

Sommaire

A. La ponctuelle O-K	5
1. Le point O	5
2. Le point K	6
3. Les deux points de Hesse	7
4. Une courte biographie d'Otto Hesse	9
5. L'orthocentre du triangle I-cévien	10
B. Les points de Crelle-Brocard	12
1. Le point Q	12
2. Le point Q'	14
3. Note historique sur les points Q et Q'	17
4. Une courte biographie de Leopold Crelle	17
C. Le cercle et l'axe de Brocard	18
1. Le cercle de Brocard	19
2. L'axe ou le diamètre de Brocard	22
3. Une autre nature du cercle de Brocard	23
4. Une courte biographie d'Henri Brocard	24

Sommaire (suite)

D. La géométrie de Brocard	25
I. Ouverture et références	25
II. Le Dr. Albrecht von Emmerich	25
1. La parallèle absente chez le Dr. von Emmerich	25
2. Le triangle $OQ'Q$	30
3. Un triangle isocèle moins remarquable	33
4. Une courte biographie d'Albrecht von Emmerich	36
III. Les triangles circumbrocardiens	36
1. Le premier triangle circumbrocardien	36
2. Deux triangles égaux	37
3. Le second point de Brocard du premier triangle circumbrocardien	39
4. Le second triangle circumbrocardien	41
5. Deux triangles égaux	42
6. Le premier point de Brocard du second triangle circumbrocardien	43
7. L'isogonal de Q	45
8. L'angle de Brocard	47
IV. Les triangles Q, Q'-pédaux	49
1. Le cercle de Gallatly	49
2. Le milieu de Brocard	50
3. La droite (QQ')	51
4. Point de Brocard du triangle Q-pédal	53
5. Les triangles Q et Q'-pédaux sont égaux	56
V. Le premier triangle de Brocard	58
1. Isotomique d'une symédiane	58
2. Le premier triangle de Brocard UVW	60
3. Une approche avec les parallèles de Lemoine	61
4. Une approche avec un point de Brocard	62
5. UVW est inversement semblable à ABC	63
6. Le troisième point de Brocard	64
7. UVW et ABC sont comédiens	66
8. Deux triangles orthologiques	70
9. Le centre du cercle d'Euler	71
10. Trois droites concourantes	74
VI. Le milieu de Brocard	76
1. Isotomique d'une symédiane	76
2. La A-parallèle de Lemoine de ABC	77
3. Le second cercle de Lemoine	78
4. Une parallèle à (BQ)	79
5. Deux triangles homothétiques	81
6. Deux triangles en perspective	83
7. Deux autres triangles en perspective	84
8. Le premier alignement recherché	90
9. Le second alignement recherché	91
10. Le triangle $U^*V^*W^*$	93
11. Le troisième alignement recherché	97
12. Le milieu de Brocard	100
13. Le complément du troisième point de Brocard	102
14. Une parallèle à l'axe de Brocard	106
15. L'orthocentre du premier triangle de Brocard	108
16. Le point de Steiner	109
17. Le point de Tarry	113
18. Une jolie "concurrence"	120
19. La droite de Simson du point de Steiner relativement à ABC	123

Sommaire (fin)

VII. Le second triangle de Brocard	127
1. Le second triangle de Brocard	128
2. Une approche par les cercles adjoints par un sommet	128
3. Une approche avec les circumsymédianes	130
4. Le résultat K, G, Q, Q' de Lemoine	133
5. Avec les cercles adjoints par un côté	135
6. Avec un cercle d'Apollonius	137
7. Le point A''	141
8. Conjecture du X-ième anniversaire de <i>Hyacinthos</i>	146
VIII. Les deux triangles de Brocard	147
1. XYZ et UVW sont comédiens	148
2. ABC et XYZ sont comédiens	149
IX. Les deux triangles adjoints	150
1. Le premier triangle adjoint	150
2. Deux triangles semblables	151
3. Le premier point de Crelle-Brocard du premier triangle adjoint	152
4. Q centre de similitude	156
5. Le second point de Crelle-Brocard du premier triangle adjoint	161
6. Une parallèle à (QQ')	163
7. Le point de Lemoine de $A^*B^*C^*$	165
8. Le second triangle adjoint	167
9. Les deux triangles adjoints	169
X. Appendice	170
1. Deux milieux et l'isotomcomplément	170
2. Le triangle K-cévien	172
XI. Annexe	173

A. LA PONCTUELLE O-K

Ouverture : rappelons d'abord l'axiome d'incidence Ia de l'axiomatique de Gustave Choquet¹ qui est à la base de tous les articles du site "Geometry Géométrie Geometrie":

*pour toute couple de points distincts de P ,
il existe une droite et une seule contenant ces deux points.*

Précisons ensuite que les axiomes d'ordre et de structure affine permettent de démontrer qu'une droite possède une infinité non dénombrable de points.

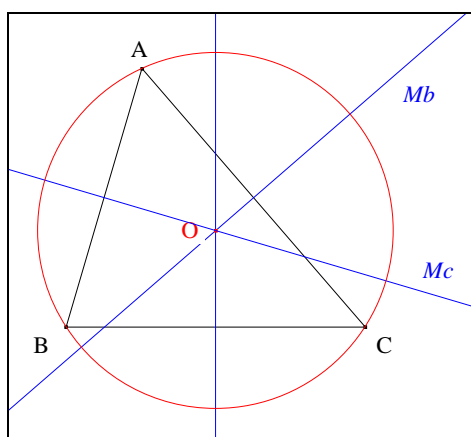
Signalons enfin que l'italien Luigi Crémona² est le premier géomètre à ma connaissance à avoir introduit en 1875 le concept de "ponctuelle" i.e. d'une suite finie de points alignés définissant une droite qui, au fil du temps, peut s'enrichir jusqu'à l'éventuelle découverte d'une propriété fédérant tous les points de cette droite.

Remarquons qu'en pratique, les géomètres confondent "ponctuelle" et "droite".

1. Le point O

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle
et Ma, Mb, Mc les A, B, C-médiatrices de ABC.

Donnés : Ma, Mb et Mc sont concourantes³.

Scolie : ce point de concours, noté O et répertorié sous X_3 chez ETC⁴, est "le centre du cercle circonscrit à ABC".

¹ Choquet G., *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, Paris (1964).

² Crémona L., *Éléments de géométrie projective*, Gauthier-Villars, Paris (1875).

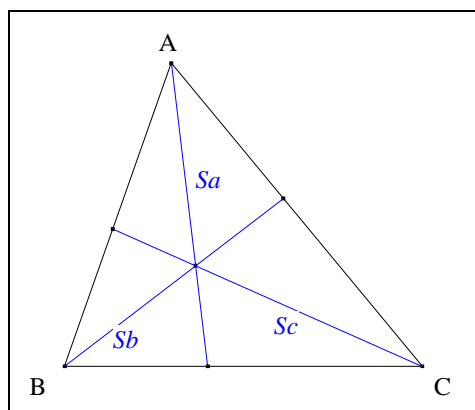
³ Euclide d'Alexandrie (vers 325 – vers 265 av J.-C.), *Éléments* Livre IV, proposition 5.

⁴ Kimberling C., Encyclopaedia of Triangle Centers ; <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>.

2. Le point K

VISION

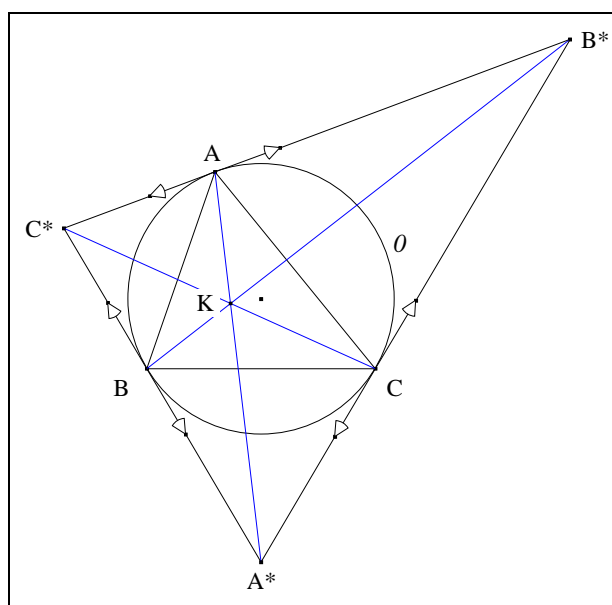
Figure :



Traits : ABC un triangle
 et S_a, S_b, S_c les A, B, C-symédianes de ABC .

Donné : S_a, S_b et S_c sont concourantes.⁵

VISUALISATION



• Notons O le cercle circonscrit à ABC ,
 et $A^*B^*C^*$ le triangle tangential de ABC
 et K le point de Gergonne de $A^*B^*C^*$.

• **Scolies :**

- (1) S_a, S_b et S_c passent resp. par A^*, B^*, C^*
- (2) O est le cercle inscrit de $A^*B^*C^*$
- (3) S_a, S_b, S_c sont resp. les A^*, B^*, C^* -gergoniennes de $A^*B^*C^*$.

⁵ Lemoine E., *Sur un point remarquable du triangle*, A.F.A.S., Congrès de Lyon (1873).

- **Conclusion** : d'après "Le point de Gergonne" (Cf. Annexe 1), S_a , S_b et S_c sont concourantes en K .

Scolie : sous l'impulsion de Joseph Neuberg en 1884, K est "le point de Lemoine de ABC " et est répertorié sous X_6 chez ETC⁶.
 K est aussi connu sous le nom de "point symédian de ABC " ou encore sous le nom de "point de Grebe" attribué par E. Hain⁷ en 1876 suite à au tracé accidentel d'Ernst Grebe⁸ de 1847.

Énoncé traditionnel : le point de Lemoine d'un triangle est le point de Gergonne de son triangle tangentiel et, inversement,
 le point de Gergonne d'un triangle est le point de Lemoine de son triangle de contact.

Note historique : c'est au Congrès l'A.F.A.S.⁹ à Lyon en 1873 qu'Émile Lemoine, dans un papier intitulé *Sur un point remarquable du triangle*, a présenté ce résultat sans démonstration. Nathan Altshiller-Court dans son livre¹⁰ datant de 1929 dit que Lemoine

*may be said to have laid the foundation...
 of the modern geometry of the triangle as a whole.*

Quant à Ross Honsberger¹¹, il ajoute que le point symédian peut être considéré comme

a crown jewel of modern geometry.

3. Les deux points de Hesse

VISION

Figure :

⁶ Kimberling C., Encyclopaedia of Triangle Centers ; <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>.

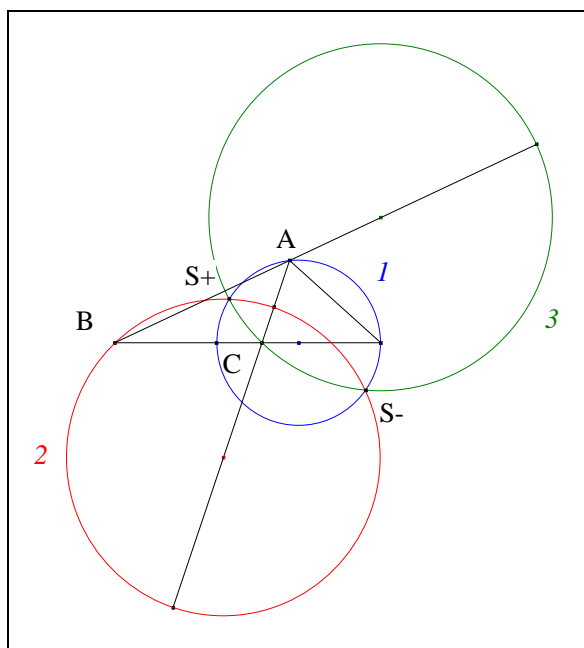
⁷ Hain, Über symmetrische Punktsystem des Dreieck, *Archiv der Mathematik und Physik*, Greifswald, spatter Leipzig (1876).

⁸ Grebe E. W., Das geradlinige Dreieck in Beziehung auf die Quadrate der Perpendikel, welche man von einem Punkte seiner Ebene auf seine Seiten fallen kann, betrachtet, *Archiv der Mathematik und Physik*, Greifswald, spatter Leipzig (1847).

⁹ Association Française pour l'Avancement des Sciences.

¹⁰ Altshiller-Court N., *College Geometry*, Barnes & Noble, Richmond (1923) 304.

¹¹ Honsberger R., *Episodes of 19th and 20th Century Euclidean Geometry*, Math. Assoc. America (1995) 53.



Traits : ABC un triangle
 et 1, 2, 3 les A, B, C-cercles d'Apollonius de ABC.

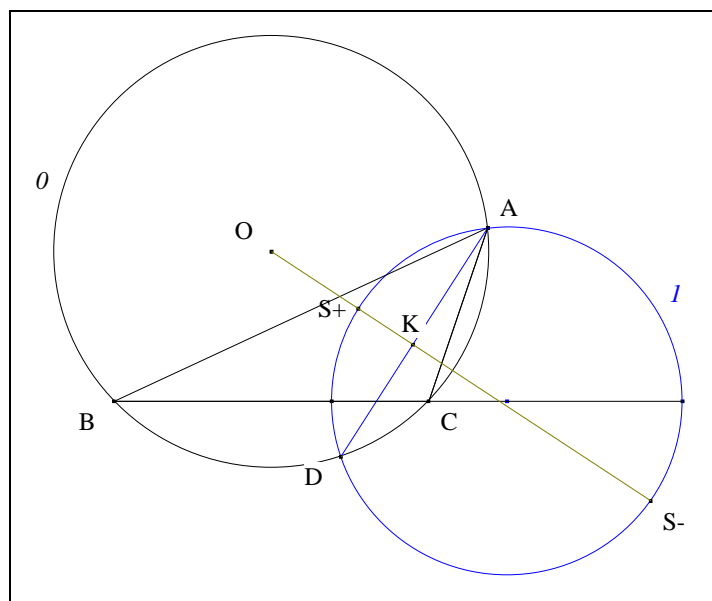
Donné : 1, 2 et 3 ont une corde commune¹².

- Scolies :**
- (1) les extrémités de cette corde commune, notées S+ et S-, sont "les points isodynamiques de ABC"¹³
 ou encore
 "les points de Hesse de ABC" ;
 ils sont répertoriés resp. sous X_{15} et X_{16} chez ETC.
 - (2) Le premier point de Hesse, noté S+, est celui qui est à l'intérieur du plus grand angle de ABC.
 - (3) Une quaterne harmonique

¹² Vecten, *Annales de Gergonne* X (1819-20) 202-204 ;

Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2, p.7 ; <http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>.

¹³ Neuberg J., *Mathesis* (1885) 204, renvoi.



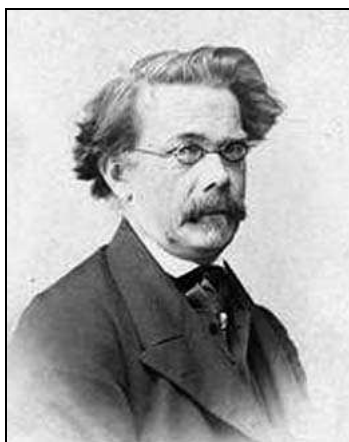
- Notons O le cercle circonscrit à ABC ,
 O le centre de O
 et K le point de Lemoine de ABC .

- **Conclusion** : la quaterne (O, K, X, Y) est harmonique¹⁴.

(4) O et I sont orthogonaux.

(5) (OK) est perpendiculaire à la droite de Lemoine i.e. la droite des centres de $1, 2$ et 3 .

4. Une courte biographie d'Otto Hesse



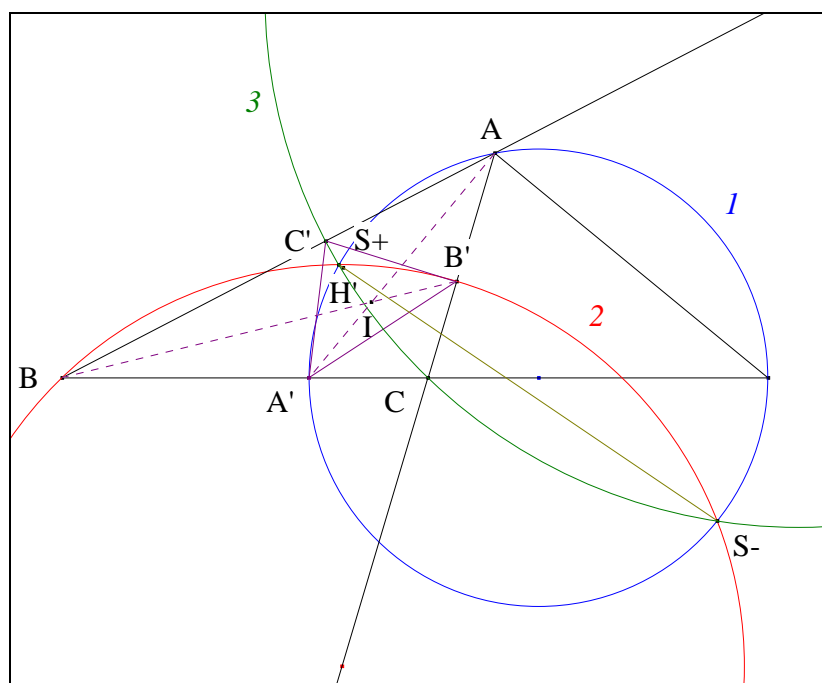
Ludwig Otto Hesse est né à Königsberg (Prusse, aujourd'hui Kaliningrad, Russie), le 22 avril 1811. Étudiant, puis professeur dans une école de commerce de Königsberg, il devient à partir de 1845, professeur de l'Université de cette ville. De 1856 à 1868, il professe à l'Université d'Heidelberg avant d'enseigner à l'École polytechnique de Munich. A partir de 1868, il devient membre de l'Académie bavaroise des sciences. Il décède le 4 août 1874 à Munich (Allemagne).

¹⁴ Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2, p.7 ; <http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>.

5. L'orthocentre du triangle I-cévien

VISION

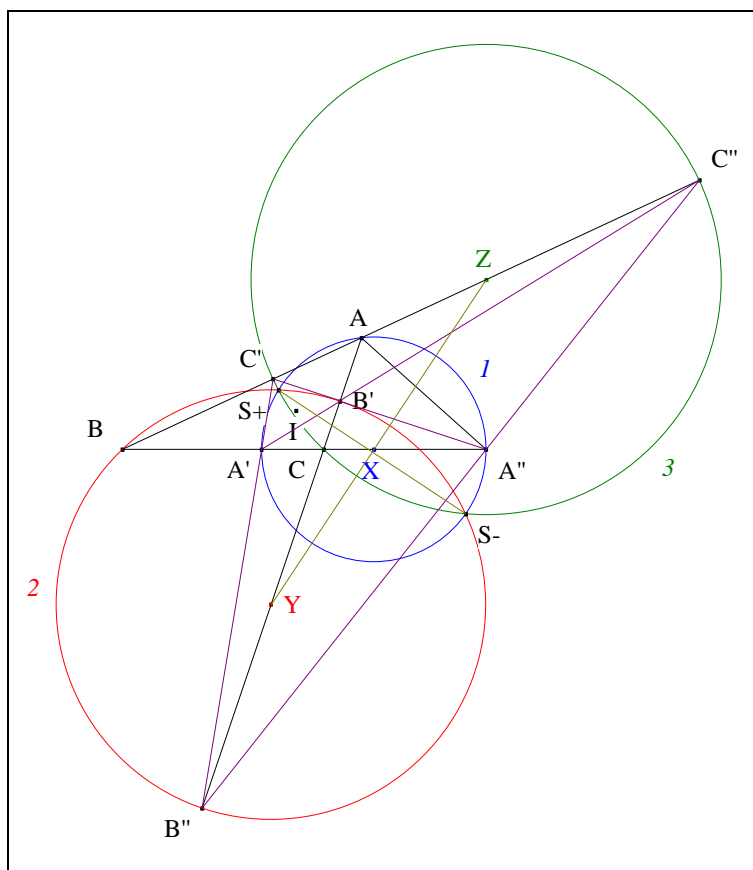
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 $1, 2, 3$ les A, B, C-cercles d'Apollonius de ABC ,
 S^+, S^- les points de Hesse de ABC ,
 I le centre de ABC ,
 $A'B'C'$ le triangle I-cévien de ABC
 et H' l'orthocentre de $A'B'C'$.

Donné : H' est sur (S^+S^-) .

VISUALISATION



- Notons A'', B'', C'' les points d'intersection resp. de $(B'C')$ et (BC) , de $(C'A')$ et (CA) , de $(A'B')$ et (AB) .
- **Scolies :**
 - (1) A'' est sur 1 , B'' est sur 2 , C'' est sur 3
 - (2) A'', B'' et C'' sont alignés
 - (3) $[A'A'']$ est un diamètre de 1 , $[B'B'']$ est un diamètre de 2 , $[C'C'']$ est un diamètre de 3
 - (4) $1, 2$ et 3 passent par $S+$ et $S-$.
- Considérons le delta déterminé par le triangle $C'B''A''$ et la ménélienne $(A'B'C'')$.
- Notons X, Y, Z les milieux resp. de $[A'A'']$, $[B'B'']$, $[C'C'']$.
- **Scolie :** (XYZ) est la gaussienne du delta.
- **Conclusion :** d'après Steiner "Gaussienne et droite de Steiner" (Cf. Annexe 2) et Bodenmiller "Trois céviennes diamétrales" (Cf. Annexe 3), H' est sur $(S+S-)$.

- Scolies :**
- (1) H' est répertorié sous X_{500} chez ETC.
 - (2) $S+, S-, O, K$ et H' sont alignés.

Note historique : ce résultat a été posé sur le forum du site *Geometry-college*. La preuve proposée ci avant s'inspire de celle de Darij Grinberg¹⁵.

¹⁵ Grinberg D., *Geometry-college*, Message du 08/12/2002 ; <http://mathforum.org/kb/forum.jspa?forumID=125>.
Generalized Isodynamic Points or Why the orthocenter of the incental triangle $X(500)$ lies on the Brocard axis.

B. LES POINTS DE CRELLE – BROCARD

Ouverture : si, de nombreux centres apparaissent dans "une seule version", d'autres tout aussi nombreux présentent "plusieurs versions". Ce point de vue qui a donné naissance au concept "d'extraversion" a permis aux géomètres modernes comme John Horton Conway de classer les centres en classes d'équivalence et d'établir une règle afin de mieux comprendre les relations entre des théorèmes concernant la géométrie du triangle ou bien de passer d'un théorème au(x) théorème(s) extraverti(s) selon la classe du centre considéré.

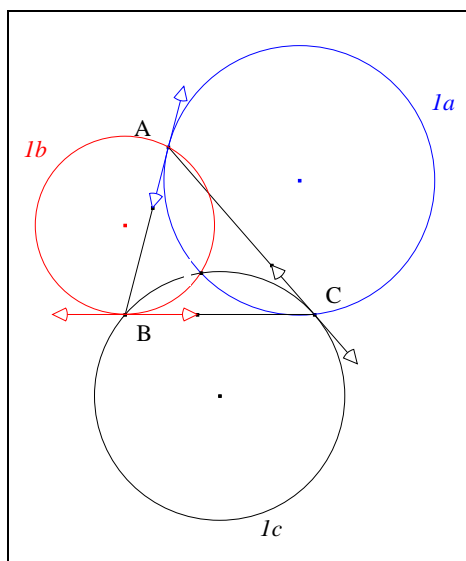
Pour illustrer partiellement notre propos, citons simplement les deux premières classes, à savoir celles des points

*	"forts"	se déclinant en une seule version	comme O et K
*	"fissibles"	se déclinant en deux versions	comme S+ et S-.

1. Le point Q

VISION

Figure :

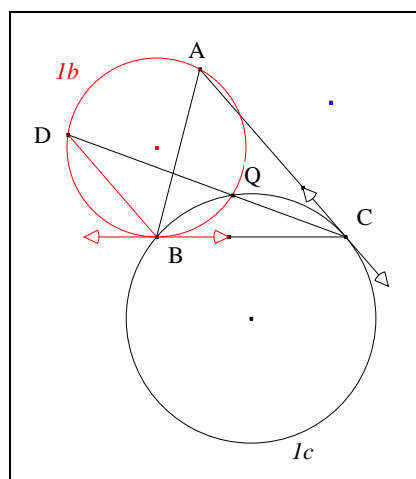


Traits : ABC un triangle,
 Ic le cercle passant par B et C, et tangent à (AC) en C,
 Ia le cercle passant par C et A, et tangent à (AB) en A
 et Ib le cercle passant par A et B, et tangent à (BC) en B.

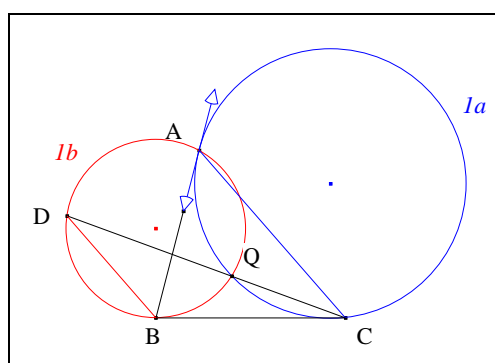
Donné : Ia , Ib et Ic sont concourants ¹⁶.

¹⁶ Jacobi C. F. A., *De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis*, Naumburg (1825) ; Schulprogramm von Pforta ;
 Jacobi C. F. A., *Anhänge zu seiner Übersetzung der Grundbegriffe der Meerkunde* door J. H. van Swinden, betiteld : *Elemente der Geometrie*, Jena (1834).

VISUALISATION



- Notons Q le second point d'intersection de Ia et b ,
et D le second point d'intersection de (BQ) avec Ia .
- Les cercles IB et Ic , les points de base B et Q , les moniennes (BBC) et (DQC) , conduisent au théorème 2 de Reim ; il s'en suit que $(BD) \parallel (AC)$.



- Le cercle Ib , les points de base A et Q , les moniennes naissantes (BAA) et (DQC) , les parallèles (BD) et (AC) , conduisent au théorème 3'' de Reim ; en conséquence, le cercle passant par A , Q et C est tangent à (AB) en A ; par hypothèses, c'est le cercle Ia .
- **Conclusion :** Ia , Ib et Ic sont concourants en Q .

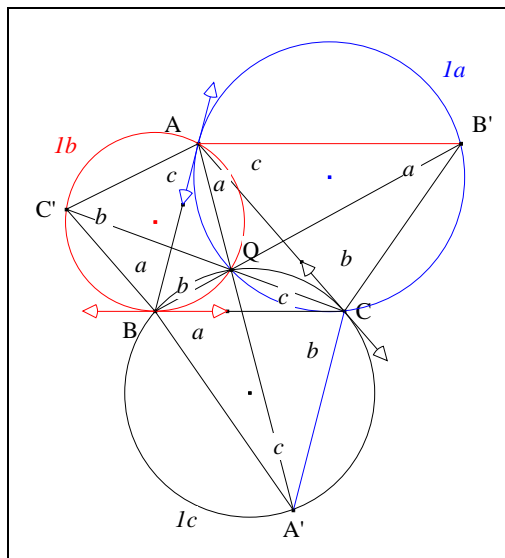
- Notons Q ce point de concours.

Note historique : la construction du point Q à partir du cercle rouge et de la parallèle (BD) à (AC) a été signalée par R. F. Davis¹⁷.

Commentaire : la figure formée par ces trois cercles concourants initiée par Jacobi est un cas particulier du "Théorème du pivot" de Miquel (Cf. Annexe 4).

¹⁷ Davis cité par Simmons, *An Introduction to the recent Geometry of the Triangle* in Milne's companion to the weekly Problem papers, London (1888) ; von Emmerich A. (1856-?), *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 25, art. 13, 3°.

- Scolies :**
- (1) Q est le "premier point de Brocard de ABC" ou en anglais "the positive Brocard point of ABC".
 - (2) Ia , Ib et Ic sont resp. "les premiers A, B, C-cercles adjoints au triangle ABC".
 - (3) Trois triangles inversement semblables à ABC et une "concourance" en Q



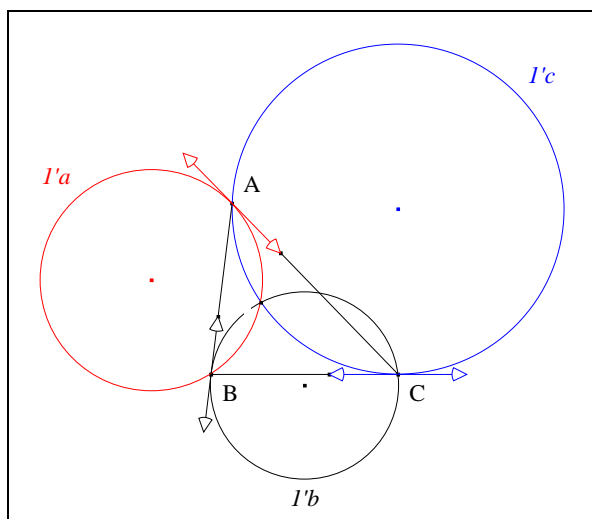
- Notons A' le second point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par C avec Ic ,
 B' le second point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par A avec Ia
 et C' le second point d'intersection de la parallèle à (CA) passant par B avec Ib .
- Par une chasse angulaire, nous montrerions que les triangles semblables BCA' , $B'CA$, $AC'B$ sont resp. inversement semblables à ABC
- **Conclusion :** les triangles $A'B'C'$ et ABC sont perspectifs de centre Q.¹⁸

2. Le point Q'

VISION

Figure :

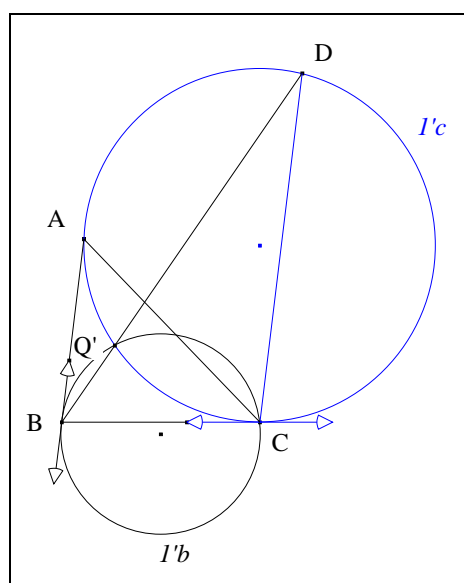
¹⁸ Davis cité par Simmons, *An Introduction to the recent Geometry of the Triangle* in Milne's companion to the weekly Problem papers, London (1888) ; von Emmerich A. (1856-?), *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 25, art. 13, 3°.



Traits : ABC un triangle,
 $I'b$ le cercle passant par B et C, et tangent à (AB) en B,
 $I'c$ le cercle passant par C et A, et tangent à (BC) en C
 et $I'a$ le cercle passant par A et B, et tangent à (CA) en A.

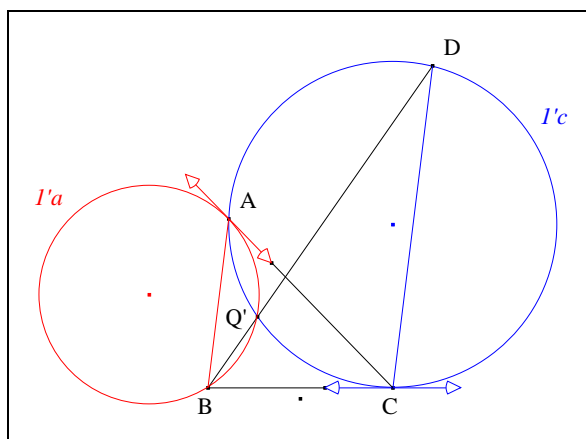
Donné : $I'a$, $I'b$ et $I'c$ sont concourants¹⁹.

VISUALISATION



- Notons Q' le second point d'intersection de $I'b$ et $I'c$,
 et D le second point d'intersection de (BQ') avec $I'c$.
- Les cercles $I'c$ et $I'b$, les points de base C et Q' , les moniennes (CCB) et $(DQ'B)$, conduisent au théorème 2 de Reim ; il s'en suit que $(CD) \parallel (AB)$.

¹⁹ Jacobi C. F. A., *De triangulorum rectilinearum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis*, Naumburg (1825) ; Schulprogramm von Pforta ;
 Jacobi C. F. A., *Anhänge zu seiner Übersetzung der Grundbegriffe der Meerkunde* door J. H. van Swinden, betiteld : *Elemente der Geometrie*, Jena (1834).



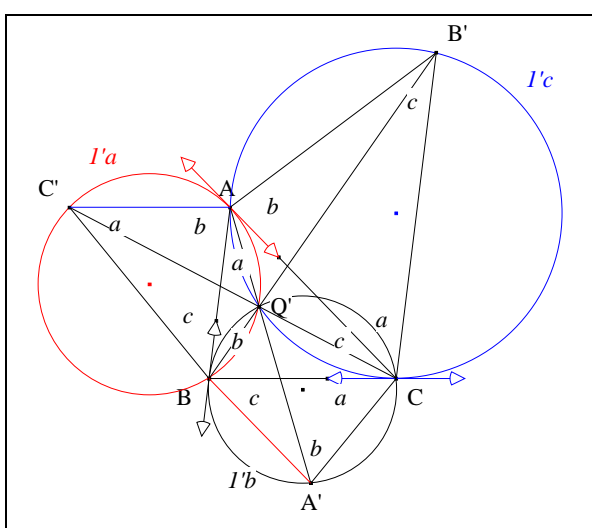
- Le cercle $I'c$, les points de base A et Q', les moniennes naissantes (CAA) et (DQ'B), les parallèles (CD) et (AB), conduisent au théorème 3'' de Reim ; en conséquence, le cercle passant par A, Q' et B est tangent à (AC) en A ; par hypothèses, c'est le cercle $I'a$.

- **Conclusion :** $I'a$, $I'b$ et $I'c$ sont concourants en Q'.

Note historique : la construction du point Q' à partir du cercle bleu et de la parallèle (CD) à (AB) a été signalée par R. F. Davis²⁰.

Commentaire : la figure formée par ces trois cercles concourants est un cas particulier du "Théorème du pivot" de Miquel (Cf. Annexe 4).

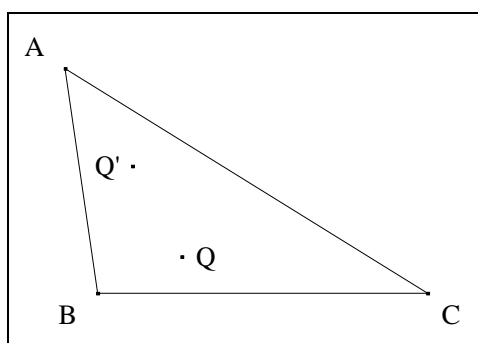
- Scolies :**
- (1) Q' est le "second point de Brocard de ABC" ou en anglais "the negative Brocard point of ABC".
 - (2) $I'a$, $I'b$ et $I'c$ sont resp. "les seconds A, B, C-cercles adjoints au triangle ABC".
 - (3) Trois triangles inversement semblables à ABC et une "concourance" en Q'



²⁰ Davis R. F. cité par Simmons, *An Introduction to the recent Geometry of the Triangle* in Milne's companion to the weekly Problem papers, London (1888) ; von Emmerich A., *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 25, art. 13, 3°.

- Notons A' le second point d'intersection de la parallèle à (CA) passant par B avec $I'b$,
 B' le second point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par C avec $I'c$
 et C' le second point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par A avec $I'a$.
- Par une chasse angulaire, nous montrerions que les triangles semblables $CA'B$, CAB' , $C'AB$ sont resp. inversement semblables à ABC
- **Conclusion** : les triangles $A'B'C'$ et ABC sont perspectifs de centre Q' .²¹

3. Note historique



Selon le professeur Peter Baptist²² de l'université de Bayreuth (Allemagne), la priorité de la découverte des points Q et Q' , et de leur construction, revient à Leopold Crelle²³ en 1816.

En 1825, Andreas Jacobi²⁴, professeur à Pforta, les redécouvre en considérant les cercles adjoints tout comme le feront ensuite, B. G. Emsmann son élève après la mort de Jacobi en 1855 et, plus tard, les français Chadu et Chapelle. L'historien Max Simon précise que ces points ont été étudiés en 1847 par Hoffmann²⁵, professeur au Gymnasium de Dantzig, puis en 1853 par Reuschle²⁶, puis en 1871 par Marqfroy²⁷.

Si, ces géomètres avaient bien trouvé quelques résultats à leurs sujets, leur impulsion dans cette direction allait rapidement s'essouffler. Il faut attendre l'année 1875 pour qu'Henri Brocard²⁸ se mette à revisiter ce domaine en friche pour lui redonner un second souffle en redécouvrant en 1884 par une approche purement angulaire, ces points remarquables qui allaient alimenter d'après l'estimation de l'historiographe Émile Vigarié, quelques 600 articles²⁹ durant une vingtaine d'années.

Dès 1855, Hellwig appelle ces deux points "Kreisternionspunkte". En 1877, Brocard les nomme "points segmentaires" et en 1881, Joseph Neuberg leurs attribuent le nom de "Brocard dans la revue *Mathesis*."

4. Une courte biographie de Leopold Crelle

²¹ Brocard H.,
Davis

²² Baptist P., *Die Entwicklung der Neueren Dreiecksgeometrie*, Wissenschaftsverlag, Mannheim (1992).

²³ Crelle L., *Über einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks rücksichtlich dreier durch Winkel-Spitzen gezogenen geraden Linien*, Berlin (1816).

²⁴ Jacobi C. F. A., *De triangulorum rectilinearum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis*, Naumburg (1825) ;
Schulprogramm von Pforta ;

Jacobi C. F. A., *Anhänge zu seiner Übersetzung der Grondbeginsels der Meetkunde door J. H. van Swinden*, betiteld :
Elemente der Geometrie, Jena (1834).

²⁵ Hoffmann H., *Grunert* 9 (1847) 280.

²⁶ Reuschle, *Grunert* (1853) paragraphe 4.

²⁷ Marqfroy, *Nouvelles Annales* (2) 10 (1871) 142.

²⁸ Brocard H., Question n° 1166, *Nouvelles Annales* (1875) 192, 286.

²⁹ Vigarié E., La bibliographie de la géométrie du triangle, *Mathesis*, Série 2, vol. 6 (1896).



*Es ist in der Tat bewundernswürdig,
dass eine so einfache Figur wie das Dreieck,
so unerschöpflich an Eigenschaften ist.
Wie viele noch unbekannte Eigenschaften andere Figuren
mag es nicht geben.*³⁰

August Leopold Crelle est né le 11 mars 1780 à Eichwerder près de Wriezen (Brandebourg, Allemagne).
Fil d'un maçon, August est un autodidacte. Devenu ingénieur, il se met au service du gouvernement de la Prusse en 1801. Travaillant pour le Ministère de l'Intérieur, il construit des routes jusqu'en 1828 et en 1838, la première ligne de chemin de fer entre Berlin et Postdam.
En 1813, il enseigne durant une courte période au Joachimsthalschen Gymnasium de Berlin.
Si sa famille avait été fortunée, il aurait certainement étudié les mathématiques à l'université. Sa passion pour ce domaine était si grande qu'il présente, à l'âge de 36 ans, une thèse intitulée *De calculi variabilium in geometria et arte mechanica usu* à l'université d'Heidelberg.
Son manque d'originalité dans ce domaine, est compensé par un grand enthousiasme, par ses qualités d'organisateur, et par sa capacité d'identifier de futurs jeunes talents en mathématiques comme Niels Abel.
En 1826, il fonde la revue *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, plus connue sous le nom de *Journal de Crelle* qui diffère des autres journaux de son époque, et à la tête duquel il restera pour les premiers 52 volumes.
En 1827, il devient membre de l'Académie des sciences de Berlin.
En 1828, il rejoint le Ministère de L'Éducation.
Il décède à Berlin, le 6 octobre 1855.

C. LE CERCLE ET L'AXE DE BROCARD

Ouverture : c'est en 1804 qu'apparaît dans la Géométrie du triangle, le premier cercle remarquable connu aujourd'hui sous le nom de cercle d'Euler-Bevan. Signalons que d'après les recherches de l'historien James Sturgeon MacKay, ce cercle n'apparaît nulle part dans l'oeuvre d'Euler. Si Mackay³¹ dans un article de 1892, intitulé *History of the Nine Point Circle*, attribue ce cercle à John Whitley³², une autre source l'attribue à l'ingénieur civil Benjamin Bevan³³.
Ce nouveau point de vue "circulaire" allait donner naissance à de nombreux cercles...

³⁰ Crelle A. L. (11/03/1780-06/10/1855) ; "C'est magnifique qu'une figure aussi simple que le triangle soit inépuisable. Combien de propriétés à ce jour inconnues pourrait-on encore trouver dans d'autres figures"; *Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen*, vol. I (1821) 176.

³¹ MacKay J. S., *Plane Geometry* (1904).

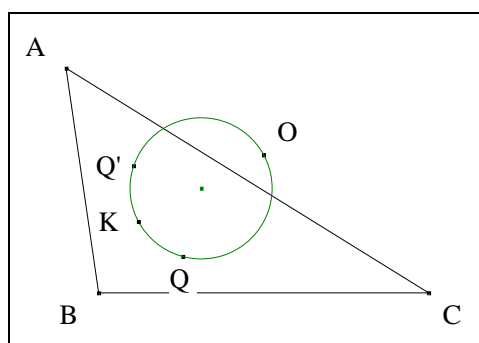
³² Whitley J., *Gentleman's Mathematical Companion* (1808) 133.

³³ Bevan B., *Mathematical Repository* de Leybourn I (1804) 18.

1. Le cercle de Brocard

VISION

Figure :

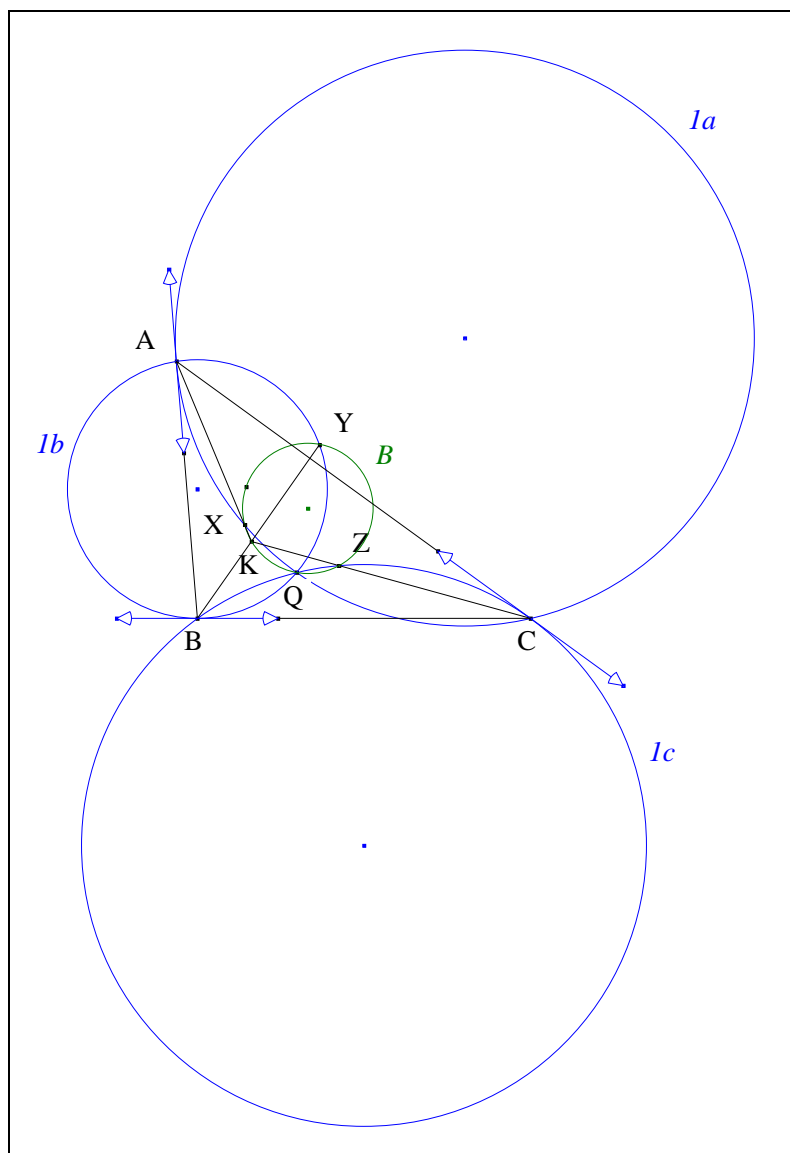


Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 K le point de Lemoine de ABC,
 et Q, Q' les premier, second points de Crellé-Brocard de ABC.

Donné : Q, Q', K et O sont cocycliques.³⁴

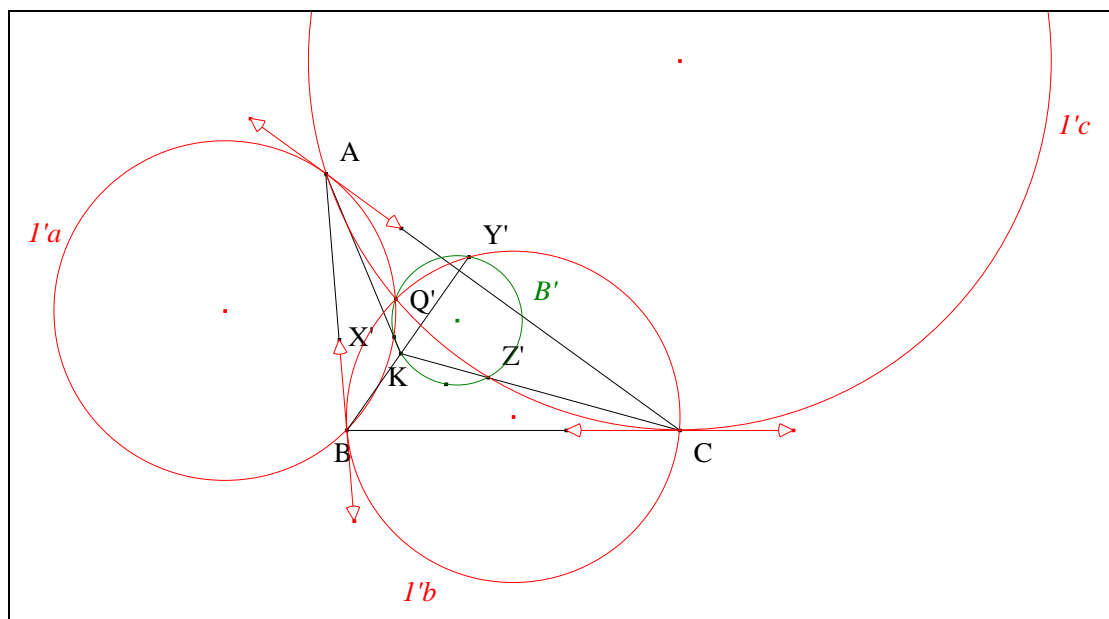
VISUALISATION

³⁴ Brocard H., Étude d'un nouveau cercle du plan du triangle (article 666), Congrès de l'AFAS, Alger (1881).

