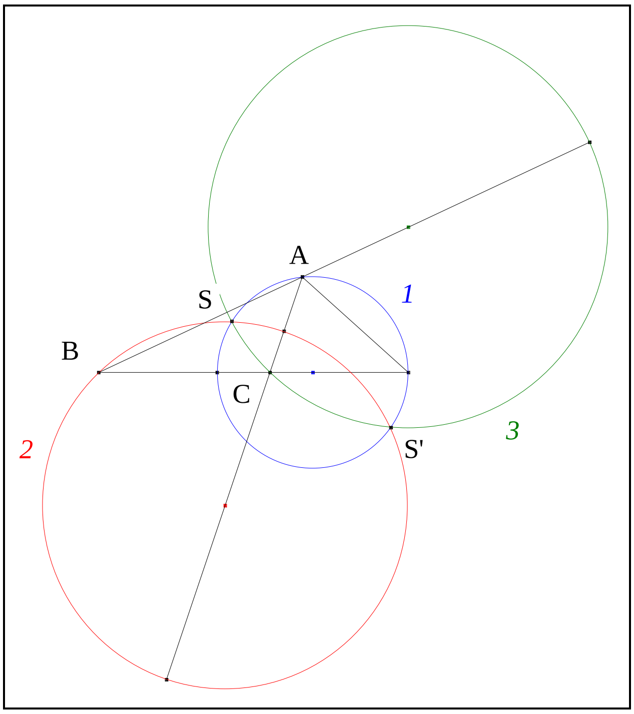
[20] Court-Altshiller N..

IV. DEUX COUPLES DE POINTS ISOGONAUX

1. Une relation métrique

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1, *2*, *3* les trois A, B, C-cercles d'Apollonius de ABC
et S, S' les premier, second points de Hesse de ABC.

Donné : SA.BC = SB.CA = SC.AB.

VISUALISATION

- Par définition des cercles d'Apollonius,

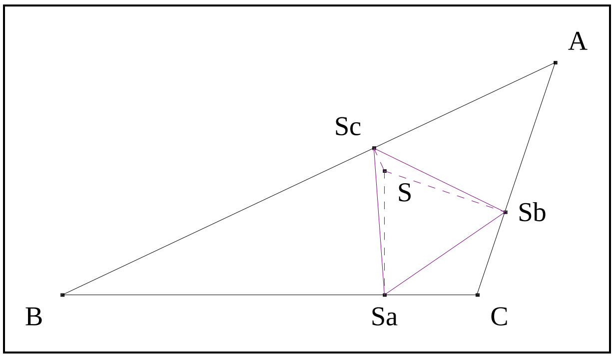
$$\frac{SB}{SC} = \frac{AB}{AC} \quad , \quad \frac{SC}{SA} = \frac{BC}{BA} \quad , \quad \frac{SA}{SB} = \frac{CA}{CB} .$$

- **Conclusion :** par "produit en croix", SA.BC = SB.CA = SC.AB.

2. Le triangle pédal du premier point de Hesse

VISION

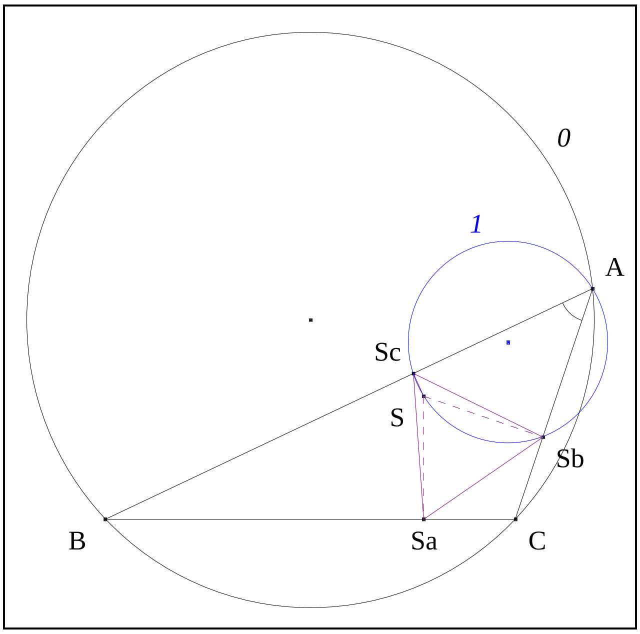
Figure :



Traits : ABC		un triangle,
	S	le premier point de Hesse de ABC
et	SaSbSc	le triangle S-pédal de ABC.

Donné : SaSbSc est équilatéral.

VISUALISATION



- Notons *0* le cercle circonscrit de ABC,
  R le rayon de *0*
  et *1* le cercle de diamètre [SA] ; il passe par Sb et Sc.

- Les mesures des angles sont définies à 2.Π près.

- D'après la loi des sinus appliqué **(1)** à *0*, SbSc = SA.sin <BAC
  (2) à *1*, BC = 2R.sin <BAC ;

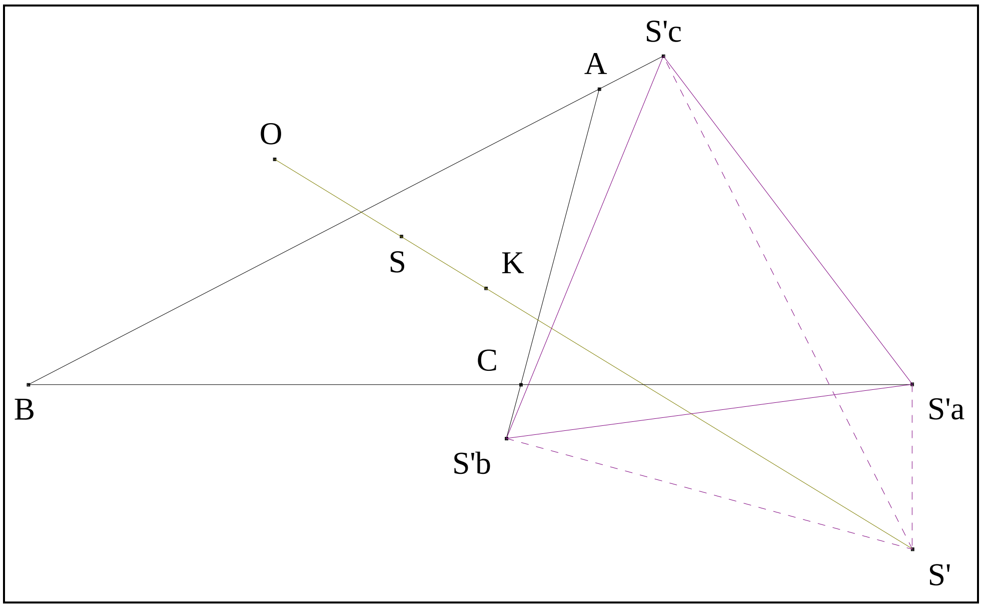
  par substitution, SbSc = SA.BC / 2R.

- D'après la loi des sinus appliqué **(1)** à *0*, ScSa = SB.sin <CBA
  (2) à *1*, CA = 2R.sin <CBA ;

par substitution, ScSa = SB.CA / 2R.

- D'après IV. 1. Une relation métrique, SA.BC = SB.CA.
- **Conclusion partielle :** SbSc = ScSa.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que ScSa = SaSb.
- **Conclusion :** SaSbSc ayant trois côtés égaux, est équilatéral.

Scolie : un autre triangle équilatéral



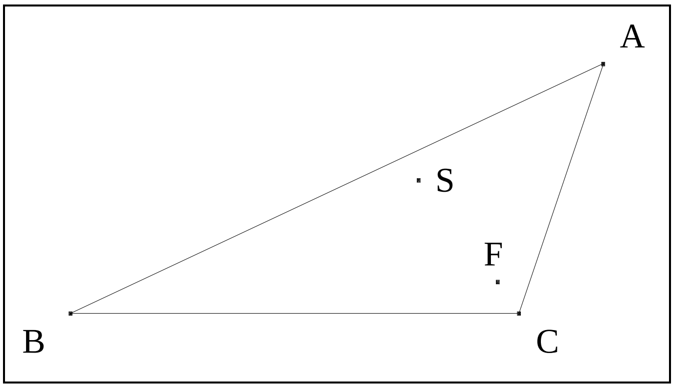
- Notons S' le second point de Hesse de ABC
  et S'aS'bS'c le triangle S'-pédal de ABC.
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que S'aS'bS'c est équilatéral.

Commentaire : l'aurait aurait préféré présenter une solution non métrique.

3. Les premiers points de Fermat et de Hesse

VISION

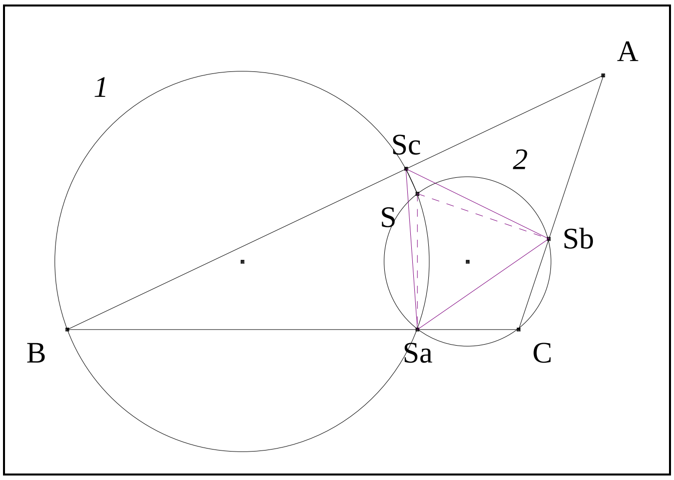
Figure :



Traits : ABC un triangle,
S le premier point de Hesse de ABC
et F le premier point de Fermat de ABC.

Donné : F est l'isogonal de S relativement à ABC.

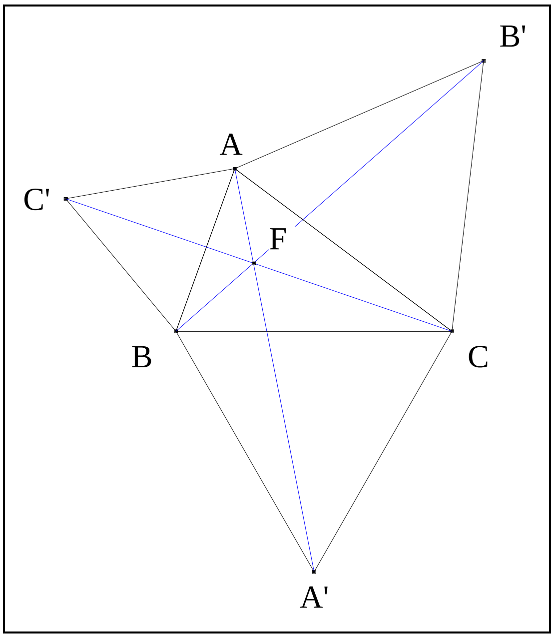
VISUALISATION



- Notons S* le conjugué isogonal de S relativement à ABC,
  SaSbSc le triangle S-pédal de ABC
  1 le cercle de diamètre [BS] ; il passe par Sa et Sc ;
  et *2* le cercle de diamètre [CS] ; il passe par Sa et Sc.

- Une chasse angulaire :
  d'après "Une relation angulaire" (Cf. Annexe 4) <BSC + <BS*C = <BAC ;
  d'après la relation de Chasles, <BSC = <SBA + <BAC + ACS ;
  d'après le théorème de l'angle inscrit, <BSC = <SSaSc + <BAC + <SbSaS ;
  par associativité, <BSC = <SbSaSc + <BAC ;
  en conséquence, <BS*C + <SbSaSc = 0.

- Le triangle SbSaSc étant équilatéral, <SbSaSc = $\frac{\Pi}{3}$ à 2.Π près.



- La figure ci-dessus rappelle la construction du premier point de Fermat.

- Nous avons : <BFC = <CA'B i.e. $\frac{\Pi}{3}$ à 2.Π près.

  en conséquence, <BFC = <BS*C.

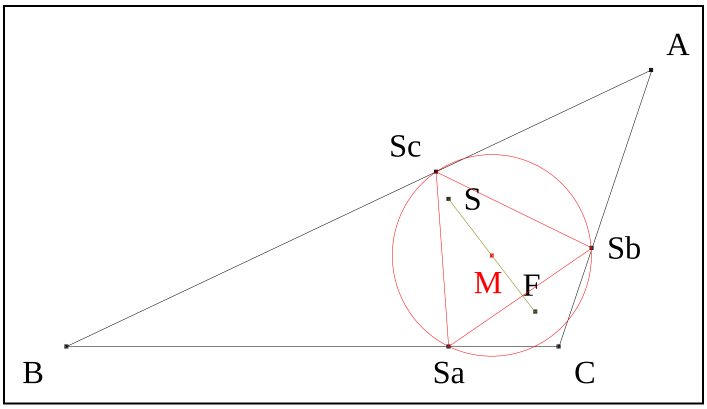
- **Conclusion partielle :** F est sur l'isogonale de (BS) relativement à ABC.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que F est sur l'isogonale de (CS) relativement à ABC
  F est sur l'isogonale de (AS) relativement à ABC ;

  en conséquence, F et S* sont confondus.

- **Conclusion :** F est l'isogonal de S relativement à ABC.

Scolies : **(1)** centre du cercle circonscrit à SaSbSc[21]



- Notons M le milieu de [SF].

- D'après "Le cercle de Mathieu" (Cf. Annexe 5), M est le centre du cercle circonscrit à SaSbSc.

(2) Les seconds points de Fermat et de Hesse

---

[21] Boutin A..

- Notons S' le second point de Hesse de ABC
  et F' le second point de Fermat de ABC.

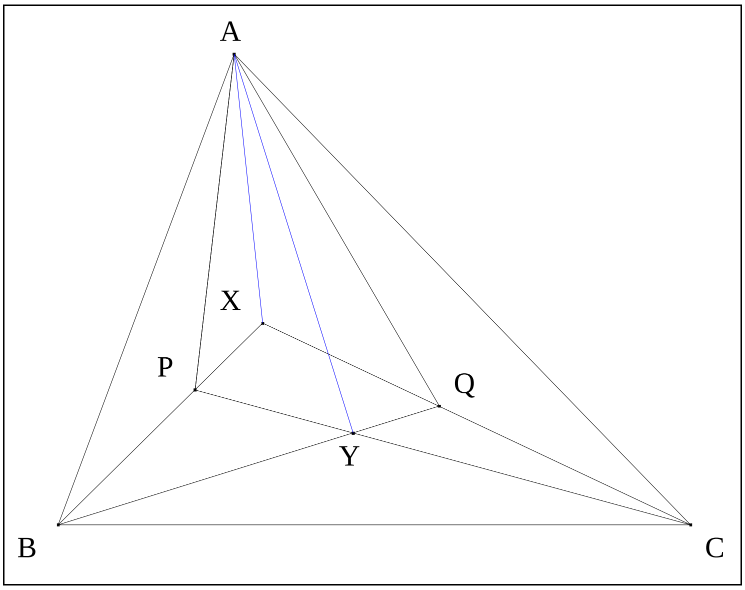
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que F' est l'isogonal de S' relativement à ABC.

V. INTERSECTION EN G

1. Un lemme

VISION

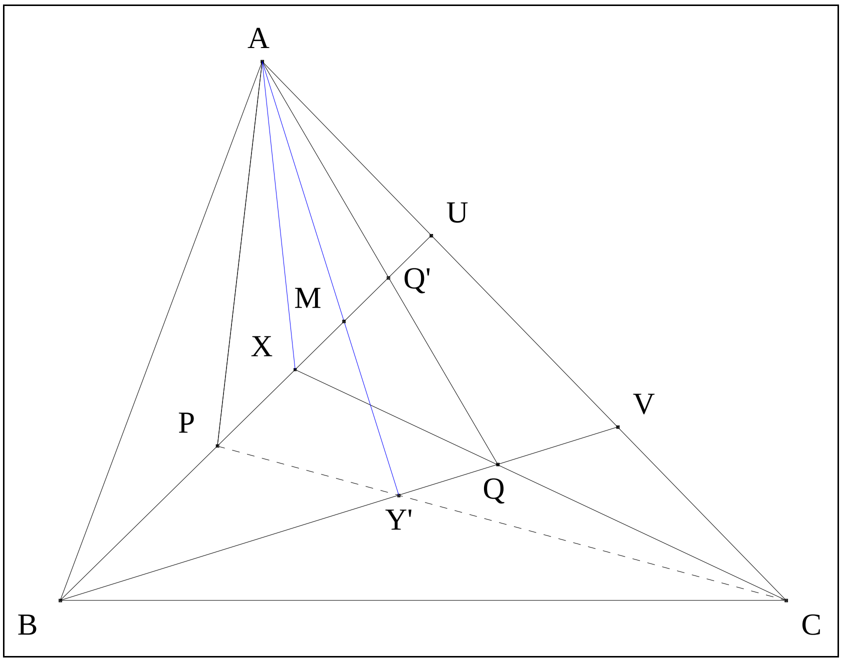
Figure :



Traits : ABC un triangle,
P, Q deux points tels que (AP) et (AQ) soient deux A-isogonales de ABC
et X, Y les points d'intersection de (BP) et (CQ), de (BQ) et (CP).