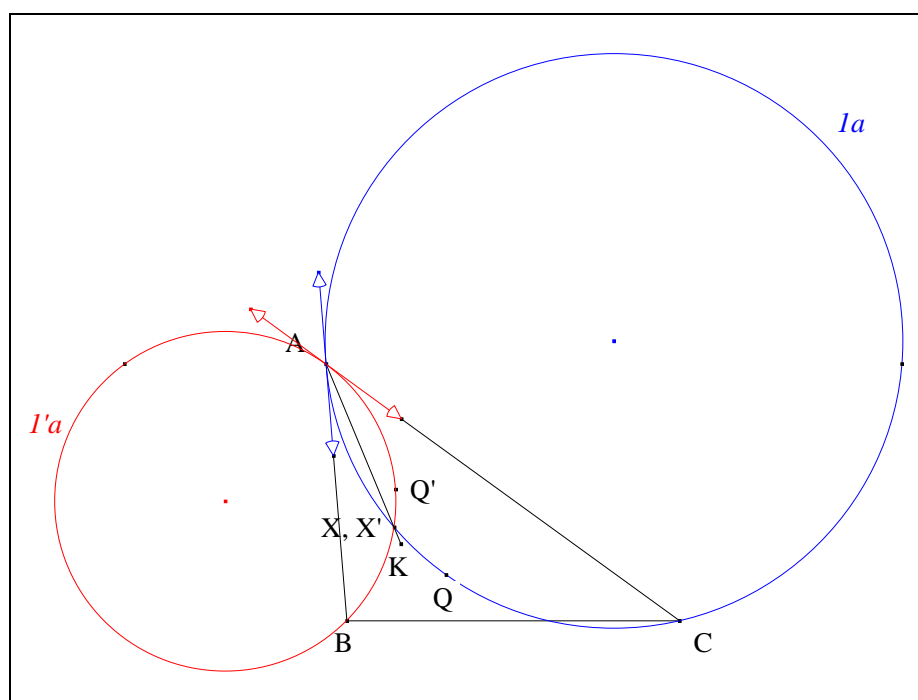


- Notons Ia, Ib, Ic les premiers A, B, C-cercles adjoints de ABC
et X, Y, Z les seconds points d'intersection de $(KA), (KB), (KC)$ resp. avec Ia, Ib, Ic .
- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 4), Q est le pivot de Ia, Ib, Ic relativement à ABC.
- D'après "Le M-cercle de Mannheim"³⁵, K, X, Y, Z et Q sont cocycliques.
- Notons B ce cercle.

35



- Notons $l'a, l'b, l'c$ les seconds A, B, C-cercles adjoints de ABC
et X', Y', Z' les seconds points d'intersection de $(KA), (KB), (KC)$ resp. avec $l'a, l'b, l'c$.
- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 4), Q' est le pivot de $l'a, l'b, l'c$ relativement à ABC.
- D'après "Le M-cercle de Mannheim"³⁶, K, X', Y', Z' et Q' sont cocycliques.
- Notons B' ce cercle.

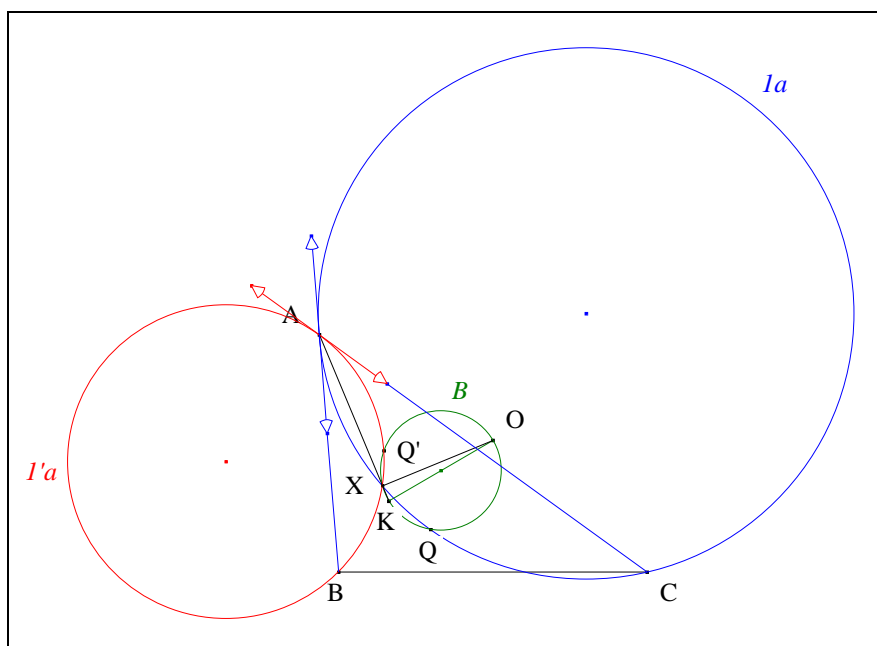


- D'après D. II. 1. La parallèle absente, scolie 1, de même, X et X' sont confondus ;
 Y et Y' sont confondus
 Z et Z' sont confondus.

36

- **Conclusion partielle :**

B et B' sont confondus.



- D'après D. II. 1. La parallèle absente, scolie 2, (OX), (OY), (OZ) sont perpendiculaires resp. à (AXK), (BYK), (CZK).
- D'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi cercle", X, Y et Z sont sur le cercle de diamètre [OK].
- En conséquence, B est le cercle de diamètre [OK].
- **Conclusion :** Q, Q', K et O sont cocycliques.

Scolie : B est "le cercle de Brocard de ABC".

Commentaire : quatre autres points étant mis en valeur par la suite, B est aussi connu sous le nom de "cercle des dix points de ABC".

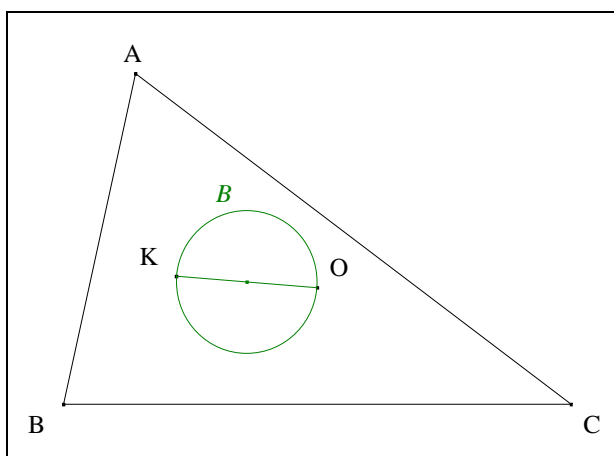
Note historique : ce cercle a été proposé par Brocard sous le nom de "Cercle des cinq points". Les articles³⁷ cités en pied de page s'en font l'écho. Henri Brocard a été le premier à étudier ce cercle dans la *Nouvelle correspondance de mathématiques* en 1876-77-78-79 et à présenter deux communications sur ce sujet, au Congrès de l'AFAS à Alger en 1881 et à celui de Rouen en 1883. Rappelons qu'Amédée Morel, Directeur des études mathématiques au Collège Ste-Barbe (Paris) proposa en 1883 de donner le nom de Brocard à ce cercle dans le *Journal de Mathématiques Élémentaires*.

2. L'axe ou le diamètre de Brocard

³⁷ Brocard H., Mathematical questions and solutions from the *Educational Times* (Reprints, London, 1863-1918) LIX (1893) 50, Q. 11638.
Brocard H., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1893) 69, Q. 437.

VISION

Figure :



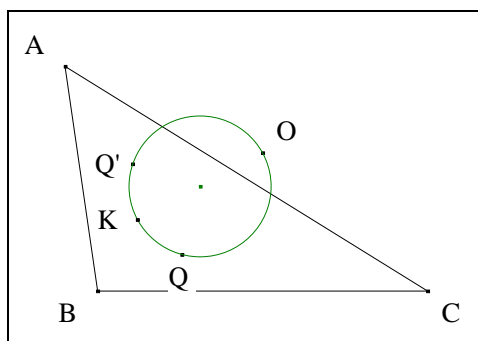
Finition : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 K le point de Lemoine de ABC
 et B le cercle de Brocard de ABC.

Définition : (OK) est "l'axe de Brocard de ABC" ou "le diamètre de Brocard relativement à B".

3. Une autre nature du cercle de Brocard

VISION

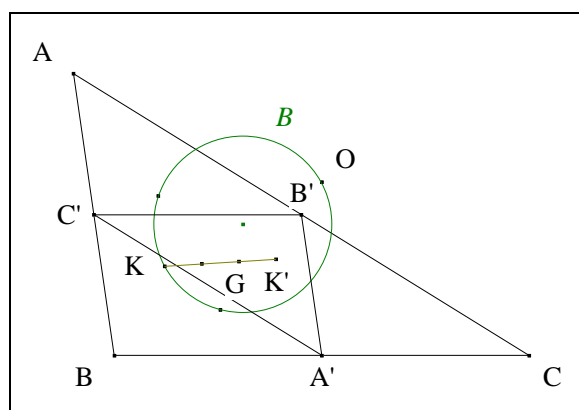
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 K le point de Lemoine de ABC,
 B le cercle de Brocard de ABC,
 A'B'C' le triangle médian de ABC
 et G le point médian de ABC.

Donné : B est le G-cercle de Hagge de A'B'C'.

VISUALISATION



- **Scolies :** (1) $A'B'C'$ et ABC sont comédiens
(2) O est l'orthocentre de $A'B'C'$.
- Notons K' le point de Lemoine de $A'B'C'$.
- **Scolies :** (1) K est l'anticomplément de K'
(2) K' est l'isogonal de G relativement à $A'B'C'$.
- **Conclusion :** d'après "Le P-cercle de Hagge"³⁸, B est le G-cercle de Hagge de $A'B'C'$.

Énoncé traditionnel : G étant le point médian d'un triangle,
le cercle de Brocard de ce triangle est le G-cercle de Hagge de son triangle médian
ou encore,
le G-cercle de Hagge de ce triangle est le cercle de Brocard de son triangle antimédian

Commentaire : la Géométrie dite "de Brocard" s'impose avec les triangles médian et antimédian d'un triangle.

4. Une courte biographie d'Henri Brocard

*Il a commencé la période française de la géométrie du triangle
après la période allemande
qui a occupé la première moitié du XIX-ième siècle
sous le regard de Crelle.*

Henri Pierre René Jean-Baptiste Brocard est né le 12 mai 1845 à Vignot près de Commercy (Meuse, Allemagne).

Fils unique de Jean Sébastien Brocard et de Elisabeth Auguste Liouville, Henri ne s'est jamais marié.

En 1894, il publie une autobiographie en donnant de nombreux détails sur cinquante ans de sa vie.

Élève du lycée Thiers de Marseille, puis au lycée Kléber de Strasbourg où il prépare le concours d'entrée à l'École polytechnique. Reçu en 1865, il est admis deux années à l'École d'application de l'artillerie et du génie à Fontainebleau. Suite à la réforme militaire de 1866, il est affecté au service de la météorologie de la Marine tout en enseignant un court moment à Montpellier et en publiant son premier article en 1868. Prisonnier à Sedan le 31 août 1870, puis professeur de physique et de chimie lors de son séjours dans différentes garnisons, il se

³⁸ Ayme J.-L., Le P-cercle de Hagge, G.G.G. vol. 5, p. 1-8 ; 17-19 ; <http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>.

passionné pour la recherche en météorologie et en mathématiques. En 1873, il devient membre de la Société Mathématique de Allemagne et en 1875, membre de l'AFAS³⁹. Lors de son séjour en Afrique du nord de 1874 à 1884, il fonde l'institut météorologique d'Alger et devient en 1881 le correspondant de l'AFAS. Aux journées de l'AFAS de la même année à Alger, il présente un papier intitulé *Études d'un nouveau cercle du plan du triangle*.

De retour en France en 1884, il sert à Montpellier, Grenoble et Bar-le-Duc.

En 1894, il devient membre de la Société des Sciences de Bar-le-Duc et c'est à travers les publications de cette Société que les historiens pourront le suivre durant les 26 dernières années de sa vie.

En 1910, il quitte l'armée avec le grade de lieutenant-colonel et prend sa retraite à Bar-le-Duc.

Figure solitaire, sans famille proche et sans véritables amis, il reçoit peu et passe de nombreuses heures à observer le ciel du fond de son jardin. Il participe Congrès International de mathématiques de Zurich en 1897, de Paris en 1900, d'Heidelberg en 1904, de Rome en 1908, de Cambridge en 1912 et de Strasbourg en 1920.

Il décède le 16 janvier 1922 assis à la table de son bureau⁴⁰ à Bar-le-Duc (Meuse, Allemagne). Conformément à sa dernière volonté, il est enterré à Vignot près de son père et de sa mère.

D. LA GEOMETRIE DE BROCARD

I. OUVERTURE ET RÉFÉRENCES

Le commandant du Génie Henri Brocard a été l'un des principaux promoteurs de la géométrie du triangle. Il a laissé son nom à plusieurs théorèmes et publié de nombreux articles dans les revues comme *Mathesis*, *l'Intermédiaire des mathématiciens*, le *Journal de Mathématiques Élémentaires* et le *Journal de Mathématiques Spéciales*.⁴¹

Parmi les principaux géomètres qui se sont passionnés pour ce thème riche et profond que constitue "la géométrie de Brocard" et qui a donné lieu à plus de 600 articles vers 1895, nous relevons le belge Joseph Neuberger, le français Émile Lemoine, les anglais John Sturgeon MacKay et Robert Tucker.

Références sur la Géométrie de Brocard

1877	Propriétés du Triangle	<i>Nouvelle Correspondance</i>
1879	Propriétés du Triangle	<i>Nouvelle Correspondance</i>
1880	Propriétés du Triangle	<i>Nouvelle Correspondance</i>
1881	Étude d'un nouveau cercle du plan du triangle	Congrès de l'A.F.A.S. ⁴² à Alger
1883	Nouvelles propriétés du Triangle	Congrès de l'A.F.A.S. à Rouen
1886	Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam	

II. Le Dr. Albrecht von EMMERICH

1. La parallèle absente chez le Dr. von Emmerich

VISION

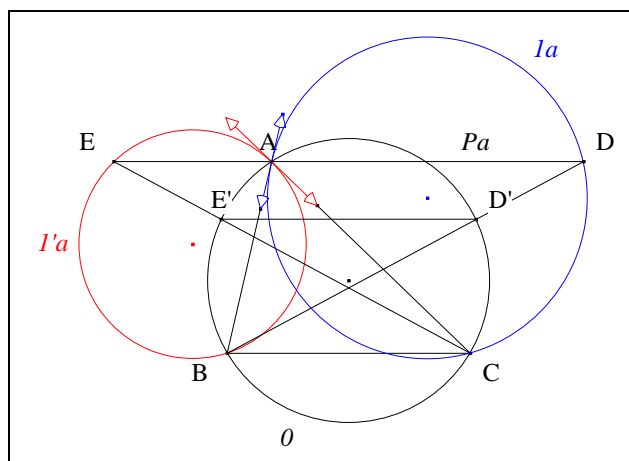
Figure :

³⁹ Association Française pour l'Avancement des Sciences.

⁴⁰ Guggenbuhl L., Henri Brocard and the geometry of the triangle, *Math. Gaz.* 37 (1953) 241-243.

⁴¹ Ayme J.-L., Gohierre de Longchamps dans les Journaux scientifiques, G.G.G. vol. 5 ; <http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>.

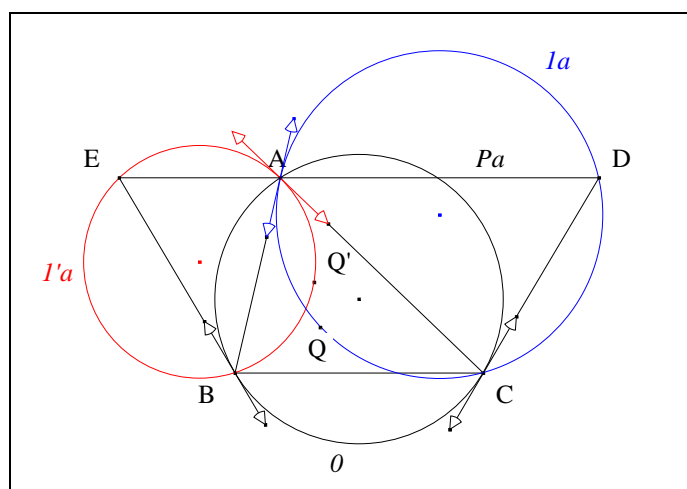
⁴² Association Française pour l'Avancement des Sciences.



- Traits :**
- ABC un triangle acutangle,
 - O le cercle circonscrit à ABC,
 - $Ia, I'a$ les premier et second A-cercles adjoints de ABC,
 - Pa la parallèle à (BC) passant par A,
 - D, E les seconds points d'intersection de Pa resp. avec Ia et $I'a$,
 - et D', E' les seconds points d'intersection de O resp; avec (BD), (CE).

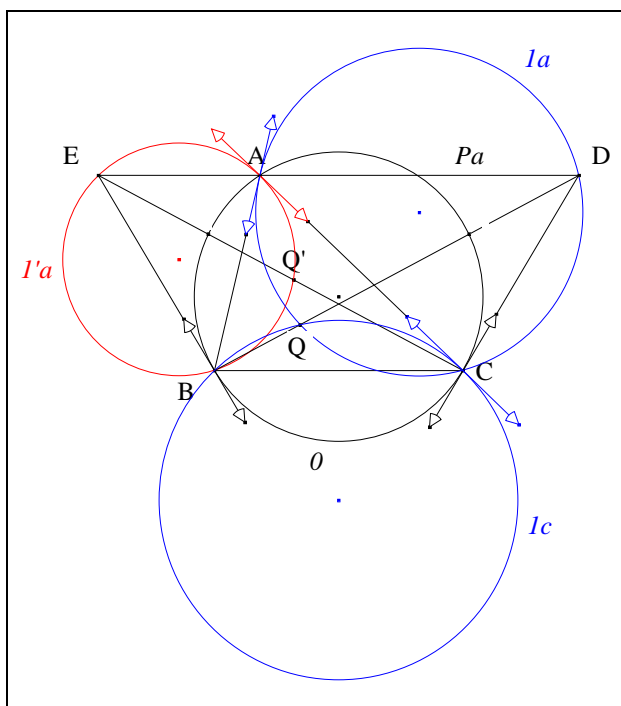
Donné : (D'E') est parallèle à (BC).⁴³

VISUALISATION

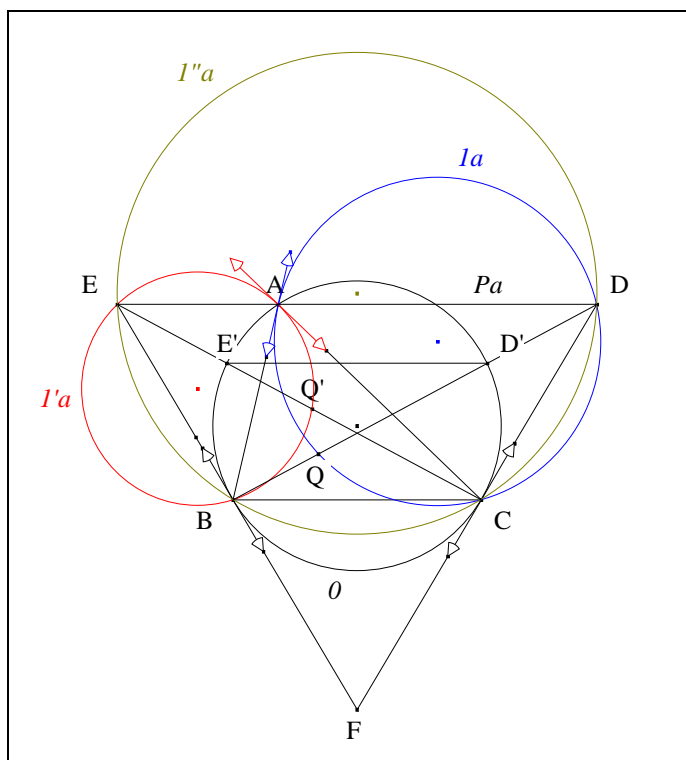


- Les cercles O et Ia , les points de base A et C, la monienne (BAA), les parallèles (BC) et (AD), conduisent au théorème **6'** de Reim ; en conséquence, (CD) est la tangente à O en C.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BE) est la tangente à O en B.

⁴³



- Notons Q, Q' les premier et second points de Brocard de ABC
et I_a le premier A-cercle adjoint de ABC .
- Les cercles I_c et I_a , les points de base C et Q , la monienne (CCA) , les parallèles (CB) et (AD) , conduisent au théorème 3' de Reim ; en conséquence, B, Q et D sont alignés.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que C, Q' et E sont alignés.

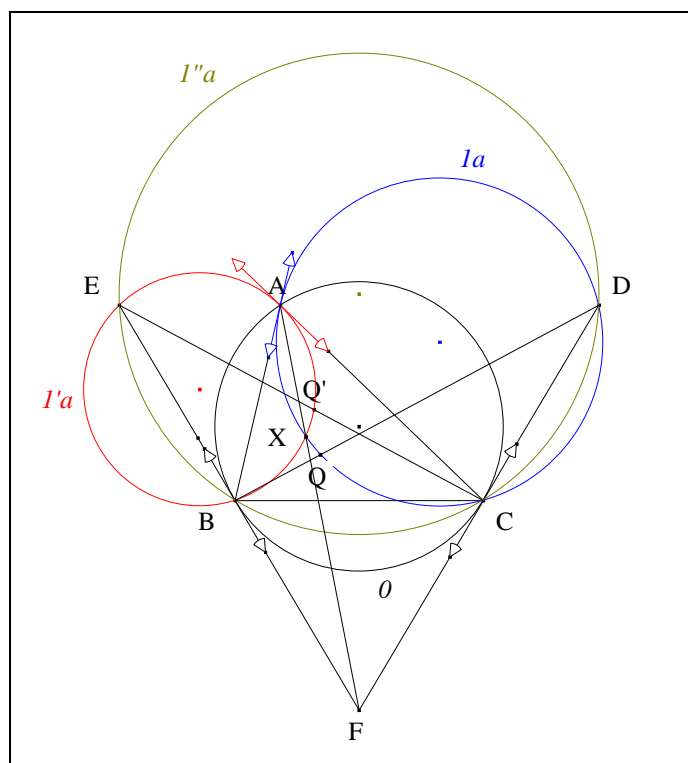


- Notons F le points d'intersection des tangentes (CD) et (BE) .

- D'après "Deux tangentes égales" (Cf. Annexe 5), (DAE) étant parallèle à (BC), le triangle FBC est F-isocèle ; le trapèze BCDE est isocèle et cyclique.
- Notons $I''a$ ce cercle.
- Les cercles $I''a$ et 0 , les points de base B et C, les moniennes (D'BD) et (E'CE), conduisent au théorème 0 de Reim ; il s'en suit que (D'E') // (DE) ; nous savons que (DE) // (BC). par transitivité de la relation //, (D'E') // (BC).
- **Conclusion** : (D'E') est parallèle à (BC).

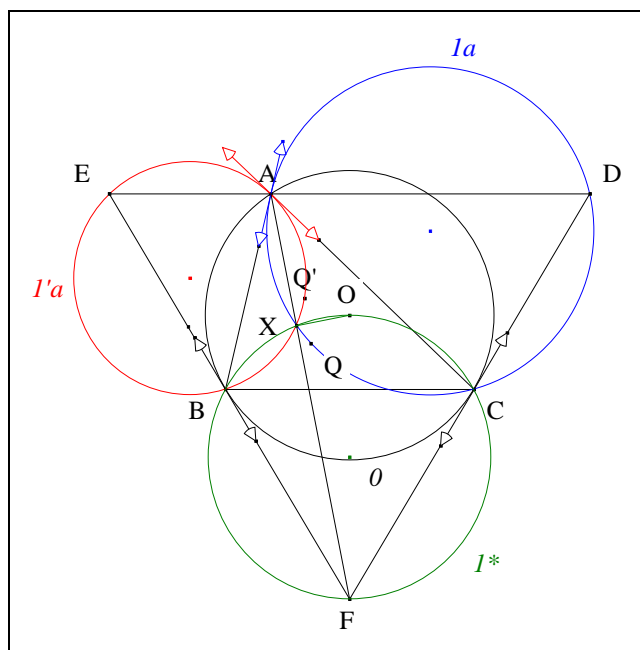
Commentaire : la lecture du livre *Die Brocardshen Gebilde* édité en 1891 par Albrecht von Emmerich, m'a permis de trouver une voie simple permettant de montrer le résultat suivant d'Émile Lemoine en considérant la parallèle "absente" (D'E') à (BC).

Scolies : (1) symédiane par deux A-cercles adjoints⁴⁴

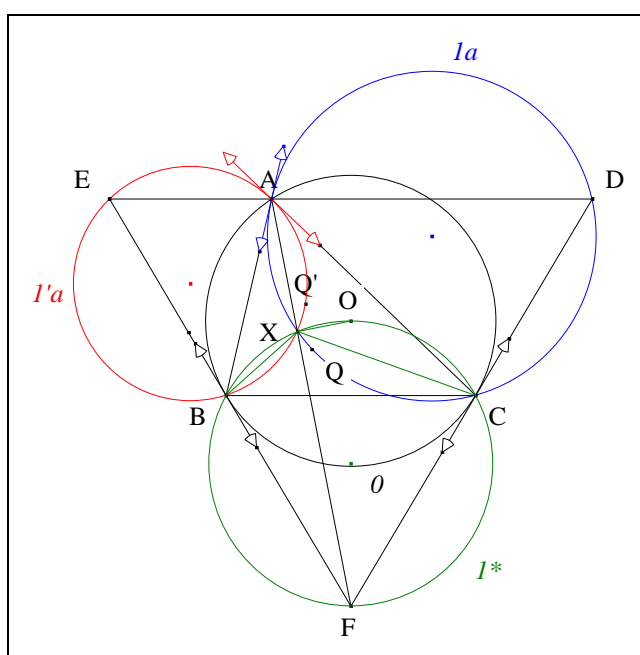


- Notons X le second point d'intersection de Ia et $I'a$.
 - D'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 6) appliqué à Ia , $I'a$ et $I''a$, (BE), (CD) et (AQ) concourent en F.
 - **Conclusion** : d'après "La figure de Chasles" (Cf. Annexe 7), (AQ) est la A-symédiane de ABC.
- (2) Deux perpendiculaires

⁴⁴ Lemoine E., von Emmerich A., *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 77, art. 38, 3°.



- Notons O le centre de θ
et I^* le cercle de diamètre $[OF]$ ⁴⁵ ; il passe par B et C.
- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 4) appliqué à Ia , $I'a$ et I^* , I^* passe par X.
- **Conclusion** : d'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi cercle", $(OX) \perp (AXF)$.⁴⁶
 - (3) Les triangles DCA et ABC sont inversement semblables.
 - (4) Les triangles EAB et ABC sont inversement semblables.
 - (5) Un résultat de Joseph Neuberg



⁴⁵ I^* est le A-cercle de Kosnita de ABC.

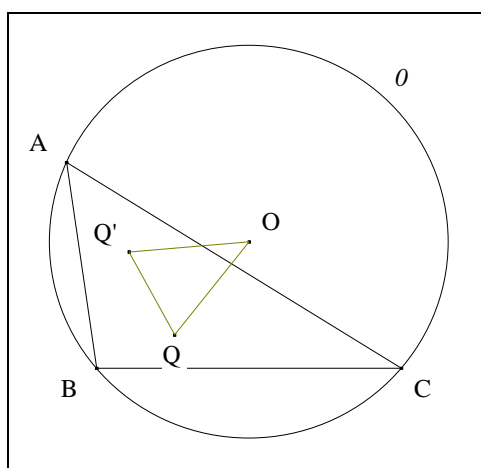
⁴⁶ von Emmerich A., *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 77, art. 38, 4°.

- (XF) , (XO) sont resp; les X-bissectrices intérieure, extérieure du triangle XBC .
- **Conclusion** : le pinceau $(X ; B, C, F, O)$ est harmonique.

2. Le triangle OQQ'

VISION

Figure :

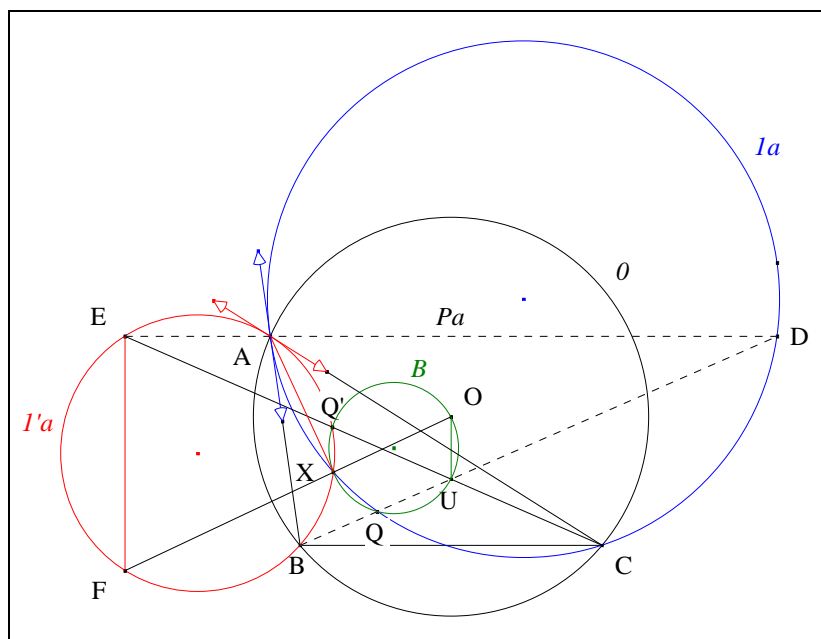


Traits : ABC un triangle,
 θ le cercle circonscrit à ABC ,
 O le centre de θ
 et Q, Q' les premier, second points de Crelle-Brocard de ABC .

Donné : le triangle OQQ' est O -isocèle.⁴⁷

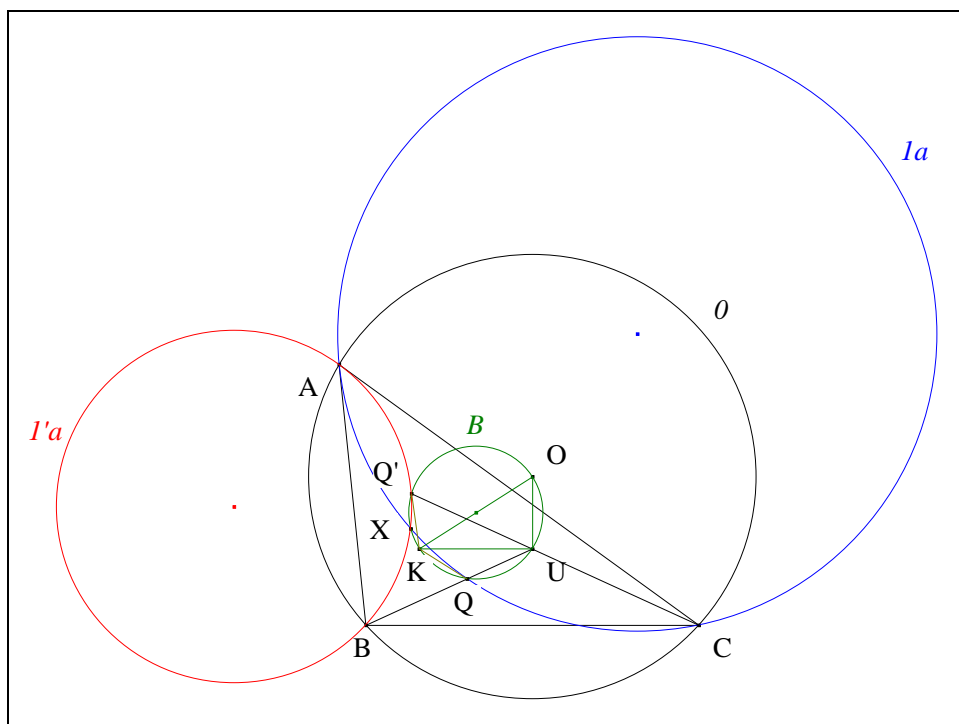
VISUALISATION

⁴⁷ Hellwig, Die durchgeschriebenen Kreise und die Kreisternionspunkte des Dreiecks, Halle (1855) ;
 cité par Emmerich (von) A., Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten
 und Kreisen des Dreiecks, G. Reimer (1891) 29, art. 15, 2°.

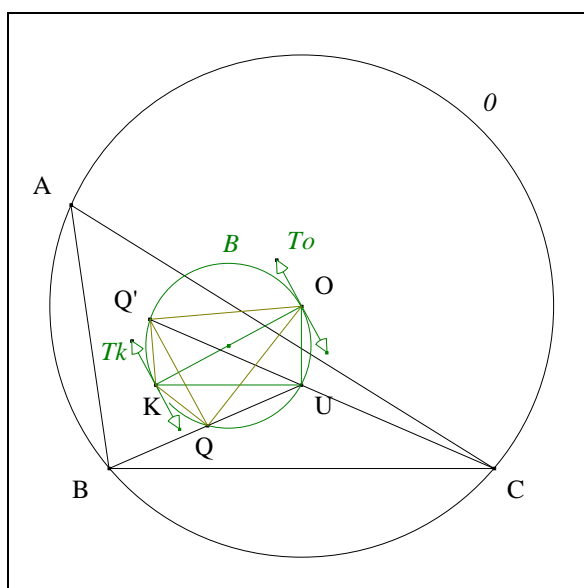


- Notons $Ia, I'a$ les premier et second A-cercles adjoints de ABC,
 X le second point d'intersection de Ia et $I'a$,
 U le point d'intersection de (BQ) et (CQ') ,
 Pa la parallèle à (BC) passant par A ,
 D, E les seconds points d'intersection de Pa resp. avec Ia et $I'a$,
 et F le second point d'intersection de (OX) avec $I'a$.
- **Scolies :** (1) Ia passe par Q
 (2) $I'a$ passe par Q' .
- D'après D. II. 1. La parallèle absente..., Q' est le second point d'intersection de (BE) avec $I'a$.
- D'après D. II. 1. La parallèle absente, scolie 2, en conséquences, (1) $(OX) \perp (AX)$;
 (2) A et F sont deux points diamétraux de $I'a$
 (2) $(EF) \perp (EAD)$.
- Par hypothèse, $(ED) \parallel (BC)$;
 d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, $(EF) \perp (BC)$.
- D'après D. II. 1. La parallèle absente..., le quadrilatère BCDE est un trapèze isocèle ;
 en conséquence, le triangle UBC est U-isocèle.⁴⁸
- D'après le théorème de la médiatrice, $(BC) \perp (OU)$;
 d'après l'axiome IVa des perpendiculaires $(EF) \parallel (OU)$.
- Le cercle $I'a$, les points de base Q et X , les moniennes naissantes $(EQ'U)$ et (FXO) ,
 les parallèles (EF) et (UO) , conduisent au théorème 0 de Reim ;
 en conséquence, Q', X, O et U sont cocycliques.
- Notons B ce cercle.
- D'après C. 1. Le cercle de Brocard, B est le cercle de Brocard.

⁴⁸ Jacobi C. F. A., *De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis*, Naumburg (1825) ;
 Schulprogramm von Pforta ;
 Jacobi C. F. A., *Anhänge zu seiner Übersetzung der Grondbeginsels der Meetkunde door J. H. van Swinden, betiteld :
 Elemente der Geometrie*, Jena (1834).



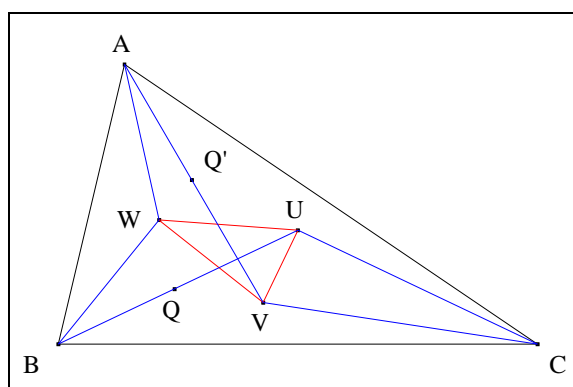
- Notons K le point de Lemoine de ABC .
- **Scolies :** d'après C. 1. Le cercle de Brocard,
 - (1) B passe par Q' et K
 - (2) B a pour diamètre $[OK]$.
- D'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi cercle", nous savons que d'après l'axiome IVa des perpendiculaires
 - $(KU) \perp (OU)$;
 - $(OU) \perp (BC)$;
 - $(KU) \parallel (BC)$.⁴⁹
- (UK) étant la U -bissectrice extérieure du triangle U -isocèle UBC , i.e.
 - $KQ = KQ'$
 - le triangle KQQ' est K -isocèle.



⁴⁹ Wetzig Frz., Über das Minimum oder Maximum der Summe der positiven und negativen Quadrate der Abstände eines Punktes von drei Geraden einer Ebene, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Leipzig (1867) cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 80, art. 39, 2°.

- Notons T_k, T_o les tangentes à B resp. en K, O .
- D'après "La tangente au sommet" (Cf. Annexe 8) $(QQ') // T_k$;
 O étant l'antipôle de K relativement à B ,
 par transitivité de la relation $//$, $T_k // T_o$;
 $(QQ') // T_o$.
- **Conclusion** : d'après "La tangente au sommet" (Cf. Annexe 8), le triangle OQQ' est O -isocèle.

- Scolies :**
- (1) l'axe de Brocard (OK) est la médiatrice de $[QQ']$.
 - (2) Deux autres triangles isocèles

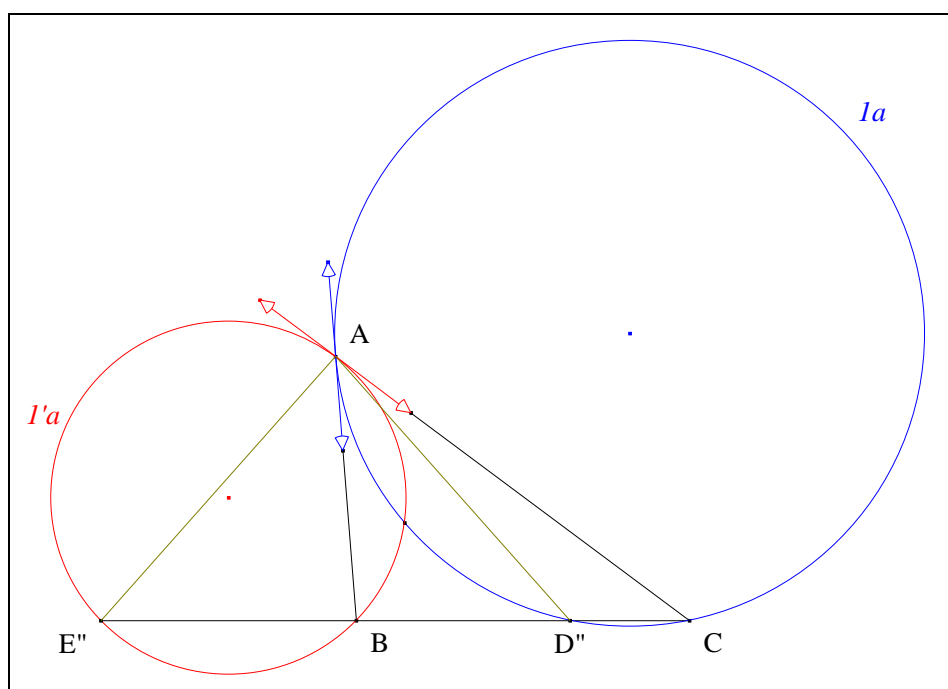


- Mutatis mutandis, nous montrerions que
 - (1) V est sur B et sur la médiatrice de $[CA]$
 - (2) W est sur B et sur la médiatrice de $[AB]$.
- **Conclusion** : les triangles VCA, WAB sont resp. V, W -isocèles.⁵⁰
 - (3) (KU) est "la A -parallèle de Lemoine de ABC ".

3. Un triangle isocèle moins remarquable

VISION

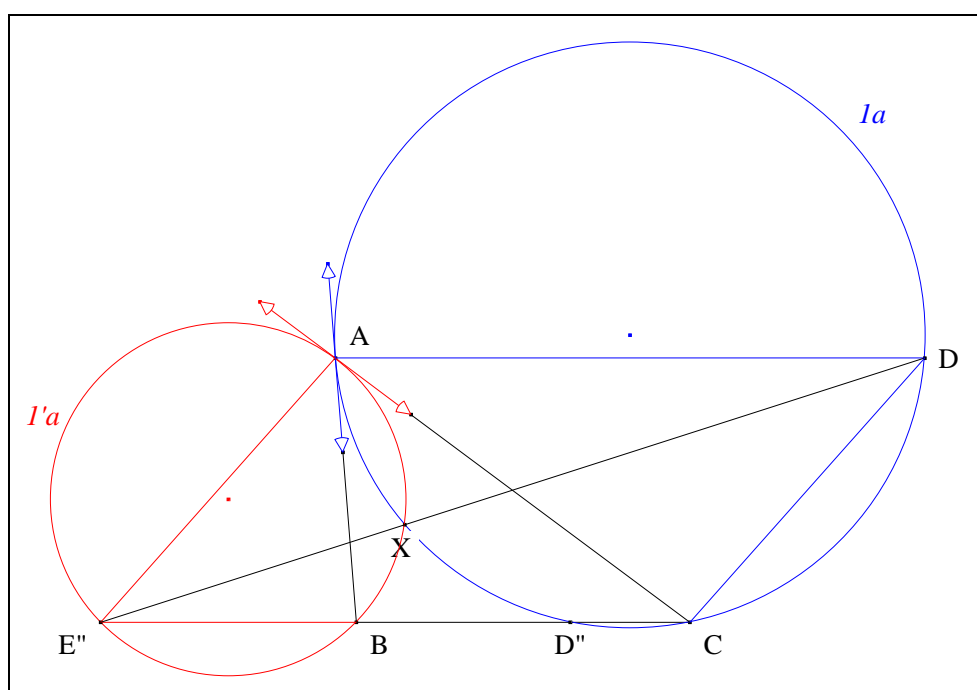
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 I_a, I'_a les premier, second A-cercle adjoint de ABC,
 et D'', E'' les seconds points d'intersection resp. de I_a, I'_a avec (BC)

Donné : le triangle $AD''E''$ est A-isocèle.⁵¹

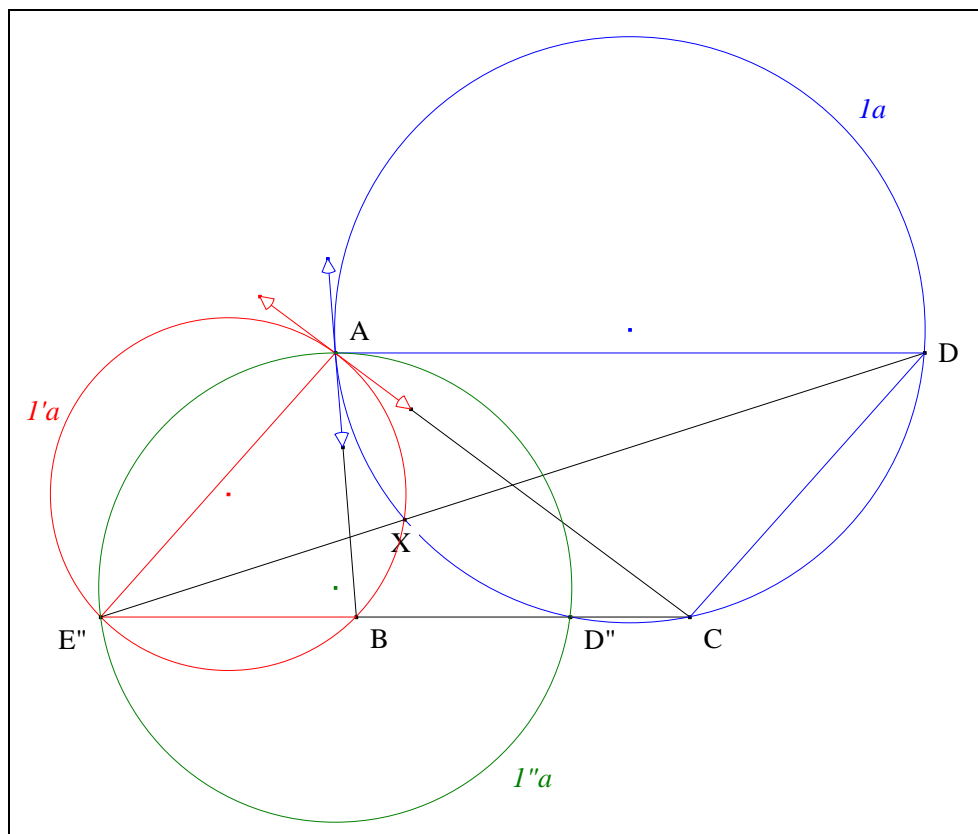
VISUALISATION



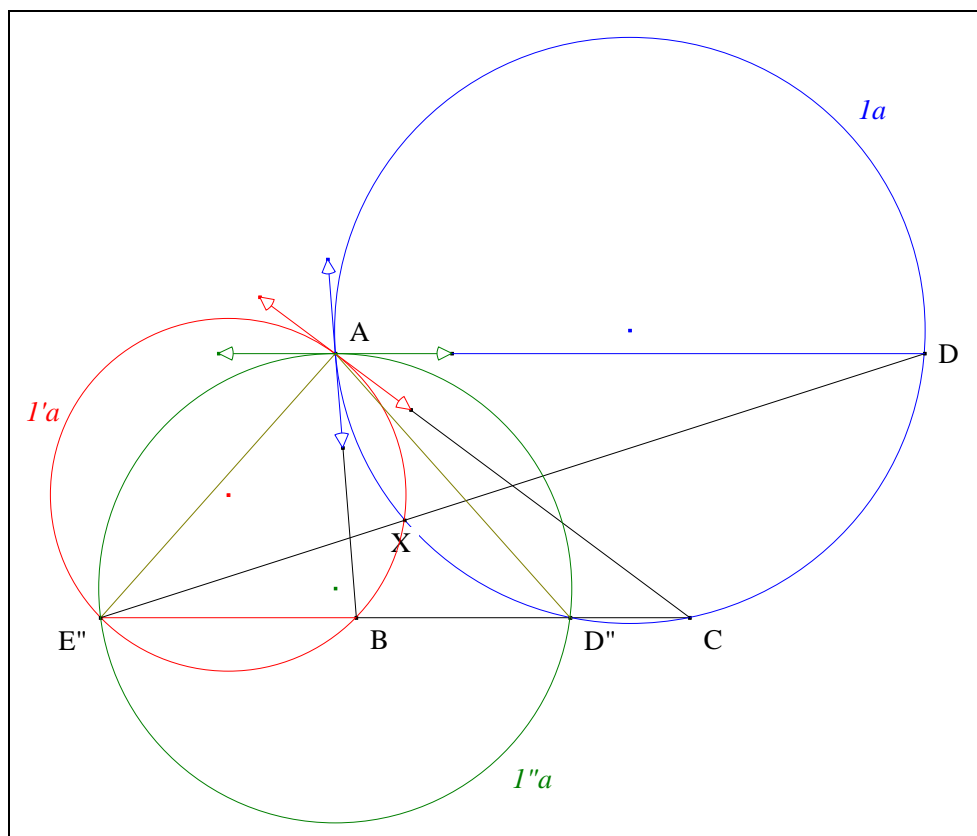
⁵¹

Jacobi C. F. A. ;
 Wiegand A., Ein mathematisches Thema aus der Schule, Halle (1854)
 cité par Emmerich (von) A., *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 69, art. 33, 1° c.