Donné : (AX) et (AY) sont deux A-isogonales de ABC.

VISUALISATION

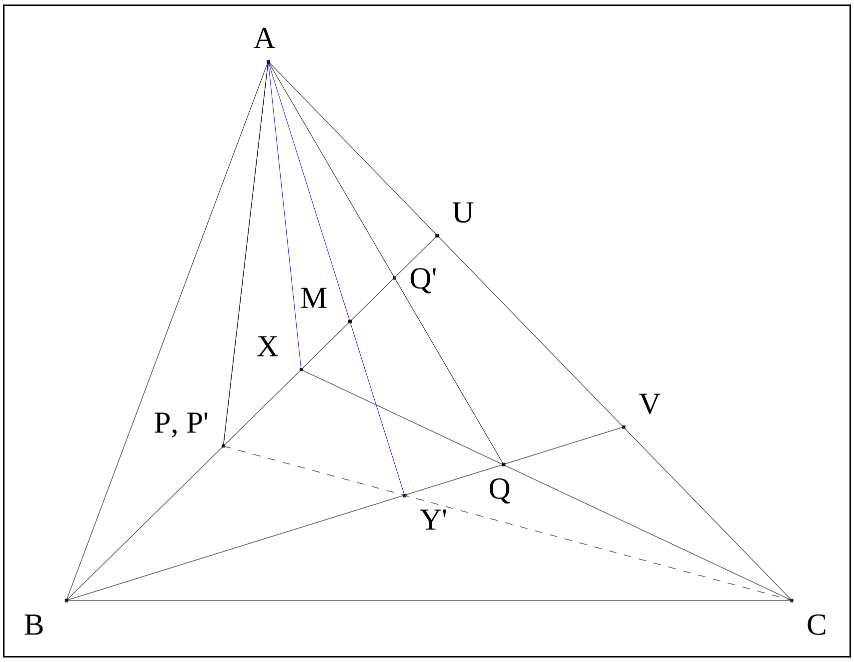


- Notons Q', U, V les points d'intersection de (AQ) et (BP), de (BP) et (AC), de (BQ) et (AC),
  M le point de (BP) tel que (AX) et (AM) soient deux A-isogonales de ABC
  et Y' le point d'intersection de (BQ) et (AM).

- Partons de la quaterne anharmonique (B, X, P, U) ;
  par symétrie par apport à la A-bissectrice de ABC, (B, X, P, U) = (U, M, Q', B) ;
  par projectivité de pôle A, (U, M, Q', B) = (V, Y', Q, B).

- Par définition de l'égalité de deux pinceaux, (C ; V, Y', Q, B) = (A ; V, Y', Q, B) ;
  ou encore, (A ; V, Y', Q, B) = (A ; U, M, Q', B) ;

  par symétrie par rapport à la A-bissectrice de ABC, (A ; U, M, Q', B) = (A ; B, X, P, U) ;
  par permutation simultanée des deux premiers et des deux derniers points
  (A ; B, X, P, U) = (A ; X, B, U, P) ;
  par permutation simultanée des deux premiers avec les deux derniers points
  (A ; X, B, U, P) = (A ; U, P, X, B) ;
  par transitivité de la relation =, (C ; V, Y', Q, B) = (A ; U, P, X, B).



- Notons P' le point d'intersection de (CY') et (AP).

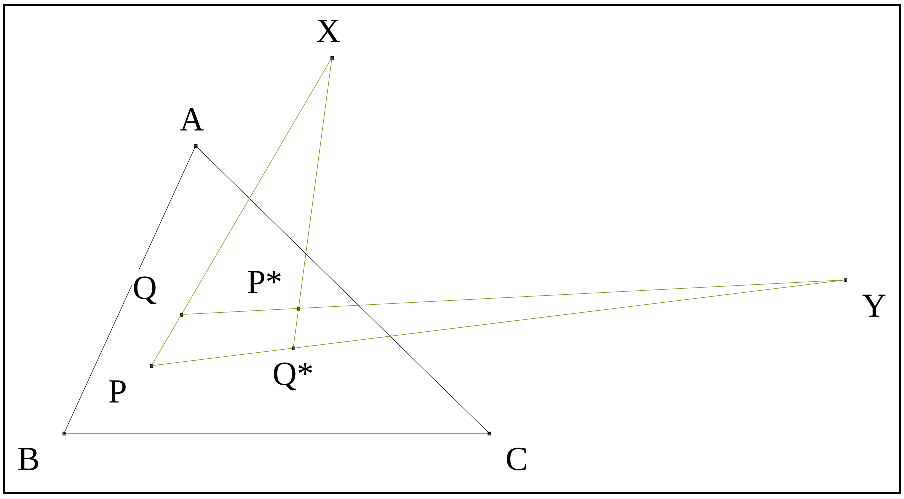
- Les deux derniers pinceaux ayant le rayon (AC) en commun,
  les points d'intersection de (CY') et (AP), de (CQ) et (AX), de (CB) et (AB) sont alignés
  i.e. P', X et B sont alignés ;
  en conséquence, P' et P sont confondus ;
  il s'en suit que Y' et Y sont confondus.

- **Conclusion :** (AX) et (AY) sont deux A-isogonales de ABC.

2. Ludwig Otto Hesse[22] (1811-1874)

VISION

Figure :

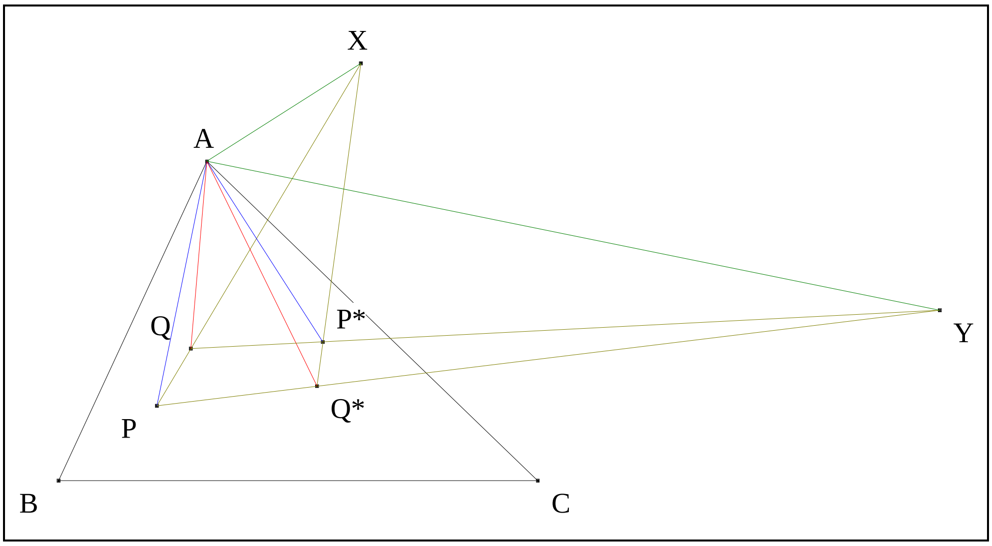


[22] Hesse L. O., *Journal de Crelle* vol. 20 (1840).

Traits : ABC un triangle,
P un point,
P* l'isogonal de P relativement à ABC,
Q un point,
Q* l'isogonal de P relativement à ABC,
et X, Y les points d'intersection de (PQ) et (P*Q*), de (PQ*) et (P*Q).

Donné : Y est l'isogonal de X relativement à ABC.

VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** (AP) et (AP*) sont deux A-isogonales de ABC
  (2) (AQ) et (AQ*) sont deux A-isogonales de ABC
  (3) (AX) et (AY) sont deux A-isogonales du triangle APP*.

- D'après V. 1. Un lemme,
  appliqué au triangle APP* et aux points Q et Q*, (AX) et (AY) sont deux A-isogonales de ABC.

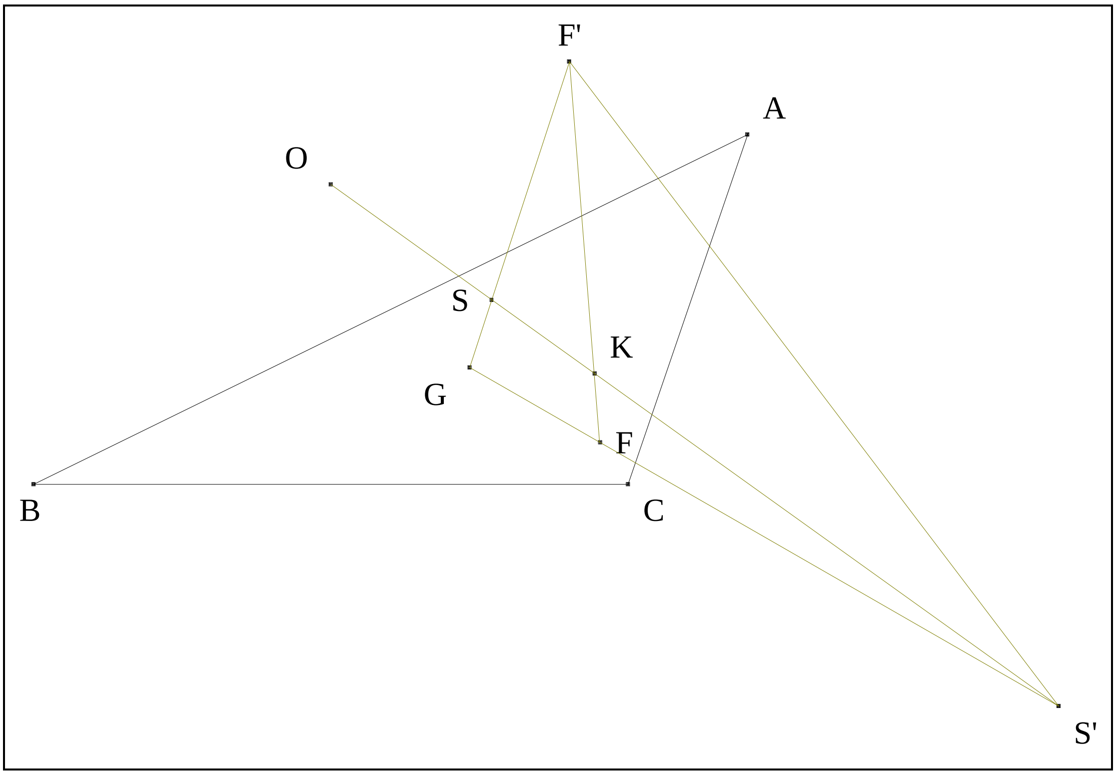
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BX) et (BY) sont deux B-isogonales de ABC
  (CX) et (CY) sont deux C-isogonales de ABC.

- **Conclusion :** Y est l'isogonal de X relativement à ABC.

3. Intersection en G

VISION

Figure



Traits : ABC un triangle,
G le point médian de ABC,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
K le point de Lemoine de ABC
et S, S' les premier, second points de Hesse de ABC.

Donné : (FS') et (F'S) sont concourantes en G.

VISUALISATION

- **Scolies :** **(1)** K est l'isogonal de G relativement à ABC
  et, par symétrie de la relation "est l'isogonal de",
  G est l'isogonal de K relativement à ABC
  (2) F est l'isogonal de S relativement à ABC
  (3) F' est l'isogonal de S' relativement à ABC
  (4) K est le point d'intersection de (FF') et (SS').

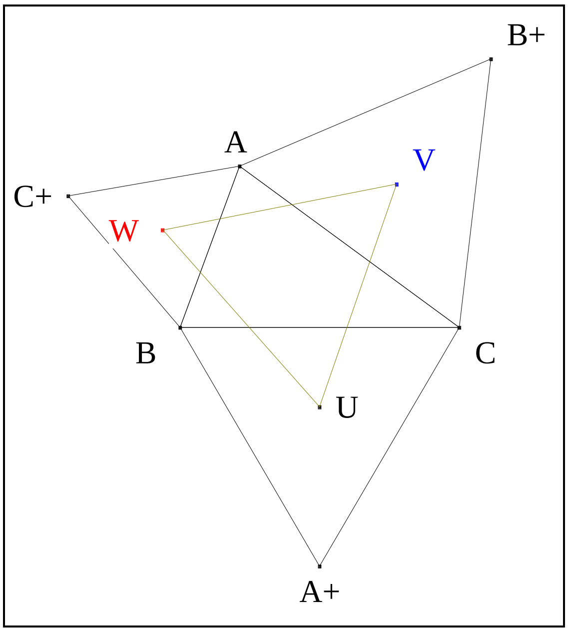
- D'après V. 2. Hesse, (FS') et (F'S) concourent à l'isogonal de K.

- **Conclusion :** (FS') et (F'S) sont concourantes en G.

Note historique : A. Boutin s'est intéressé aux points de Hesse en 1869 et à cette intersection.

VI. LA FIGURE "INACHEVÉE" DES MORLEY

1. Le premier triangle de Napoléon

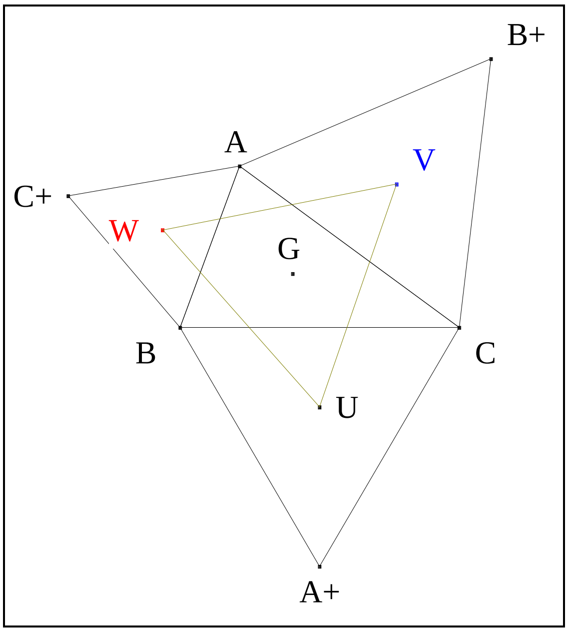


Traits :	ABC	un triangle,
	BA+C, CB+A, AC+B	trois triangles équilatéraux adjacents extérieurement à ABC
et	U, V, W	les centres de BA'C, CB'A, AC'B

Donné : le triangle UVW est équilatéral.

Scolies : **(1)** UVW est "le premier triangle de Napoléon relativement à ABC".