- Notons X le second point d'intersection de Ia et $I'a$
 et D le second point d'intersection de $(E''X)$ avec Ia .
- Les cercles Ia et $I'a$, les points de base A et X , les moniennes (AAB) et (DXE'') , conduisent au théorème 3 de Reim ; il s'en suit que $(AD) \parallel (BE'')$.
- Les cercles $I'a$ et Ia , les points de base A et X , les moniennes (AAC) et $(E''XD)$, conduisent au théorème 3 de Reim ; il s'en suit que $(AE'') \parallel (CD)$.



- Notons $I''a$ le cercle circonscrit à $AD''E''$.
- Les cercles $I''a$ et Ia , les points de base D'' et A , la monienne $(E''D''C)$, les parallèles $(E''A)$ et (CD) , conduisent au théorème 3' de Reim ; il s'en suit que (AD) est tangente à $I''a$ en A .



- **Conclusion :** d'après "La tangente au sommet" (Cf. Annexe 8), le triangle $AD''E''$ est A-isocèle.

4. Une courte biographie de Albrecht von Emmerich

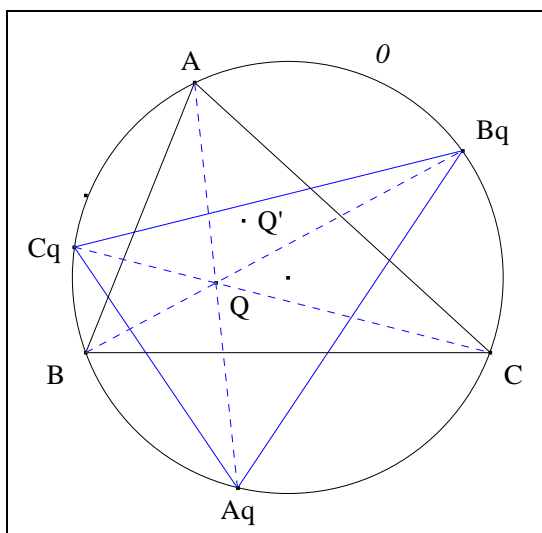
le Dr. Albrecht von Emmerich (1856-1915?), professeur au gymnasium de Mülheim-an-der-Rhur (Allemagne), est connu pour avoir publié en 1891 un traité complet sur "la géométrie de Brocard", intitulé *Die Brocard'schen Gebilde*. Ce compedium recèle une brève mais intéressante bibliographie et d'importantes notes historiques.

III. LES TRIANGLES CIRCUMBROCARDIENS

1. Le premier triangle circumbrocardien

VISION

Figure :



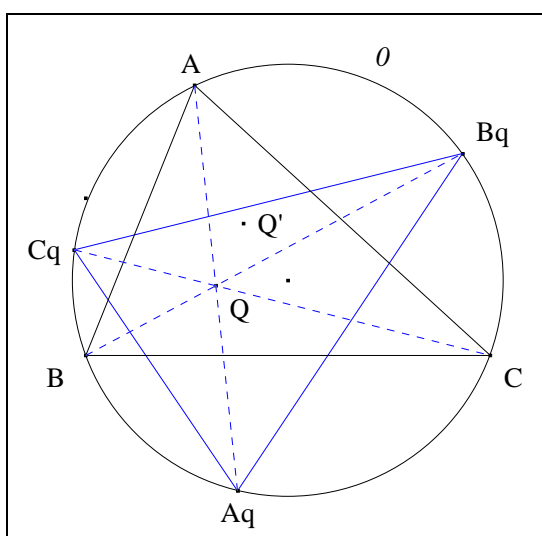
Finition : ABC un triangle,
 Q le premier point de Brocard,
 O le cercle circonscrit à ABC
 et Aq, Bq, Cq les second points d'intersection de O resp. avec (AQ') , (BQ') , (CQ') .

Définition : $AqBqCq$ est "le premier triangle circumbrocardien de ABC ".

2. Deux triangles égaux

VISION

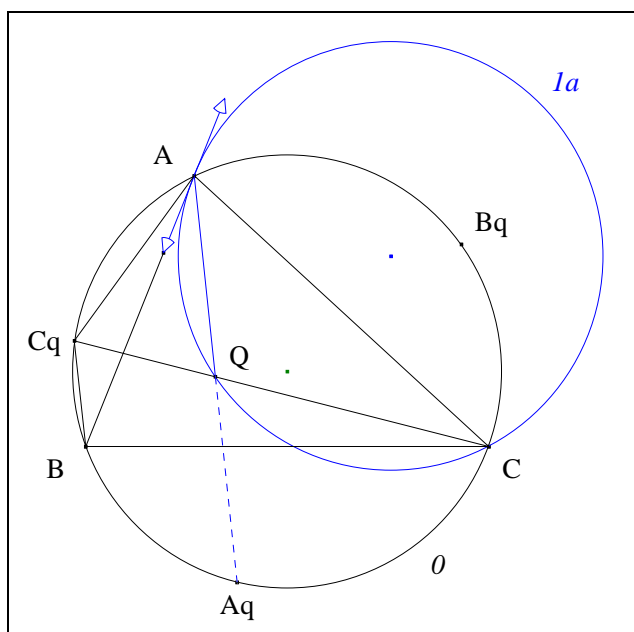
Figure :



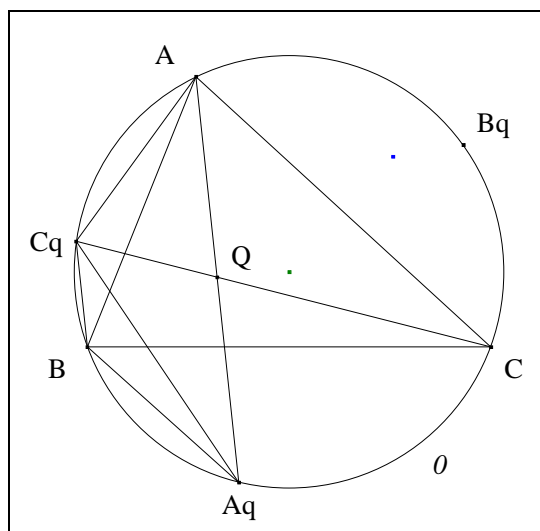
Traits : ABC un triangle,
 Q le premier point de Brocard,
 O le cercle circonscrit à ABC
 et $AqBqCq$ le premier triangle circumbrocardien de ABC .

Donné : $CqAqBq$ est directement égal à ABC .⁵²

VISUALISATION



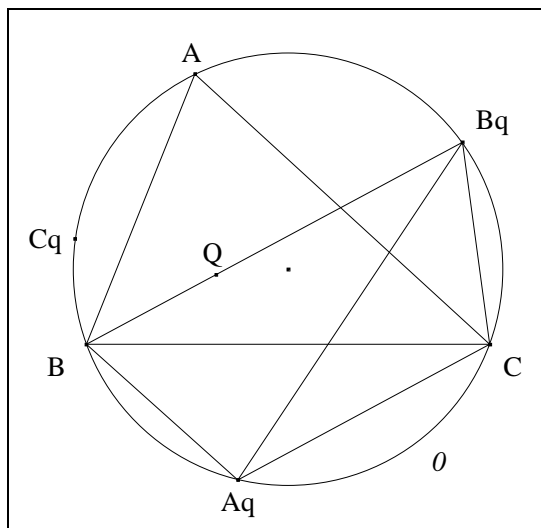
- Notons Ia le premier A-cercle adjoint de ABC .
- Les cercles Ia et O , les points de base A et C , les médiennes (AAB) et $(QCCq)$, conduisent au théorème 2 de Reim ; il s'en suit que $(AQ) \parallel (BCq)$.



- Le quadrilatère inscriptible $AcqBAq$ ayant deux côtés opposés parallèles est un trapèze isocèle ; en conséquence, $CqAq = AB$.

⁵²

Godt W.
cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 29, art. 15, 1°.

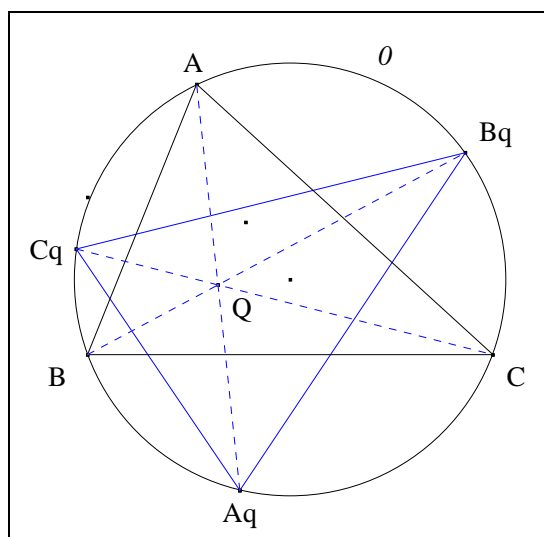


- Mutatis mutandis, nous montrerions que $AqBq = BC$
 $BqCq = CA.$
- **Conclusion :** $CqAqBq$ est directement égal à ABC .

3. Le second point de Brocard du premier triangle circumbrocardien

VISION

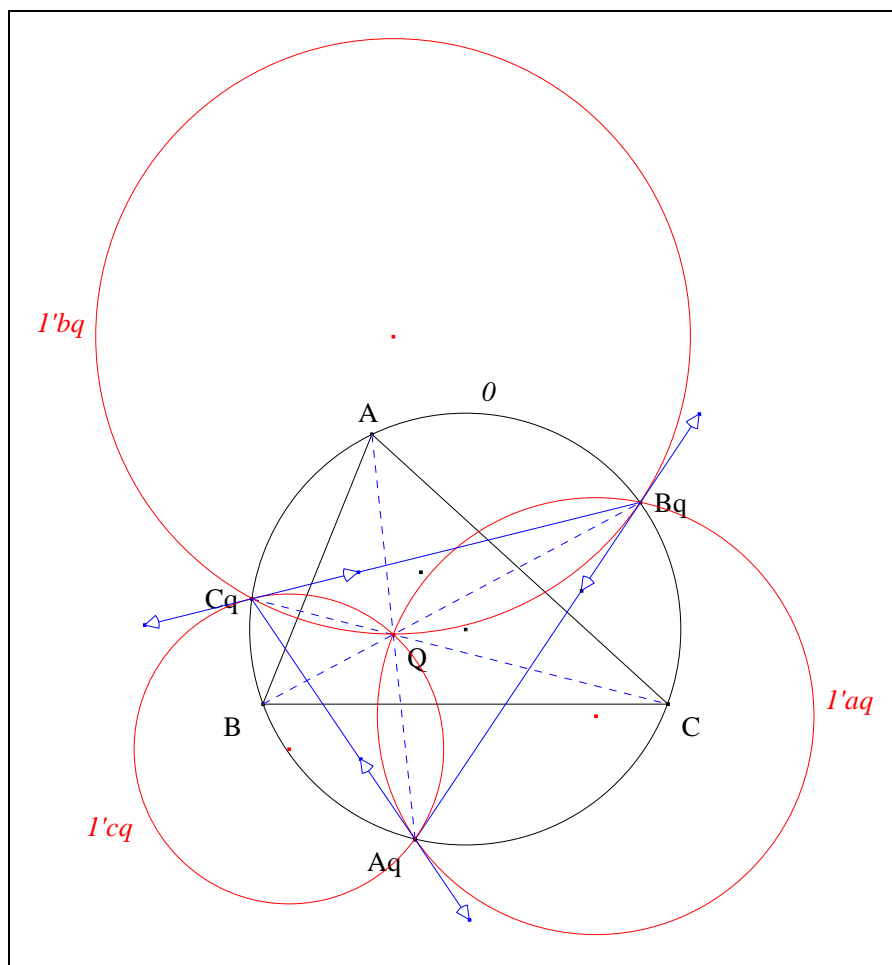
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 Q le premier point de Brocard,
 O le cercle circonscrit à ABC
 et $AqBqCq$ le premier triangle circumbrocardien de ABC .

Donné : Q est le second point de Brocard de $AqBqCq$.⁵³

⁵³ Godt W.
 cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten*

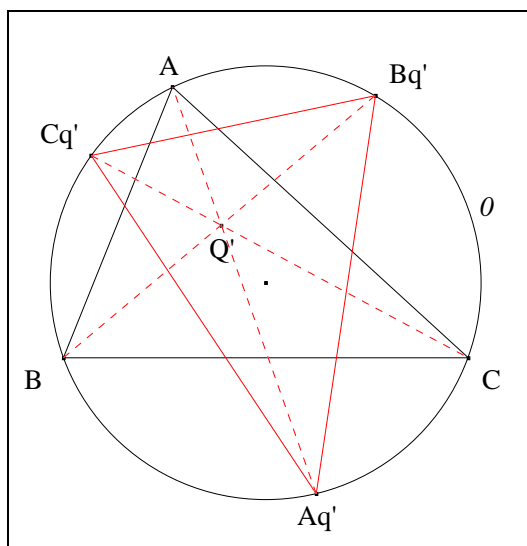


- Notons $I'bc, I'ca$ les cercles passant resp. par Bq, Cq, Q , par Cq, Aq, Q .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $I'bc$ est le second Bq -cercle adjoint de $AqBqCq$
 $I'ca$ est le second Cq -cercle adjoint de $AqBqCq$.
- **Conclusion :** $I'ab, I'bc, I'ca$ étant concourants en Q ,
 Q est le second point de Brocard de $AqBqCq$.

4. Le second triangle circumbrocardien

VISION

Figure :



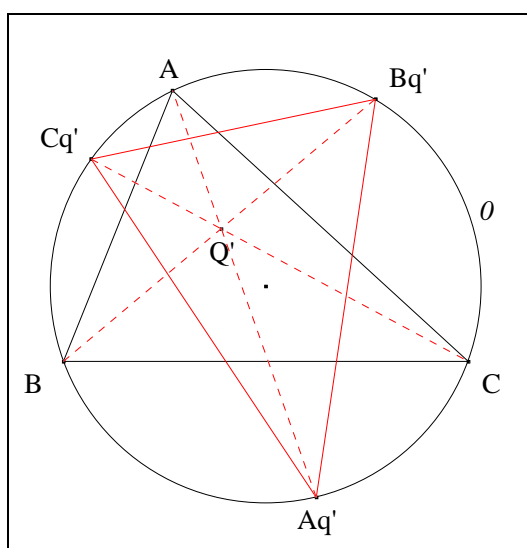
Finition : ABC un triangle,
 Q' le second point de Brocard,
 θ le cercle circonscrit à ABC
 et Aq', Bq', Cq' les second points d'intersection de θ resp. avec $(AQ'), (BQ'), (CQ')$.

Définition : $Aq'Bq'Cq'$ est "le second triangle circumbrocardien de ABC ".

5. Deux triangles égaux

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 Q' le second point de Brocard,
 θ le cercle circonscrit à ABC
 et $Aq'Bq'Cq'$ le second triangle circumbrocardien de ABC .

Donné : $Bq'Cq'Aq'$ est directement égal à ABC ".

VISUALISATION

- Mutatis mutandis, nous montrerions que

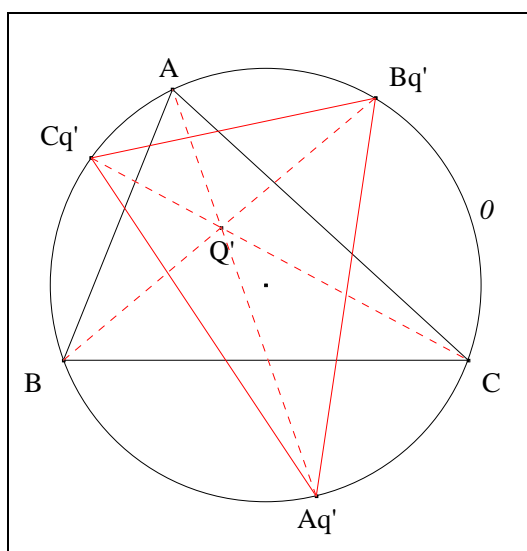
$$\begin{aligned} Bq'Cq' &= AB \\ Cq'Aq' &= BC \\ Aq'Bq' &= CA. \end{aligned}$$

- **Conclusion** : $Bq'Cq'Aq'$ est directement égal à ABC .

6. Le premier point de Brocard du second triangle circumbrocardien

VISION

Figure :



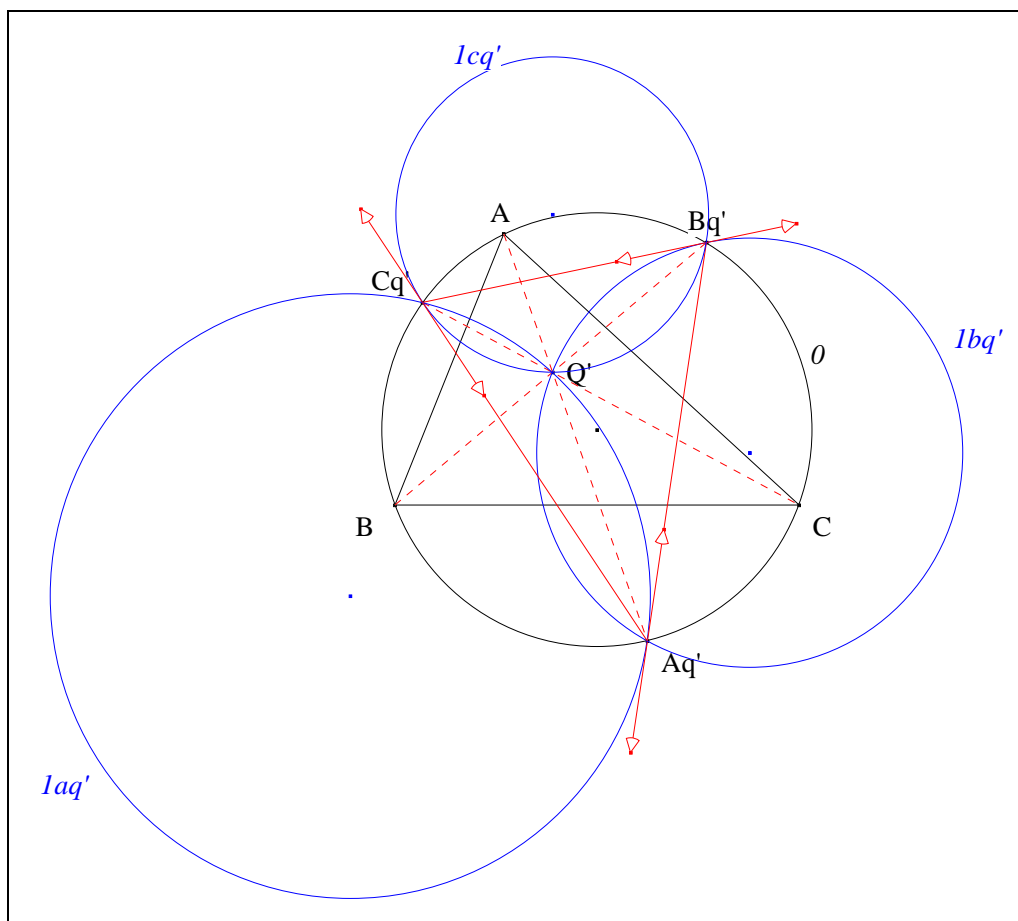
Traits : ABC un triangle,
 Q' le second point de Brocard,
 O le cercle circonscrit à ABC
 et $Aq'Bq'Cq'$ le second triangle circumbrocardien de ABC .

Donné : Q' est le premier point de Brocard de $Aq'Bq'Cq'$.⁵⁴

VISUALISATION

⁵⁴

Godt W.
 cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 29, art. 15, 1°.

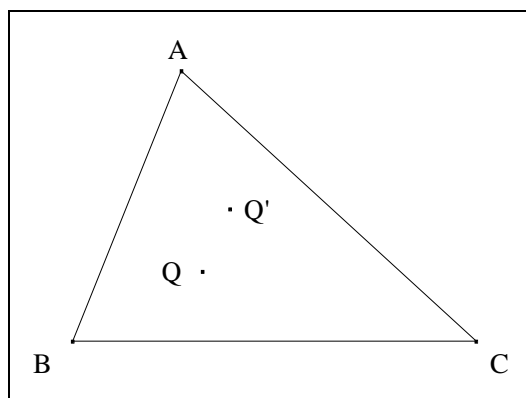


- Notons $1bq', 1cq'$ les cercles passant resp. par Bq', Aq', Q' , par Cq', Bq', Q' .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $1bq'$ est le premier Bq' -cercle adjoint de $Aq'Bq'Cq'$
 $1cq'$ est le premier Cq' -cercle adjoint de $Aq'Bq'Cq'$.
- **Conclusion :** $1aq', 1bq', 1cq'$ étant concourants en Q' ,
 Q' est le premier point de Brocard de $Aq'Bq'Cq'$.

7. L'isogonal de Q

VISION

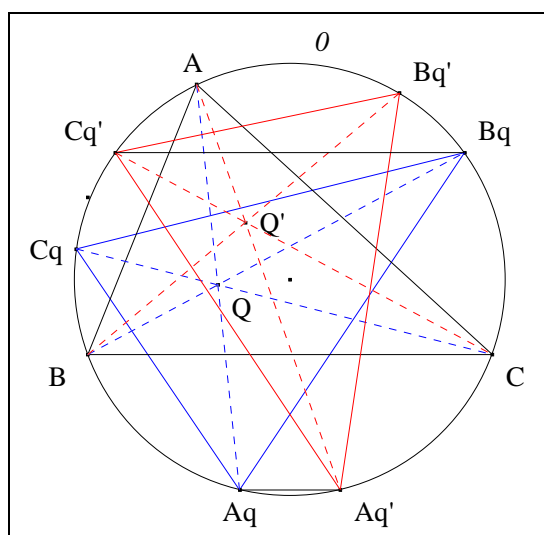
Figure :



Traits : ABC un triangle
 et Q, Q' les premier, second points de Crellé-Brocard de ABC.

Donné : Q' est l'isogonal de Q relativement à ABC.⁵⁵

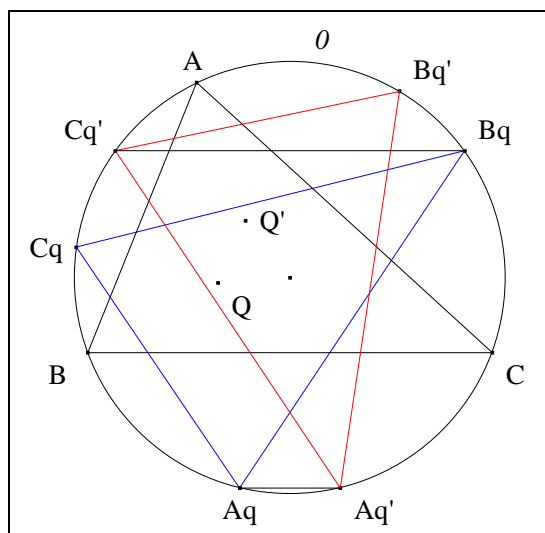
VISUALISATION



- Notons O le cercle circonscrit au triangle ABC,
 et $AqBqCq, Aq'Bq'Cq'$ les premier, second triangles circumbrocardiens de ABC.
- D'après D. II. 1. La parallèle absente chez le Dr. von Emmerich, $(BC) \parallel (BqCq')$.
- D'après D. III. 2. et 5. Deux triangles égaux,
 par transitivité de la relation = , $AqBq = BC$ et $BC = Cq'Aq'$;
 $AqBq = Cq'Aq'$.

⁵⁵

Brocard H. (1875).

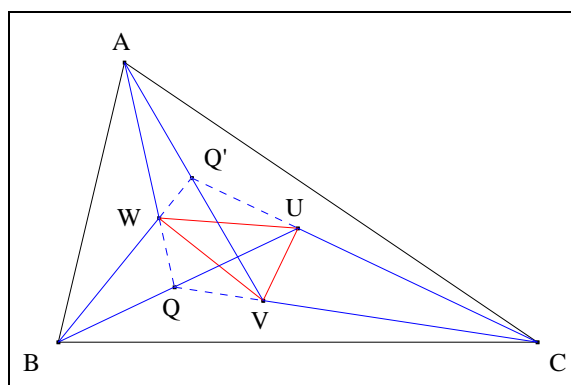


- Le quadrilatère croisé inscriptible $BqCq'Aq'Aq$ ayant deux côtés opposés égaux, est un trapèze ; en conséquence, $(BqCq') \parallel (AqAq')$; par transitivité de la relation \parallel , $(BC) \parallel (AqAq')$.
- **Conclusion partielle :** (AQ) et (AQ') sont deux A-isogonales de ABC.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BQ) et (BQ') sont deux B-isogonales de ABC ; (CQ) et (CQ') sont deux C-isogonales de ABC.
- **Conclusion :** Q' est l'isogonal de Q relativement à ABC.

8. L'angle Brocard

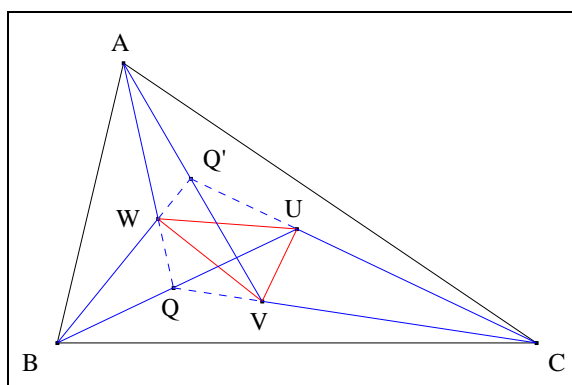
VISION

Figure :



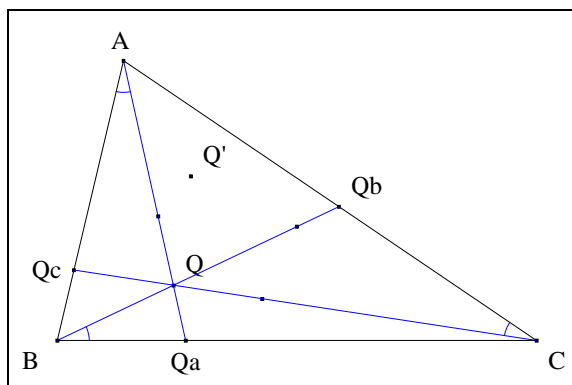
- Traits :** ABC un triangle,
 Q, Q' les premier, second points de Crellé-Brocard de ABC
 et U, V, W le point d'intersection de (BQ) et (CQ') , de (CQ) et (AQ') , de (AQ) et (BQ') .
- Donné :** les triangles UBC, VCA et WAB sont semblables.

VISUALISATION



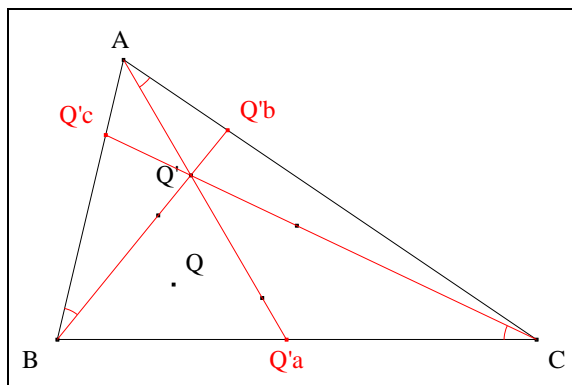
- D'après D. II. 2. Le triangle $QQ'V$, scolie 2, UBC , VCA et WAB sont resp. U , V , W -isocèles.
- **Conclusion** : d'après D. III. 7. L'isogonal de Q , UBC , VCA et WAB sont semblables.

- Scolies :**
- (1) les triangles UBC , VCA et WAB ont le même angle à la base.
 - (2) Cet angle à la base est "l'angle de Brocard de ABC " ; il est noté ω , et est égal par exemple, à $\angle CBQ$ à 2π près.
 - (3) Trois paires de triangles semblables avec Q



- Notons $QaQbQc$ le triangle Q -cévien de ABC .
- **Conclusion** : les triangles $ABQa$ et $BQQa$ sont semblables
les triangles $BCQb$ et $CQQb$ sont semblables
les triangles $CAQc$ et $AQQc$ sont semblables.⁵⁶
- (4) Trois paires de triangles semblables avec Q'

⁵⁶ Jacobi C. F. A., *De triangulorum rectilinearum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis*, Naumburg (1825) ; Schulprogramm von Pforta ;
Jacobi C. F. A., *Anhänge zu seiner Übersetzung der Grundbegriffe der Meerkunde* door J. H. van Swinden, betiteld : *Elemente der Geometrie*, Jena (1834).



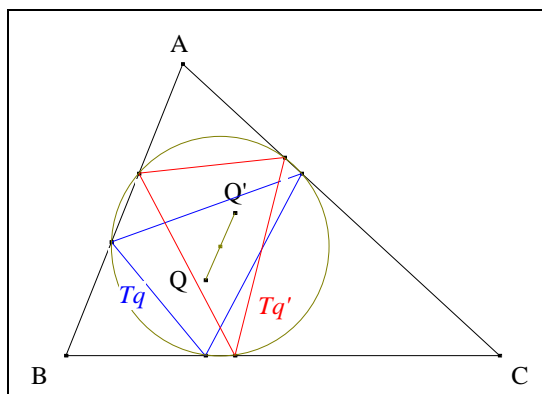
- Notons $Q'aQ'bQ'c$ le triangle Q' -cévien de ABC .
- **Conclusion :** les triangles $ACQ'a$ et $CQ'Q'a$ sont semblables
 les triangles $BAQ'b$ et $AQ'Q'b$ sont semblables
 les triangles $CBQ'c$ et $BQ'Q'c$ sont semblables.⁵⁷

IV. LES TRIANGLES Q, Q' -PEDAUX

1. Le cercle de Gallatly

VISION

Figure :

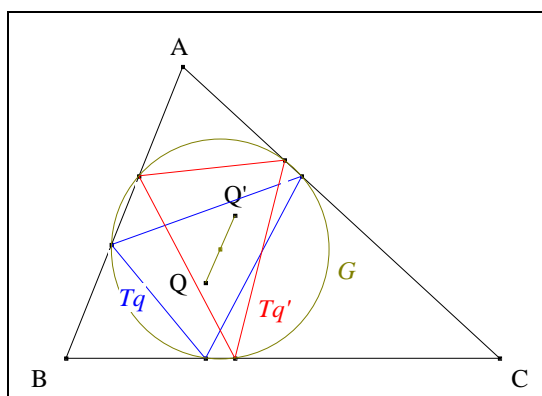


Traits : ABC un triangle,
 Q', Q le premier et le second point de Brocard de ABC
 et Tq, Tq' les triangles Q, Q' -pédiaux de ABC .

Donné : Tq et Tq' ont le même cercle circonscrit.

⁵⁷ Jacobi C. F. A., *De triangulorum rectilinearum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis*, Naumburg (1825) ;
 Schulprogramm von Pforta ;
 Jacobi C. F. A., *Anhänge zu seiner Übersetzung der Grundbegriffe der Meerkunde* door J. H. van Swinden, betiteld :
Elemente der Geometrie, Jena (1834).

VISUALISATION



- **Conclusion :** d'après Mathieu "The pedal circle theorem" (Cf. Annexe 9), Tq et Tq' ont le même cercle circonscrit.

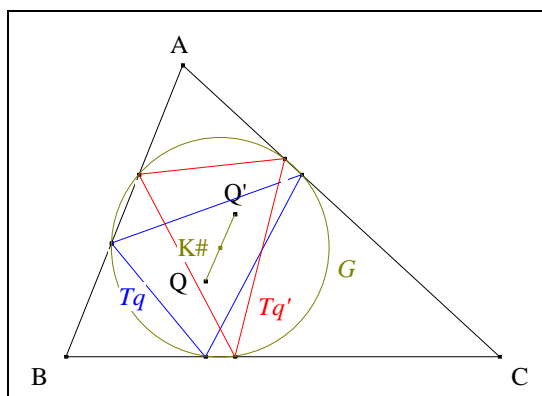
- Notons G ce cercle.

Scolie : G est "le cercle de Gallatly de ABC "⁵⁸.

2. Le milieu de Brocard

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 Q', Q le premier et le second point de Brocard de ABC
 G le cercle de Gallatly de ABC
 et $K\#$ le centre de G .

Donné : $K\#$ est le milieu de $[QQ']$.

VISUALISATION

⁵⁸

?, Question n° 1933, *Lady's and Gentleman's Diary* (1859).
 Gallatly W., *Modern Geometry of the Triangle* 2nd Ed. Francis Hodgson London (1913) 117.

- **Conclusion :** d'après Mathieu "The pedal circle theorem" (Cf. Annexe 9), $K\#$ est le milieu de $[QQ']$.

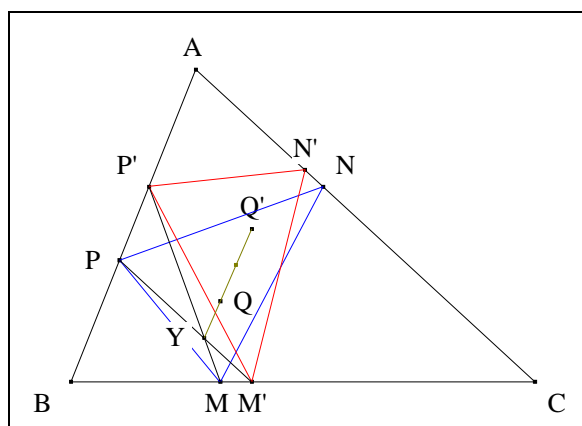
Solie : $K\#$ est "Le milieu de Brocard de ABC",
en anglais "the Brocard midpoint of ABC", et est répertorié sous X_{39} chez ETC.

Commentaire : l'auteur présentera la première preuve synthétique de l'autre nature de $K\#$ découverte par Henri Brocard.
Le lecteur pourra se référer au commentaire de V. 1. Isotomique d'une symédiane.

3. La droite (QQ')

VISION

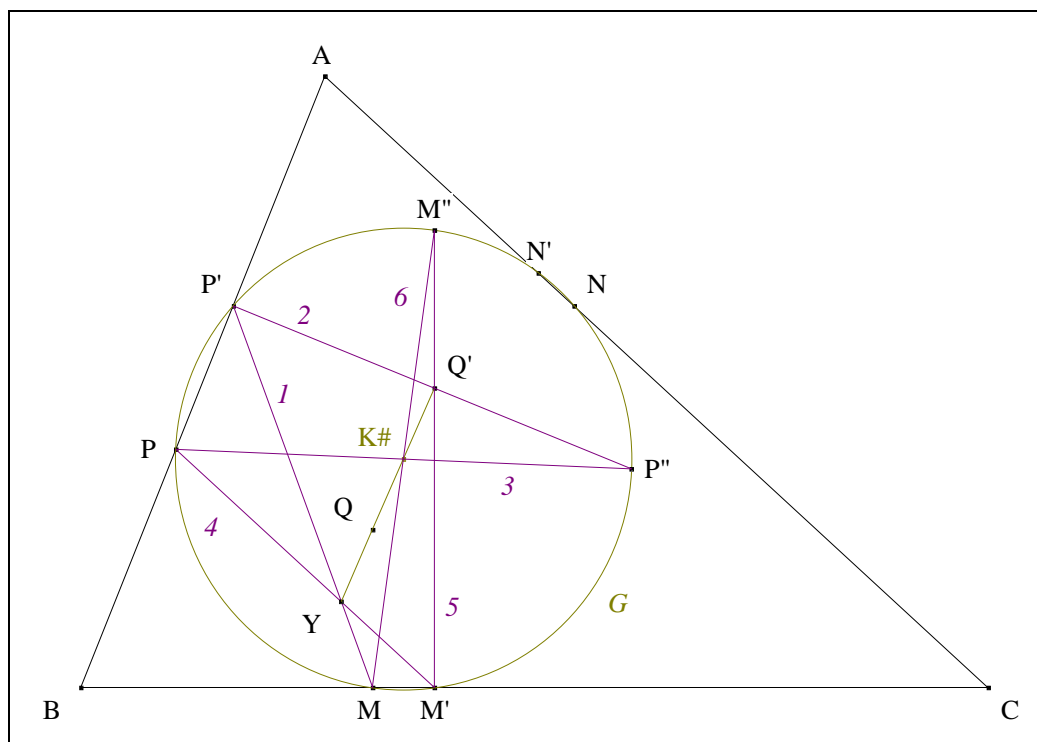
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 Q', Q les premier, second points de Crellé-Brocard de ABC,
 $MNP, M'N'P'$ les triangles Q, Q' -pédaux de ABC
 et Y le point d'intersection de (MP') et $(M'P)$.

Donné : Y est sur (QQ') .

VISUALISATION



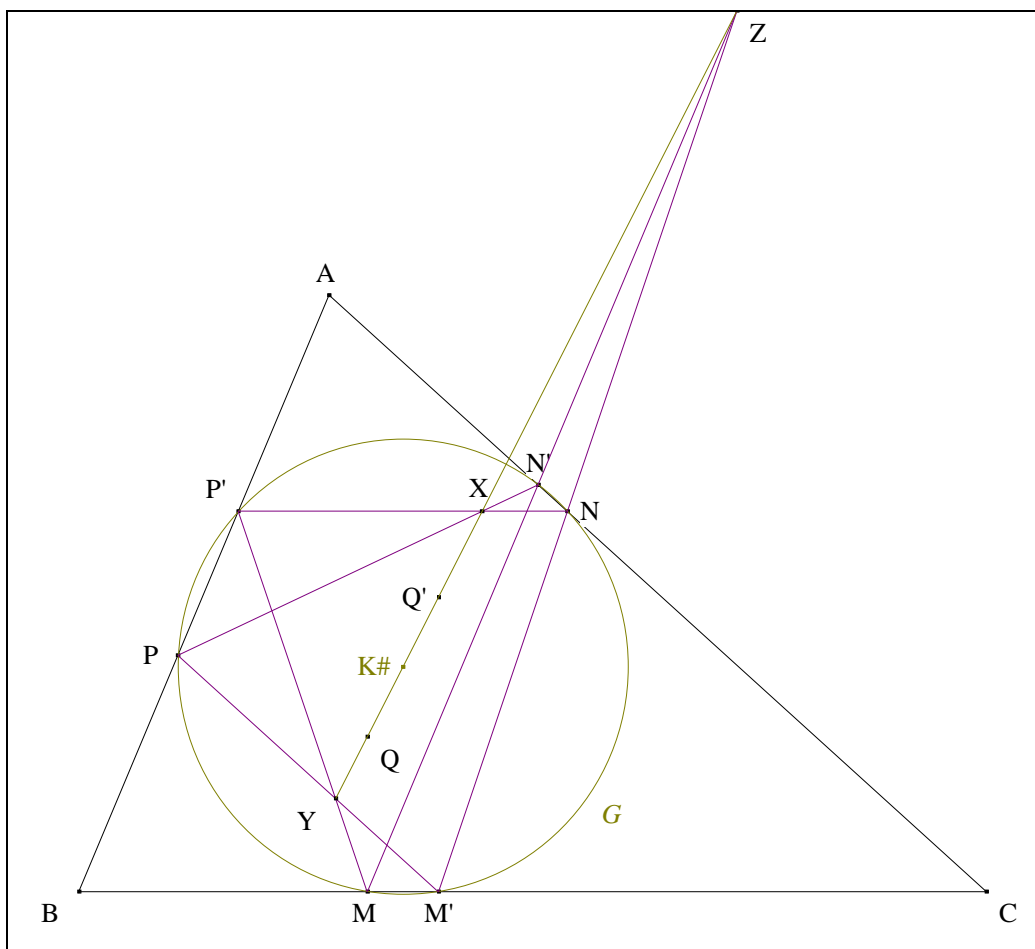
- Notons G le cercle de Gallatly de ABC ,
 $K\#$ le centre de G ,
 M'' le second point d'intersection de $(M'Q')$ avec G
 et P'' le second point d'intersection de $(P'Q')$ avec G .

• **Scolie :** $K\#$ est sur (MM'') et (PP'') .

• D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 10),
 $(YQ'K\#)$ est la pascale de l'hexagone $MP'P''PM'M''M$.

• **Conclusion :** Y est sur (QQ') .

Scolies : (1) deux autres points sur (QQ')

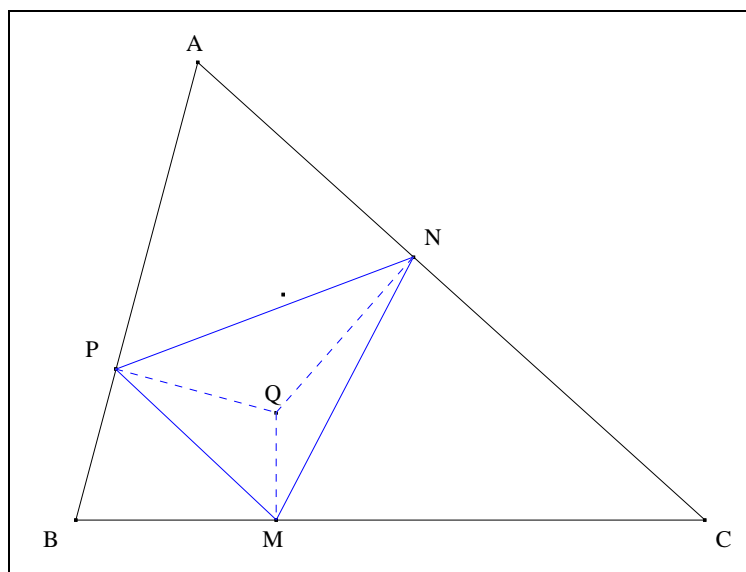


- Notons Z, X les points d'intersection resp. de (MP') et $(M'P)$, de (MP') et $(M'P)$.
 - **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que Z, X est sur (QQ') .
- (2) $Q, Q', K#, X, Y$ et Z sont alignés.

4. Point de Brocard du triangle Q-pédal

VISION

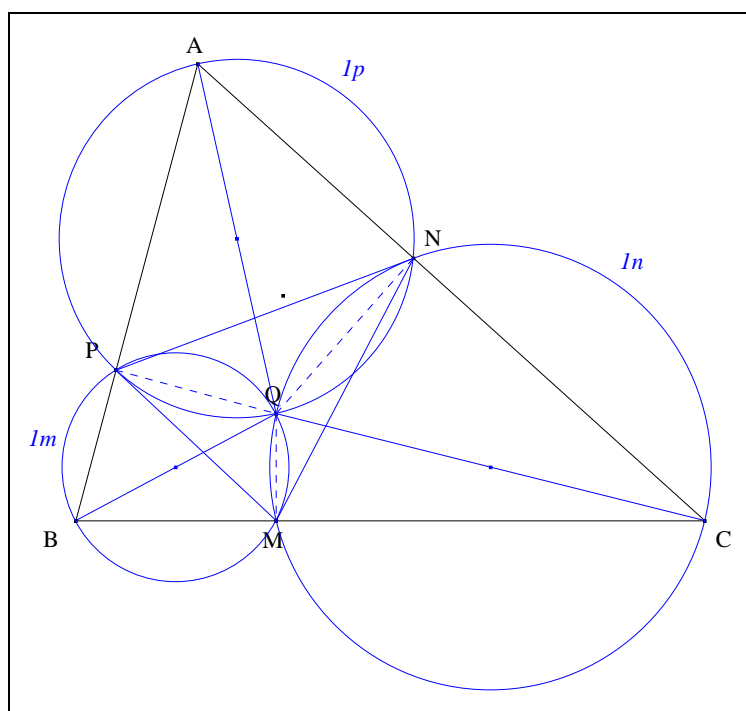
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 Q le premier point de Brocard de ABC
 et MNP le triangle Q-pédal de ABC.

Donné : Q est le premier point de Brocard de MNP.

VISUALISATION

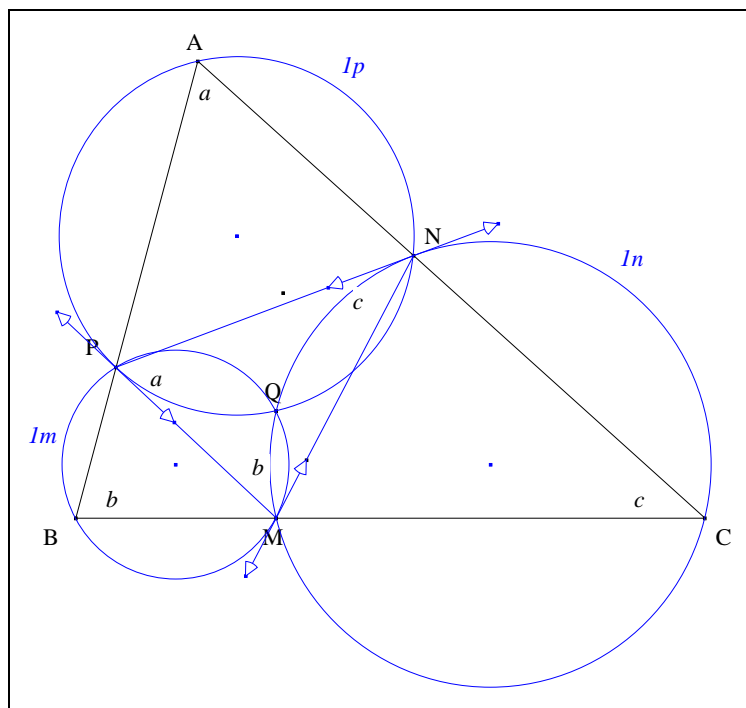


- Notons Im le cercle de diamètre $[BQ]$; il passe par M et P ;
 In le cercle de diamètre $[CQ]$; il passe par N et M ;
 Ip le cercle de diamètre $[AQ]$; il passe par P et N .
- Une chasse angulaire permet de montrer que ABC et PMN sont semblables ;
 en conséquence, (MN) est la tangente à Im en M .
- **Conclusion partielle :** Im est le premier M-cercle de Brocard de PMN .