(2) Le point médian de UVW

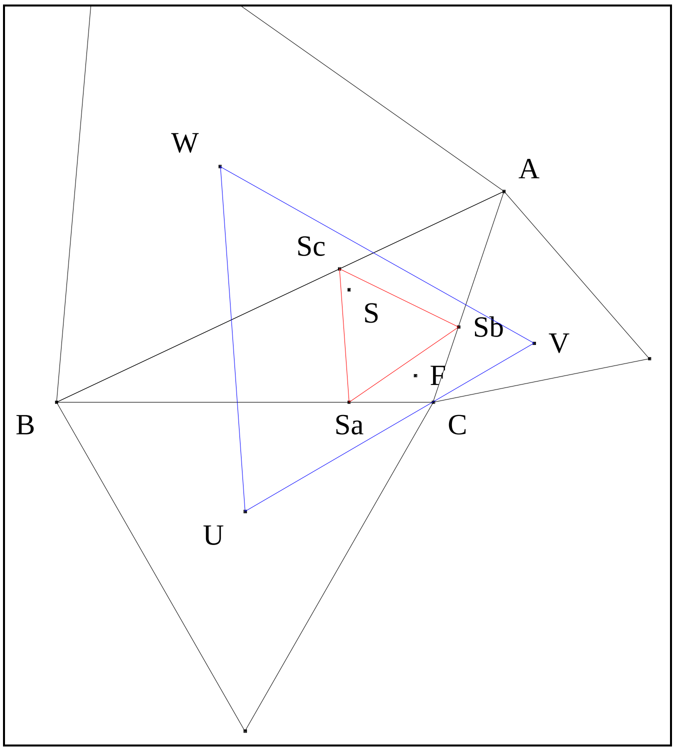


- Notons G le point médian de ABC.
- **Conclusion :** G est le point médian de UVW.

2. Deux triangles homothétiques

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	UVW	le premier triangle de Napoléon relativement à ABC,
	S	le premier point de Hesse de ABC,
	SaSbSc	le triangle S-pédal de ABC
et	F	le premier point de Fermat de ABC.

Donné : UVW est homothétique à SaSbSc.

VISUALISATION

- **Scolie :** UVW est homothétique au triangle F-antipédal de ABC.

- Sachant que le triangle antipédal d'un point est homothétique au triangle pédal de l'isogonal de ce point, le triangle F-antipédal de ABC est homothétique à SaSbSc.[23]

- **Conclusion :** par transitivité de la relation "est homothétique à", UVW est homothétique à SaSbSc.

Scolies :

(1) SaSbSc étant équilatéral, UVW est équilatéral.

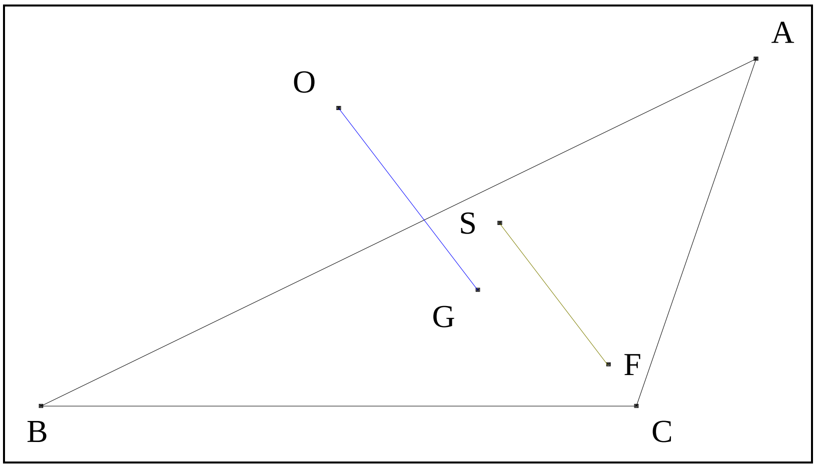
(2) Mutatis mutandis, nous montrerions que U'V'W' est homothétique à S'aS'bS'c.

[23] F.G.M., *Exercices de Géométrie*, 6th ed., 1920, Rééditions Jacques Gabay, Paris, 1991; Théorème 1003 p. 1164.

3. Un résultat de A. Boutin[24]

VISION

Figure



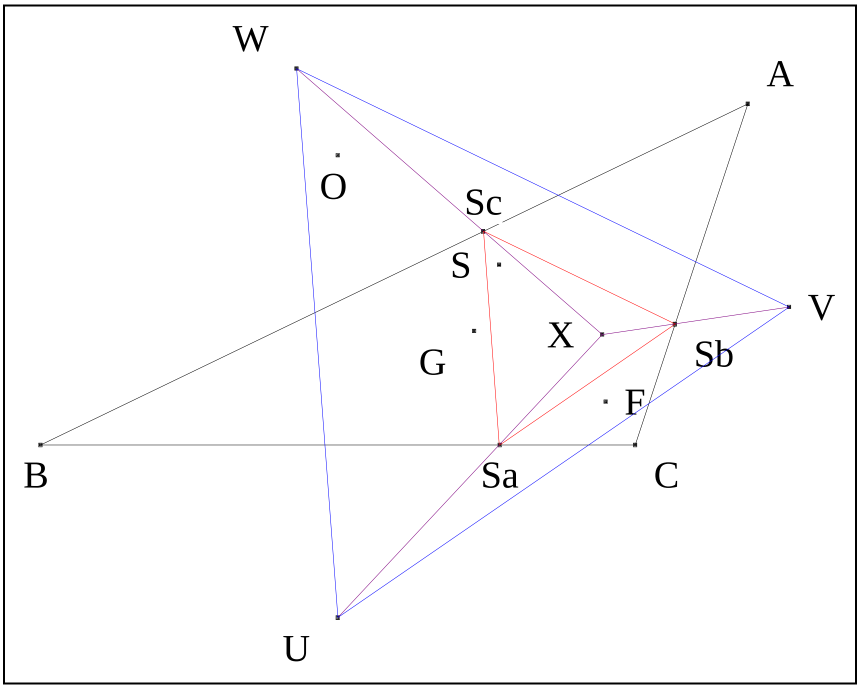
Traits :	ABC	un triangle,
	G	le point médian de ABC,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	S	le premier point de Hesse de ABC
et	F	le premier point de Fermat de ABC.

Donné : (FS) est parallèle à (OG).

VISUALISATION

Scolie : (OG) est "la droite d'Euler de ABC".

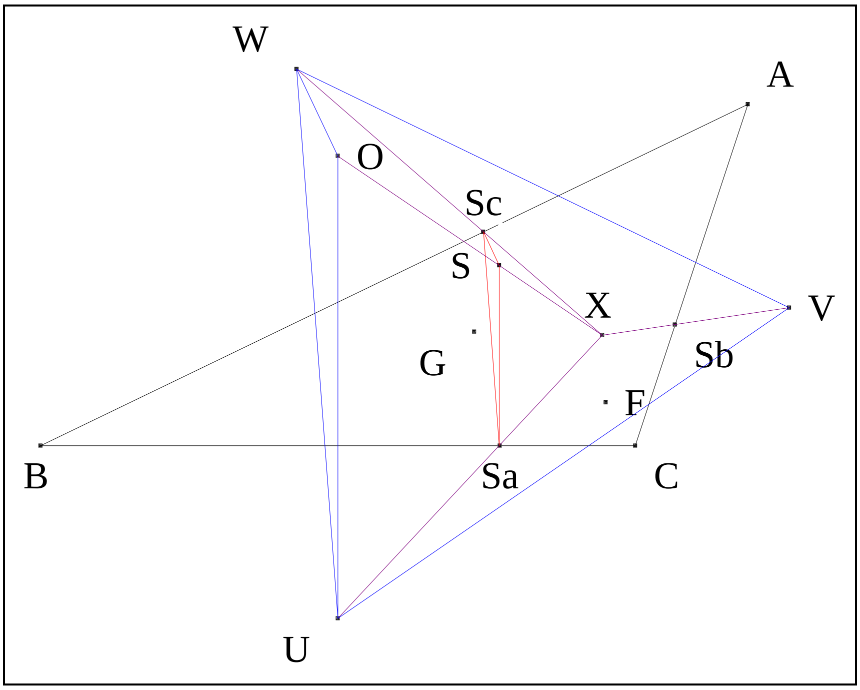
[24] Boutin A., *Journal de Mathématiques* de G. de Longchamps (1889).



- Notons SaSbSc le triangle S-pédal de ABC.

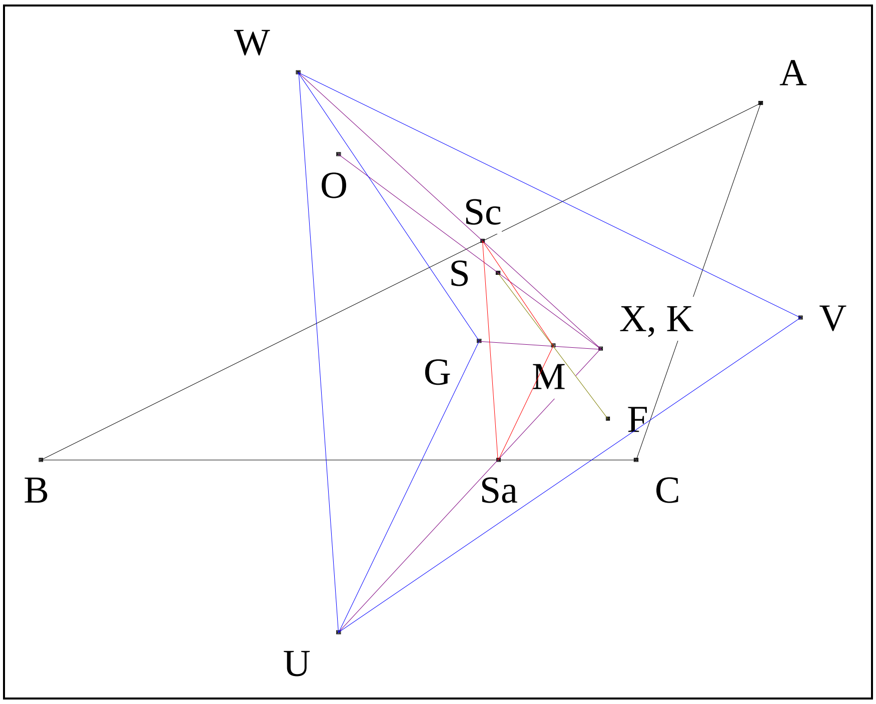
- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 6), appliqué à UVW et SaSbSc, (USa), (VSb) et (WSc) sont concourantes.

- Notons X ce point de concours.



- **Scolie :** les triangles OWU et SScSa sont homothétiques.

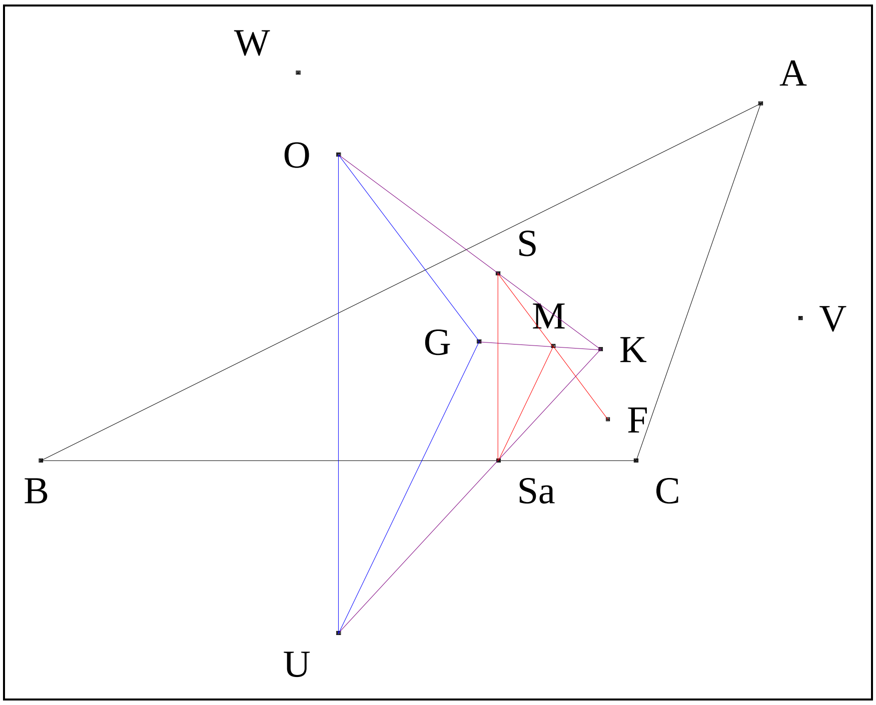
- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 6), appliqué à OWU et SScSa, (OS), (WSc) et (USa) sont concourantes en X.



- Notons M le milieu de [SF]
  et K le point de Lemoine de ABC.

- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 6),
  appliqué à UGW et SaMSc, (USa), (GM) et (WSc) sont concourantes en X.

- (GM) et (OS) étant concourantes en K, X et K sont confondus.



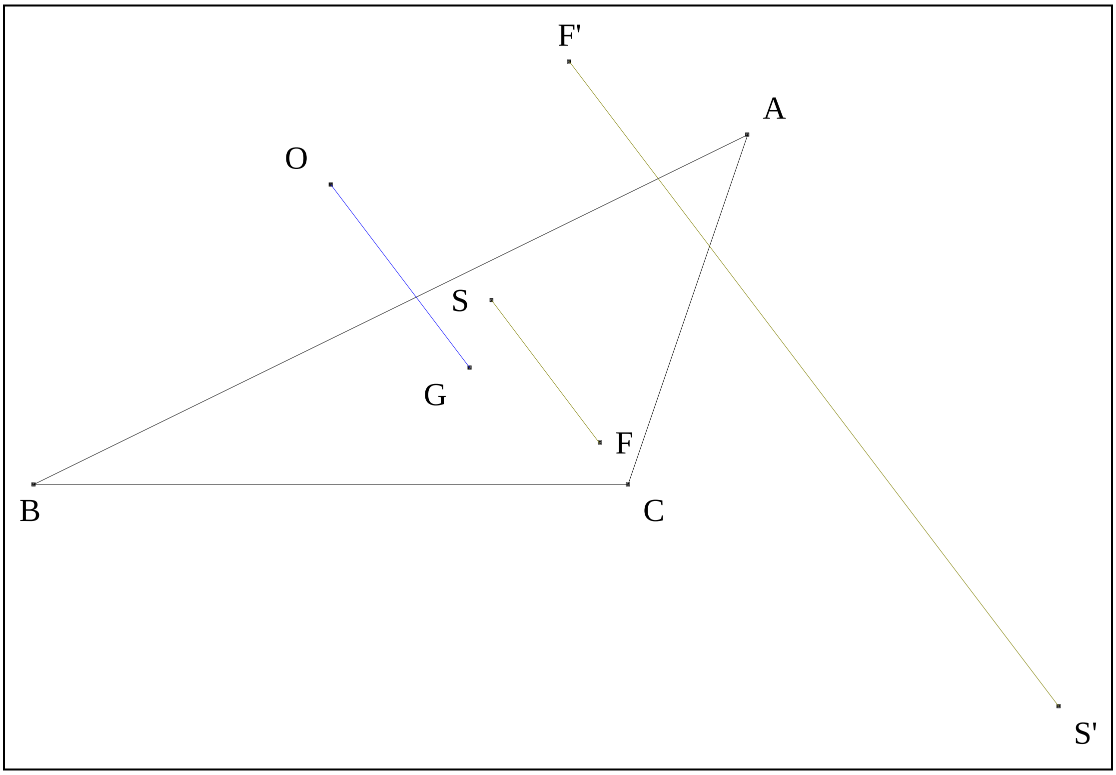
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 6),
  appliqué aux triangles perspectifs OGU et SMSa, (OG) est parallèle à (SM).

- **Conclusion :** (FS) est parallèle à (OG).

Scolies : **(1)** K est le centre d'homothétie de UVW et SaSbSc.

(2) Mutatis mutandis, nous montrerions que
K est le centre d'homothétie de U'V'W' et S'aS'bS'c.