- Mutatis mutandis, nous montrerions que l_n est le premier N-cercle de Brocard de PMN
 l_p est le premier P-cercle de Brocard de PMN.

- **Conclusion** : Q est le premier point de Brocard de MNP.

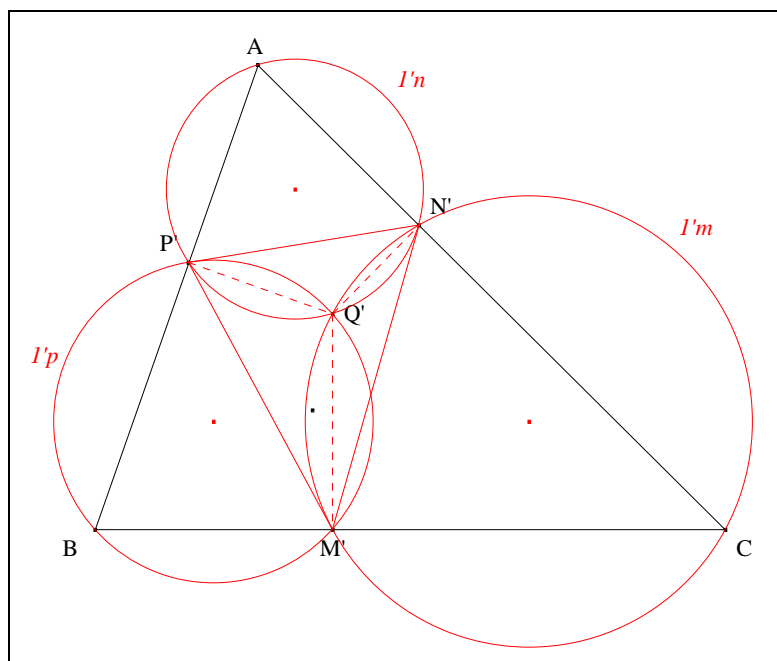
Scolies : (1) deux triangles semblables



- **Conclusion** : les triangles PMN et ABC sont semblables.⁵⁹

(2) Avec le second point de Brocard

⁵⁹ Jacobi C. F. A., *De triangulorum rectilinearum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis*, Naumburg (1825) ; Schulprogramm von Pforta ;
 Jacobi C. F. A., Anhänge zu seiner Übersetzung der Grondbeginsels der Meetkunde door J. H. van Swinden, betiteld : *Elemente der Geometrie*, Jena (1834).

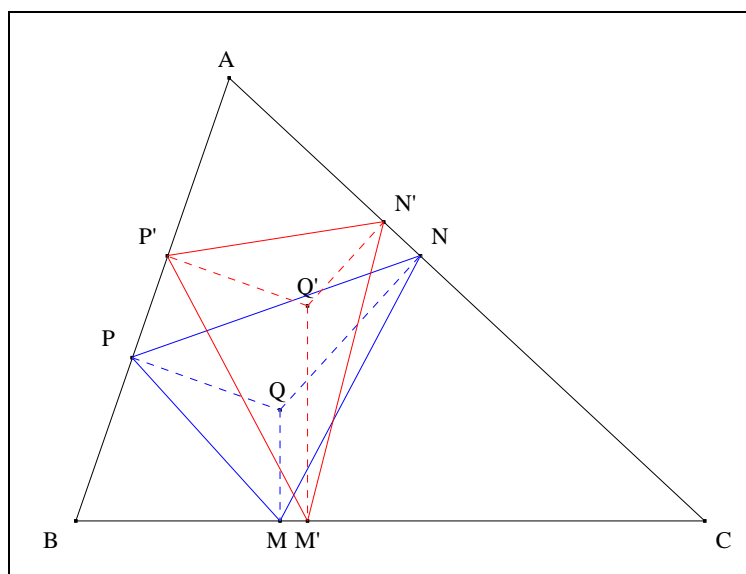


- Notons Q' le second point de Brocard de ABC ,
 $M'N'P'$ le triangle Q' -pédal de ABC .
 $l'm$ le cercle de diamètre $[BQ']$; il passe par M et P ;
 $l'n$ le cercle de diamètre $[CQ']$; il passe par N et M ;
 et $l'p$ le cercle de diamètre $[AQ']$; il passe par P et N .
- **Conclusion** : mutatis mutandis, nous montrerions que Q' est le second point de Brocard de $M'N'P'$.

5. Les triangles Q et Q' -pédaux sont égaux

VISION

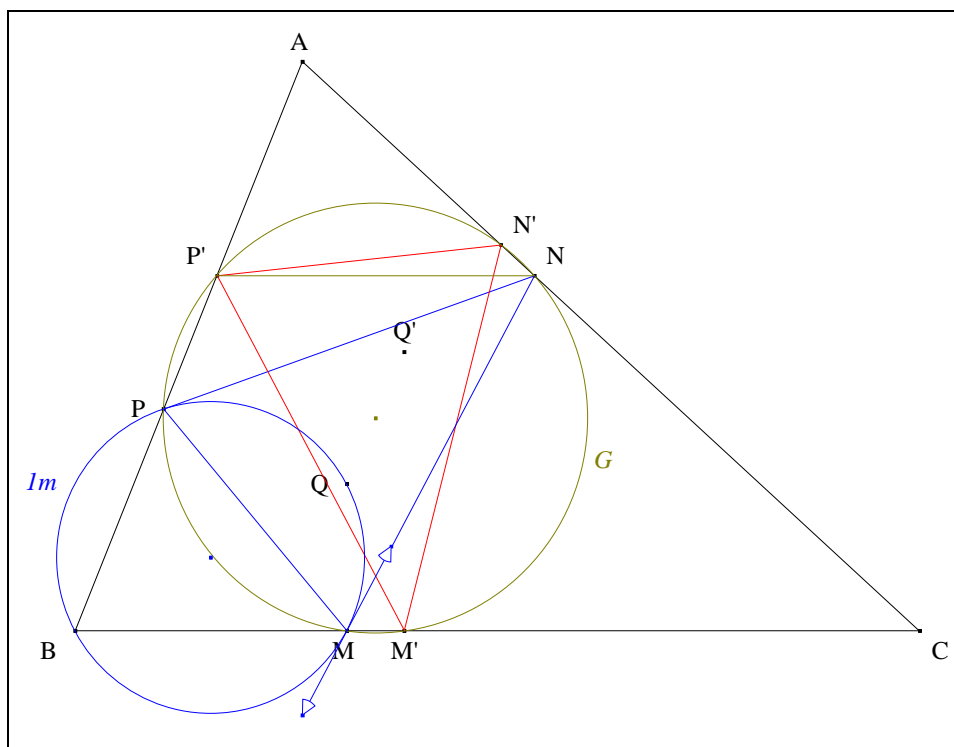
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 Q, Q' les premier, second point de Brocard de ABC
 et MNP, M'N'P' les triangles Q, Q'-pédaux de ABC.

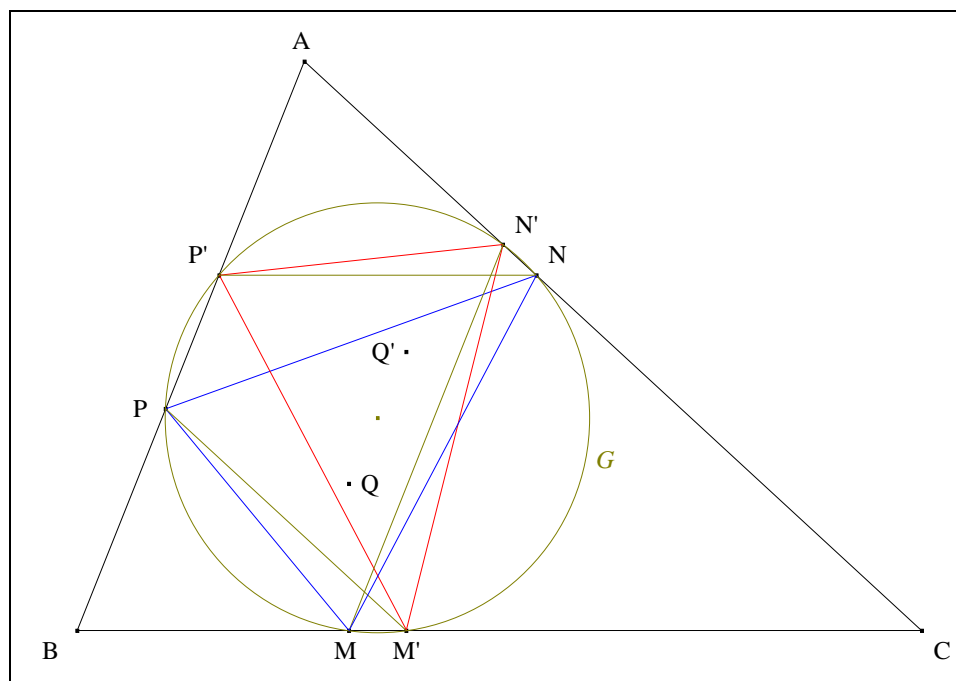
Donné : MNP et P'M'N' sont égaux.⁶⁰

VISUALISATION



- Notons et G le cercle de Gallatly de ABC
 Im le premier A-cercle adjoint de MNP.
- **Solie :** Im est tangent à (MN) en M.
- Les cercles G et Im , les points de base P et M, les moniennes (P'PB) et (NMM), conduisent au théorème 3 de Reim ; il s'en suit que $(P'N) \parallel (BM)$ ou encore $(P'N) \parallel (MM')$.

⁶⁰ Jacobi C. F. A., *De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis*, Naumburg (1825) ; Schulprogramm von Pforta ;
 Jacobi C. F. A., *Anhänge zu seiner Übersetzung der Grondbeginsels der Meetkunde door J. H. van Swinden*, betiteld : *Elemente der Geometrie*, Jena (1834).



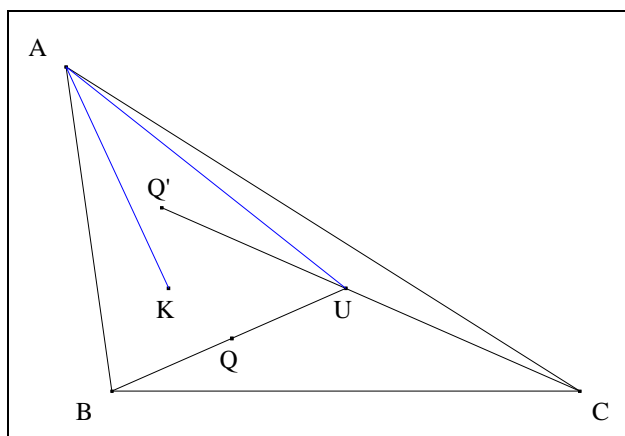
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $(M'P) \parallel (NN')$
 $(N'M) \parallel (PP')$.
- Le quadrilatère cyclique $MM'NP'$ étant un trapèze, $MN = P'M'$.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $NP = M'N'$
 $PM = N'P'$.
- **Conclusion :** MNP et $P'M'N'$ sont égaux.

V. LE PREMIER TRIANGLE DE BROCARD

1. Isotomique d'une symédiane

VISION

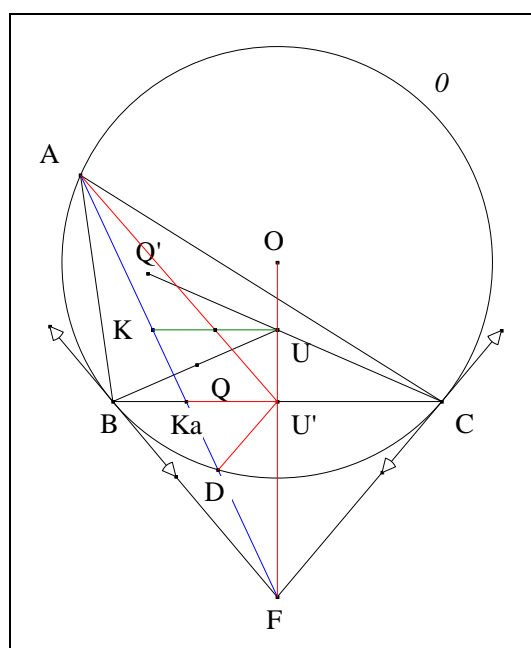
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 K le point de Lemoine de ABC,
 Q, Q' les premier, second points de Crellé-Brocard de ABC
 et U le point d'intersection de (BQ) et (CQ').

Donné : (AU) et (AK) sont deux A-isotomiques de ABC.⁶¹

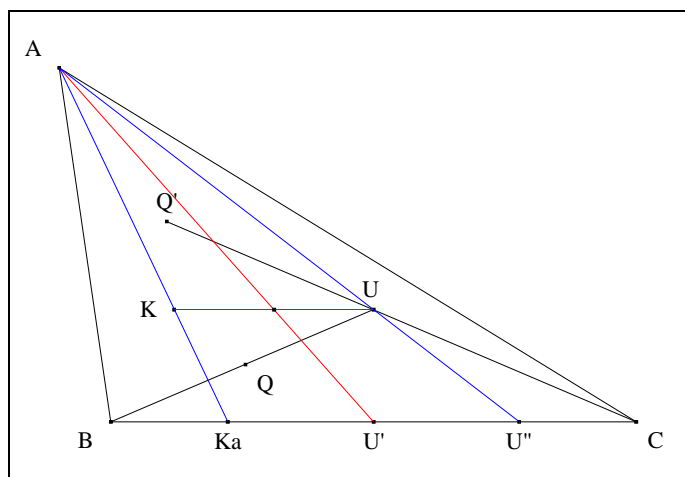
VISUALISATION



- Notons θ le cercle circonscrit à ABC,
 O le centre de θ ,
 F le point d'intersection des tangentes à θ resp. en B, C
 et K_a, U' les points d'intersection resp. de (AK) et (BC), de (OU) et (BC).
- D'après "Une quaterne harmonique" (Cf. Annexe 11) en conséquence, la quaterne (F, K_a , D, A) est harmonique ;
 le faisceau (U' ; F, K_a , D, A) est harmonique.
- D'après D. II. 2. Le triangle OQQ', en conséquence, (UK) // (BC) ;
 ($U'A$) passe par le milieu de [UK].⁶²

⁶¹ Neuberger J., Rouché E., de Comberousse C., *Traité de Géométrie*, Gauthier-Villars, Paris, 6-ième édition, 1891, Rééditions J. Gabay, Paris (1997) 80, article 42.

⁶² Kiehl, Zur theorie der Transversalen, Bromberg, Programm der Realschule (1881)



- Notons U'' le point d'intersection de (AU) et (BC) .
- Considérons le trapèze complet $UKKaU''$,
 (AU') passant par le milieu de $[UK]$, passe par le milieu U' de $[U''Ka]$;
 U' étant le milieu de $[BC]$, U'' est l'isotome de Ka relativement à $[BC]$.
- **Conclusion :** par définition, (AU) et (AK) sont deux A-isotomiques de ABC .

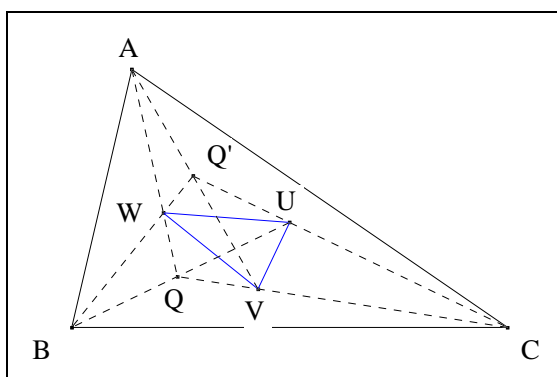
Scolie : (KU) est "la A-parallèle de Lemoine de ABC ".

Commentaire : la considération des parallèles de Lemoine ou encore de la Géométrie de Lemoine ouvre une voie qui a permis à l'auteur de découvrir la première preuve synthétique d'une autre nature du milieu $K\#$ de Brocard i.e. du milieu de $[QQ']$.
 Le lecteur pourra se reporter en VI. Le milieu de Brocard.

2. Le premier triangle de Brocard UVW

VISION

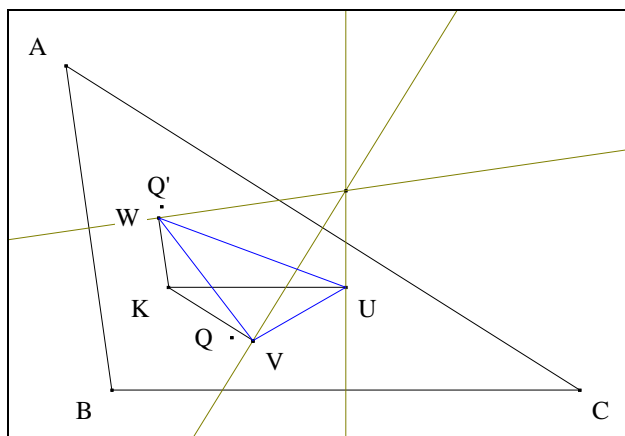
Figure :



Finition : ABC un triangle,
 Q, Q' les premier, second points de Crellé-Brocard de ABC
 et U, V, W le point d'intersection de (BQ) et (CQ') , de (CQ) et (AQ') , de (AQ) et (BQ') .

Définition : UVW est "le premier triangle de Brocard de ABC ".

Scolie : un autre point de vue

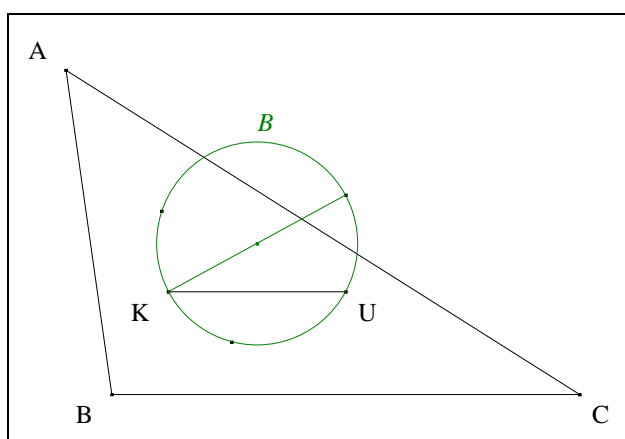


- **Conclusion :** U, V, W sont resp. les points d'intersection des A, B, C -parallèles de Lemoine resp. avec les A, B, C -médiatrices de ABC .

3. Une approche avec les parallèles de Lemoine

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 B le cercle de Brocard de ABC
 et U le second point d'intersection de la A -parallèles de Lemoine avec B .

Donné : U est le A -sommet du second triangle de Brocard de ABC .

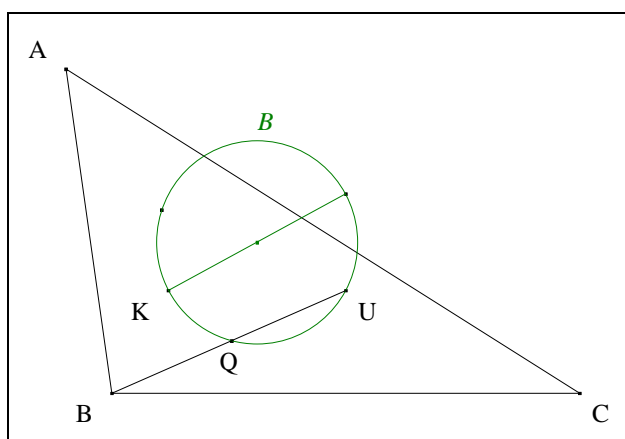
VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après D. II. 2. Le triangle OQQ' ,
U est le A-sommet du second triangle de Brocard de ABC.

4. Une approche avec un point de Brocard

VISION

Figure :



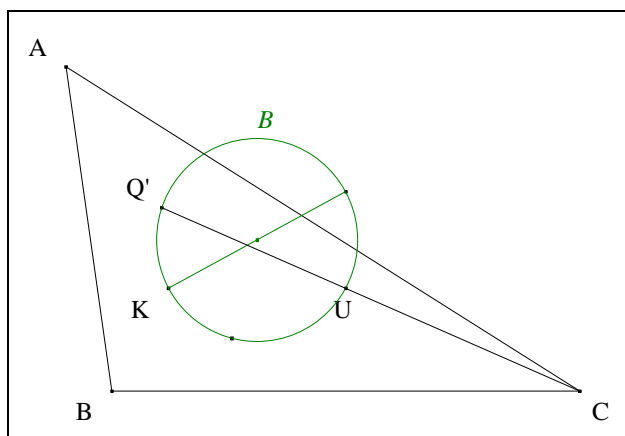
Traits : ABC un triangle,
Q le premier point de Brocard de ABC,
B le cercle de Brocard de ABC
et U le second point d'intersection de (BQ) avec B.

Donné : U est le A-sommet du second triangle de Brocard de ABC.

VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après D. II. 2. Le triangle OQQ' ,
U est le A-sommet du second triangle de Brocard de ABC.

Solie : avec le second point de Brocard



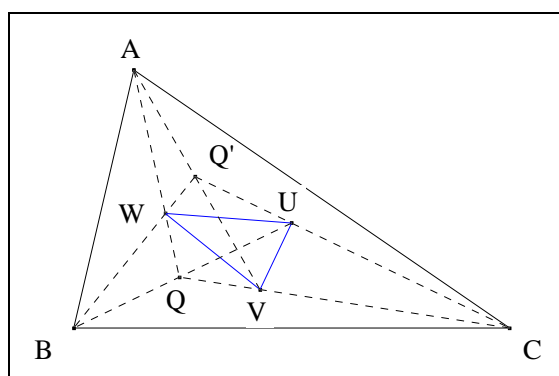
- Notons Q' le second point de Brocard
et U le second point d'intersection de (CQ') avec B .
- **Conclusion :** d'après D. II. 2. Le triangle OQQ' ,
 U est le A-sommet du second triangle de Brocard de ABC .

Commentaire : les seconds points d'intersection des segments joignant les sommets de ABC à Q ou à Q' ,
gènèrent le premier triangle de Brocard.

5. UVW inversement semblables à ABC

VISION

Figure :

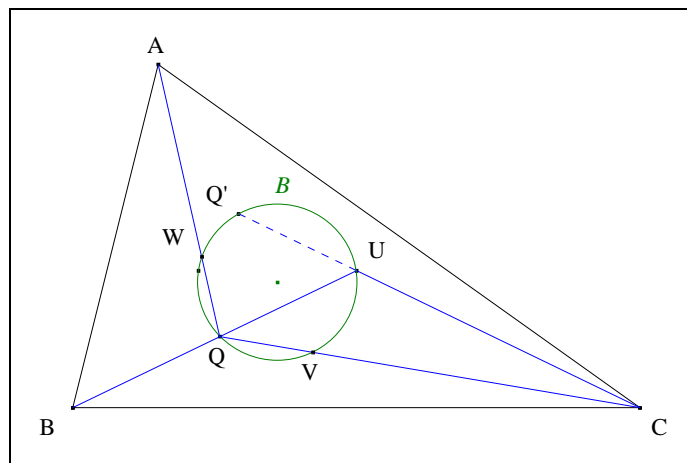


Traits : ABC un triangle,
 Q, Q' les premier, second points de Crelle-Brocard de ABC
et UVW le premier triangle de Brocard de ABC .

Donné : UVW est inversement semblable à ABC .⁶³

VISUALISATION

⁶³ Brocard H.
cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten
und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 82, art. 40, 1°.



- Notons B le cercle de Brocard de ABC.

- Une chasse angulaire à 2π près.
d'après le théorème de l'angle inscrit,
i.e.
d'après le théorème 180 appliqué au triangle QBC,

$$\begin{aligned}\angle VWU &= \angle VQU ; \\ \angle VQU &= \angle CQU ; \\ \angle CQU &= \angle QCB + \angle CBQ.\end{aligned}$$

Q et Q' étant deux points isogonaux,

$$\begin{aligned}\angle QCB &= \angle ACQ' ; \\ \angle ACQ' &= \angle ACU ; \\ \angle QCB &= \angle ACU.\end{aligned}$$

par transitivité de la relation =,

Nous avons :

le triangle UBC étant U-isocèle,
par transitivité de la relation =,

$$\begin{aligned}\angle CBQ &= \angle CBU ; \\ \angle CBU &= \angle UCB ; \\ \angle CBQ &= \angle UCB.\end{aligned}$$

Par substitution,
ou encore,

$$\begin{aligned}\angle CQU &= \angle ACU + \angle UCB \\ \angle CQU &= \angle ACB ;\end{aligned}$$

par transitivité de la relation =,

$$\angle VWU = \angle ACB.$$

- Mutatis mutandis, nous montrerions que

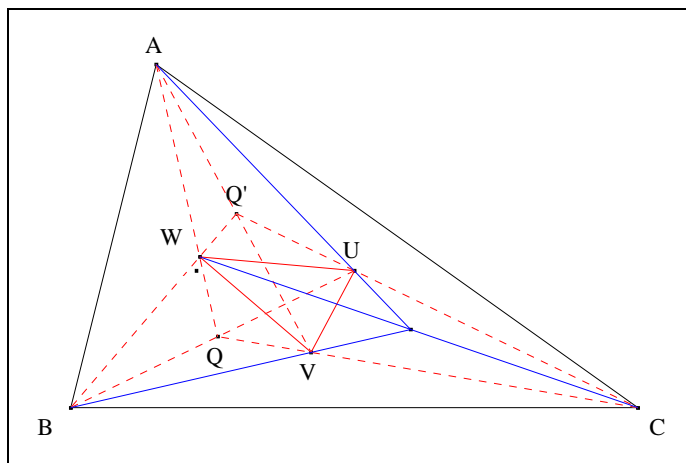
$$\begin{aligned}\angle WUV &= \angle BAC \\ \angle UVW &= \angle CBA.\end{aligned}$$

- **Conclusion** : UVW est inversement semblable à ABC.

6. Le troisième point de Brocard

VISION

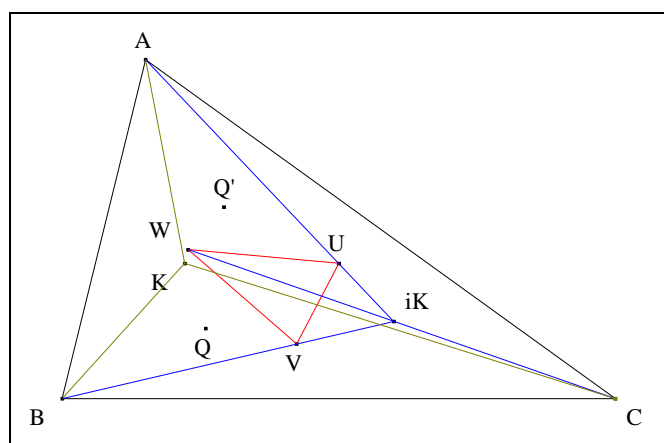
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 Q, Q' les premier, second points de Crellé-Brocard de ABC
 et UVW le premier triangle de Brocard.

Donné : UVW et ABC sont perspectifs.⁶⁴

VISUALISATION

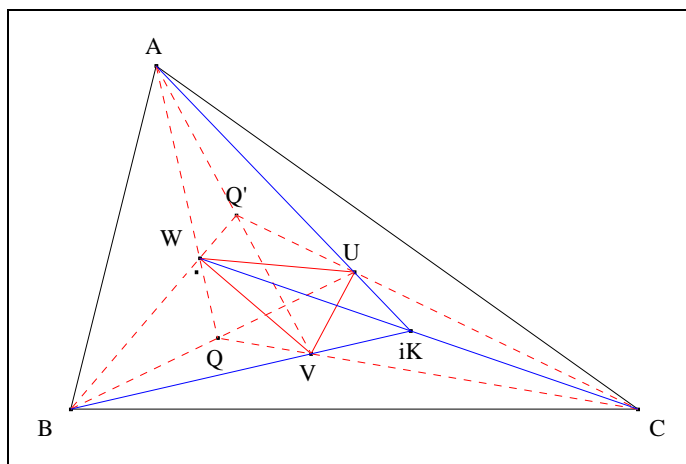


- Notons K le point de Lemoine de ABC.
- D'après D. V. 1. Isotomique d'une symédiane, (1) (AK) et (AU) sont deux A-isotomiques de ABC
 (2) (BK) et (BV) sont deux B-isotomiques de ABC
 (3) (CK) et (CW) sont deux C-isotomiques de ABC.
- D'après de Longchamps "Conjugué isotomique"⁶⁵, (AU), (BV) et (CW) sont concourantes.
- Notons iK ce point de concours.
- **Conclusion :** UVW et ABC sont perspectifs de centre iK .

⁶⁴ Brocard H.
 cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 81, art. 39, 6°.
 Neuberger J., Rouché E., de Comberousse C., *Traité de Géométrie*, Gauthier-Villars, Paris, 6-ième édition, 1891, Rééditions J. Gabay, Paris (1997) p. 85 article 41, 1°.

⁶⁵ Ayme J.-L., Gohierre de Longchamps, G.G.G. vol. 5 p. 14 ; <http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>.

Scolies : (1) UVW et ABC sont triplement perspectifs.



- ABC et WUV sont en perspective de centre Q.
- ABC et VWU sont en perspective de centre Q'.
- ABC et UVW sont en perspective de centre iK.
- **Conclusion :** UVW et ABC sont triplement perspectifs.

(2) Une approche fulgurante

- Rappelons le théorème de la double perspective :

A B C
A' C' B' en perspective

et A B C d'où A B C
B' A' C' en perspective C' B' A' en perspective.

- L'application de ce théorème avec U pour C', V pour B' et W pour A' conduit au résultat.

Commentaire : cette approche ne permet pas de préciser la nature du centre de perspective iK.

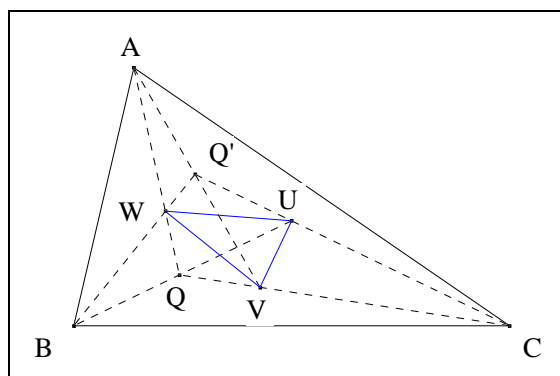
- (2) iK est l'isotomique de K relativement à ABC et est répertorié sous X_{76} chez ETC.
- (3) iK est "le troisième point de Brocard de ABC".

Note historique : les coordonnées trilineaires de iK ressemblant à l'ordre près à celles des deux points de Brocard, Clark Kimberling a considéré iK comme étant "le troisième point de Brocard de ABC".
Pour John Horton Conway iK est "the junction point of ABC".

7. UVW et ABC sont comédiens

VISION

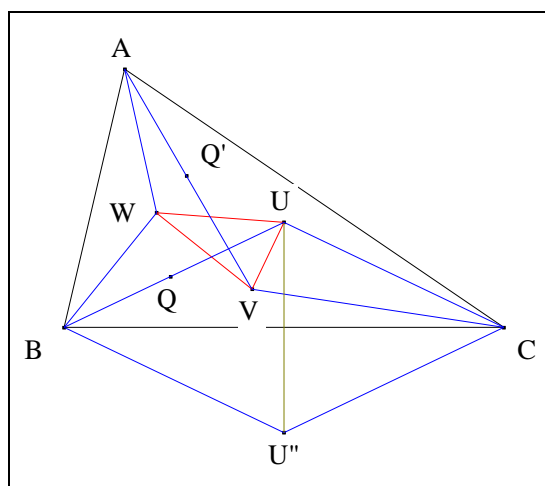
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 Q, Q' les premier, second points de Crellé-Brocard de ABC
 et UVW le premier triangle de Brocard de ABC.

Donné : UVW et ABC sont comédiens.⁶⁶

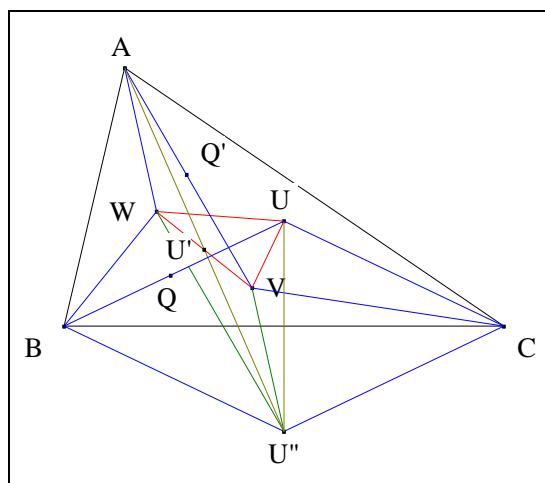
VISUALISATION



- D'après D. II. 2. Le triangle OQQ', scolie 2,
 - (1) le triangle UBC est U-isocèle
 - (2) le triangle VCA est V-isocèles
 - (3) le triangle WAB est W-isocèle.
- D'après D. II. 2. Le triangle OQQ', scolie 3, UBC, VCA et WAB sont semblables.
- Notons U'' le symétrique de U par rapport à (BC).
- **Scolie :** le triangle $U''CB$ est U' -isocèle et semblable à VCA et WAB.

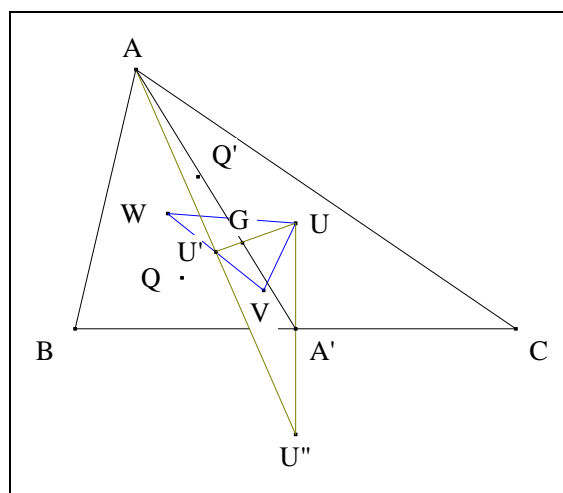
⁶⁶

Brocard H.
 cité par Emmerich E., *Die Brocardschen Gebilde*, Berlin (1891) 90, art. 43, 1°.



- D'après "Le parallélogramme de H. van Aubel" (Cf. Annexe 12), le quadrilatère $AWU''V$ est un parallélogramme ; en conséquence, (AU'') et (VW) se coupent en leur milieu.

- Notons U' le milieu de $[VW]$.



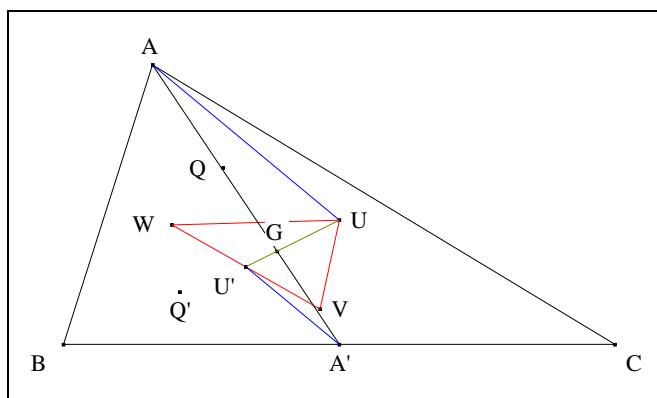
- Notons A' le milieu de $[BC]$
et G le point d'intersection de (AA') et $(U'U)$.

- D'après "Tiers point et milieu" (Cf. Annexe 13) appliqué

- (1) au triangle $AU''A'$ et à la ménélienne $(U'GU)$, G est le point médian de ABC
- (2) au triangle $UU''U'$ et à la ménélienne (AGA') , G est le point médian de UVW .

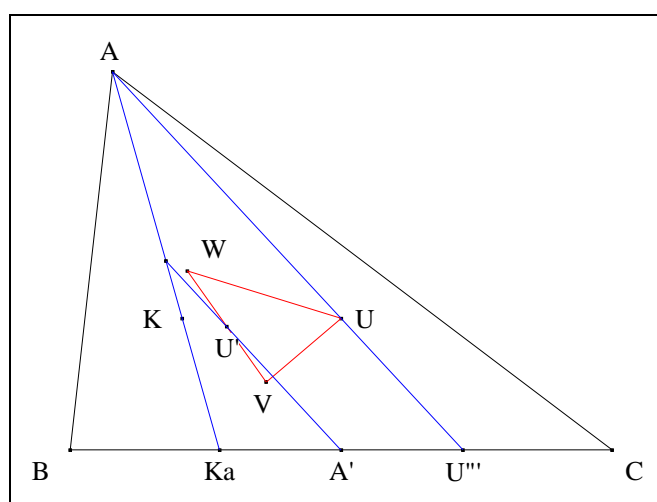
- **Conclusion :** UVW et ABC sont comédiens.

Scolies : (1) deux parallèles



- D'après Archimède "Le point médian", G est le premier tiers point de $[A'A]$ à partir de A'
 G est le premier tiers point de $[U'U]$ à partir de U' .
- **Conclusion :** d'après Thalès, (AU) et $(A'U')$ sont parallèles.

(2) Milieu d'une symédiane

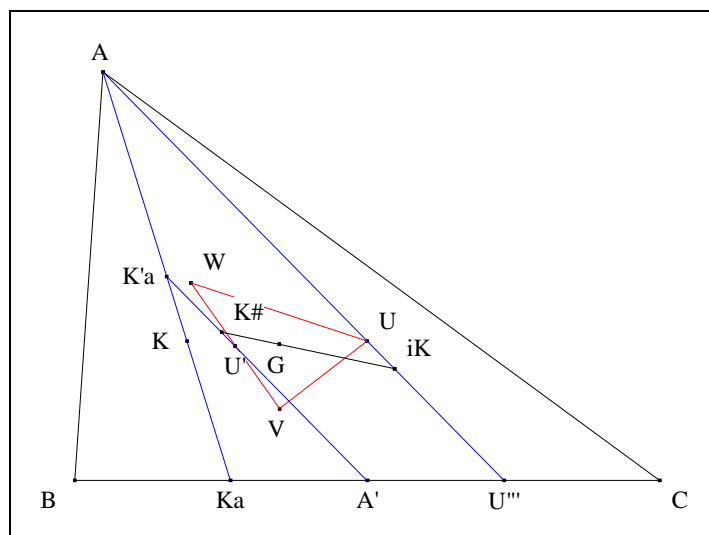


- Notons K le point de Lemoine de ABC ,
 Ka le point d'intersection de (AK) et (BC) ,
 et U''' les points d'intersection de (AU) et (BC) .
- D'après la scolie 1, $(AU) \parallel (AU''')$.
- **Conclusion :** d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle $KaU'''A$,
 $(A'U')$ passe par le milieu de $[AKa]$.

(3) L'isotomcomplément de K ⁶⁷

⁶⁷

http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1641562736&t=275380 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=799654449&t=64582.



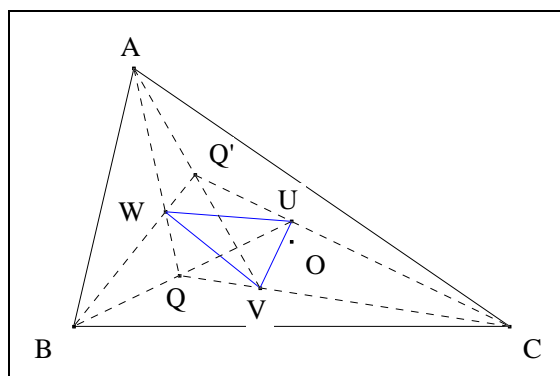
- Notons iK l'isotomique de K relativement à ABC ,
 G le point médian de ABC ,
 $K\#$ le complément de iK relativement à ABC ⁶⁸
 et $K'a$ le milieu de $[AKa]$.
- Par définition, $K\#$ est l'isotomcomplément de K relativement à ABC .
- **Conclusion :** d'après "Deux milieux et l'isotomcomplément" (Cf. Appendice 1),
 $(A'K'a)$ passe par $K\#$.⁶⁹

Commentaire : nous avons déjà noté $K\#$ le milieu de Brocard i.e. le milieu de $[QQ']$.
 Rappelons que notre sujet est de montrer synthétiquement que
 le milieu de Brocard est l'isotomcomplément de K .

8. Deux triangles orthologiques

VISION

Figure :



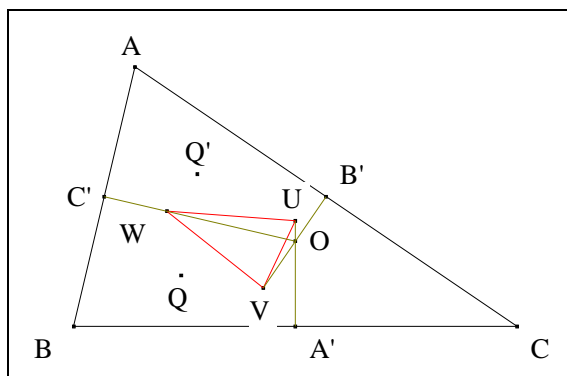
⁶⁸ i.e. le point tel que G soit le premier tiers-point de $[K\#iK]$ à partir de $K\#$.

⁶⁹ Brocard H.
 cité par Emmerich E., *Die Brocardschen Gebilde*, Berlin (1891) 97, art. 46, 5°.

Traits : ABC un triangle,
 Q, Q' les premier, second points de Crelle-Brocard de ABC,
 UVW le premier triangle de Brocard de ABC
 et O le centre du cercle circonscrit à ABC.

Donné : O est le centre d'orthologie de UVW relativement à ABC.

VISUALISATION

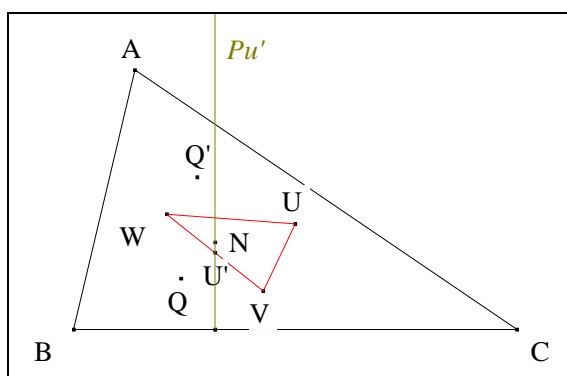


- Notons $A'B'C'$ le triangle médian de ABC.
- D'après D. II. 2. Le triangle OQQ',
 - (1) $(UO) \perp (BC)$
 - (2) $(VO) \perp (CA)$
 - (3) $(WO) \perp (AB)$.
- **Conclusion :** O est le centre d'orthologie de UVW relativement à ABC.

9. Le centre du cercle d'Euler

VISION

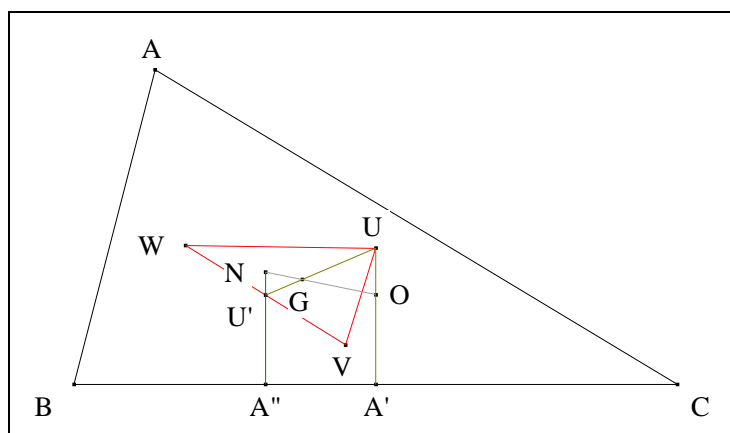
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 N le centre du cercle d'Euler de ABC,
 Q, Q' les premier, second points de Crelle-Brocard de ABC,
 UVW le premier triangle de Brocard de ABC,
 U' le milieu de [VW]
 et Pu' la perpendiculaire abaissée de U' sur (BC).

Donné : Pu' passe par N.⁷⁰

VISUALISATION



- Notons

A'	le milieu de $[BC]$,
A''	le pied de la perpendiculaire abaissée de U' sur (BC) ,
O	le centre du cercle circonscrit à ABC
G	le point médian de ABC .

- **Scolies :**
 - (1) U, O et A' sont alignés
 - (2) N, G et O sont alignés
 - (3) G est le premier tiers point de $[NO]$ à partir de N .

- D'après D. V. 4. Deux triangles comédiens, i.e.

G est le point médian de UVW
G est le premier tiers point de $[U'U]$ à partir de U' .

- D'après le théorème Thalès, nous avons :

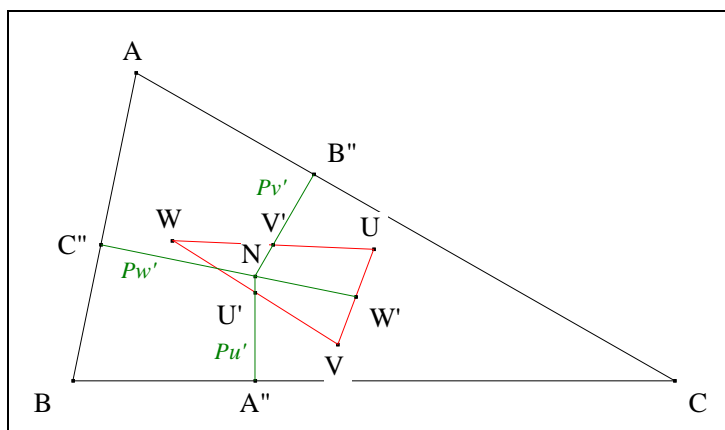
par transitivité de la relation $//$,	$(U'N) // (A'U)$;
d'après le postulat d'Euclide,	$(A'U) // (A''U')$;
	$(U'N) // (A''U')$;
	$(U'N) = (A''U')$ i.e. A'', U' et N sont alignés.

- **Conclusion :** Pu' passe par N .

Scolies : (1) vision triangulaire

⁷⁰

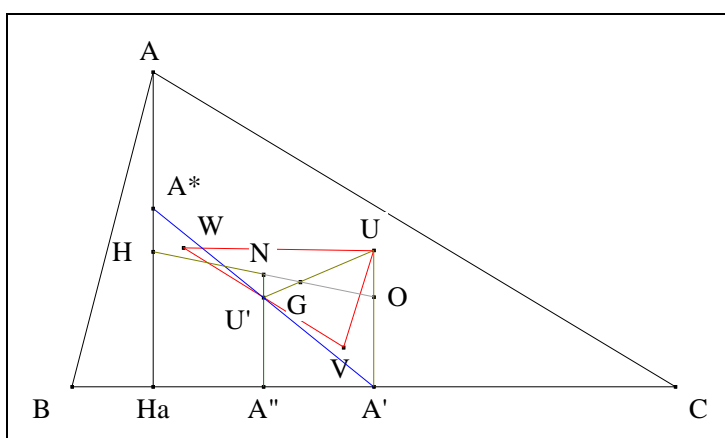
Kiehl, Zur theorie der Transversalen, Bromberg, Programm der Realschule (1881)
 cité par Emmerich E., *Die Brocardschen Gebilde*, Berlin (1891) 91, art. 43, 3° ;
 Neuberger J., signalé par Rouché et Comberousse, *Traité de Géométrie I*, (7-ième édition 1900, 1^{ère} édition 1864, Paris) 480, art. 41.



- Notons V', W' les milieux de $[WU], [UV]$
et Pv', Pw' les perpendiculaires abaissées de V', W' resp. sur $(CA), (AB)$.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que Pv' passe par N
 Pw' passe par N .
- **Conclusion :** Pu', Pv' et Pw' sont concourantes en N .

Note historique : ce résultat de H. Kiehl et de Joseph Neuberger a été représenté en 1995 par Ross Honsberger⁷¹.

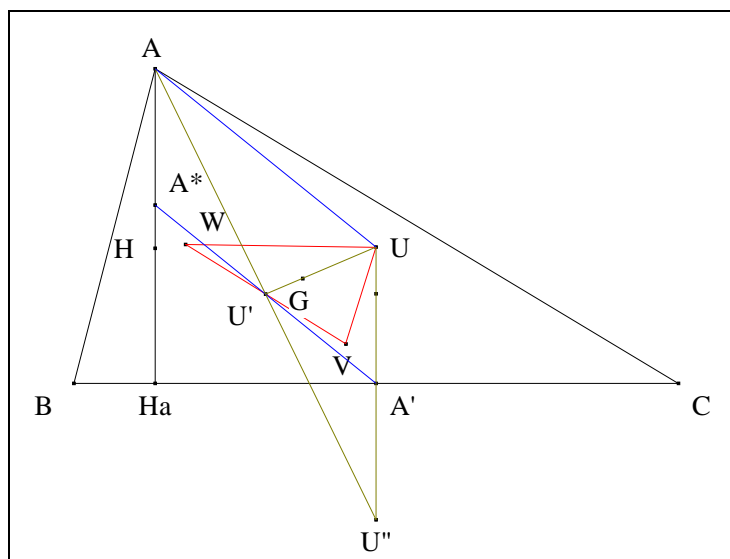
(2) U' est encore un milieu



- Notons Ha le pied de la A -hauteur de ABC ,
et A^* le point d'intersection de $(A'U')$ et (AHa) ,
 H l'orthocentre de ABC .
- **Conclusion :** d'après l'axiome de passage IIIb appliqué à la bande de frontières (OA') et (AHa)
 N étant le milieu de $[OH]$, U' est le milieu de $[A'A^*]$.⁷²
- (3) U' est encore un milieu

⁷¹ Honsberger, R., *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, Washington, DC, Math. Assoc. Amer., (1995) 110-118.

⁷² Kiehl, Zur theorie der Transversalen, Bromberg, Programm der Realschule (1881)
cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 91, art. 43, 3°.

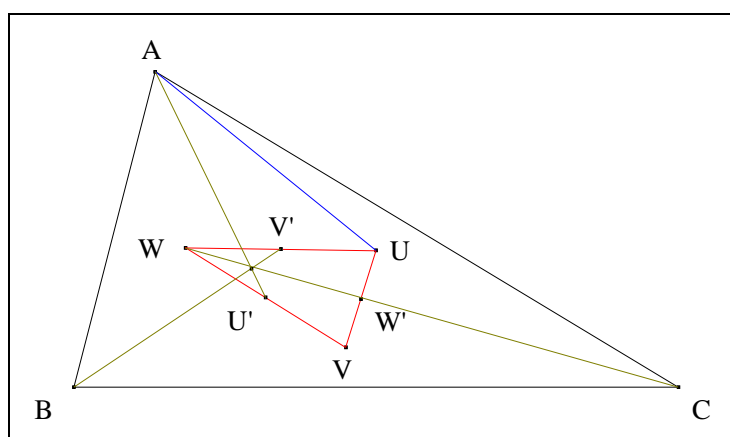


- Notons U'' le symétrique de U par rapport à (BC) .
- **Conclusion :** d'après D. V. 7. UVW et ABC sont comédiens, U' est le milieu de $[AU'']$.
- (4) Les triangles $U'V'W'$ et ABC sont orthogonaux.

10. Trois droites concourantes

VISION

Figure :



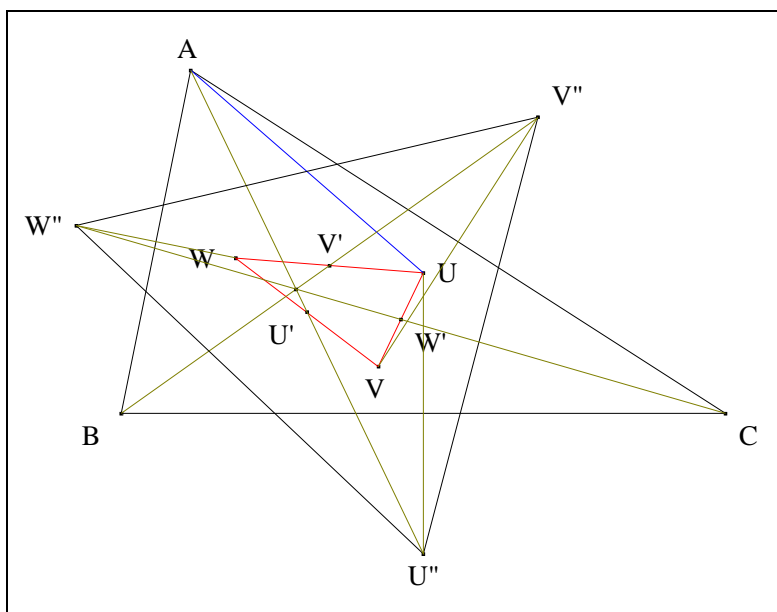
Traits : ABC un triangle,
 UVW le premier triangle de Brocard de ABC ,
 et $U'V'W'$ le triangle médian de UVW

Donné : (AU') , (BV') et (CW') sont concourantes.⁷³

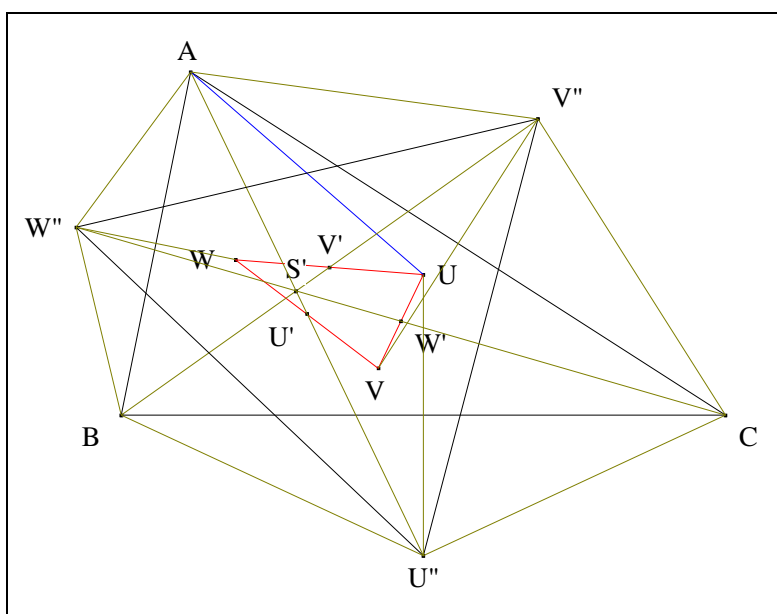
⁷³

Stoll
 cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 97, art. 46, 6° et 7°.

VISUALISATION

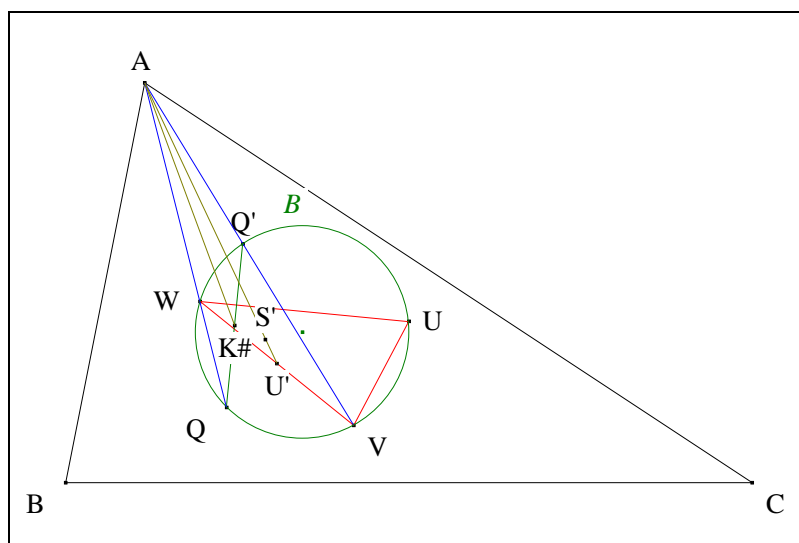


- Notons U'', V'', W'' les symétriques de U, V, W resp. par rapport à $(BC), (CA), (AB)$.
- D'après D. V. 7. UVW et ABC sont comédiens,
 - (1) A, U' et U'' sont alignés
 - (2) B, V' et V'' sont alignés
 - (3) C, W' et W'' sont alignés.



- D'après D. II. 2. Le triangle $U''BC$
 - (1) le triangle $U''BC$ est U'' -isocèle
 - (2) le triangle $V''CA$ est V'' -isocèle
 - (3) le triangle $W''AB$ est W'' -isocèle.
- D'après D. II. 8. L'angle de Brocard, $U''BC, V''CA$ et $W''AB$ sont semblables.
- **Conclusion** : d'après "Le théorème de Kiepert" (Cf. Annexe 14), $(AU'), (BV')$ et (CW') sont concourantes.
- Notons S' ce point de concours.

Scolie : nature du point de concours ⁷⁴



- Notons $K\#$ le milieu de $[QQ']$.
- D'après "Le théorème de Boutin" (Cf. Annexe 15) $(AK\#)$ et (AS') sont deux A-isogonales du triangle AQQ' .
- Q et Q' étant deux points isogonaux de ABC , $(AK\#)$ et (AS') sont deux A-isogonales de ABC .
- **Conclusion :** d'après Mathieu "The isogonal theorem" (Cf. Annexe 16), $K\#$ est l'isogonal de S' relativement à ABC .

VI. LE MILIEU DE BROCARD

Ouverture : rappelons au lecteur que l'idée sur laquelle repose la totalité de cet article, consiste à rechercher subtilement une preuve synthétique d'un résultat d'Henri Brocard à savoir

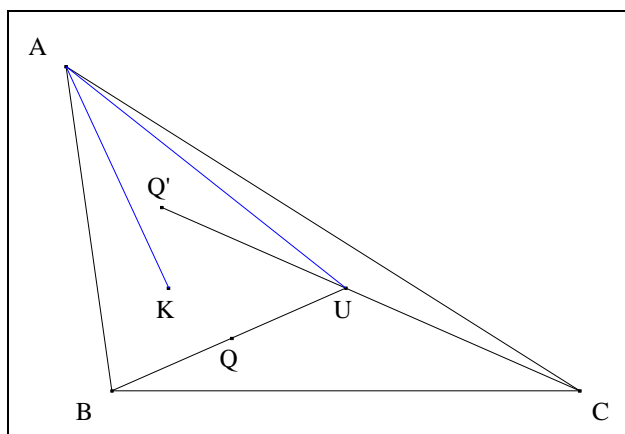
le milieu de Brocard est l'isotomcomplément du point de Lemoine.

Pour arriver à ce résultat, l'auteur s'est familiarisé avec la Géométrie de Brocard tout en cherchant dans ce dédale une porte "symbolique" qui lui a permis d'entrer dans une voie dont les multiples circonvolutions l'ont mené au "milieu" par enserrement.

1. Isotomique d'une symédiane

VISION

Figure :



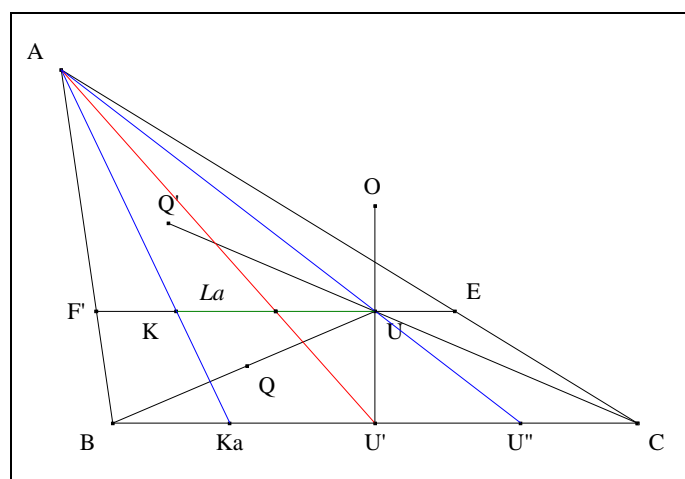
Traits : ABC un triangle,
 K le point de Lemoine de ABC,
 Q, Q' les premier, second points de Crellé-Brocard de ABC
 et U le point d'intersection de (BQ) et (CQ').

Donné : (AU) et (AK) sont deux A-isotomiques de ABC.⁷⁵

2. La A-parallèle de Lemoine de ABC

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
 La la A-parallèle de Lemoine (KU) de ABC,
 E, F' les points d'intersection de La resp. avec (CA), (AB),
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 et Ka, U', U'' les points d'intersection resp. de (AK) et (BC), de (OU) et (BC),
 de (AU) et (BC).

Donné : (AU') passe par le milieu de [EF'].

⁷⁵

Voir V. 1. Isotomique d'une symédiane.

VISUALISATION

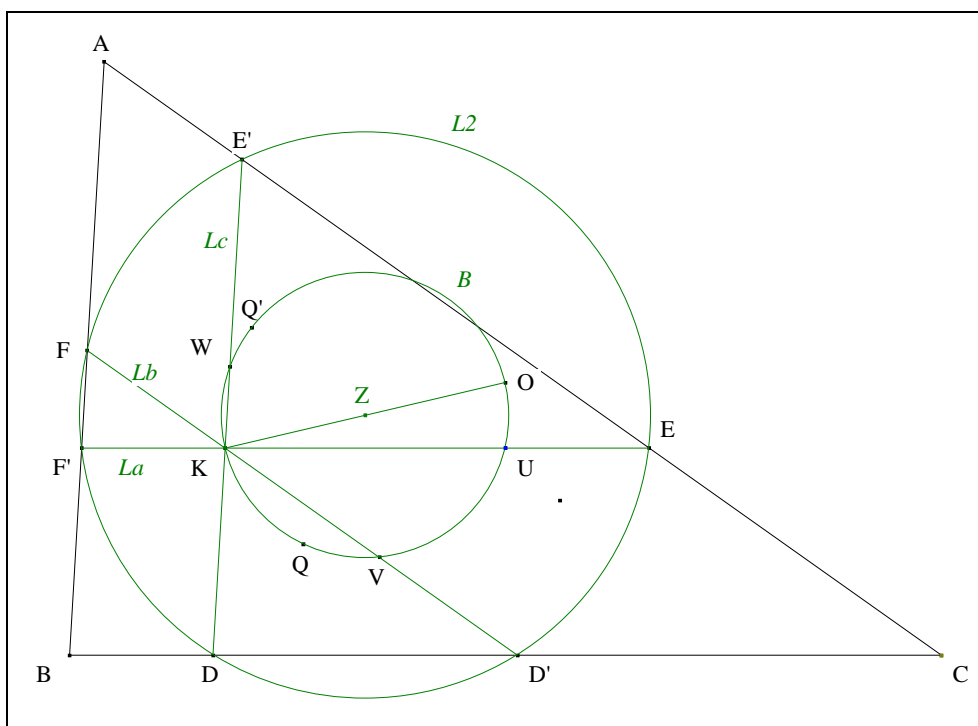
- **Conclusion :** $KKaU''U$ étant un trapèze, (AU') passant par le milieu U' de $[KaU'']$ passe par le milieu de $[EF']$.

- Scolies :**
- (1) $BKa = CU''$.
 - (2) D'après Thalès, $F'K = EU$.

3. Le second cercle de Lemoine

VISION

Figure :



- Traits :**
- B aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons le cercle de Brocard de ABC ,
 - Z le centre de B ,
 - Lb la B -parallèle de Lemoine (KV) de ABC ,
 - F, D' les points d'intersection de Lb resp. avec $(AB), (BC)$,
 - Lc la C -parallèle de Lemoine (KW) de ABC ,
 - D, E' les points d'intersection de Lc resp. avec $(BC), (CA)$
- et $L2$ le second cercle de Lemoine de ABC (Cf. 17) ; il passe par D, D', E, E', F, F' .
- Donné :** $L2$ et B sont concentriques.

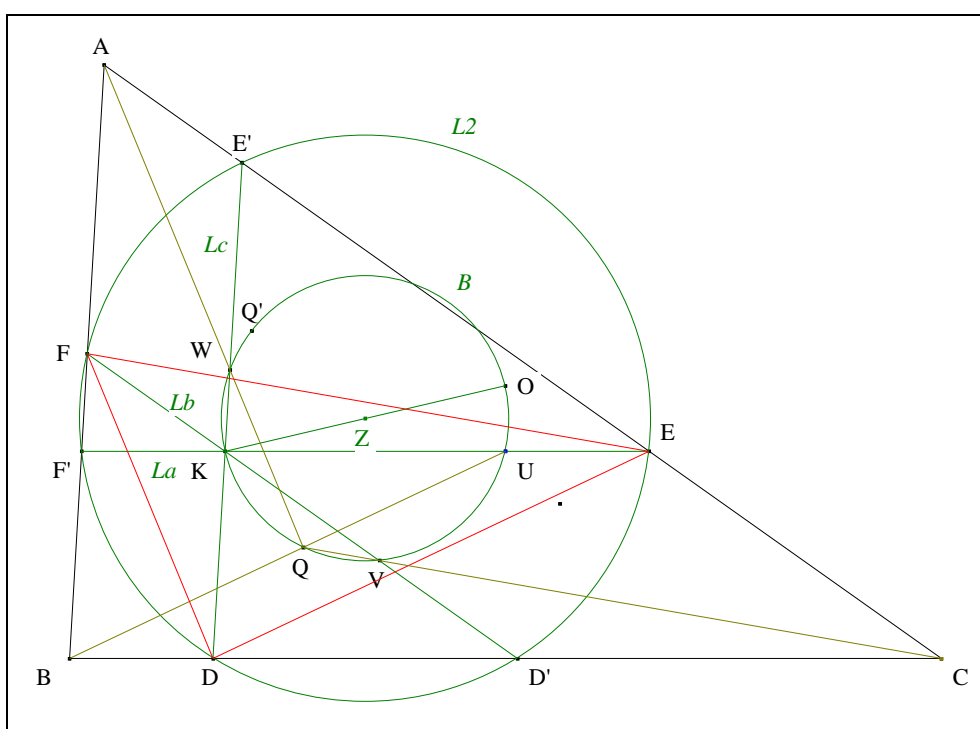
VISUALISATION

- D'après VI. 2. La A-parallèle de Lemoine de ABC, [EF'] et [KU] ont la même médiatrice.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que [FD'] et [KV] ont la même médiatrice
[DE'] et [KW] ont la même médiatrice.
- **Conclusion** : d'après A. 1. Le point O, $L2$ et B sont concentriques.

4. Une parallèle à (BQ)

VISION

Figure :



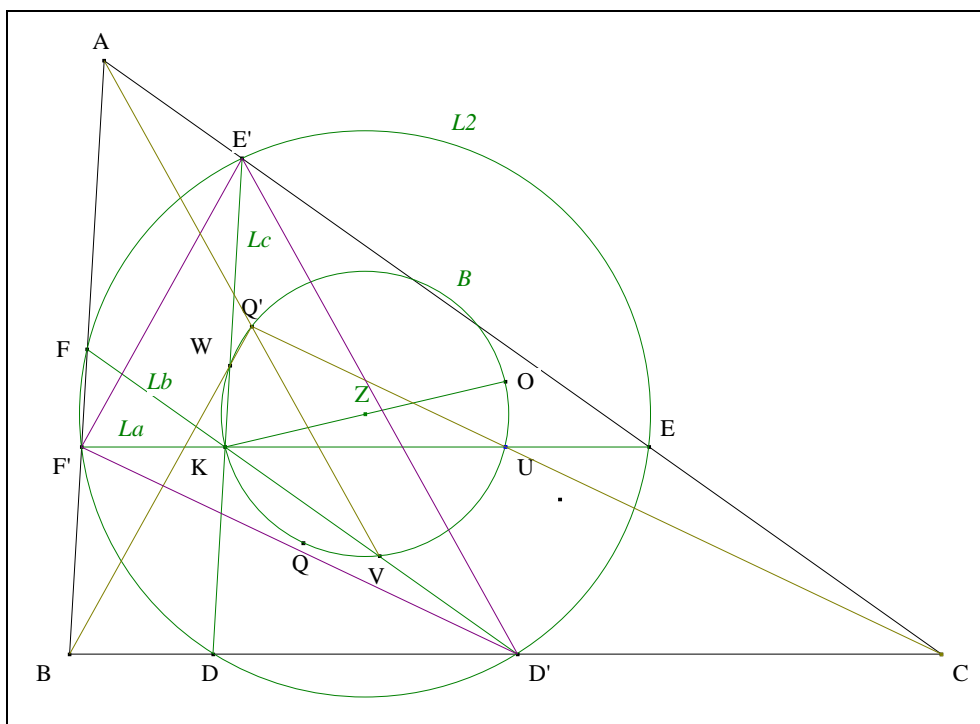
Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : (DE) est parallèle à (BQ).

VISUALISATION

- Nous avons :
par transitivité de la relation =, $UE = F'K$ et $F'K = BD$;
 $UE = BD$.
- Le quadrilatère UEDB ayant deux côtés parallèles et égaux est un parallélogramme.
- **Conclusion** : (DE) est parallèle à (BQ).
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (EF) est parallèle à (CQ)
(FD) est parallèle à (AQ).

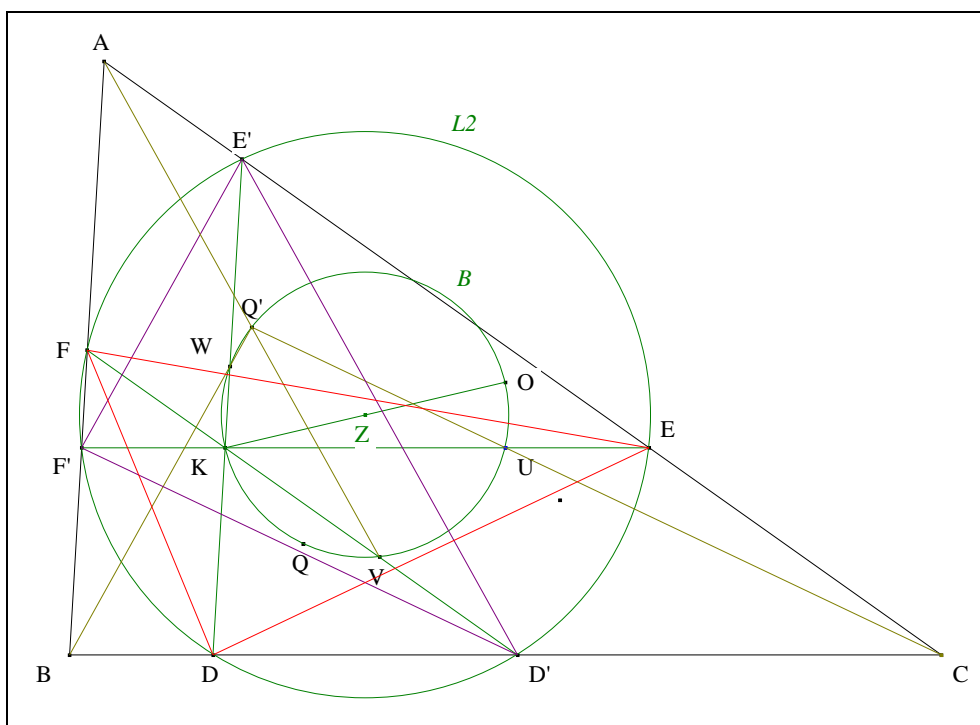
Scolies : (1) avec le point Q'



• **Conclusion** : mutatis mutandis, nous montrerions que

- (D'F') est parallèle à (CQ')
- (E'D') est parallèle à (AQ')
- (F'E') est parallèle à (BQ').

(2) Deux triangles égaux



• Le trapèze DD'EF' étant cyclique,

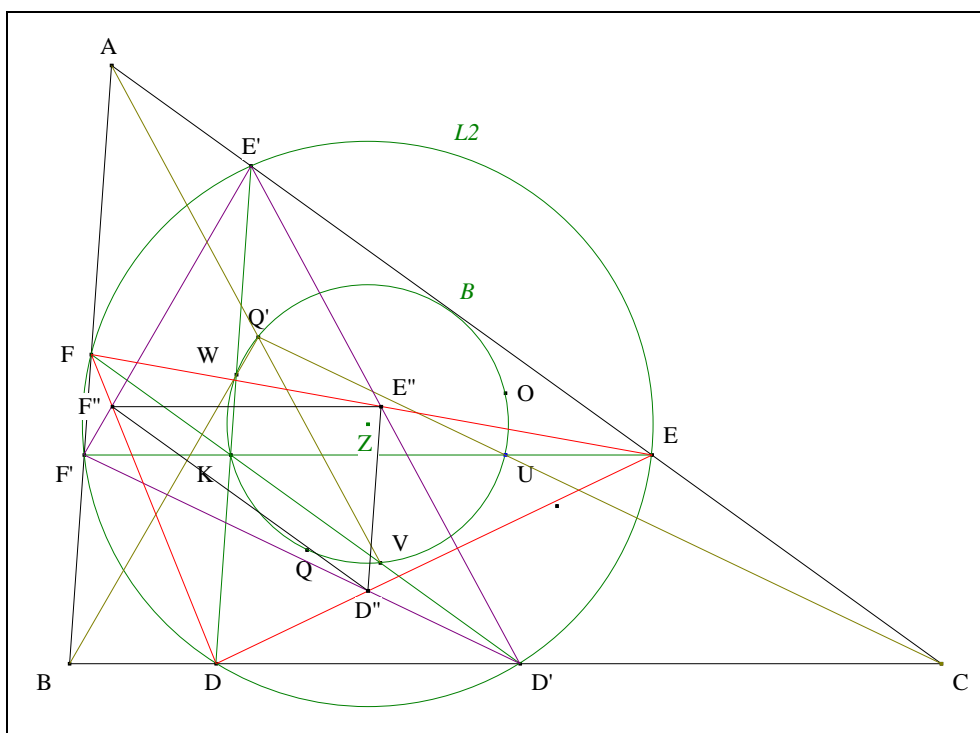
$$DE = F'D.$$

- Mutatis mutandis, nous montrerions que $EF = D'E'$
 $FD = E'F'$.
- **Conclusion** : les triangles DEF et F'D'E' sont égaux.

5. Deux triangles homothétiques

VISION

Figure :



Traits : D'', E'', F'' aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons les points d'intersection resp. de (DE) et (D'F'), de (EF) et (E'D'), de (FD) et (F'E').

Donné : les triangles ABC et $D''E''F''$ sont homothétiques.⁷⁶

VISUALISATION

- D'après "L'équivalence d'Aubert-MacKensie" (Cf. Annexe 18),

- * $(E''F'')$ est la pascalle de l'hexagone $D'E'F'EFDD'$
- * $(E''F'') \parallel (BC)$.

⁷⁶

Fuhrmann W., Der Brocardsche Winkel des Dreiecks A. (1887)

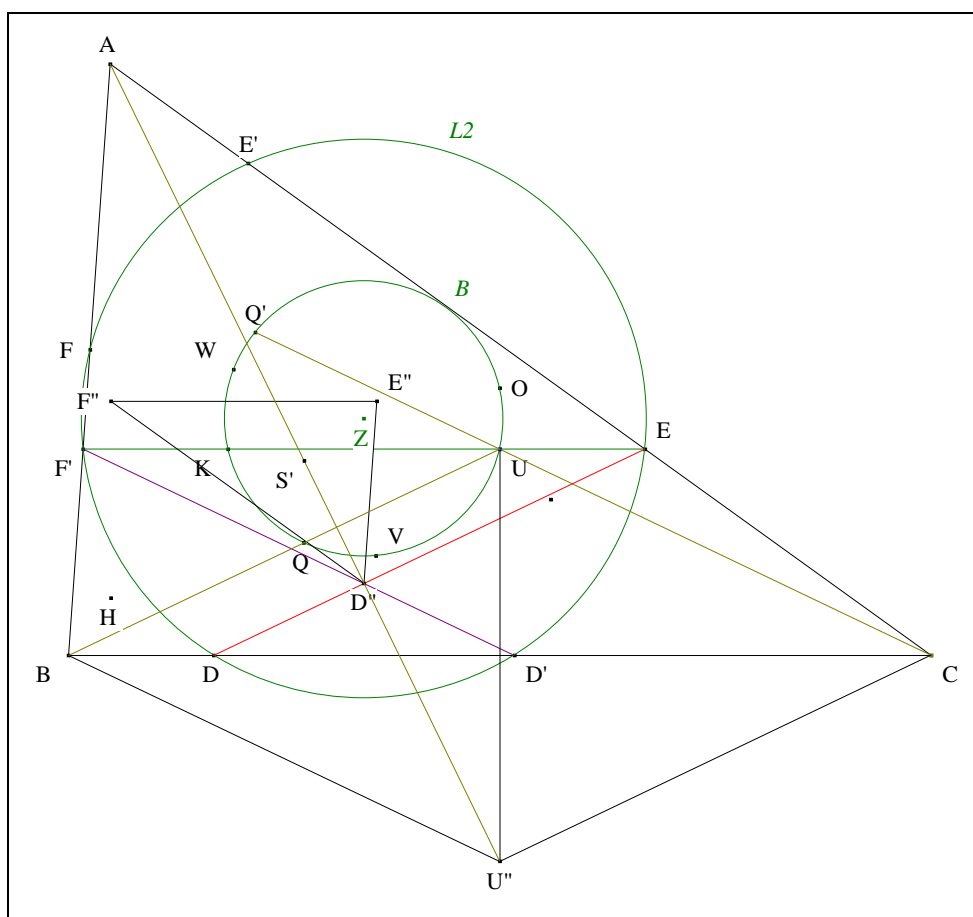
Der Brocardsche Winkel, Königsberg i. Pr. Programm des Realgymnasiums auf der Burg (1889)

cités par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 51, art. 26, 1°.

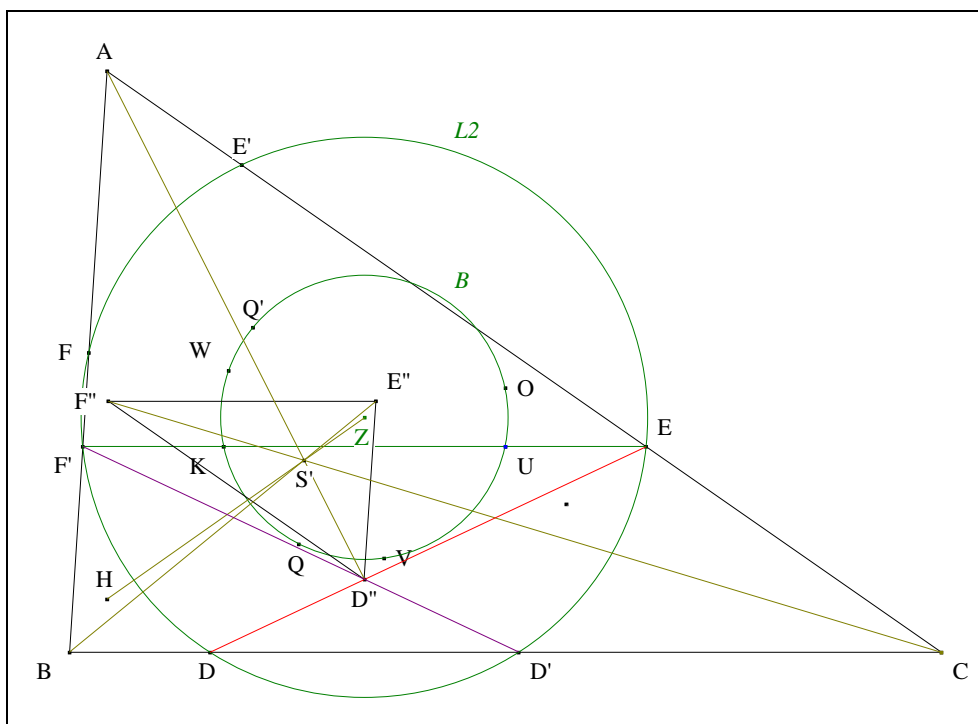
- Mutatis mutandis, nous montrerions que
 - * $(F''D'') // (CA)$
 - * $(D''E'') // (AB)$.

• **Conclusion :** les triangles ABC et $D''E''F''$ sont homothétiques.

- Scolies :**
- (1) les triangles $D''DD'$, $E''EE'$, $F''FF'$ sont isocèles.
 - (2) Z est l'orthocentre de $D''E''F''$.
 - (3) Le centre d'homothétie de ABC et $D''E''F''$



- Notons U''', V'', W'' les symétriques de U par rapport à (BC) , (CA) , (AB) .
- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 19) appliqué aux triangles homothétiques $D''E''F''$ et $U''CB$, A, D'' et U'' sont alignés.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que
 - B, E'' et V'' sont alignés
 - C, F'' et W'' sont alignés.
- D'après V. 10. Trois droites concourantes, (AU'') , (BV'') et (CW'') sont concourantes.
- Notons S' ce point de concours.
- **Conclusion :** S' est le centre d'homothétie de ABC et $D''E''F''$.
- (4) Un alignement inattendu



- Notons H l'orthocentre de ABC .
- **Conclusion :** Z étant l'orthocentre de $D''E''F''$, Z, S' et H sont alignés.⁷⁷

Commentaire : mis en valeur dans cet alignement inattendu, le point S' ouvre à l'auteur "une porte symbolique" qui le conduira à rechercher deux autres alignements avec l'idée d'appliquer le théorème d'Otto Hesse.

- (5) D'après V. 10 Trois droites concourantes, scolie, S' est l'isogonal du milieu $K\#$ de $[QQ']$.

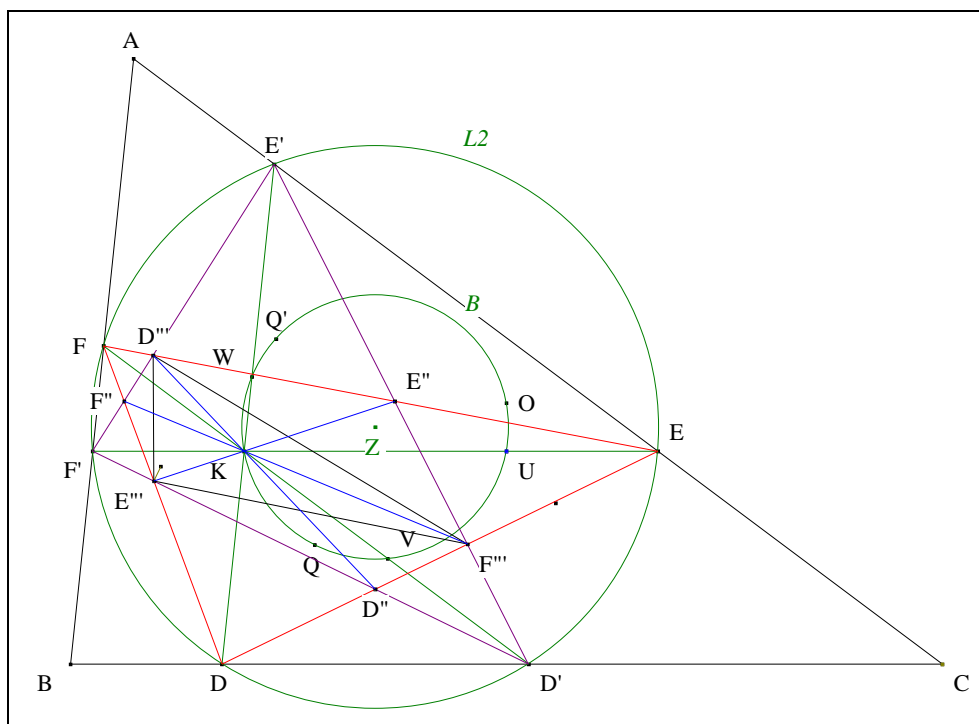
6. Deux triangles en perspective

VISION

Figure :

⁷⁷

Stegemann
cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 52, art. 26, 2°.



Traits : D'' , E'' , F'' aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons les points d'intersection resp. de (EF) et $(E'F')$, de (FD) et $(F'D')$, de (DE) et $(D'E')$.

Donné : les triangles $D''E''F''$ et $D'''E'''F'''$ sont perspectifs de centre K .

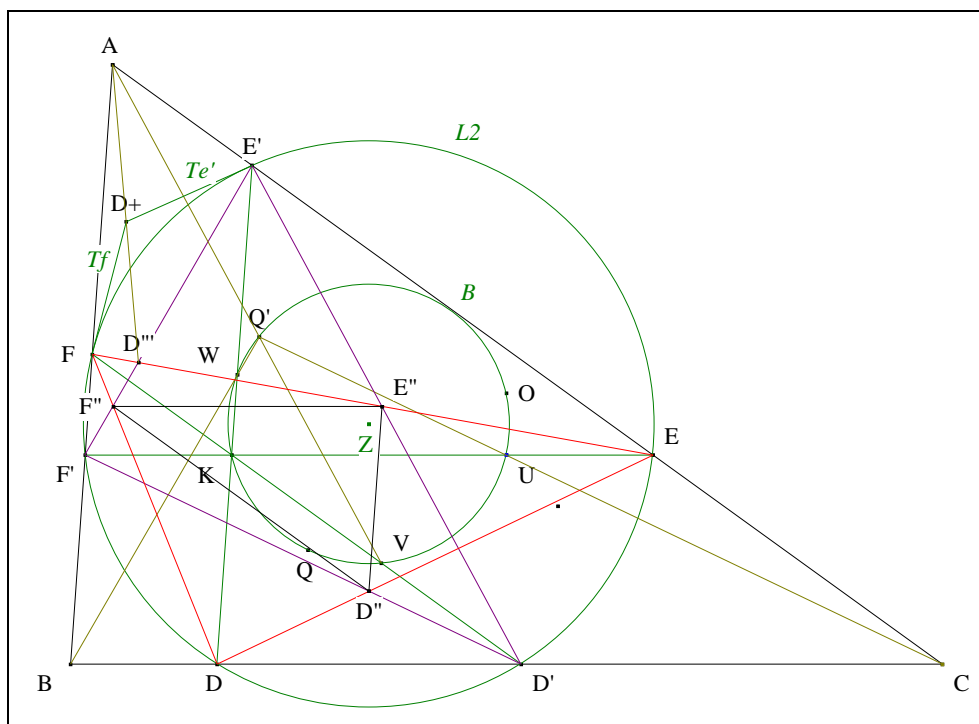
VISUALISATION

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 10), $(F''F'''K)$ est la pascale de l'hexagone $FDEF'E'D'F$ ou encore F'' , K et F''' sont alignés.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que D'' , K et D''' sont alignés
 E'' , K et E''' sont alignés.
- **Conclusion :** les triangles $D''E''F''$ et $D'''E'''F'''$ sont perspectifs de centre K .

7. Deux autres triangles en perspective

VISION

Figure :



Traits : Te', Tf aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
 et $D+$ les tangentes à $L2$ resp. en E', F
 le point d'intersection de Te' et Tf .

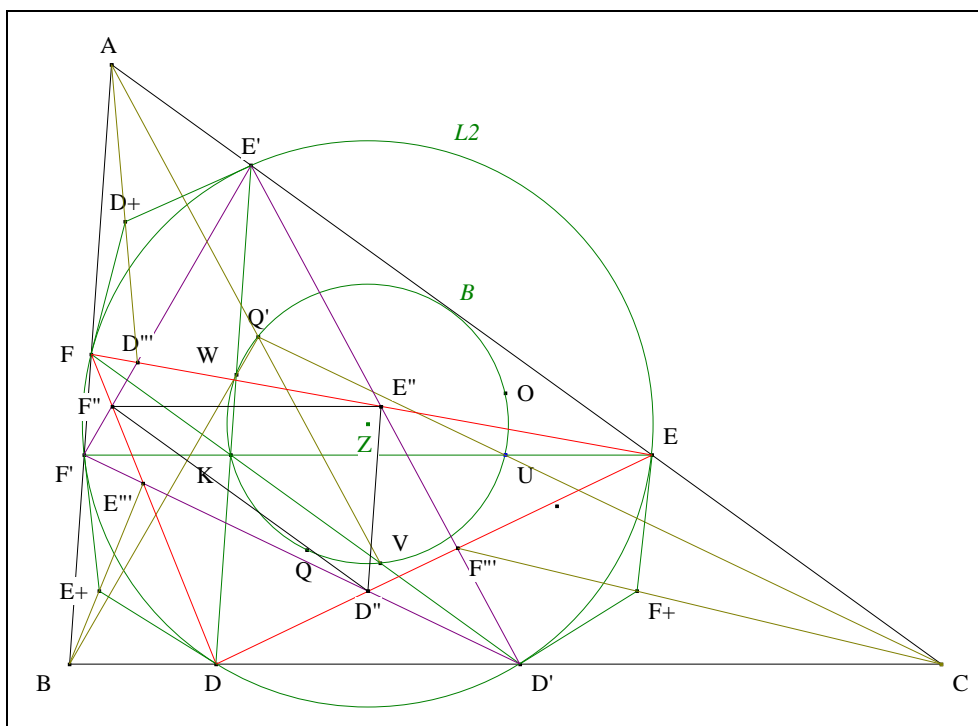
Donné : $A, D+$ et D''' sont alignés.

VISUALISATION

- D'après MacLaurin "Tetragramma mysticum" (Cf. Annexe 20),
 ($AD+D'''$) est la pascale de l'hexagone dégénéré $EE' Te' F'F Tf E$.

- **Conclusion :** $A, D+$ et D''' sont alignés.

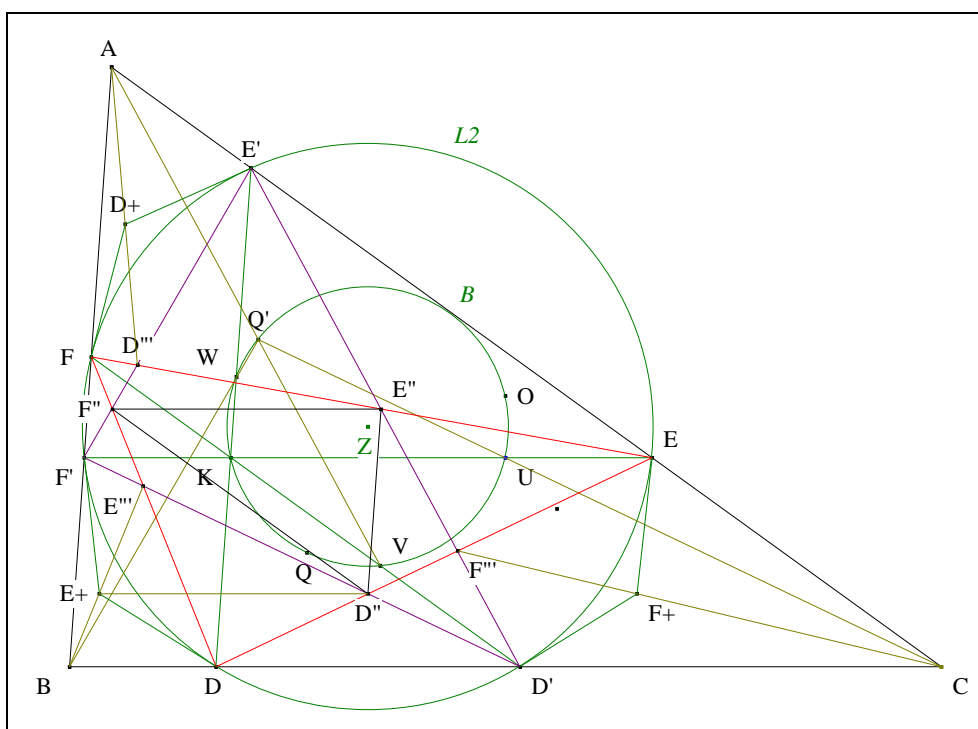
Scolies : (1) vision triangulaire



- Notons Tf', Td les tangentes à $L2$ resp. en F', E
 $E+$ le point d'intersection de Tf' et Td ,
 Td', Te les tangentes à $L2$ resp. en D', E
 et $F+$ le point d'intersection de Td' et Te .

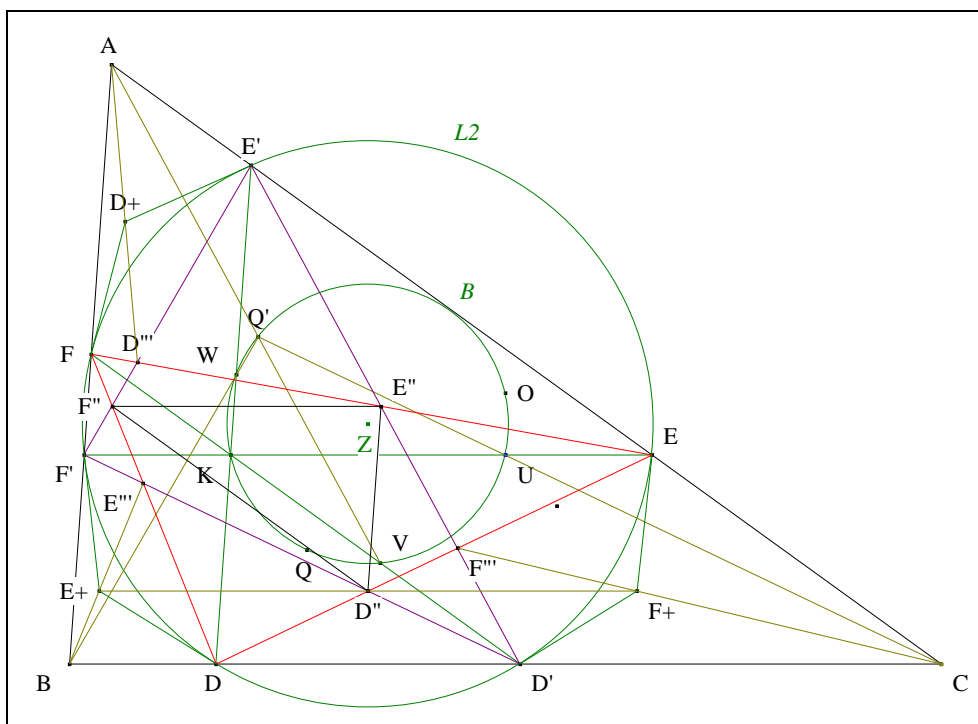
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que $B, E+$ et E''' sont alignés
 $C, F+$ et F''' sont alignés.