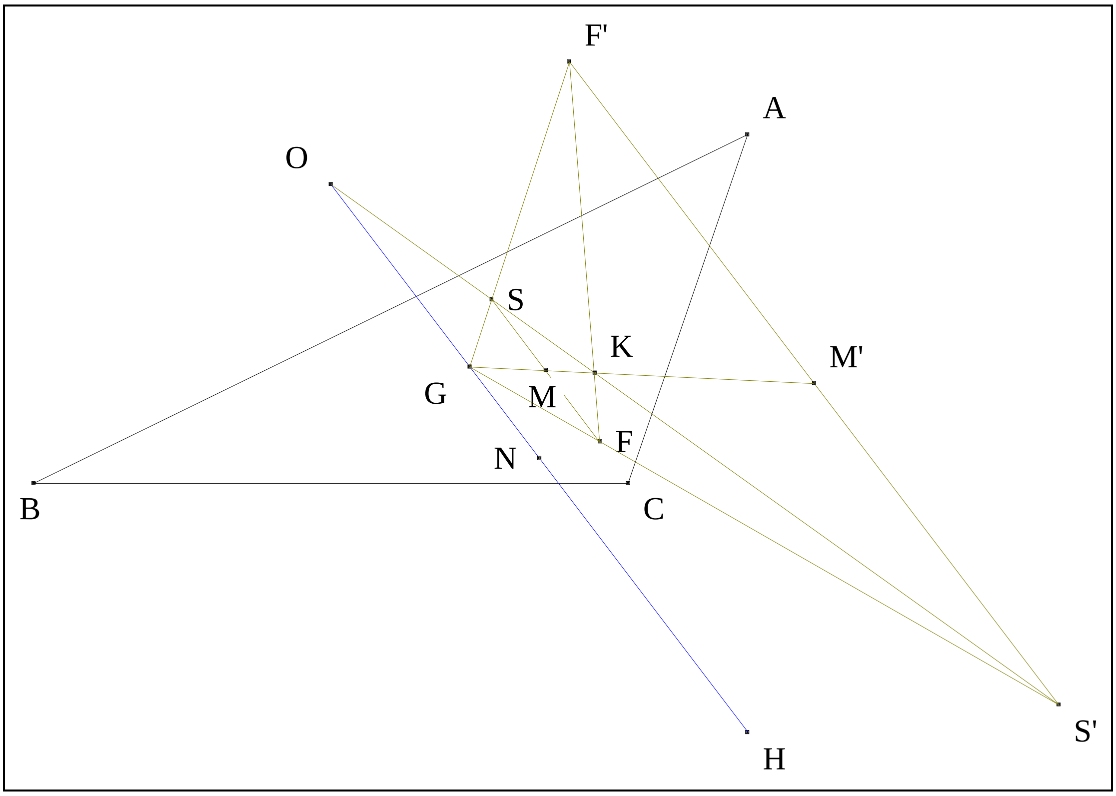
(3) Une autre parallèle à la droite d'Euler



- Notons S' le second point de Hesse de ABC
  et F' le second point de Fermat de ABC.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (F'S') est parallèle à (OG).

4. La figure "inachevée" des Morley



- Reprenons tous les résultats obtenus sur la figure ci-dessus.
- Notons M' le milieu de [S'F'].
- Le quadrilatère SFS'F' étant un trapèze, G, M et M' sont alignés.

Commentaire : la photo ci-dessus est "la figure inachevée de Frank Morley et de son fils Frank V"[25].

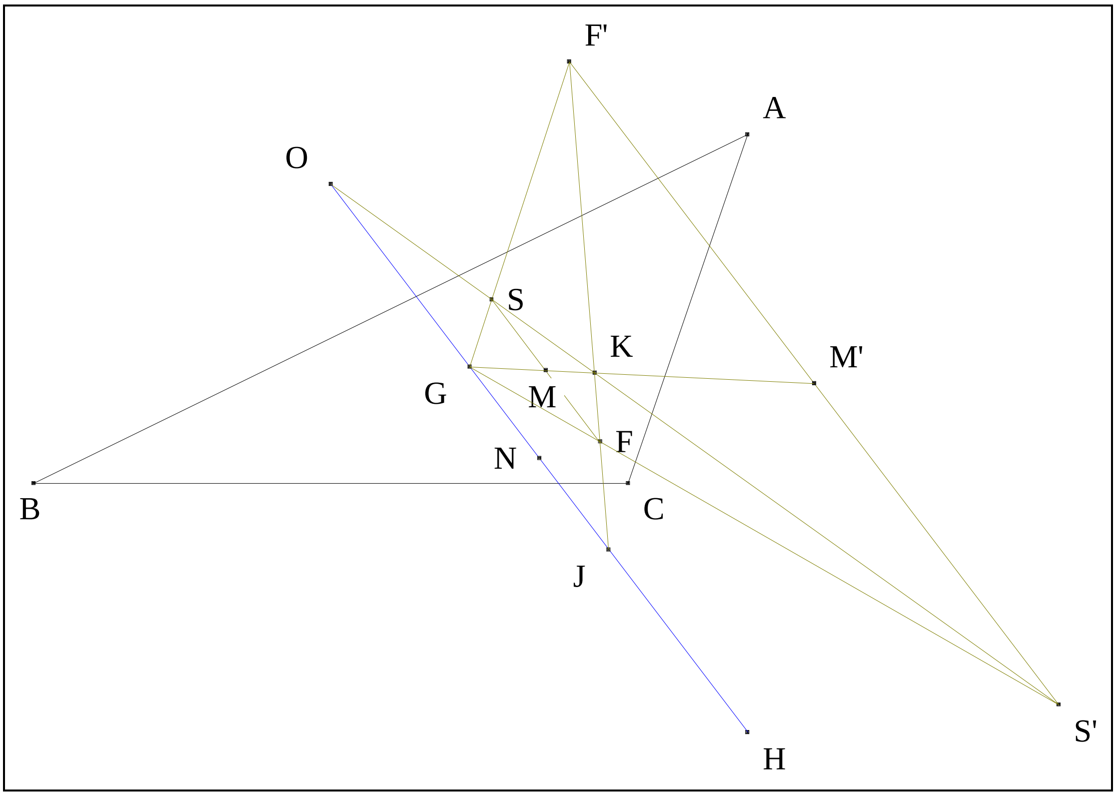
Note historique : les preuves données par les Morley sont analytiques.

VII. LE POINT "CRUCIAL" DE CUNDY

VISION

Figure

[25] Morley F. and F. V., Inversive geometry, G. Bell, London (1933) 209.

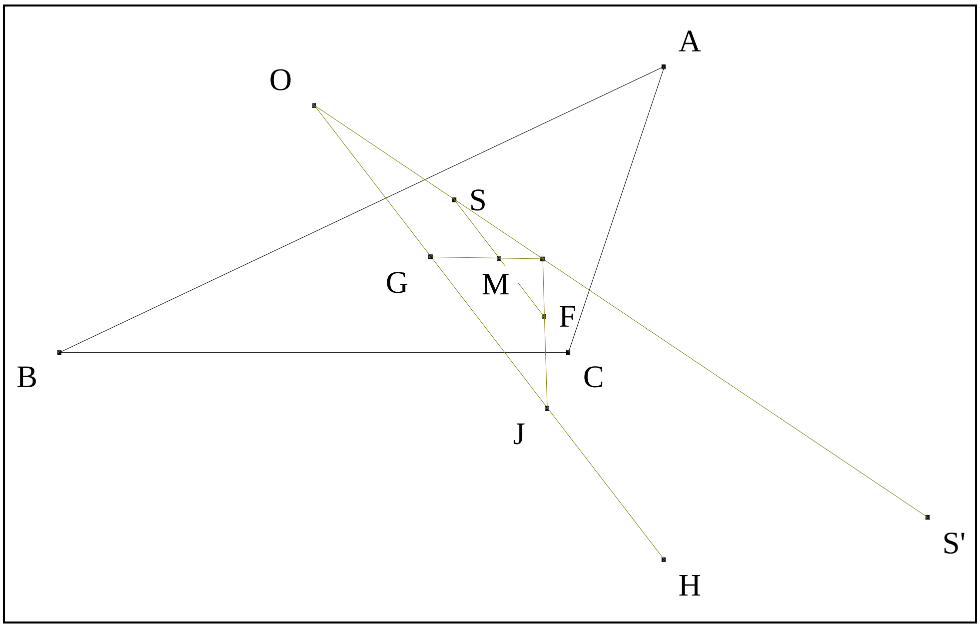


Traits :	ABC	un triangle,
	G, H	le point médian, l'orthocentre de ABC,
	N	le centre du cercle d'Euler de ABC,
	K	le point de Lemoine de ABC,
	F, F'	les premier, second points de Fermat de ABC,
	S, S'	les premier, second points de Hesse de ABC,
	M, M'	les milieux de [FS], [F'S']
et	J	le point d'intersection de (FF') et (GH).

Donné : J est le milieu de [GH].[26]

VISUALISATION

[26] Cundy H. M., A journey round the triangle, Lester's circle, Kiepert's hyperbola and a configuration from Morley, *Mathematical Gazette* 87, n° 509 (July 2003) 217-229.