(2) Les triangles ABC et $D+E+F+$ sont homothétiques

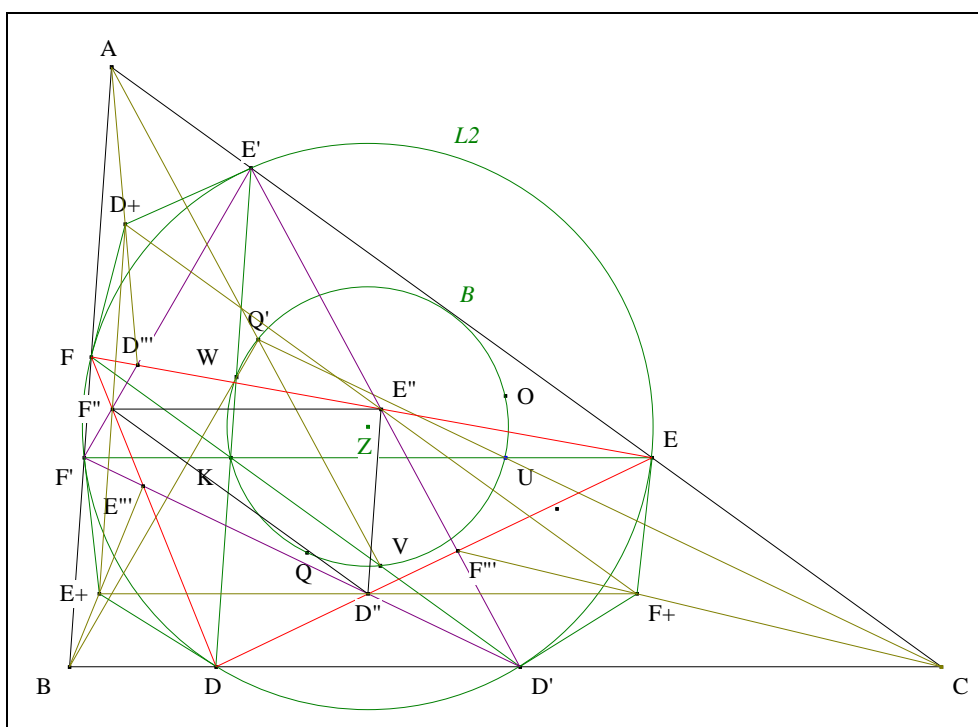


- D'après "L'équivalence d'Aubert-MacKensie" (Cf. Annexe 18),

- * $(D''E^+)$ est la pascale de l'hexagone $D'F' T' ED Td D'$
- * $(D''E^+) // (BC)$.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que par transitivité de la relation $//$, d'après le postulat d'Euclide, $(D''F^+) // (BC)$ i.e. $(BC) // (D''F^+)$;
 $(D''E^+) // (D''F^+)$;
 $(D''E^+) = (D''F^+)$.
- **Conclusion partielle :** $(E^+D''F^+)$ est parallèle à (BC) .

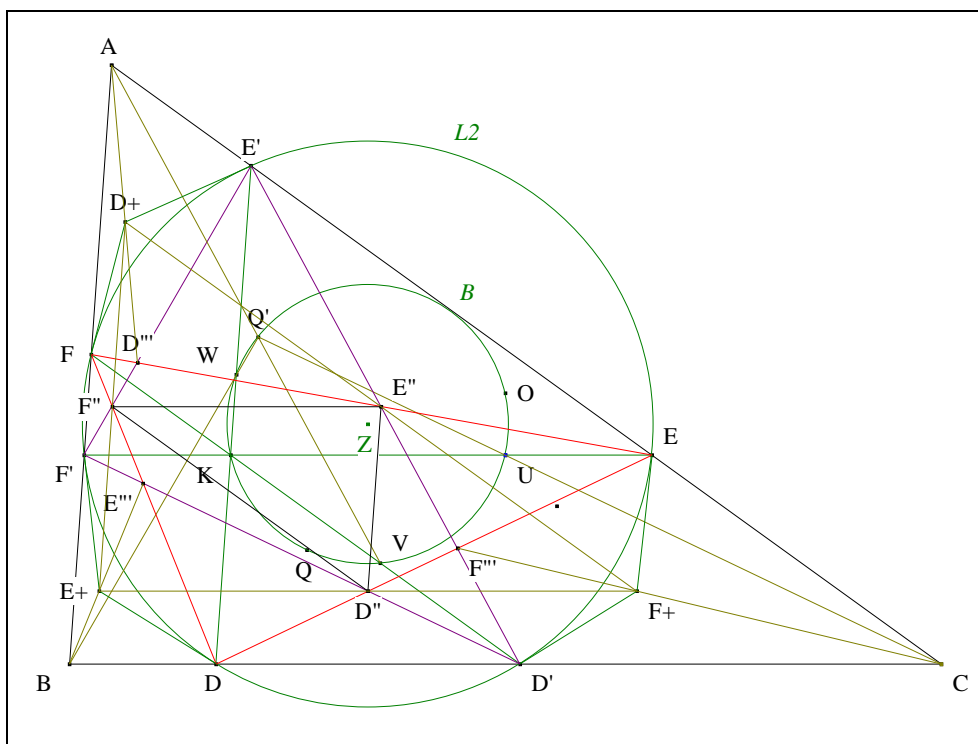


- Mutatis mutandis, nous montrerions que $(F+E''D^+)$ est parallèle à (CA) .

$(D+F''E^+)$ est parallèle à (AB) .

- **Conclusion** : les triangles ABC et $D+E+F^+$ sont homothétiques.

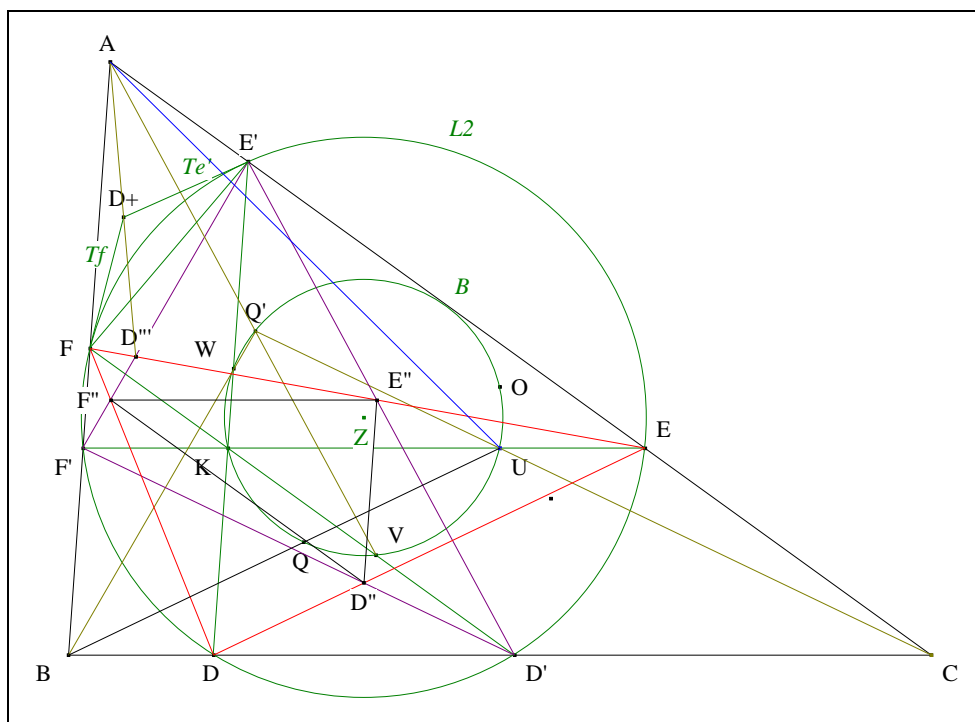
(3) Les triangles ABC et $D'''E'''F'''$ sont en perspective



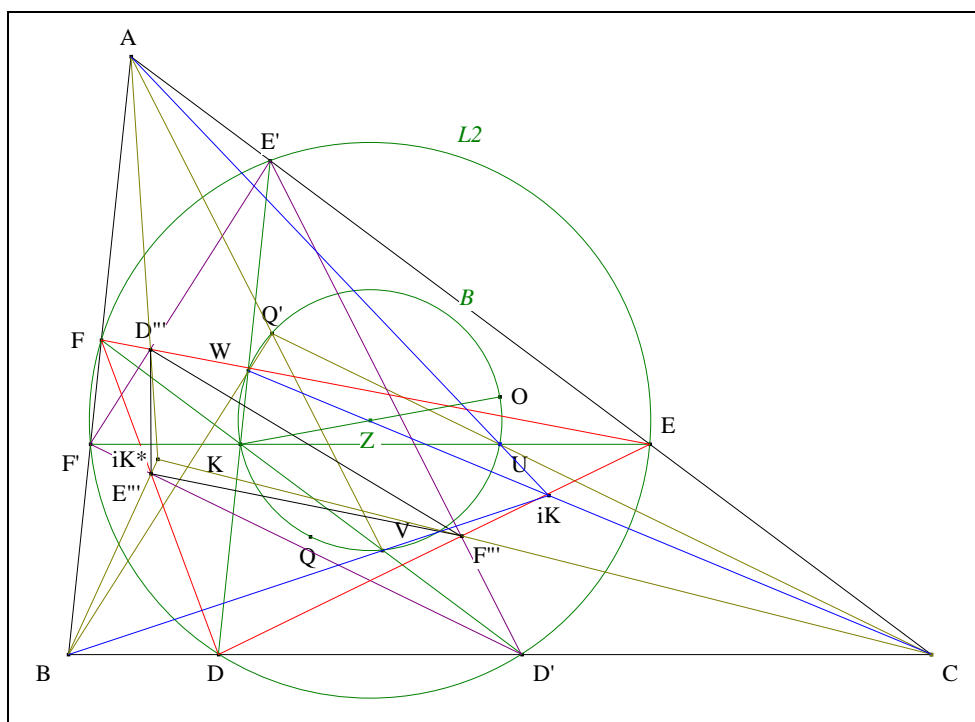
- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 19) appliqué à ABC et $D+E+F^+$, (AD^+) , (BE^+) et (CF^+) sont concourantes.

- **Conclusion** : les triangles ABC et $D'''E'''F'''$ sont en perspective.

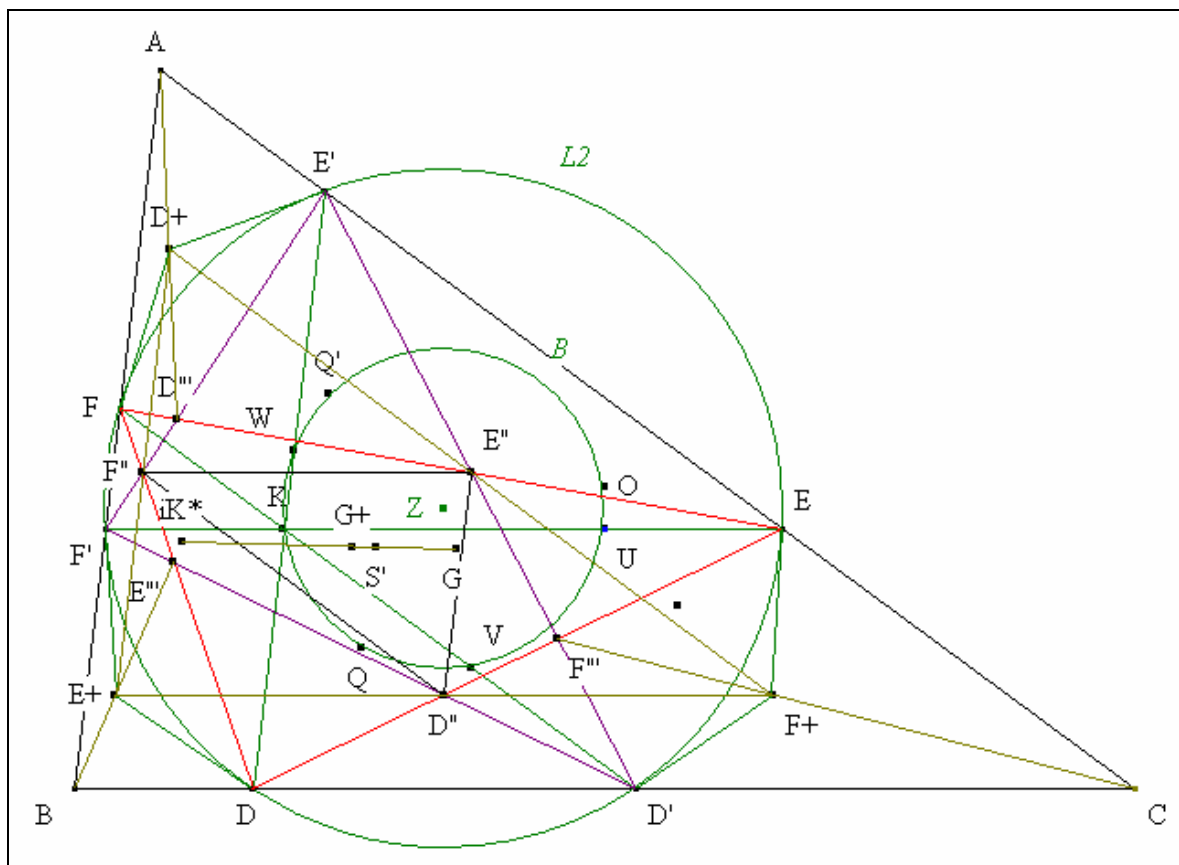
(4) Nature du centre de cette perspective



- Les triangles isocèles $D+E'F'$ et UBC sont semblables ;
 $(E'F)$ et (EF') sont antiparallèles relativement à (AB) et (AC) ;
 (EF') étant parallèle à (BC) , $(E'F)$ et (BC) sont antiparallèles relativement à (AB) et (AC) ;
- **Conclusion partielle :** $(AD+)$ et (AU) sont deux A-isogonales de ABC .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $(BE+)$ et (BV) sont deux B-isogonales de ABC .
 $(CF+)$ et (CW) sont deux C-isogonales de ABC .



- Notons iK l'isotomique de K relativement à ABC

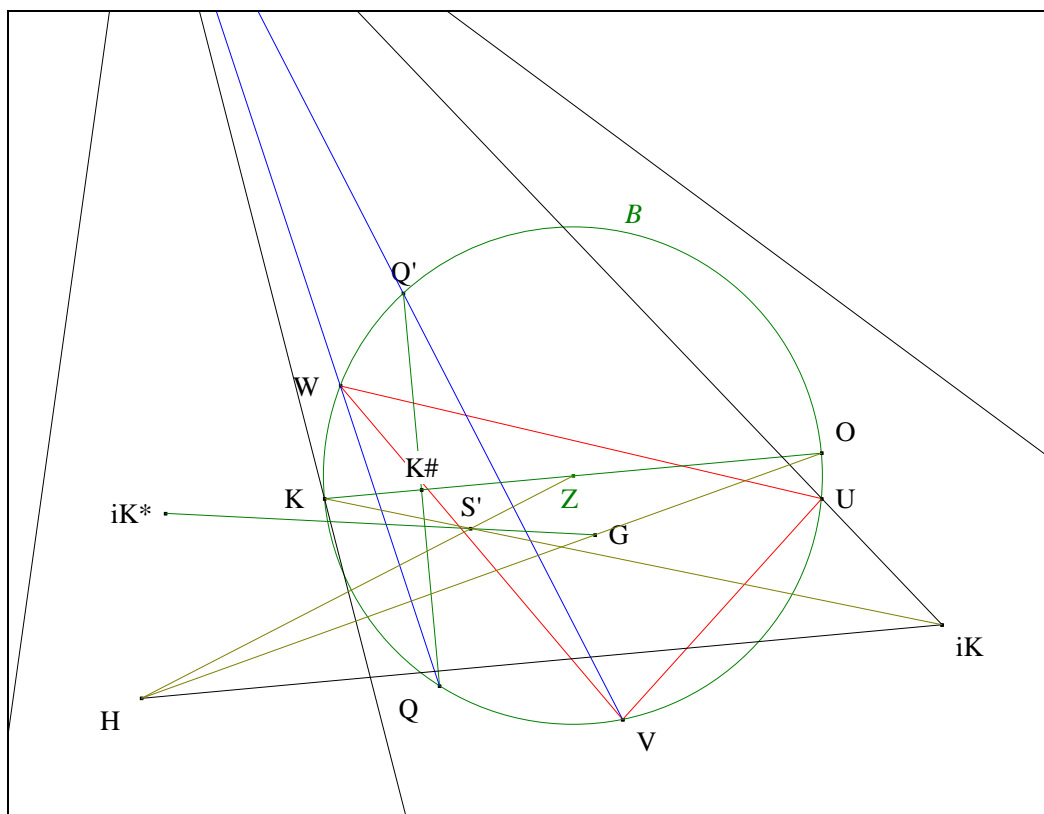


- Notons $G+$ le point médian de $D''E''F''$.
- D'après VI. 5. Deux triangles homothétiques, ABC et $D''E''F''$ sont homothétiques de centre S' .
- **Conclusion partielle :** G, S' et $G+$ sont alignés.
- D'après VI. 7. Deux autres triangles en perspective, scolie 2, scolie 4, ABC et $D+E+F+$ sont homothétiques ; iK^* est le centre de cette homothétie.
- $D''E''F''$ étant homothétiques à $D+E+F+$, en conséquence, $D''E''F''$ est le triangle médian de $D+E+F+$; G est le centre de cette homothétie.
- Les triangles homothétiques $ABC, D''E''F''$ et $D+E+F+$ ayant la droite à l'infini pour axe de perspective, les centres de perspectives de ces triangles pris deux à deux sont alignés.
- **Conclusion partielle :** iK^*, S' et $G+$ sont alignés.
- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, iK^*, S' et G sont alignés.

9. Le deuxième alignement recherché

VISION

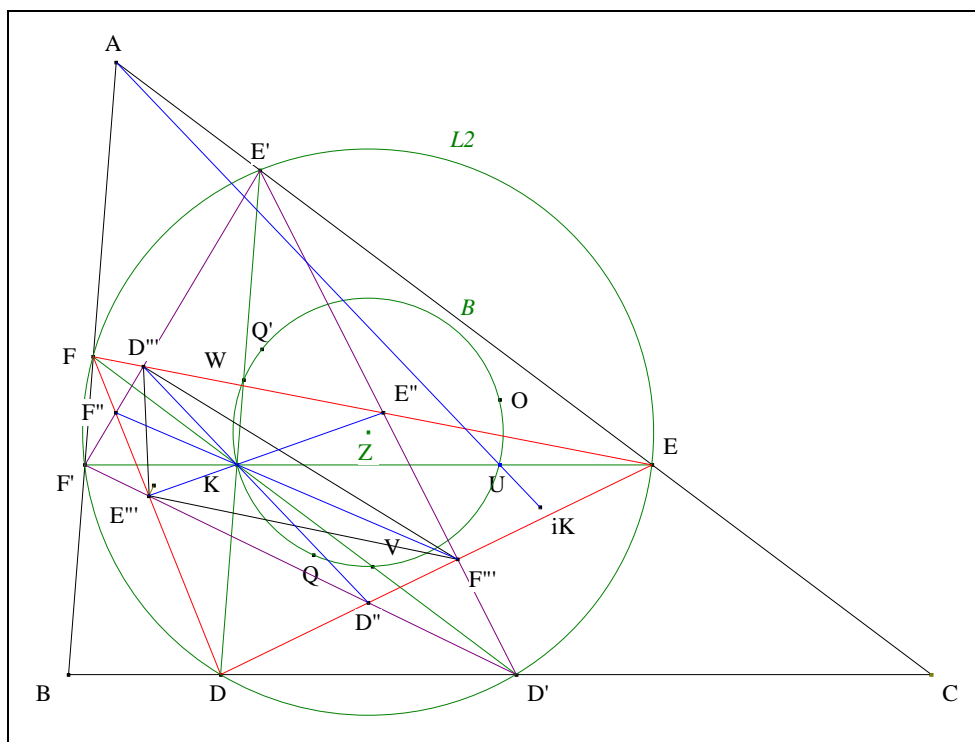
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

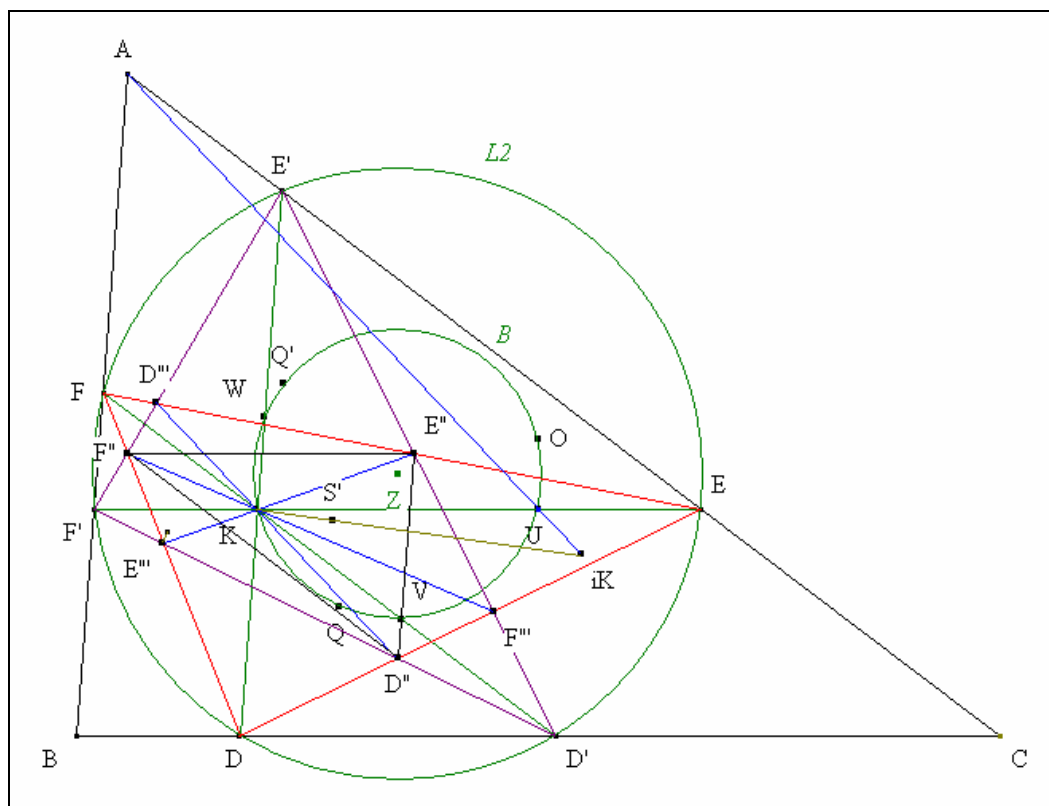
Donné : K , S' et iK sont alignés.

VISUALISATION



- Les triangles KDD' et ABC sont homothétiques.

- Nous avons : $(DD'') // (BU)$;
 $(D'D'') // (CU)$.
- D'après "Deux triangles parallélogiques" (Cf. Annexe 21), $(KD'') // (AUiK)$.

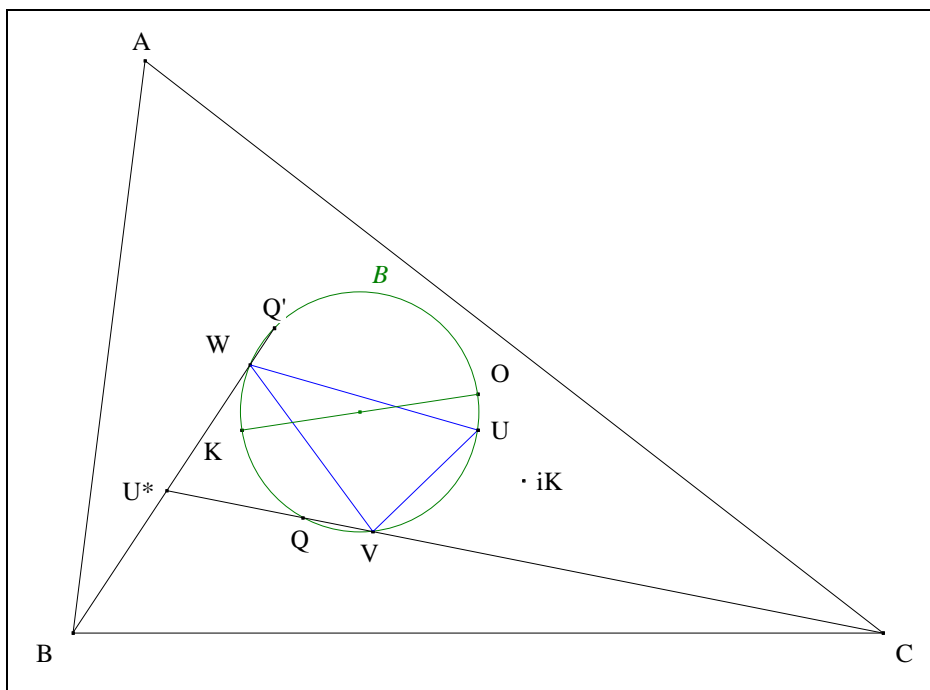


- $D''E''F''$ et ABC étant homothétiques,
 $(D''K)$ passe par l'isotomique du point de Lemoine de $D''E''F''$.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que
 $(E''K)$ passe par l'isotomique du point de Lemoine de $D''E''F''$;
 $(F''K)$ passe par l'isotomique du point de Lemoine de $D''E''F''$.
- **Conclusion partielle :** K est l'isotomique du point de Lemoine de $D''E''F''$.
- Notons S' le centre d'homothétie de $D''E''F''$ et ABC .
- **Conclusion :** par homothétie, K, S' et iK sont alignés.

10. Le triangle $U^*V^*W^*$

VISION

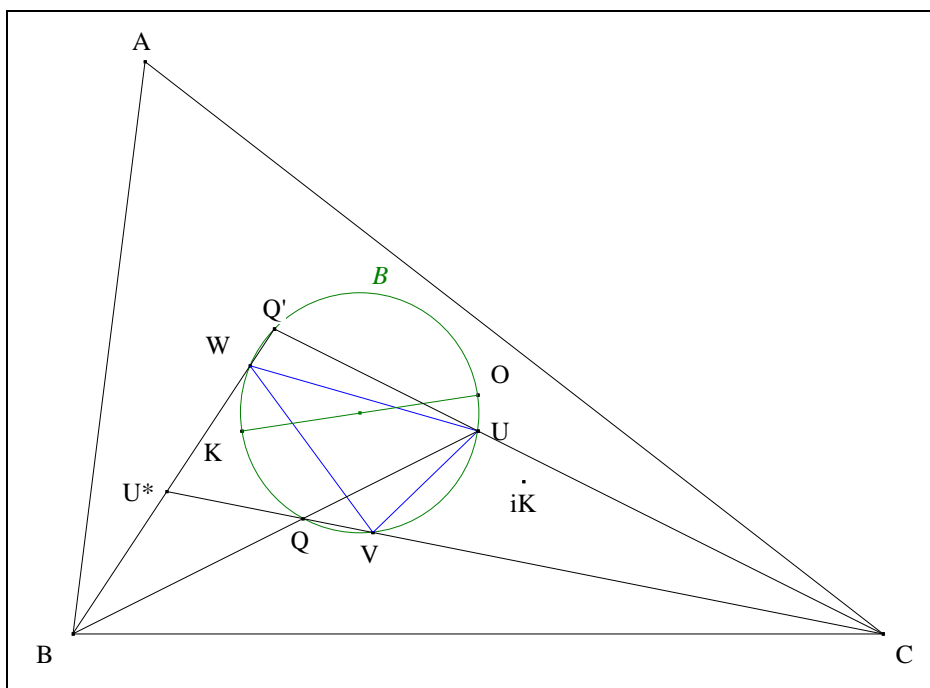
Figure :



Traits : aux notations précédentes, nous ajoutons,
 U^* le point d'intersection de (CQ) et (BQ') .

Donné : U^* est l'isogonal de U relativement à ABC .

VISUALISATION



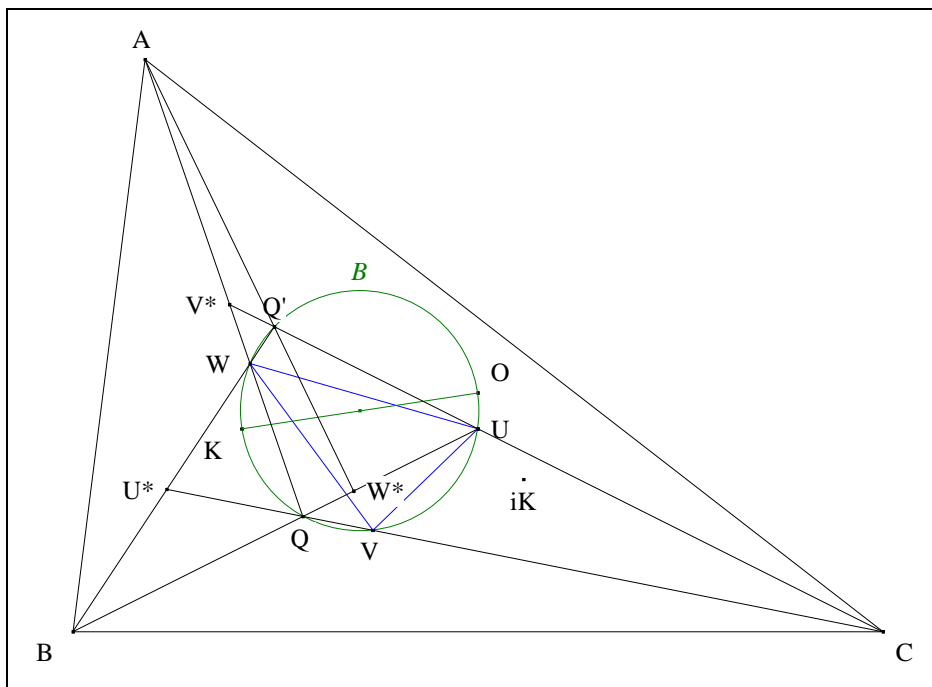
- **Scolies :** (1) B, Q et U sont alignés et B, Q' et W le sont aussi
 (2) C, Q' et U sont alignés et C, Q et V le sont aussi.

- D'après D. III. 7. L'isogonal de Q ,
 en conséquences,

(1)	Q' est l'isogonal de Q ;
(2)	(BQ') est l'isogonale de (BQU) relativement à ABC
	(CQ) est l'isogonale de $(CQ'U)$ relativement à ABC .

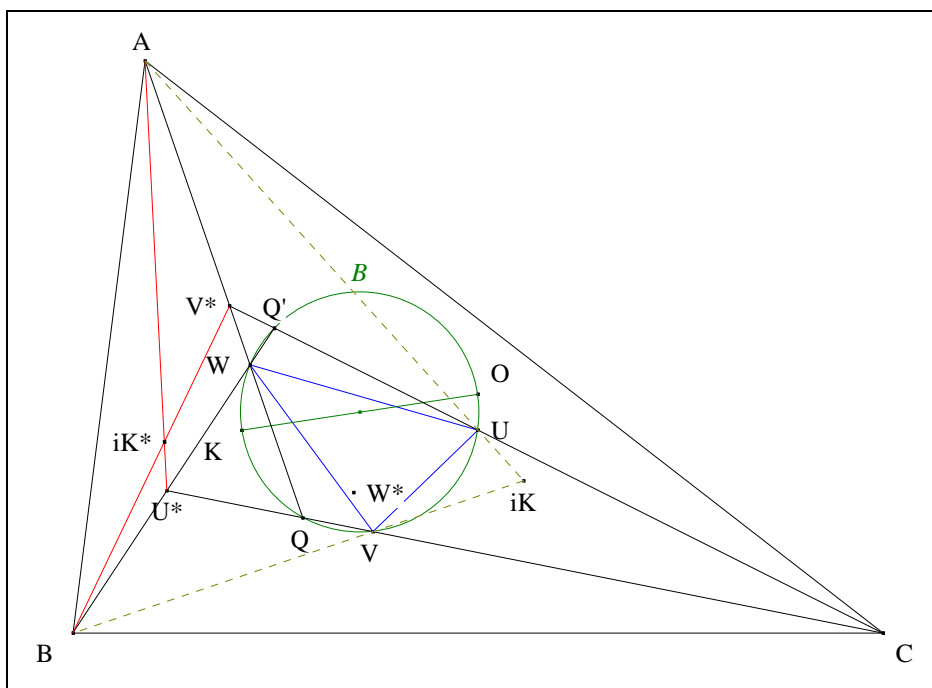
- **Conclusion :** d'après Mathieu "The isogonal theorem" (Cf. Annexe 16), U^* est l'isogonal de U relativement à ABC .

Scolies : (1) vision triangulaire

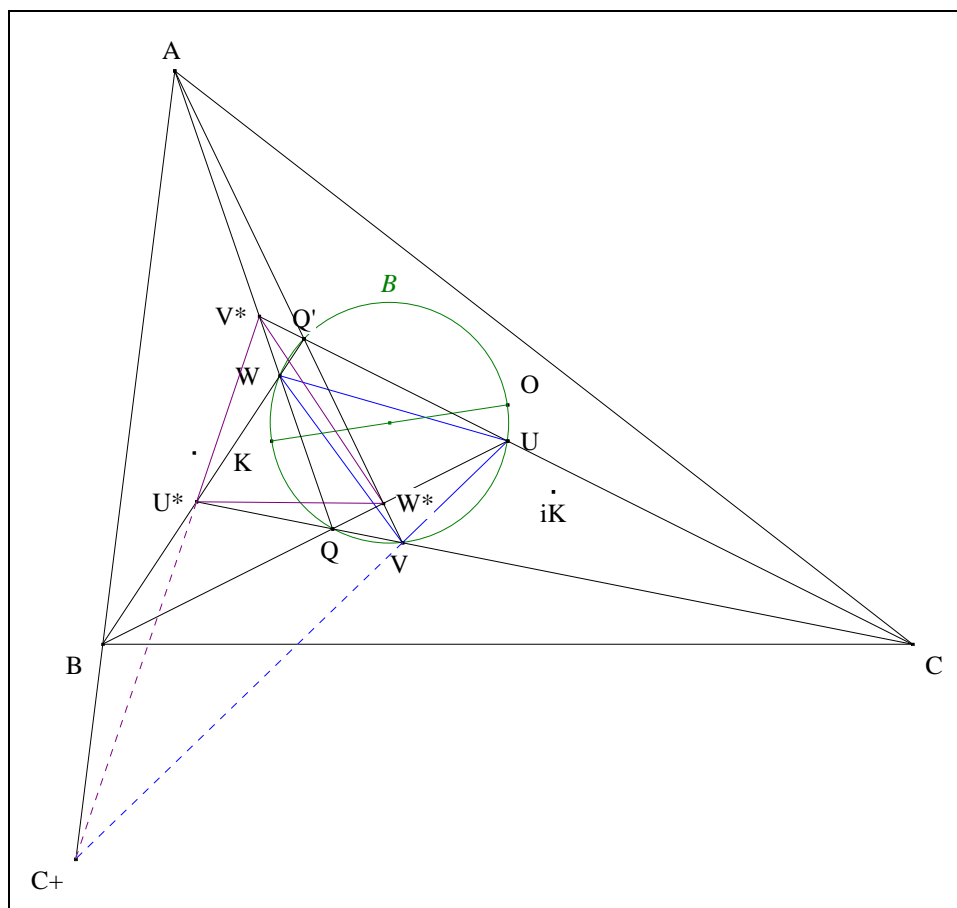


- Notons U^*, V^* les points d'intersection resp. de (AQ) et (CQ') , de (BQ) et (AQ') .
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que V^* est l'isogonal de V relativement à ABC
 W^* est l'isogonal de W relativement à ABC .

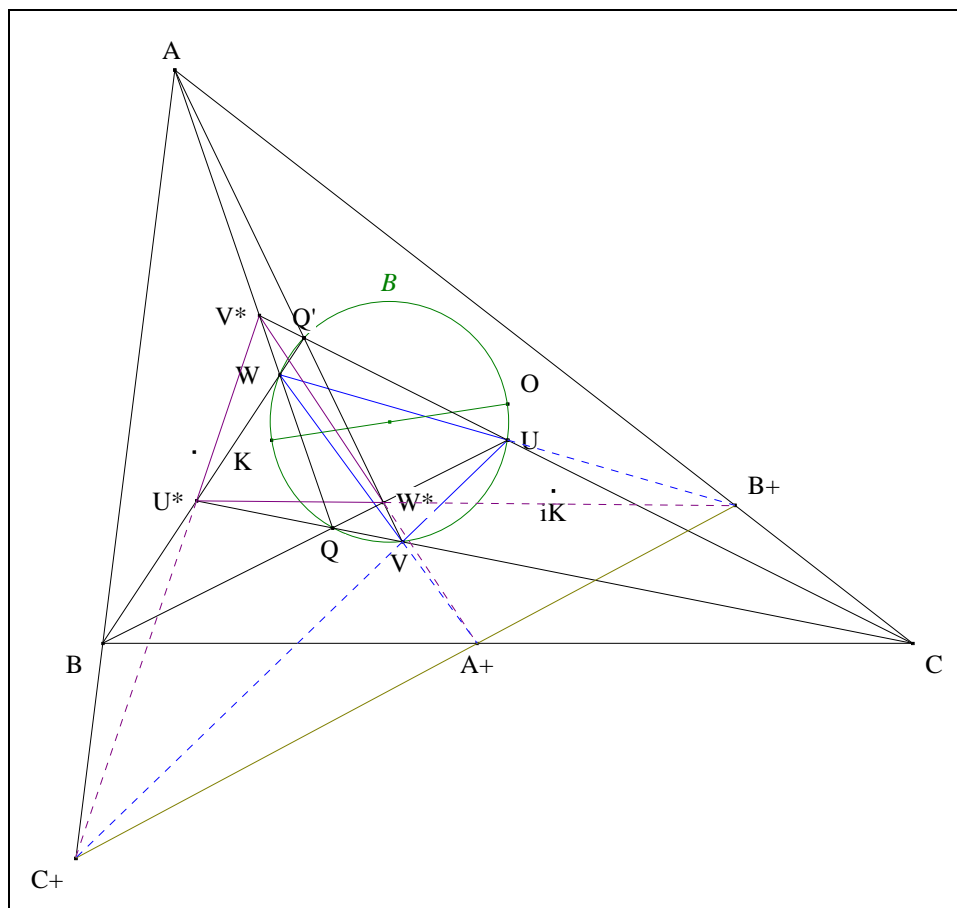
(2) L'isogonal de iK



- Notons iK^* le point d'intersection de (AU^*) et (BV^*) .
 - A, U et iK étant alignés, (AU^*) est l'isogonale de $(AUiK)$ relativement à ABC ;
B, V et iK étant alignés, (BV^*) est l'isogonale de $(BViK)$ relativement à ABC.
 - **Conclusion :** d'après Mathieu "The isogonal theorem" (Cf. Annexe 16),
 iK^* est l'isogonal de iK relativement à ABC ;
- (3) Les triangles ABC et $U^*B^*C^*$ sont perspectifs de centre iK^* .
- (4) L'axe de perspective de ABC et $U^*B^*C^*$



- Notons C^+ le point d'intersection de (UV) et (U^*V^*) .
- D'après Pappus "La proposition 139" (Cf. Annexe 22),
 (C^+AB) est la pappusienne de l'hexagone sectoriel $UVQ^*U^*V^*QU$.
- **Conclusion partielle :** C^+ est sur (AB) .



- Notons A_+ le point d'intersection de (VW) et (V^*W^*) ,
et B_+ le point d'intersection de (WU) et (W^*U^*) .
 - Mutatis mutandis, nous montrerions que A_+ est sur (BC)
 B_+ est sur (CA) .
 - **Conclusion :** $(A+B+C_+)$ est l'axe de perspective de ABC , UVW et $U^*V^*W^*$.
- (5) Les trois centres de perspective de ces triangles sont alignés⁷⁸.

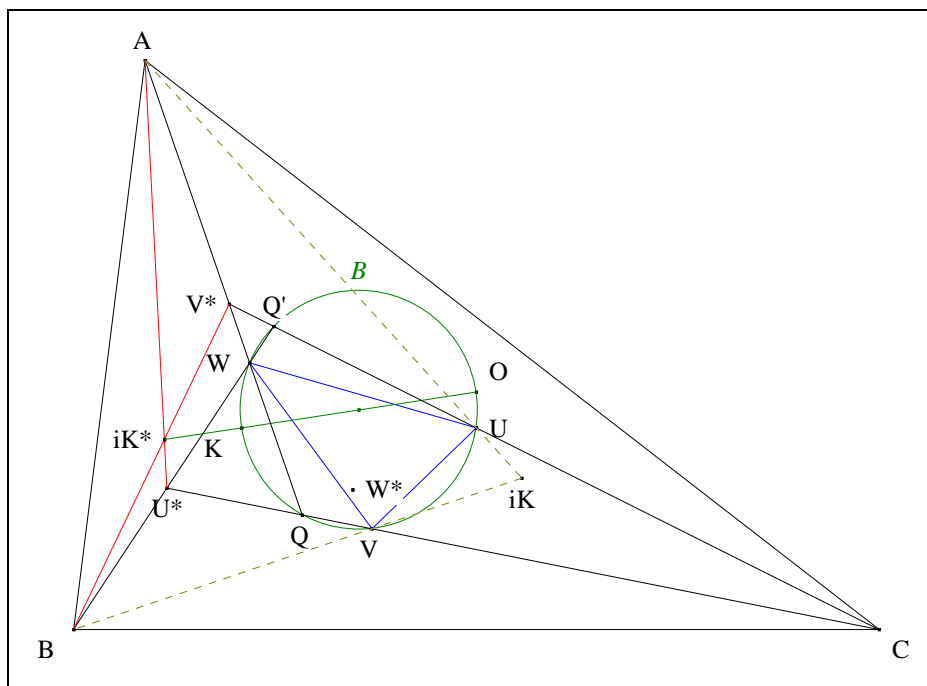
11. Le troisième alignement recherché

VISION

Figure :

⁷⁸

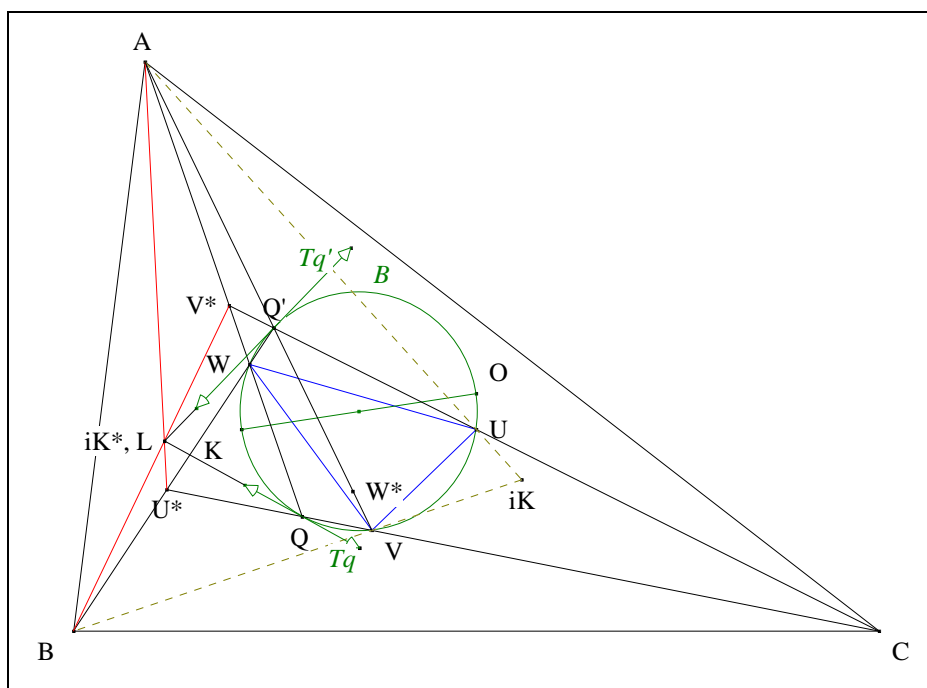
Kiehl H. et
Artzt, Untersuchungen über ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreiecks und auf deren Mittelsenkrechten, sowie über
kongruente Strahlbüschel auf den Ecken deselben ; ein Beitrag zur Geometrie des Brocardschen Kreises, Recklinghausen.
Programm des Gymnasiums (1884, 1886) ;
cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten
und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 99, art. 47, 6°.



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : iK^* , K et O sont alignés.⁷⁹

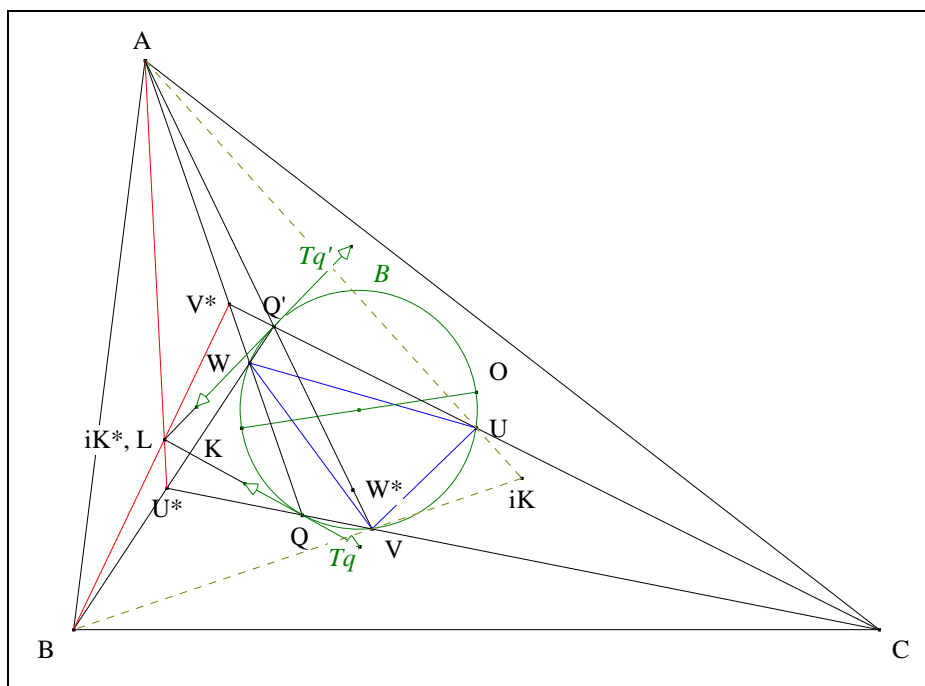
VISUALISATION



- Notons $T_q, T_{q'}$ les tangentes à B resp. en Q, Q'
- et L le point d'intersection de T_q et $T_{q'}$.

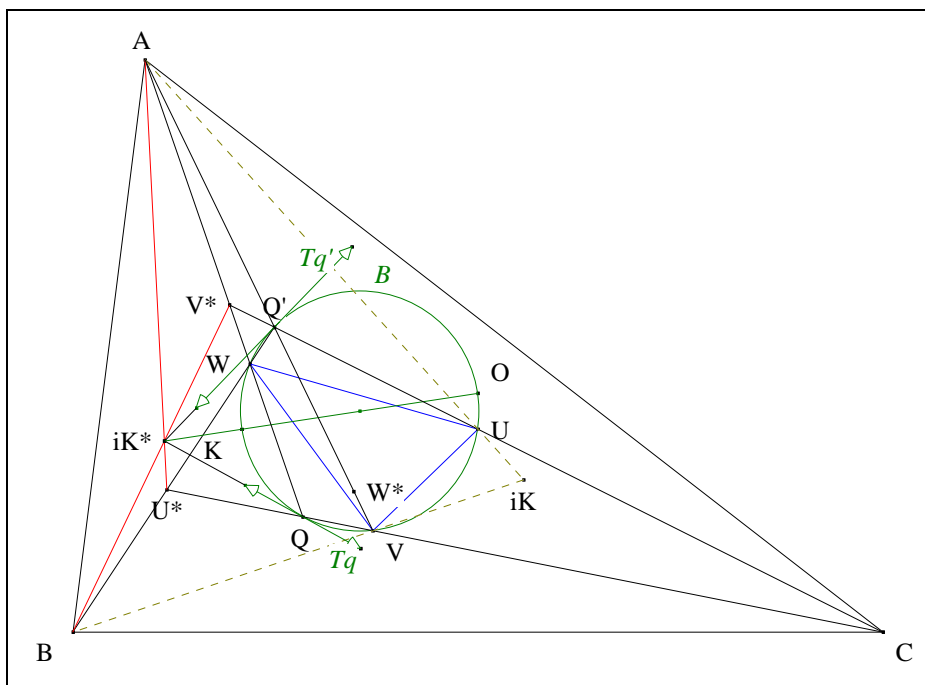
⁷⁹ Brocard H., cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 98, art. 47, 1°.

- D'après MacLaurin "Tetragramma mysticum" (Cf. Annexe 20),
(AU^*L) est la pascale de l'hexagone dégénéré $QWQ'Tq'VQ Tq Q$.



- D'après MacLaurin "Tetragramma mysticum" (Cf. Annexe 20),
(BV^*L) est la pascale de l'hexagone dégénéré $QUQ'Tq'WQ Tq Q$.

- **Conclusion partielle** : L étant à la fois sur (AU^*) et (BV^*) , L et iK^* sont confondus.

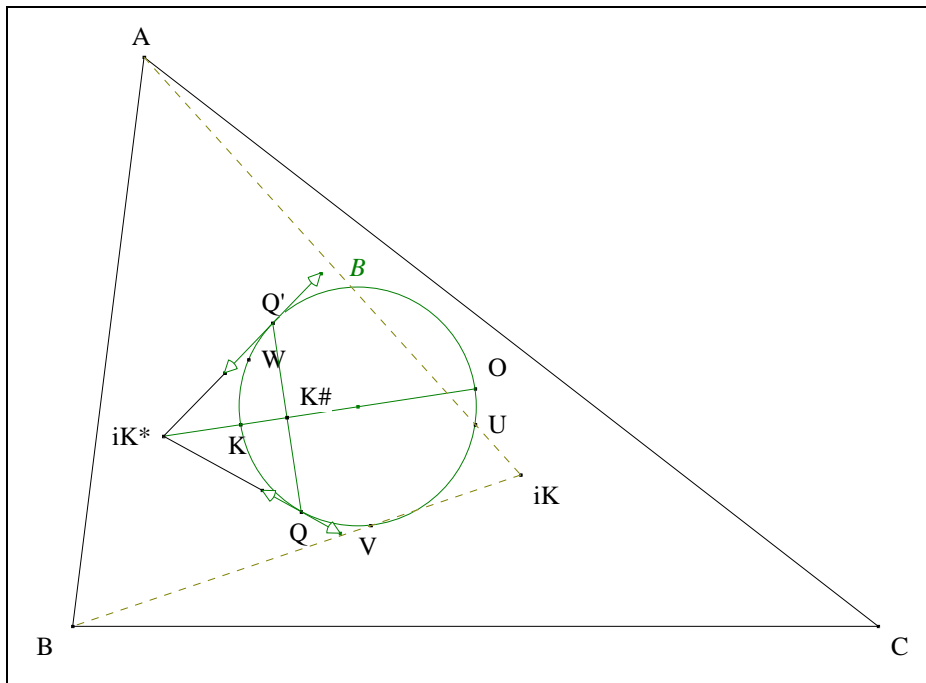


- D'après D. II. 2. Le triangle OQQ' , (OK) est la médiatrice de $[QQ']$;
en conséquence, iK^* est sur (OK) .

- **Conclusion** : iK^* , K et O sont alignés.

Commentaire : ce troisième alignement recherché va nous permettre finalement de mettre en œuvre le théorème d'Otto Hesse.

Solie : une quaterne

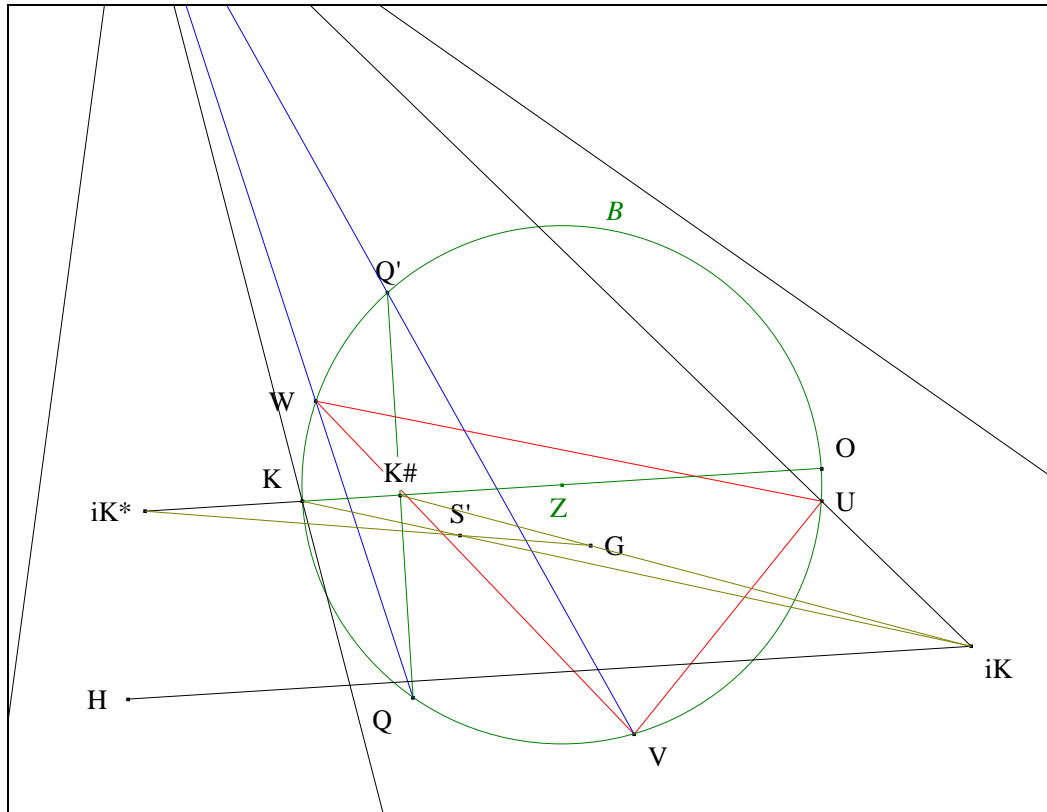


- **Conclusion :** d'après Apollonius "Une quaterne harmonique" (Cf. Annexe 11) la quaterne (O, K, K#, iK*) est harmonique.

12. Le milieu de Brocard

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : iK , G et $K\#$ sont alignés.

VISUALISATION ⁸⁰

- **Scolies :**
 - (1) G et K sont deux points isogonaux relativement à ABC
 - (2) iK et iK^* sont deux points isogonaux relativement à ABC .
- D'après VI. 8. Le premier alignement recherché, iK^* , S' et G sont alignés ;
d'après VI. 9. Le second alignement recherché, K , S' et iK sont alignés.
- D'après "Le théorème de Hesse"⁸¹ (Cf. Annexe 23)
appliqué aux couples de points isogonaux (K, G) et (iK, iK^*) ,
le point d'intersection de (KiK^*) et (GiK) est l'isogonal du point d'intersection de (KiK) et (GiK^*) i.e. de S' .
- D'après V. 10. Trois droites concourantes, scolie, $K\#$ est l'isogonal de S' ;
en conséquence, $K\#$ est le point d'intersection de (KiK^*) et (GiK) .
- **Conclusion :** iK , G et $K\#$ sont alignés.

Commentaire : il nous reste à montrer que le milieu $K\#$ de Brocard est le complément du troisième point de Brocard i.e. de iK relativement à ABC .

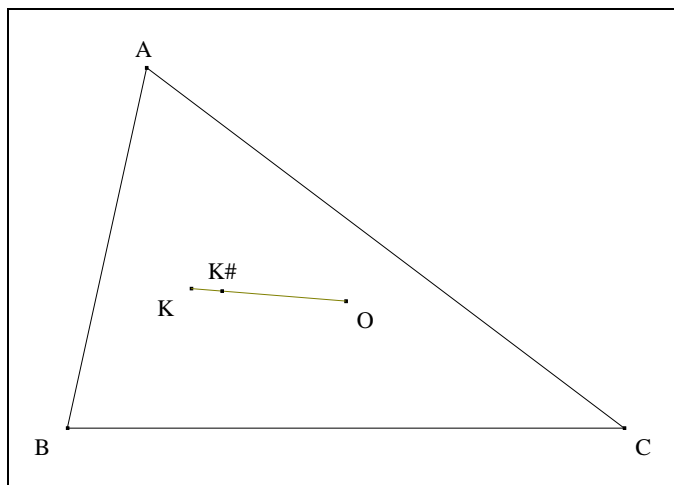
⁸⁰ L'auteur.

⁸¹ Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2, p. 21-24 ; <http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>.

13. Le complément du troisième point de Brocard

VISION

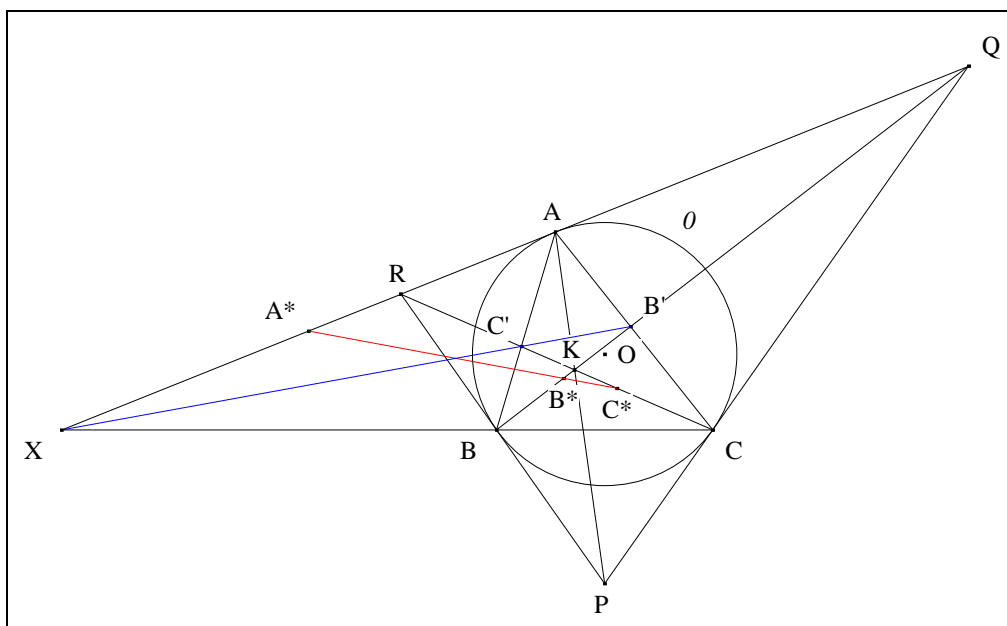
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit de ABC,
 K le point de Lemoine de ABC,
 et K# l'isotomcomplément⁸² de K relativement à ABC.

Donné : O, K et K# sont alignés.

VISUALISATION

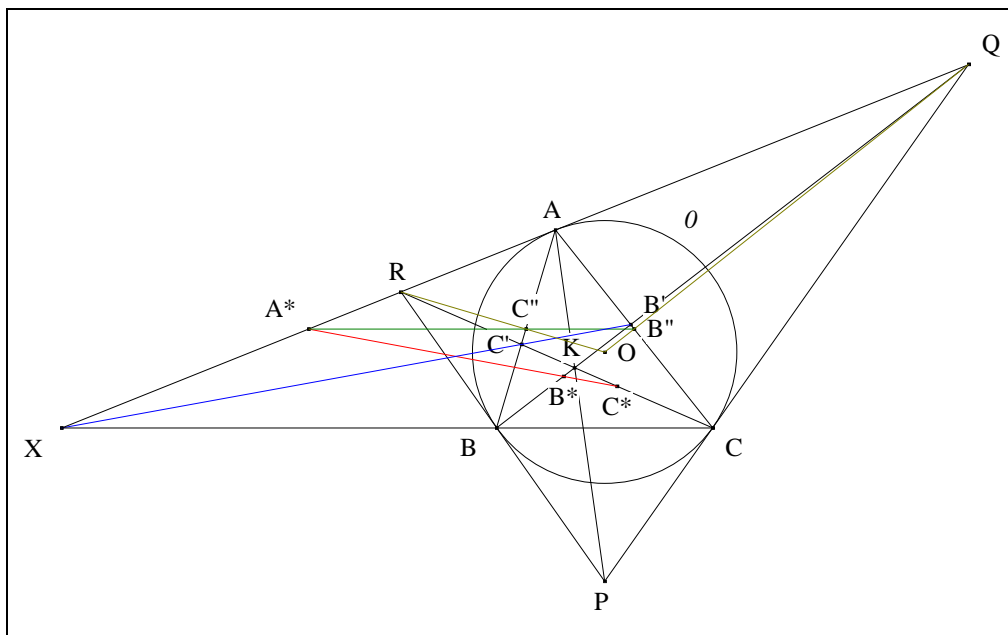


• Notons B', C' les pieds des B, C-symédianes de ABC,

⁸² i.e. le complément de l'isotomique de K.

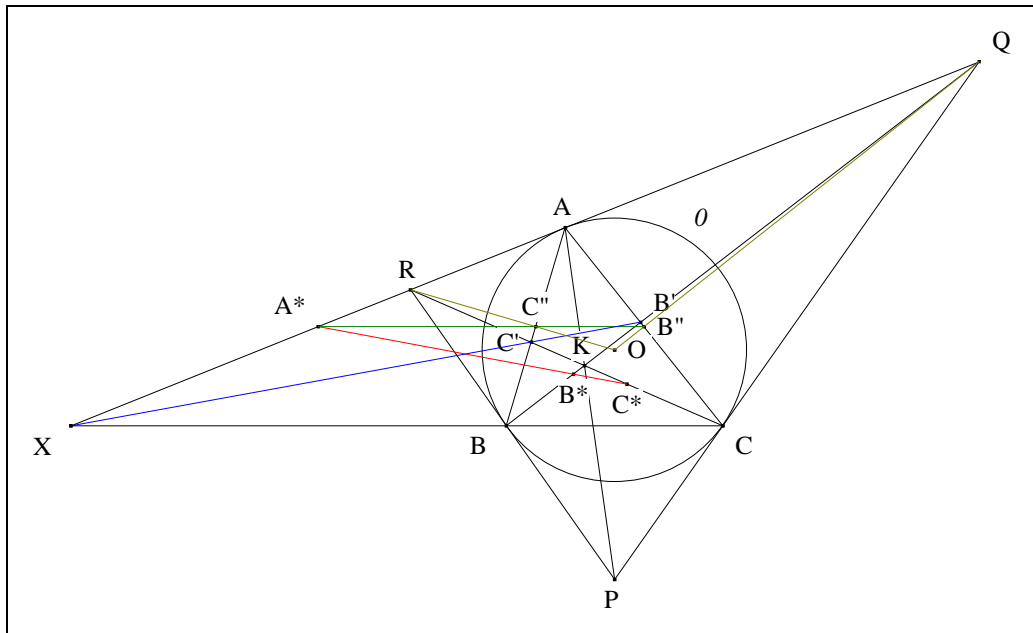
O le cercle circonscrit de ABC ,
 PQR le triangle tangential de ABC ,
 X le point d'intersection de (BC) et (QR)
 et B^*, C^*, A^* les milieux resp. de $[BB']$, $[CC']$, $[AX]$.

- D'après "Le triangle K-cévien" (Cf. Appendice 2), (BC) , $(B'C')$ et (QR) sont concurrentes.
- D'après "La droite de Newton"⁸³ appliqué au quadrilatère $BCB'C'$, A^* , B^* et C^* sont alignés.

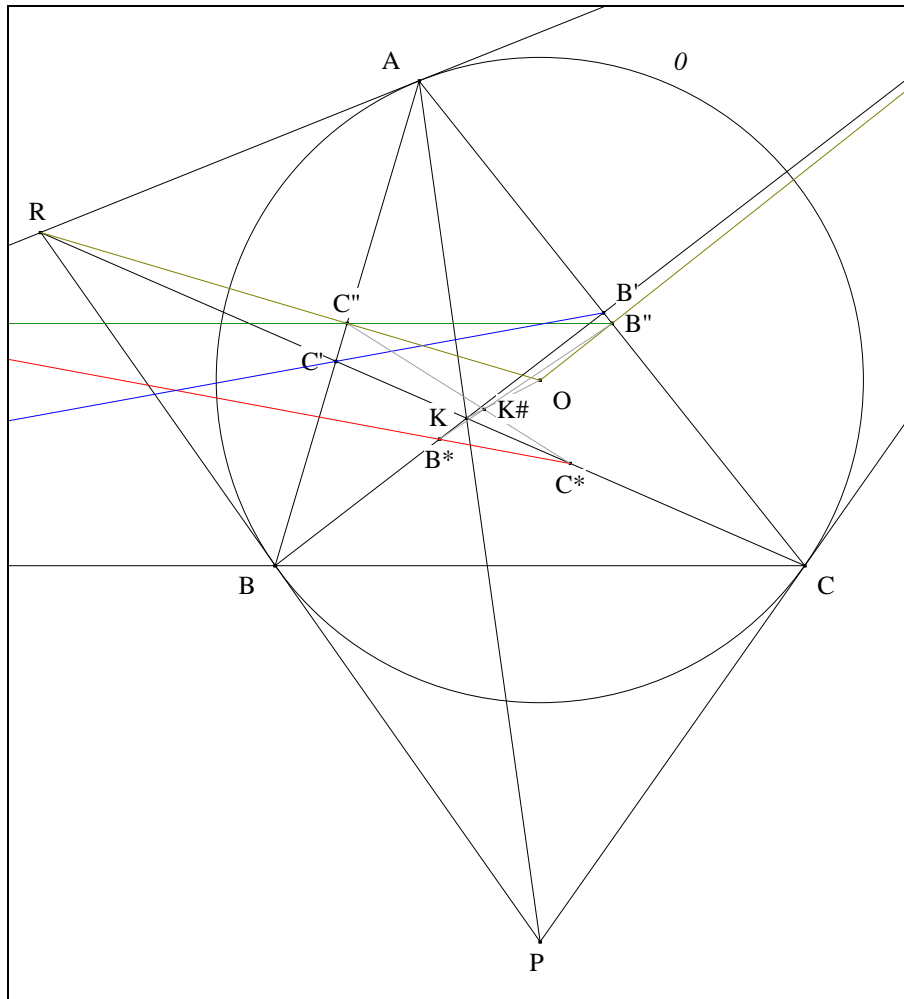


- Notons B'', C'' les milieux resp. de $[AC]$, $[AB]$.
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué aux triangles AXB et ABC , A^* , B'' et C'' sont alignés.
- **Scolies :**
 - (1) O , B'' et Q sont alignés
 - (2) O , C'' et R sont alignés.

83



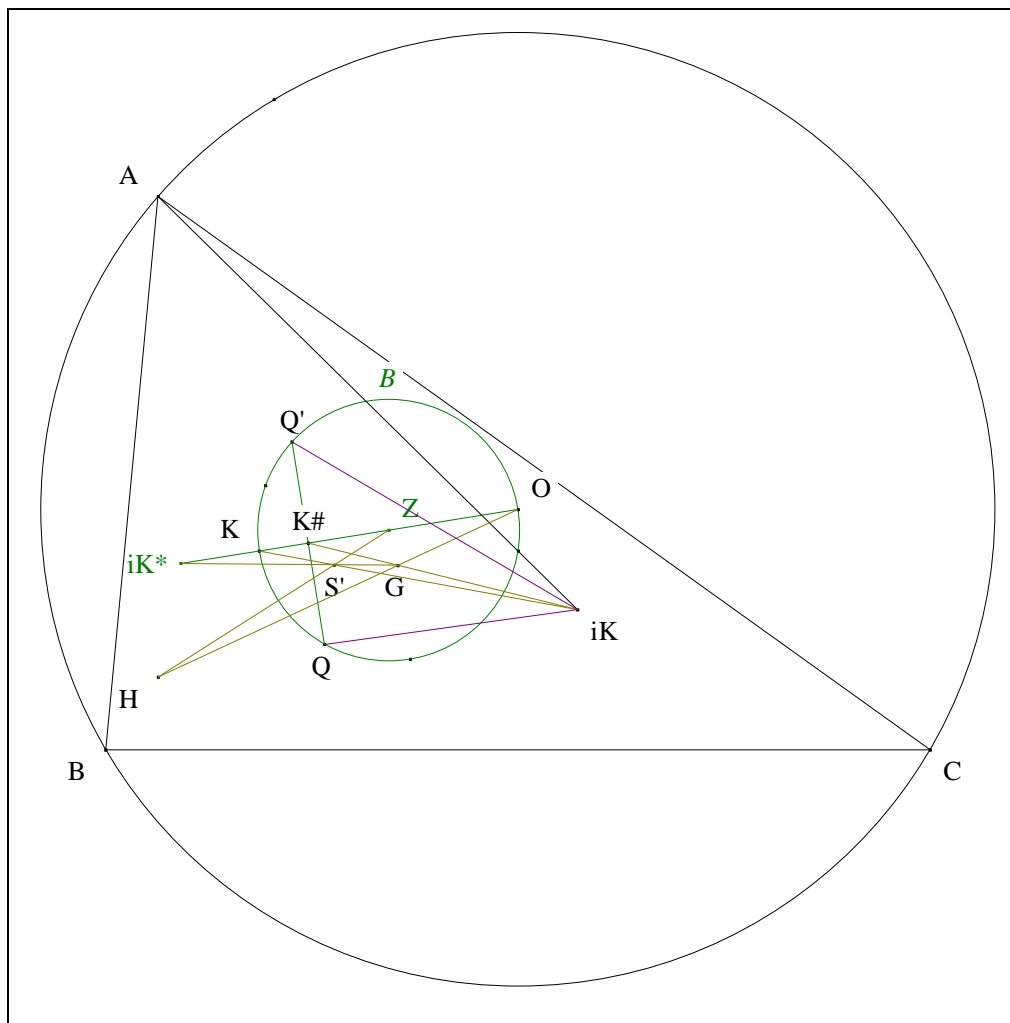
- **Scolies :**
 - (1) B, B^*, K, B' et Q sont alignés
 - (2) C, C^*, K, C' et R sont alignés.
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 24) appliqué aux triangles perspectifs $OB''C''$ et KB^*C^* , d'axe (QA^*R) , (OK) , $(B''B^*)$ et $(C''C^*)$ sont concourantes.



- **Scolie :** $K\#$ est le complément de l'isotomique iK de K .
- D'après "The cross-cevian point"⁸⁴, $(B''B^*)$ et $(C''C^*)$ sont concourantes en $K\#$.
- **Conclusion :** O , K et $K\#$ sont alignés.

- Scolies :**
- (1) $K\#$ est sur l'axe de Brocard (OK) de ABC , d'après D. VI. 12. Le milieu de Brocard, $K\#$ est le milieu de Brocard.
 - (2) $K\#$ est répertorié sous X39 chez ETC.
 - (3) Le triangle $iKQQ'$

⁸⁴ Ayme J.-L., The cross-cevian point, G.G.G. vol. 3 p. 20 ; <http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>.



Conclusion : G est le point médian du triangle $iKQQ'$.⁸⁵

Énoncé traditionnel : *le milieu de Brocard d'un triangle est l'isotomcomplément du point de Lemoine de ce triangle*

ou encore

le milieu de Brocard d'un triangle est le complément du troisième point de Brocard de ce triangle.

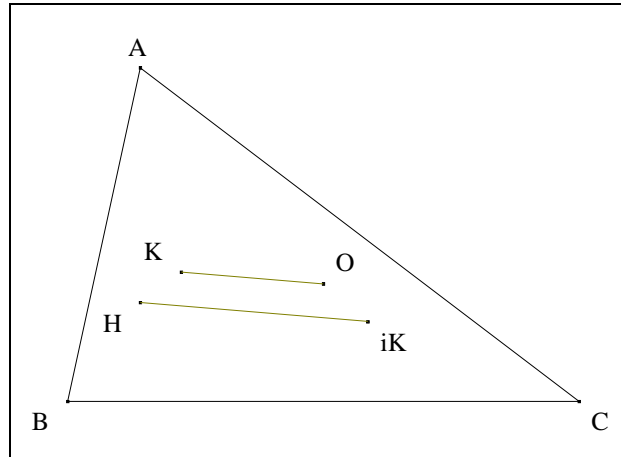
14. Une parallèle à l'axe de Brocard

VISION

Figure :

⁸⁵

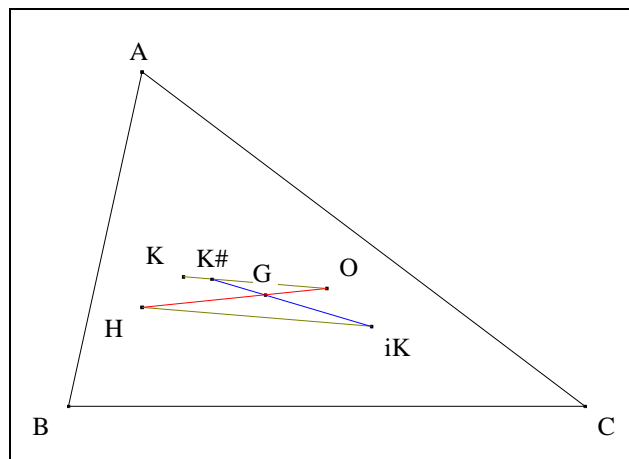
Brocard H.
cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 97, art. 46, 1°.



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit de ABC,
 H l'orthocentre de ABC,
 K le point de Lemoine de ABC
 et iK l'isotomique de K relativement à ABC.

Donné : (iKH) est parallèle à (OK).⁸⁶

VISUALISATION



- Notons G le point médian de ABC
 et K# l'isotomcomplément de K relativement à ABC.
- **Scolies :** (1) K# est le complément de iK
 (2) d'après "La droite d'Euler"⁸⁷, O est le complément de H.
- D'après Thalès, (iKH) // (OK#).
- D'après D. VI. 14. Le complément du troisième point de Brocard,
 d'après l'axiome d'incidence Ia, K# est sur (OK) ;
 (OK#) = (OK).
- **Conclusion :** par transitivité de la relation //, (iKH) est parallèle à (OK).

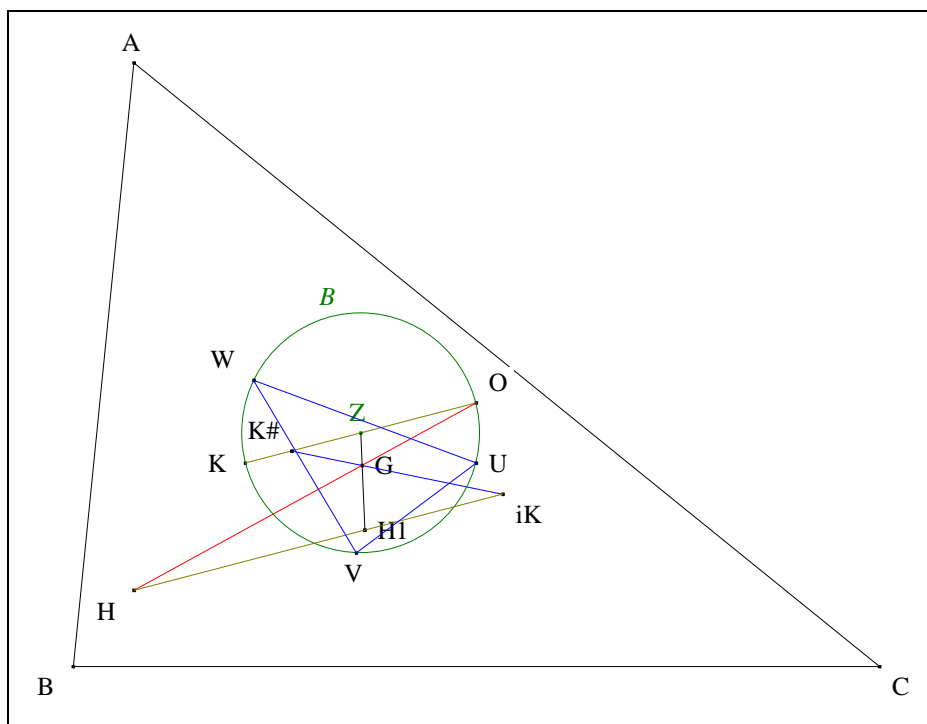
⁸⁶ Brocard H., art. 46, 2

⁸⁷ Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 3 p. 1 ; <http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>.

15. L'orthocentre du premier triangle de Brocard

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons,
 B le cercle de Brocard de ABC ,
 Z le centre de B ,
 H_1 le point d'intersection de (GZ) et (iKH) ,
 et UVW le premier triangle de Brocard de ABC .

Donné : H_1 est l'orthocentre de UVW .⁸⁸

VISUALISATION

- D'après D. VI. 15. Une parallèle à l'axe de Brocard, $(iKH) // (OK)$.
- D'après "La droite d'Euler"⁸⁹, G est le premier tiers-point de $[OH]$ à partir de O .
- D'après "Le théorème de Thalès", G est le premier tiers-point de $[ZH_1]$ à partir de Z .
- **Scolies :**
 - (1) B est le cercle circonscrit à UVW
 - (2) G est le point médian de UVW .
- **Conclusion :** d'après "La droite d'Euler", H_1 est l'orthocentre de UVW .

⁸⁸ Stoll, cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 97, art. 46, 3°.

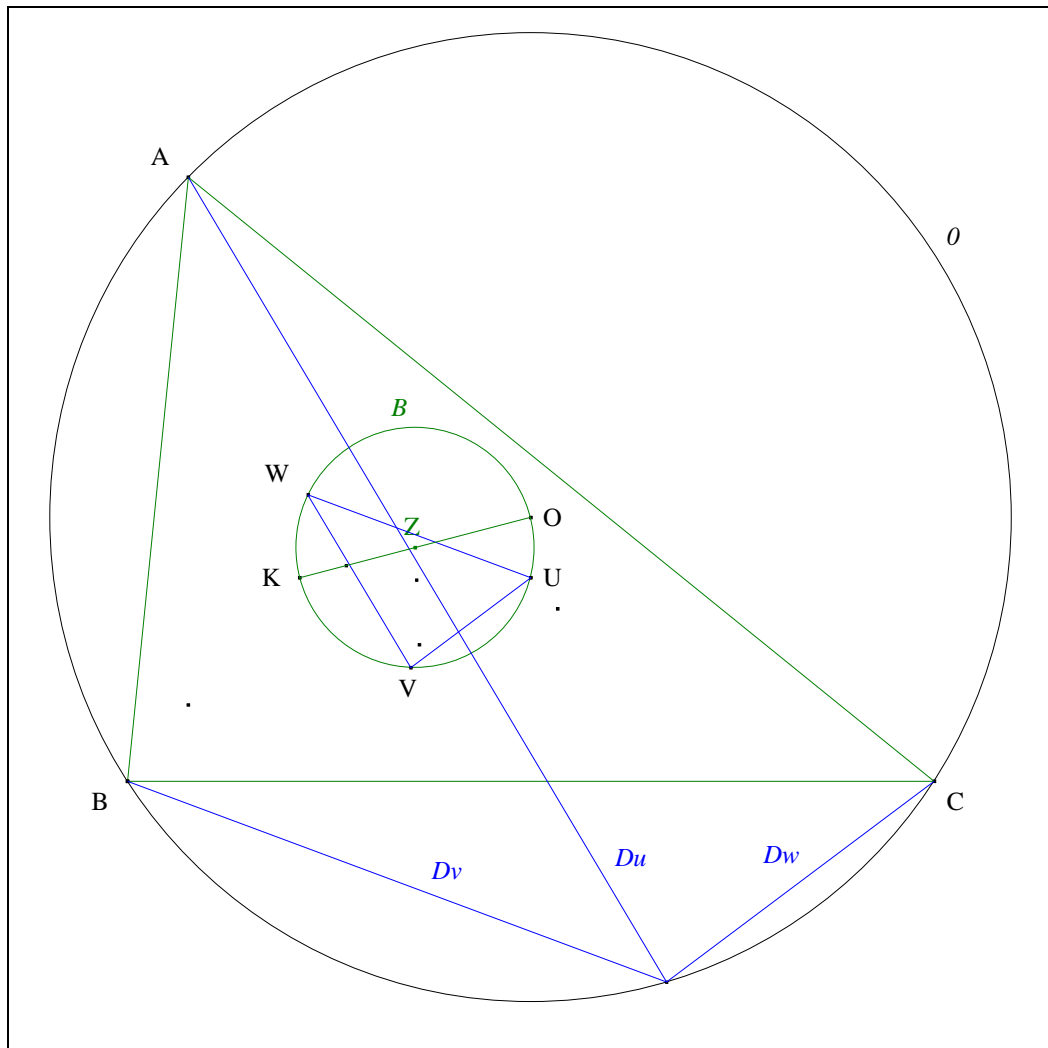
⁸⁹ Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2 ; <http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>.

Scolie : (H_1GZ) est la droite d'Euler de UVW.

16. Le point de Steiner⁹⁰

VISION

Figure :



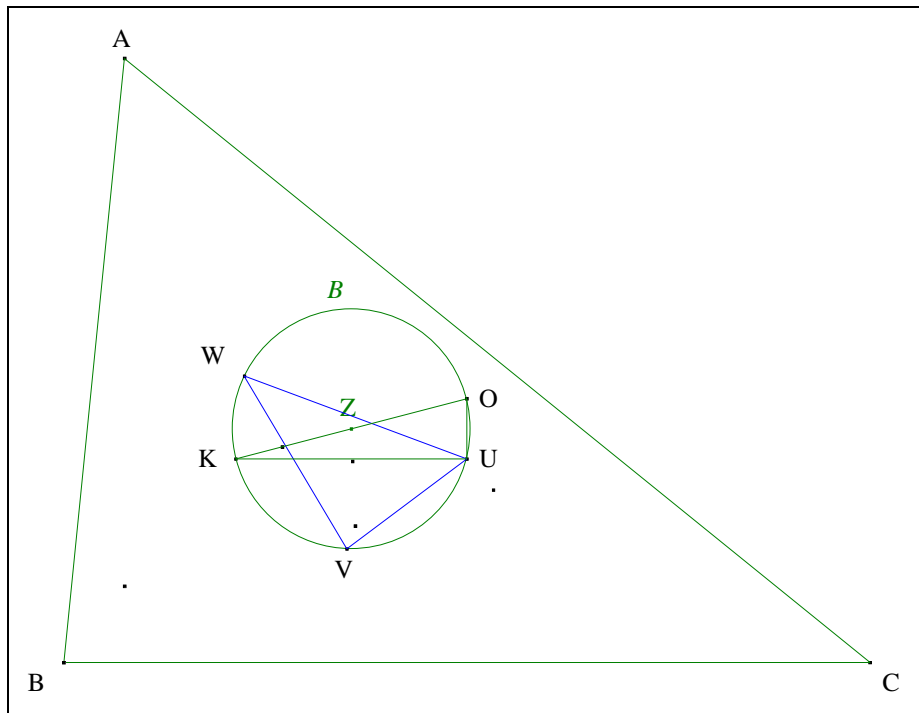
Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons,
 O le cercle circonscrit à ABC
 et Du, Dv, Dw les parallèles à $(VW), (WU), (UV)$ passant resp. par A, B, C.

Donné : Du, Dv et Dw sont concourantes.⁹¹

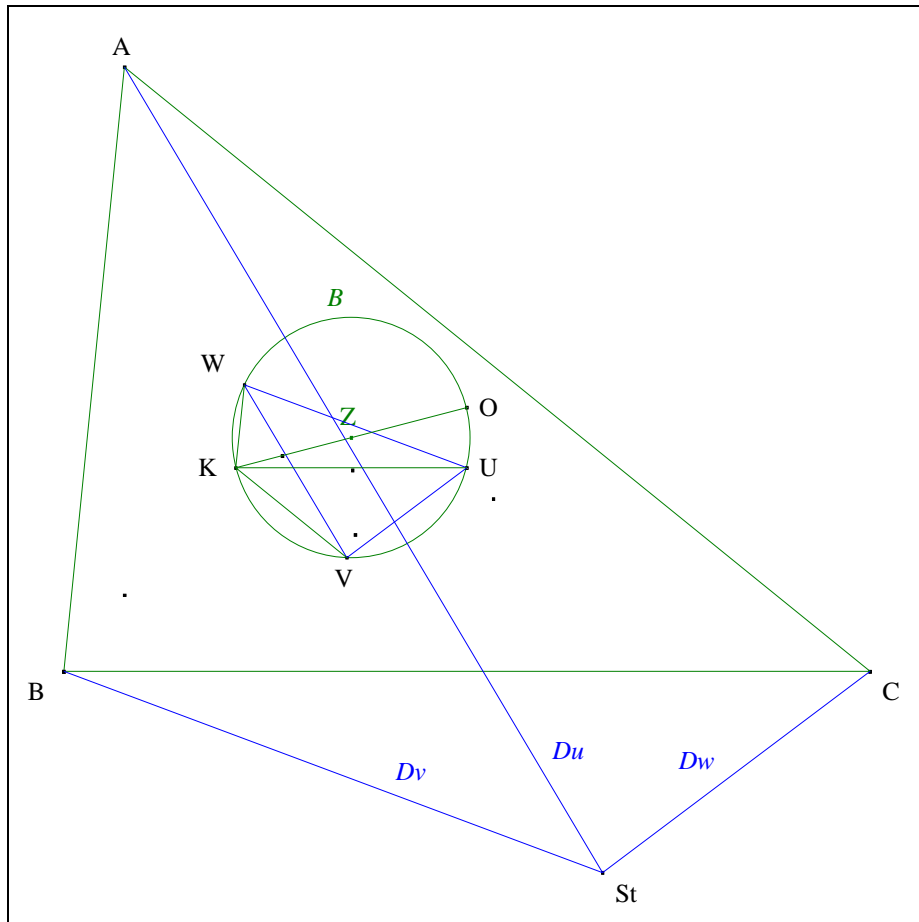
⁹⁰ Neuberg J., Sur le point de Steiner, *Journal de Mathématiques Spéciales* (1886) 6.

⁹¹ Tarry G., cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 104, art. 50, 1°.

VISUALISATION



- **Solie :** [OK] est un diamètre de B .
- D'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi cercle",
par hypothèse, $(UK) \perp (OU)$;
d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, $(OU) \perp (BC)$;
 $(UK) \parallel (BC)$.

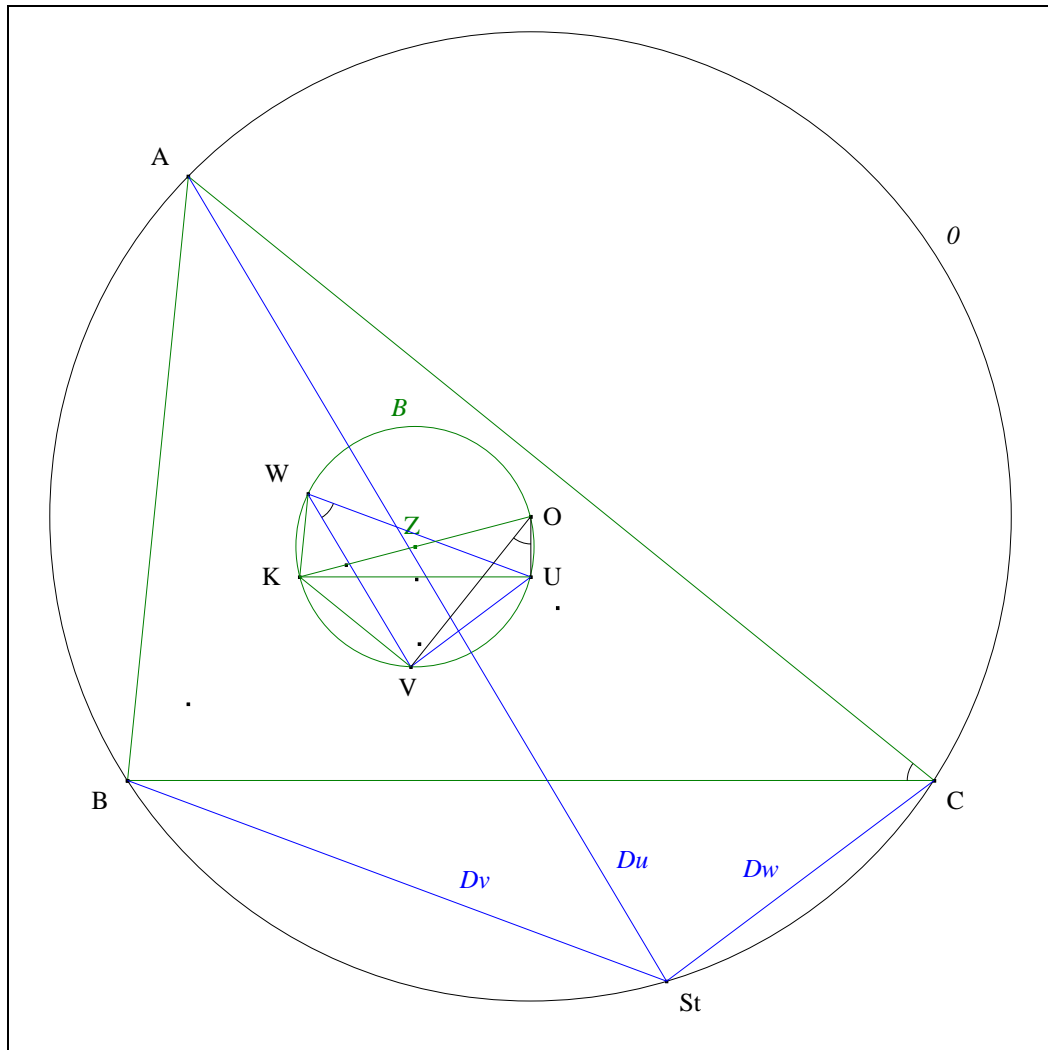


- Mutatis mutandis, nous montrerions que $(VK) // (CA)$ et $(WK) // (AB)$.
- **Conclusion :** d'après Neuberg "Deux triangles parallélogiques" appliqué à UVW et à ABC, Du, Dv et Dw sont concourantes.
- Notons St ce point de concours.

Note historique : ce résultat a été trouvé par Jacob Steiner⁹² en 1826 alors qu'il recherchait une ellipse passant par les sommets d'un triangle et ayant pour centre, le centre de gravité du triangle; cette ellipse dite de Steiner, est celle dont l'aire est minimale ; elle rencontre le cercle circonscrit du triangle en dehors de ses sommets, au point de Steiner. La construction précédente est celle de Joseph Neuberg.

- Scolies :**
- (1) ce point de concours est "le point de Steiner de ABC" et est répertorié sous X_{99} chez ETC.
 - (2) Situation du point de Steiner

⁹² Steiner J., Schnittpunkte des Umkreises und dem Dreieck umgeschriebenen Minimalellipse, *Journal de Crelle* 32, p. 300 ; 67, p. 237 ; Ges. Werke 2, p. 689.



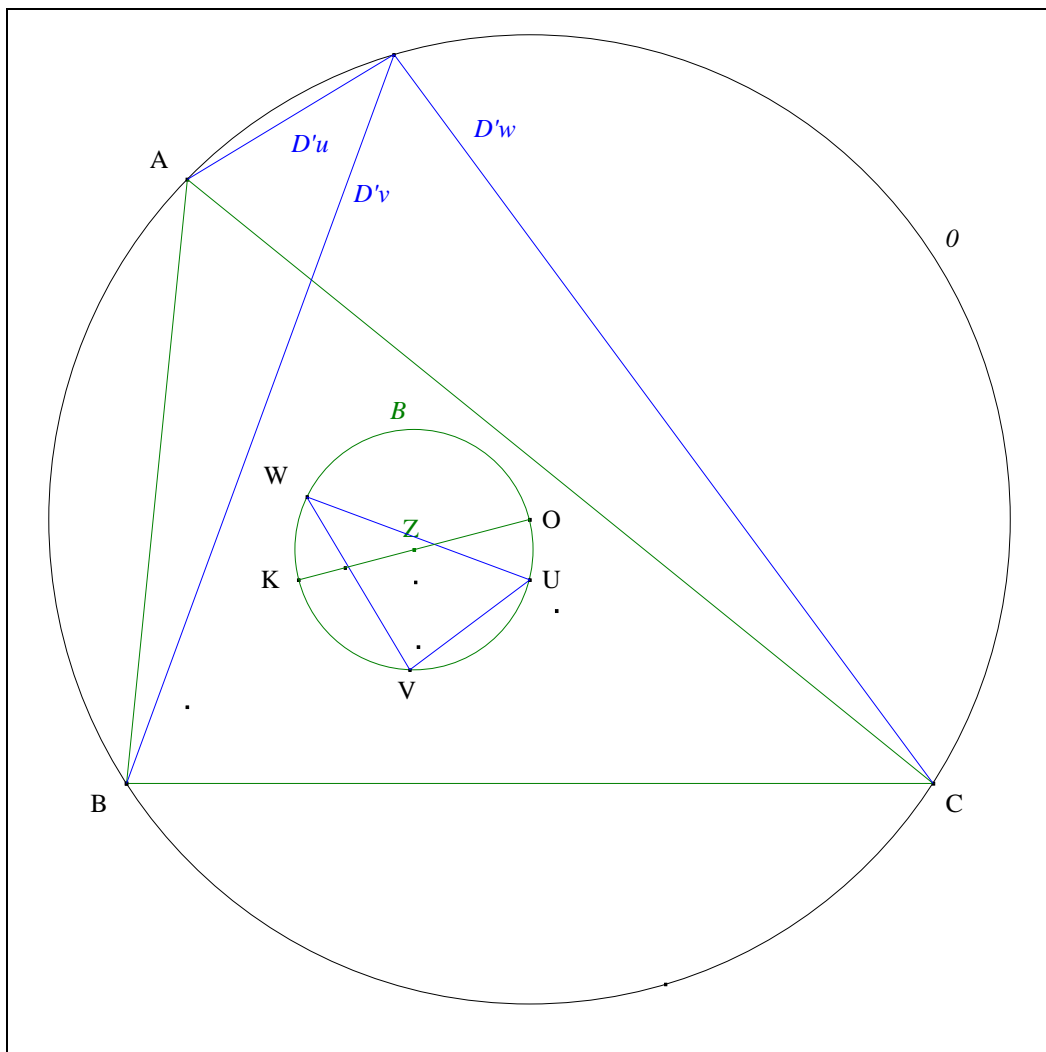
- Notons St le point de Steiner de ABC .
- Une chasse angulaire à π près :
 d'après le théorème "Angle à côtés perpendiculaires", $\angle ACB = \angle VOU$;
 d'après le théorème "Quadrilatère cyclique", $\angle VOU = \angle VWU$;
 d'après le théorème "Angle à côtés parallèles", $\angle VWU = \angle AStB$;
 par transitivité de la relation $=$, $\angle AStB = \angle ACB$.
- **Conclusion :** St est sur le cercle O .
 (3) UVW et ABC sont inversement semblables.
 (4) Le point K relativement à UVW
- Une chasse angulaire à 2π près :
 d'après le théorème "Angle à côtés parallèles", $\angle StAC = \angle WVK$;
 d'après le théorème de l'angle inscrit, $\angle WVK = \angle WUK$;
 par transitivité de la relation $=$, $\angle StAC = \angle WUK$;
 et circulairement.