- Notons J le symétrique de O par rapport à G
  et K le point de Lemoine de ABC.

- **Scolies :** **(1)** le quadrilatère SFJO est un trapèze
  (2) M et G sont les milieux de ses bases.

- **Conclusion :** (OS), (GM) et (JF) sont concourantes en K

Scolie : J est "le point de Cundy de ABC".

Commentaire : la figure "inachevée" de Frank Morley et de son Frank V. enrichie du point de Cundy conduit à "la fascinante figure de Cundy".
Henry Martyn Cundy dit que la contemplation de cette figure peut conduire à une preuve simple du cercle de June A. Lester[27]. L'auteur ayant trouvé une nouvelle preuve de ce cercle à partir du point de Cundy, l'a qualifié de "crucial".
Ajoutons que Lawrence S. Evans[28] a encore complété cette figure en considérant les deux points de Napoléon.

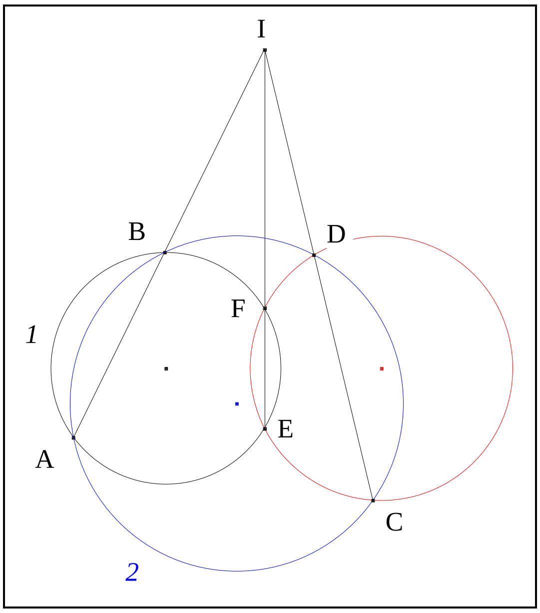
VII. UNE COURTE BIOGRAPHIE

Henry Martyn Cundy est né à Derby le 23 décembre 1913.
Étudiant au Trinity College de Cambridge en 1930, wrangler en 1934, il obtient le prix Rayleigh en 1937.
Dans les années cinquante, il a été professeur à l'université du Malawi.
Il décède le 25 février 2005 à Kendal.

ANNEXE

[27] Lester J. A., problème 19, Triangle III : Complex triangle functions, *Aequationes Mathematicae* 53 (1997).
[28] Evans L. S., A rapid Construction of Some Triangle Centers, *Forum Geometricorum* Vol. 2 (2002) 67-70.

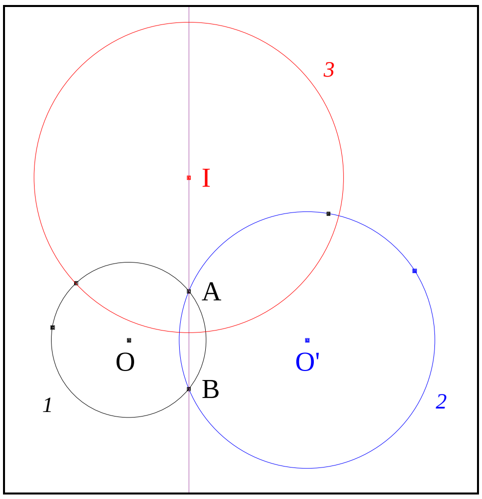
1. Le théorème des trois cordes[29]



Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
C, D deux points de *2*,
E, F deux points de *1*
et I le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

Donné : les points C, D, E et F sont cocycliques
si, et seulement si,
les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes en I.

2. Axe radical de deux cercles sécants[30]



Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
O, O' les centres de *1*, *2*,

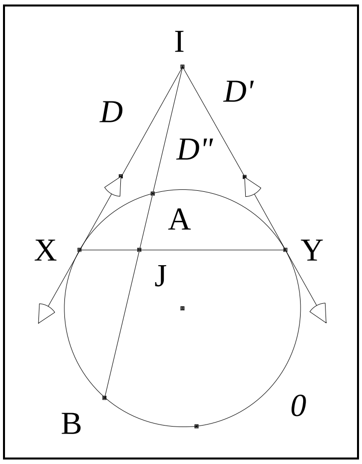
---

29 Monge, d'après Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, I (1822) 40.
30 Gaultier (de Tours) Louis, Les contacts des cercles, *Journal de l'École Polytechnique*, *Cahier* 16 (1813) 124-214.

A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
3 un cercle orthogonal à *2*
et I le centre de *3*.

Donné : I est sur la droite (AB) *si*, *et seulement si*, *3* est orthogonal à *2*.

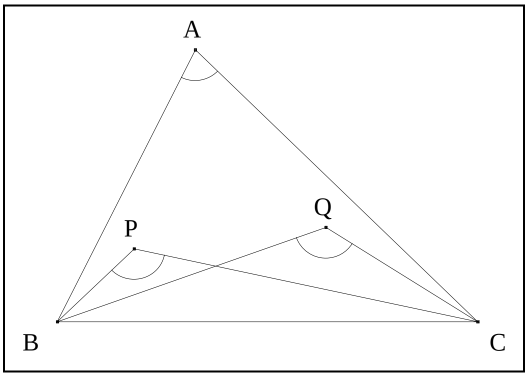
3. Une quaterne harmonique[31]



Traits : *0* un cercle,
I un point extérieur à *0*,
D, *D'* deux droites passant par I et tangentes à *0*,
X, Y les points de contact de *D*, *D'* avec *0*,
D" une droite passant par I et sécante à *0*, en
A, B les points d'intersection de *D"* avec *0*
et J le point d'intersection de *D"* avec la corde [XY].

Donné : la quaterne (I, J, A, B) est harmonique.

4. Une relation angulaire



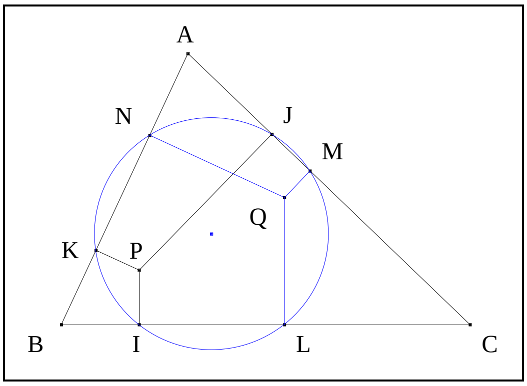
Traits : ABC un triangle,
P un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC
et Q l'isogonal de P relativement à ABC.

Donné : <BPC + < BQC = <BAC.

5. Le cercle de Mathieu

---

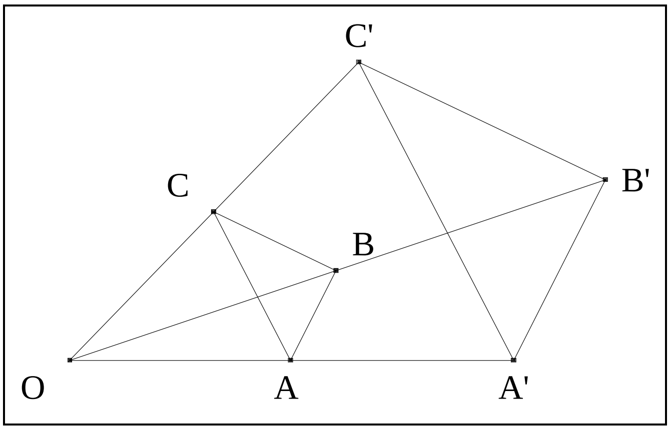
31 Apollonius, *Collections*, Livre III, proposition 37.



Traits :		ABC	un triangle,
		P	un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC,
		IJK	le triangle P-pédal de ABC,
		Q	l'isogonal de P relativement à ABC
	et	LMN	le triangle Q-pédal de ABC.

Donné : I, J, K, L, M et N sont cocycliques.

6. Le théorème faible de Desargues



Traits :		ABC	un triangle,		
	et	A'B'C'	un triangle tel que	**(1)**	(AA') et (BB') soient concourantes en O
				(2)	(AB) soit parallèle à (A'B')
				(3)	(BC) soit parallèle à (B'C')

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à (A'C').