Énoncé traditionnel : *le point de Lemoine d'un triangle est le point de Steiner de son premier triangle de Brocard.*

17. Le point de Tarry

VISION

Figure :

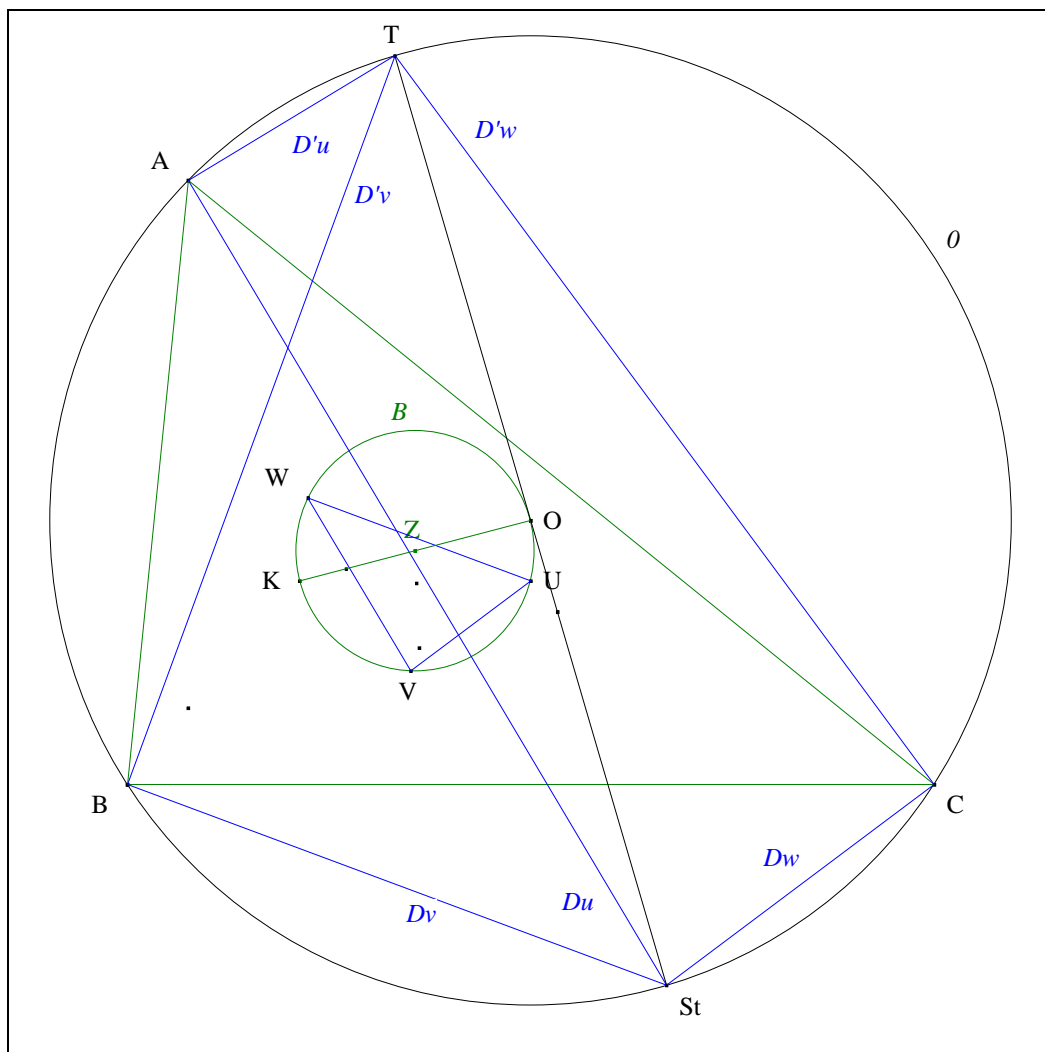


Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons,
 O le cercle circonscrit à ABC
 et $D'u, D'v, D'w$ les perpendiculaires à $(VW), (WU), (UV)$ passant resp. par A, B, C.

Donné : $D'u, D'v$ et $D'w$ sont concourantes.⁹³

VISUALISATION

⁹³ Fuhrmann W.,
 cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 105, art. 50, 4°.

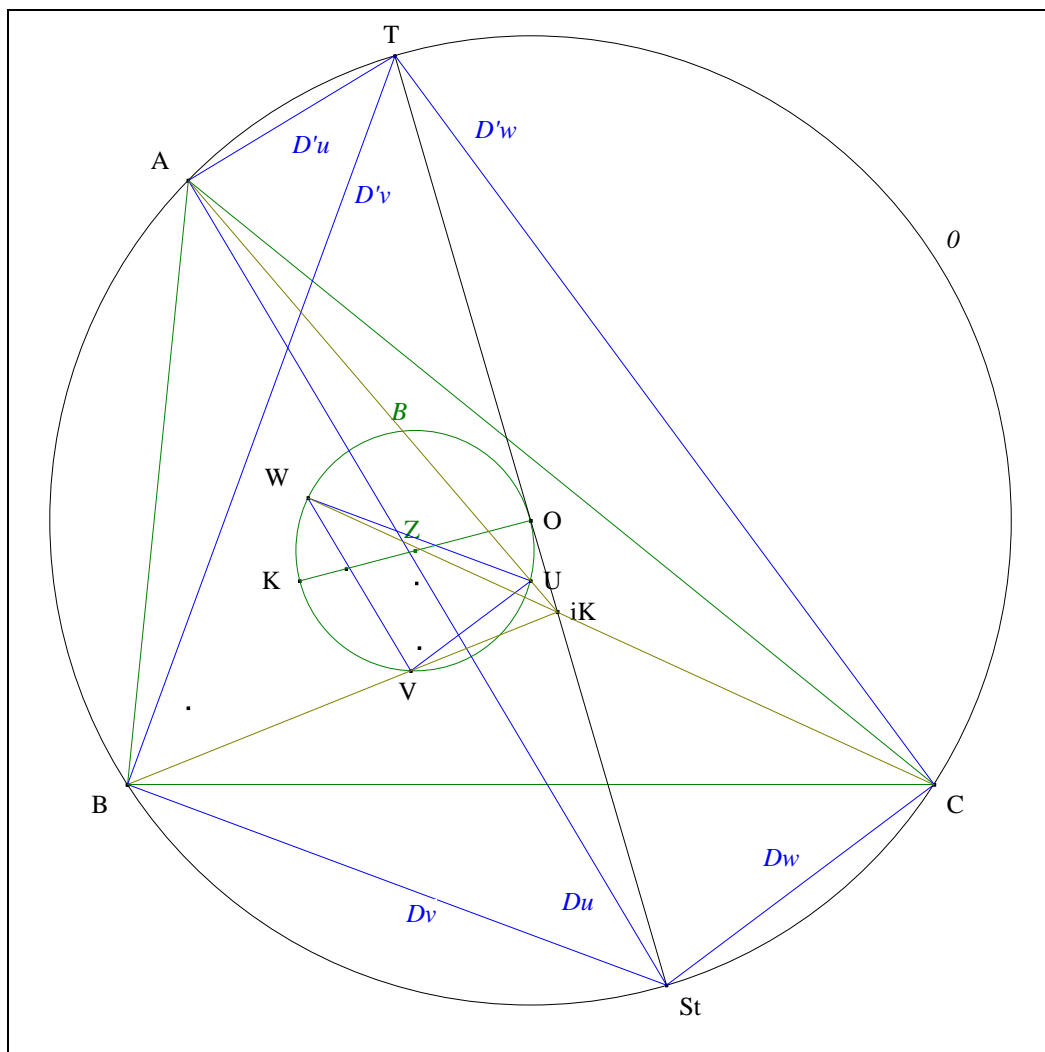


- Notons Du, Dv, Dw les parallèles à $(VW), (WU), (UV)$ passant resp. par A, B, C
et St le point de Steiner de ABC .
- D'après D. VI. 16. Le point de Steiner, Du, Dv et Dw concourent en St
- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscritible dans un demi cercle",
 $D'u, D'v$ et $D'w$ concourent à l'antipôle de St relativement à θ .
- Notons T ce point de concours.

- Scolies :**
- (1) T est "le point de Tarry de ABC " et est répertorié sous X_{98} chez ETC.
Ce nom a été donné en 1886 par Joseph Neuberg⁹⁴.
 - (2) T est l'orthopôle de ABC relativement à UVW et O est l'orthopôle de UVW relativement à ABC .
 - (3) Position de iK

⁹⁴

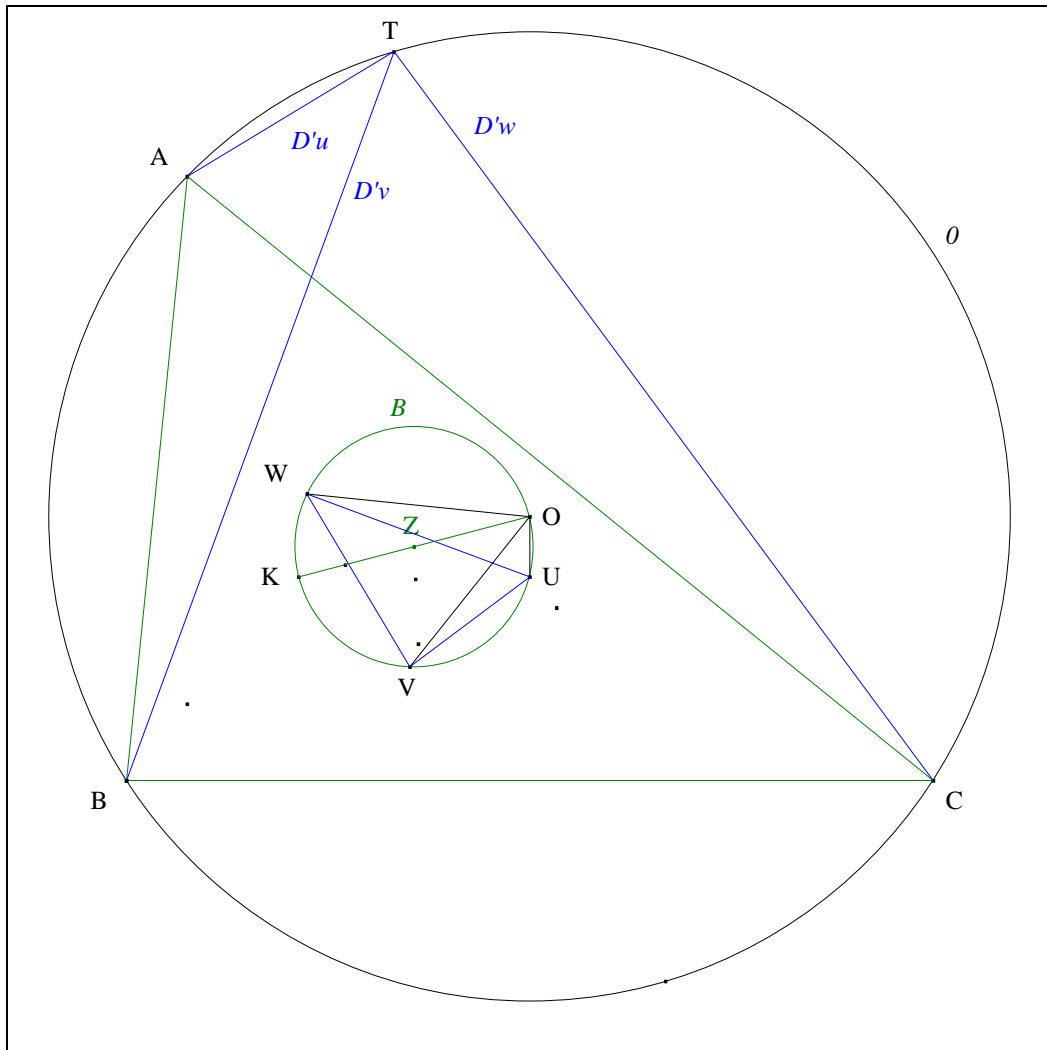
Neuberg J., *Mathesis* (1886) 5.



- ABC et UVW étant en perspective de centre iK , d'après le théorème de Sondat ⁹⁵, iK, T et O sont alignés.
- **Conclusion** : St étant l'antipôle de T relativement à θ , iK est sur $(StOT)$.⁹⁶
 - (4) UVW et ABC sont inversement semblables.
 - (5) Le point O relativement à UVW

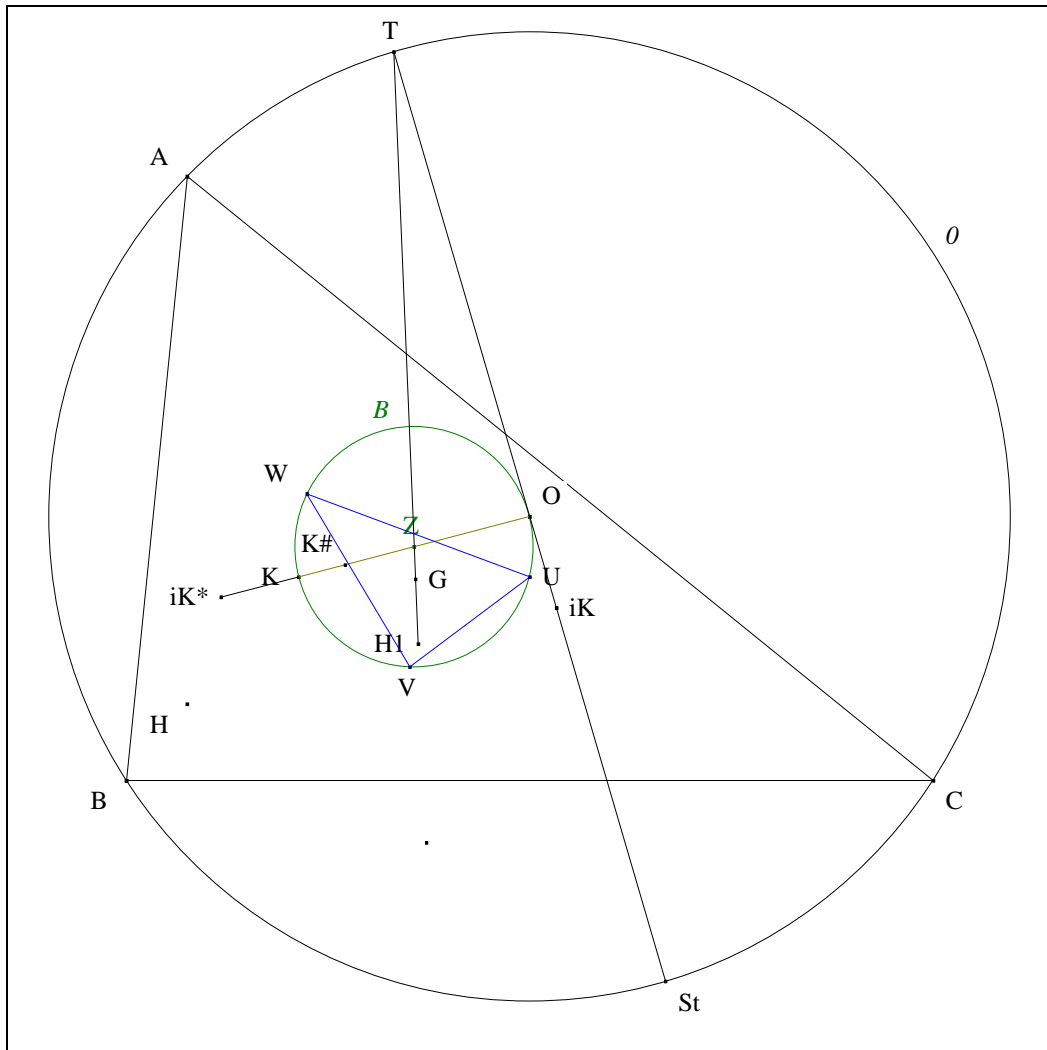
⁹⁵ Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. 1 ; <http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>.
⁹⁶ Tarry G.

cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 106, art. 50, 7°.



Énoncé traditionnel : *le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point de Tarry de son premier triangle de Brocard.*

(6) La droite d'Euler de UVW

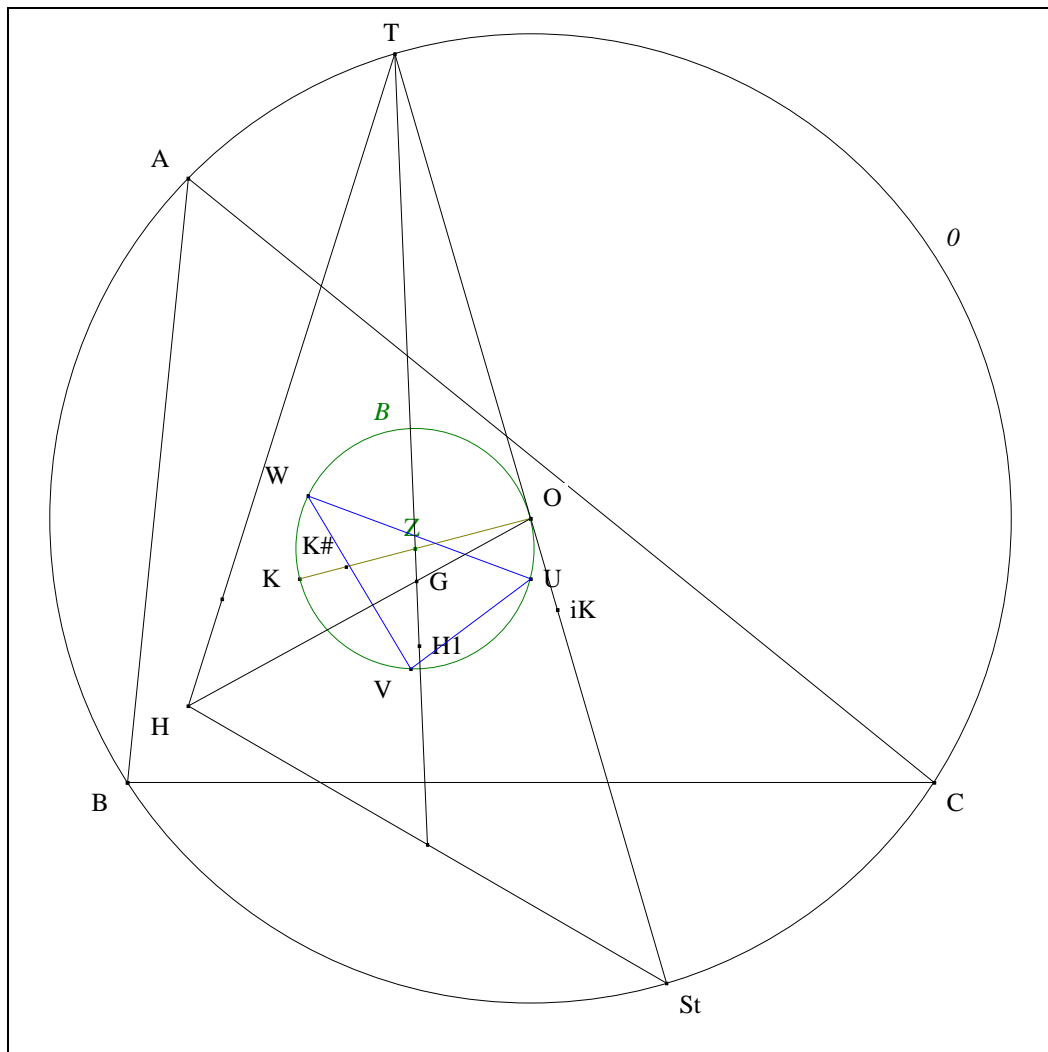


- Considérons le triangle ABC et les points G, O et T.
- UVW et ABC étant inversement semblables, à G, O et T correspondent resp. G, Z et O ; en conséquence, les triangle GOT et GZO sont inversement semblables
- Une chasse angulaire à π près : $\angle OGT = \angle OGZ$;
en conséquence, G, Z et T sont alignés.
- **Conclusion** : H_1, G, Z et T sont alignés.⁹⁷

(7) Deux triangles comédiants

⁹⁷

Brocard H.,
cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 105, art. 50, 5°.



- **Conclusion :** les triangles ABC et HTSt sont comédiens.

(8) (ZGH1) passe par le milieu de [HSt].⁹⁸

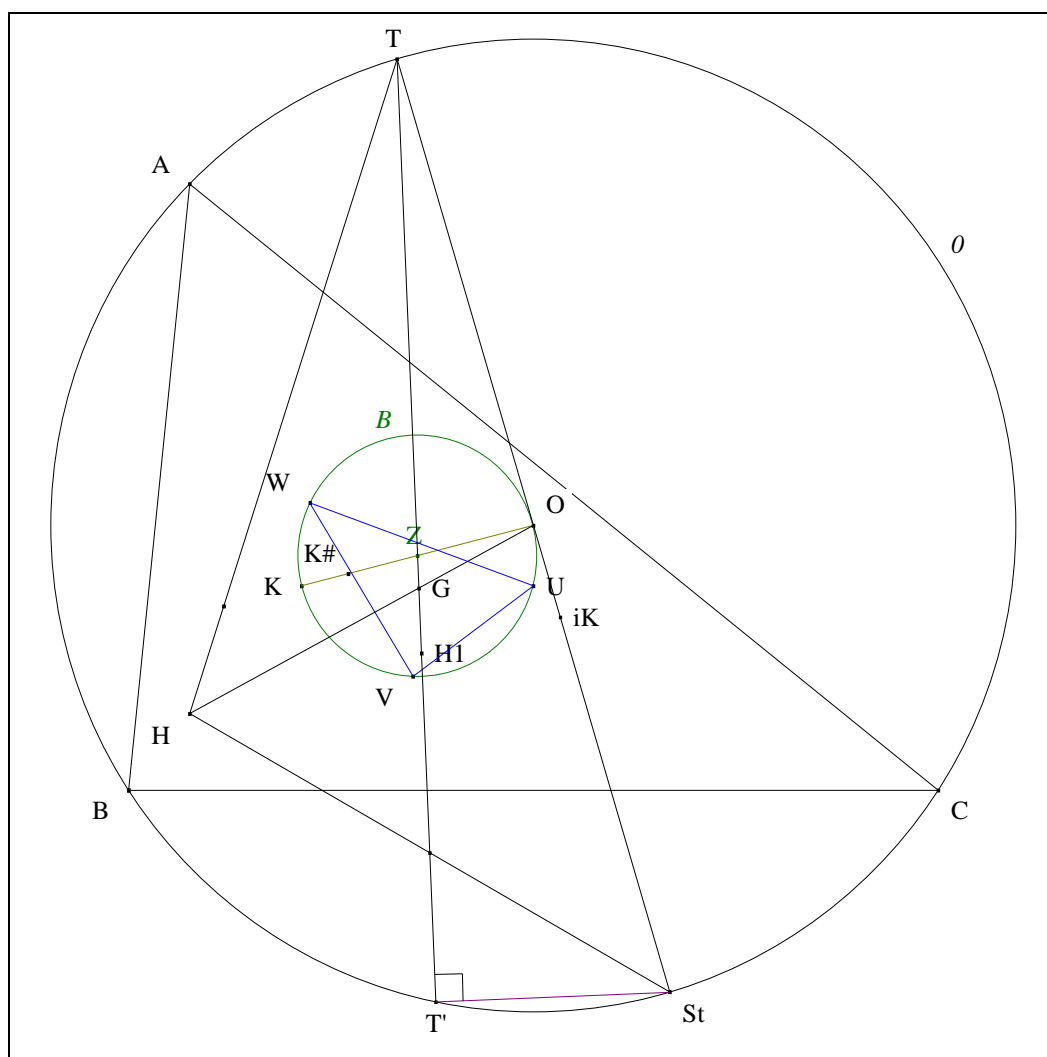
(9) la droite diamétrale (StT)

Énoncé traditionnel : *la droite (TSt) d'un triangle est la droite (OK) de son premier triangle de Brocard.*

(10) L'inverse de G relativement à B

⁹⁸

Stoll,
cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 106, art. 50, 9°.



- Notons T' le second point d'intersection de (TZ) avec θ ,
 R le rayon de θ
 et r le rayon de B .

- Une chasse segmentaire :

les triangle GOT et GZO étant inversement semblables,

en conséquences,

il s'en suit que

$$\frac{GO}{GZ} = \frac{GT}{GO} = \frac{R}{r} ;$$

$$GT = \frac{R}{r} \cdot GO \quad \text{et} \quad GZ = \frac{r}{R} \cdot GO ;$$

$$\frac{GT}{GZ} = \frac{R^2}{r^2} .$$

- Une proportion avec mesures algébriques non indiquées :

d'où :

puissance de Z par rapport à θ :

d'où :

$$\frac{GT}{R^2} = \frac{GZ}{r^2} = \frac{GT - GZ}{R^2 - r^2} = \frac{ZT}{R^2 - r^2} ;$$

$$ZT = \frac{R^2 - r^2}{r^2} \cdot GZ = \frac{r^2 - R^2}{r^2} \cdot ZG ;$$

$$ZT \cdot ZT' = r^2 - R^2 ;$$

$$ZG \cdot ZT' = r^2 .$$

- **Conclusion :** T' est l'inverse de G relativement à B .⁹⁹

⁹⁹

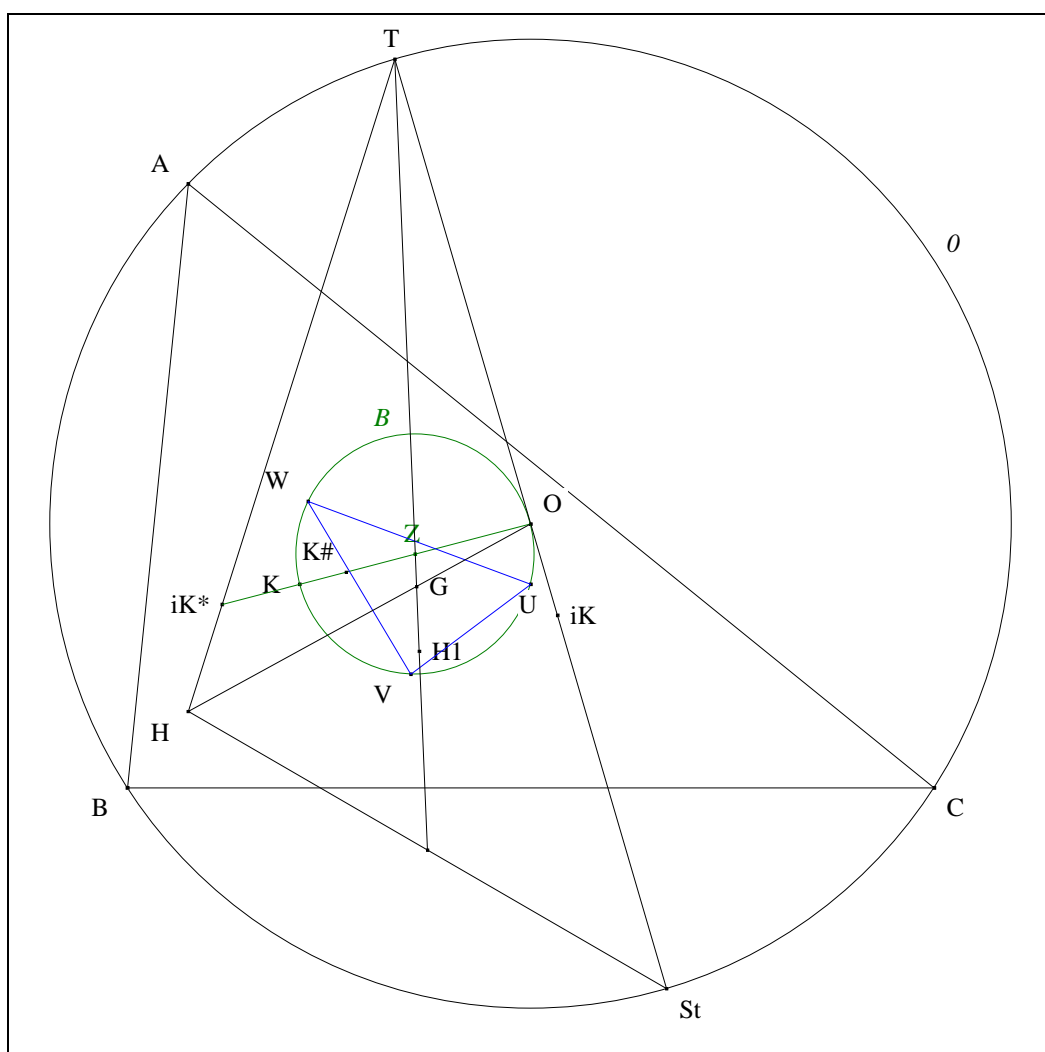
(11) St est sur la polaire de G relativement à B .

Une courte biographie : Georges Gaston Tarry (1843-1913) a été inspecteur des Contributions à Alger. Il a participé au congrès l'AFAS¹⁰⁰ à Nancy en 1886 avec Joseph Neuberg.

18. Une jolie "concourance"

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : (OiK) , (HiK^*) et (GZ) concourent en T .¹⁰¹

¹⁰⁰

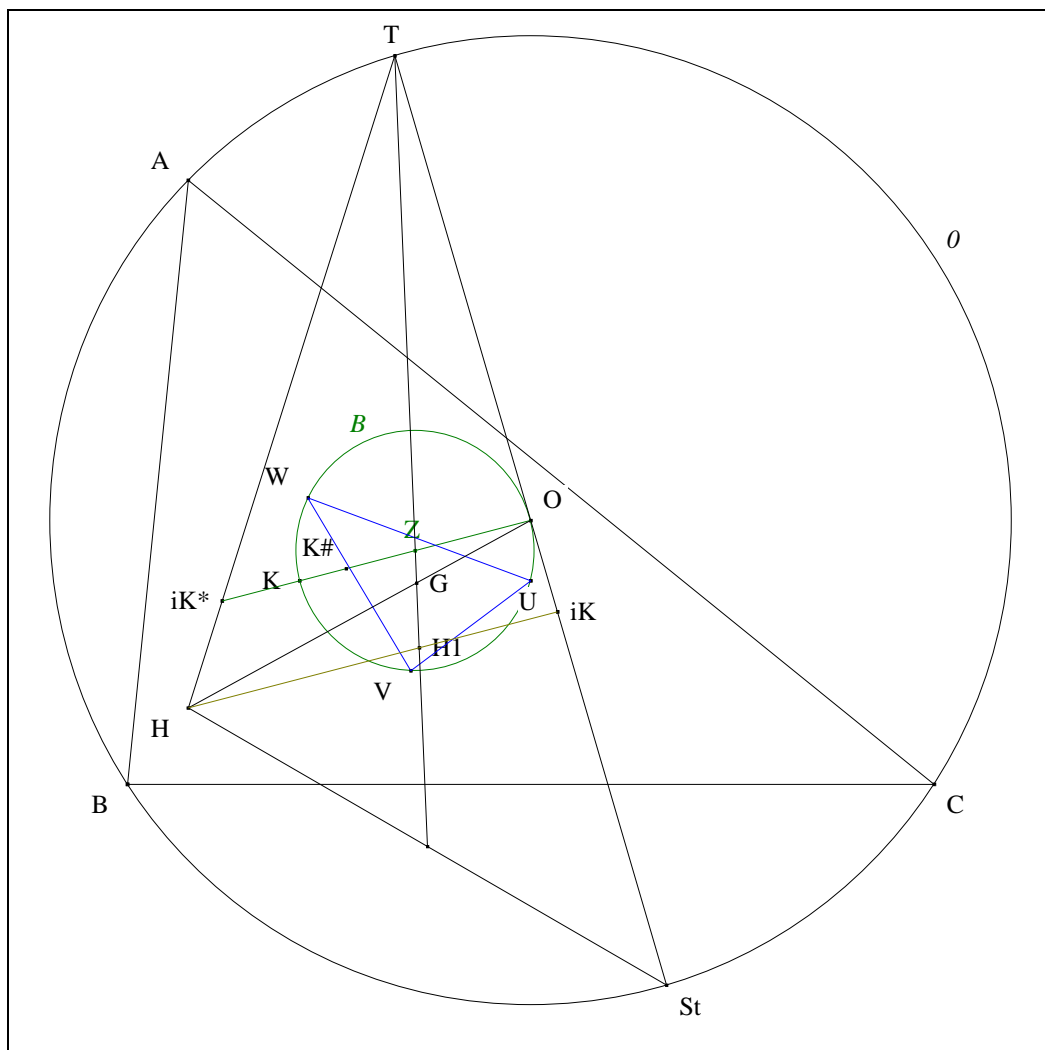
Association française pour l'avancement des sciences.

¹⁰¹

Fuhrmann W.,

cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 105, art. 50, 4°.

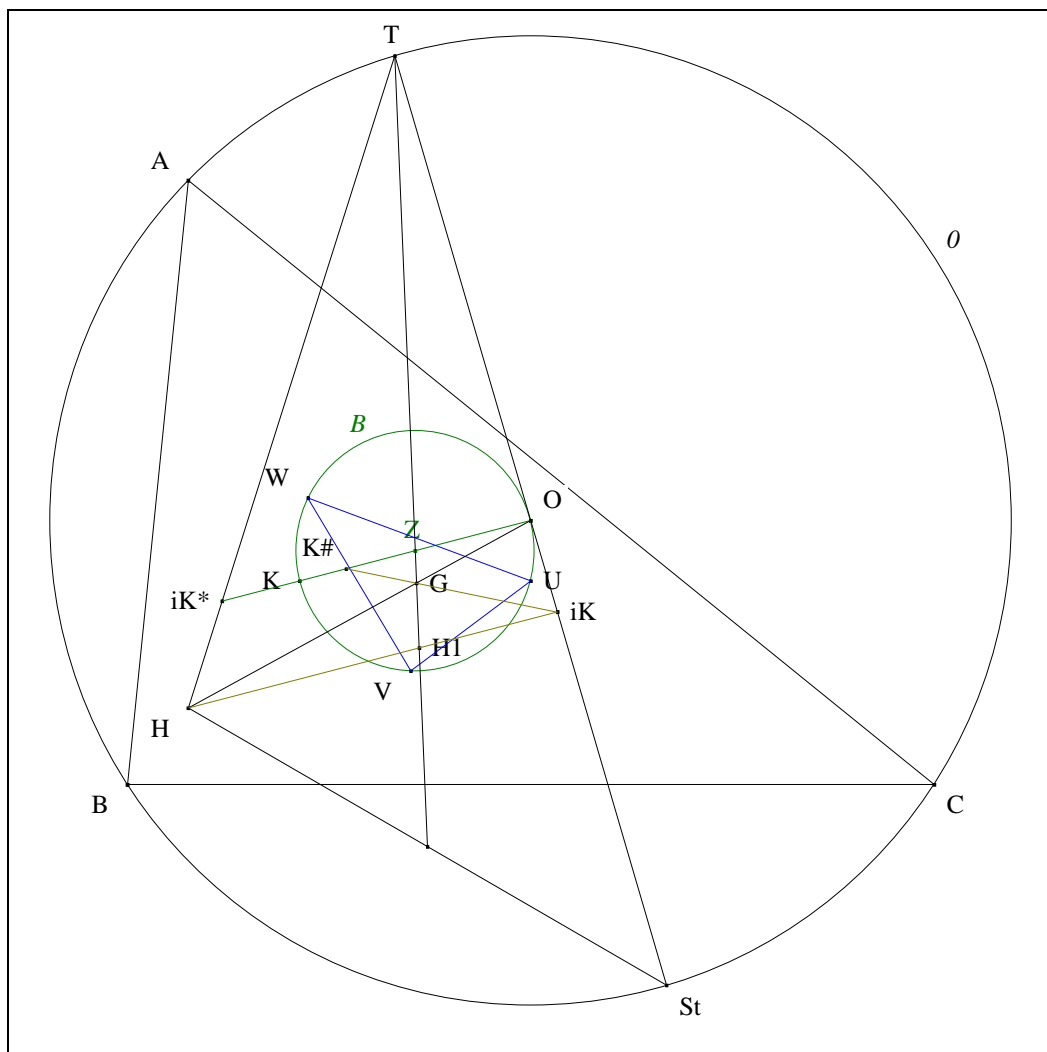
VISUALISATION



- D'après "Le théorème de Hesse"¹⁰² (Cf. Annexe 23) appliqué aux couples de points isogonaux (O, H) et (iK, iK^*) , le point d'intersection de (OiK) et (HiK^*) est l'isogonal du point d'intersection de (OiK^*) et (HiK) .
- Nous savons que $(OiK^*) \parallel (HiK)$;
 en conséquence, (OiK) et (HiK^*) se coupent sur θ . (Cf. Annexe 16)

¹⁰²

Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2, p. 21-24 ; <http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>.



- Un chasse de rapport avec mesures algébriques : d'après D. VI. 11. Le troisième alignement recherché, scolie, d'après MacLaurin "Une relation" (Cf. Annexe 25),

(O, K, K#, iK*) est harmonique ;
 $ZO^2 = ZK\# \cdot ZiK^*$;

autre écriture :

$$\frac{ZO}{ZiK^*} = \frac{ZK\#}{ZO} ;$$

d'après Thalès,

$$\frac{ZK\#}{ZO} = \frac{H\backslash iK}{H\backslash H} ;$$

par transitivité de la relation =,

$$\frac{ZO}{ZiK^*} = \frac{H\backslash iK}{H\backslash H} ;$$

d'après Thalès,

(OiK), (HiK*) et (GZ) sont concourantes.

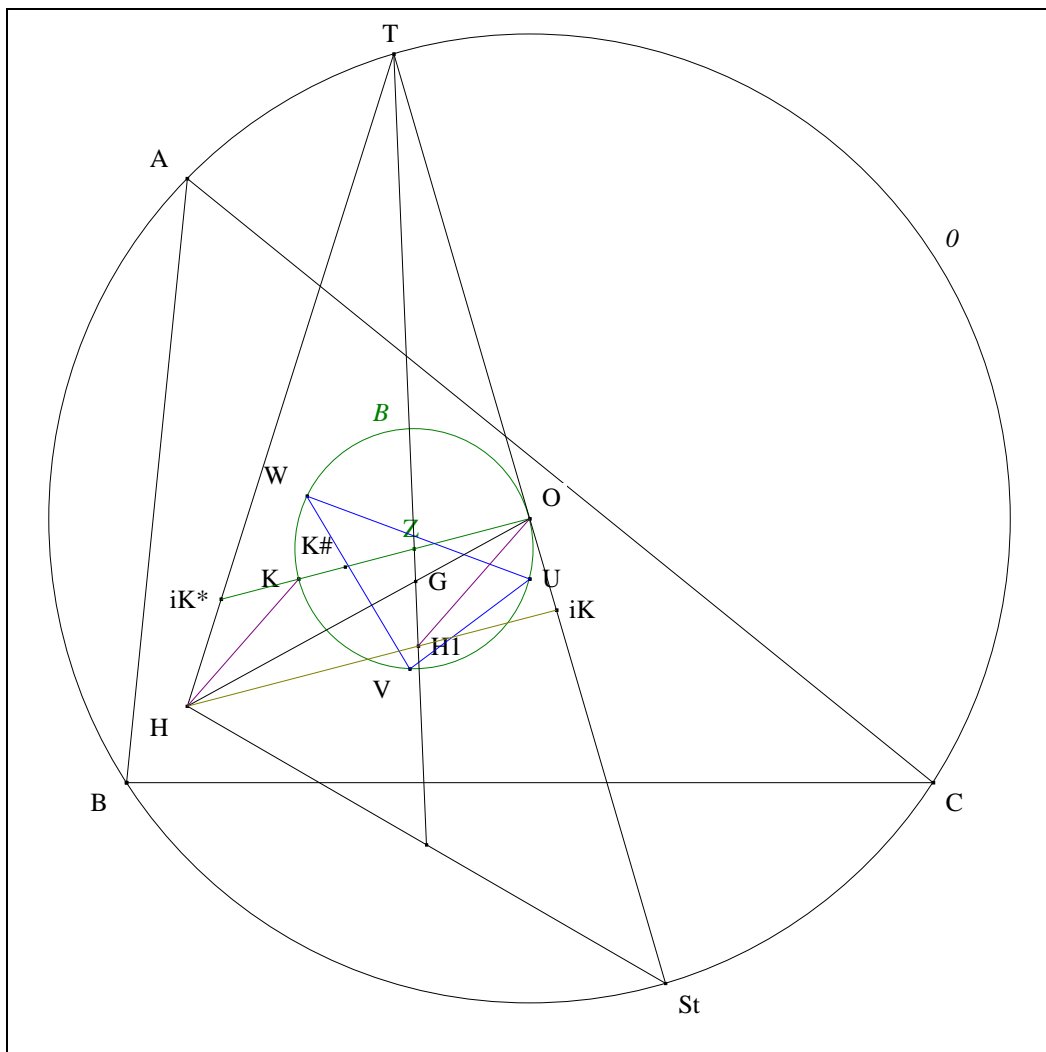
- **Conclusion** : d'après D. VI. 17. Le point de Tarry, scolie 4, (OiK), (HiK*) et (GZ) concourent en T.

Scolies : (1) T est sur (HiK*)¹⁰³

¹⁰³

Brocard H.
 cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 106, art. 50, 8°.

(2) Un parallélogramme

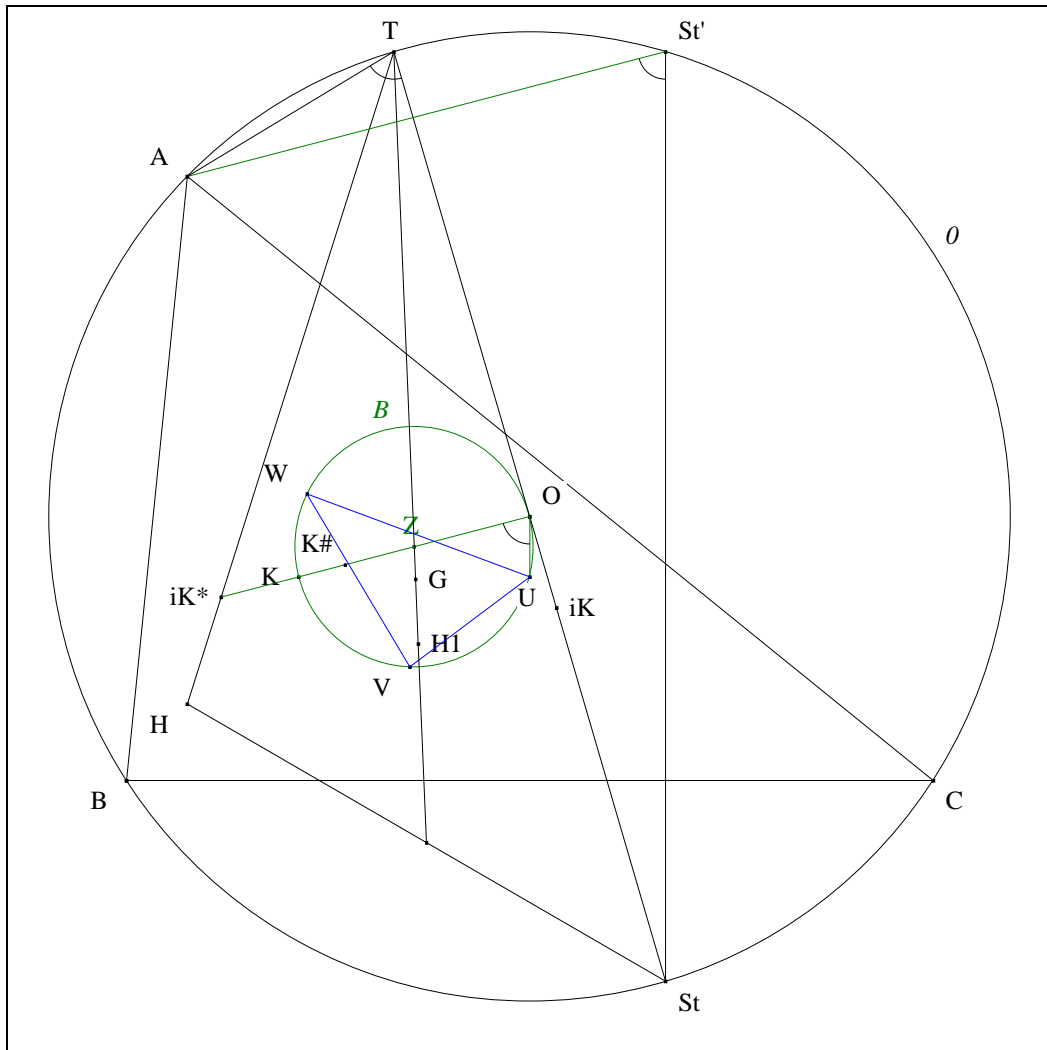


- **Conclusion** : le quadrilatère HH1OK est un parallélogramme.

19. La droite de Simson du point de Steiner relativement à ABC

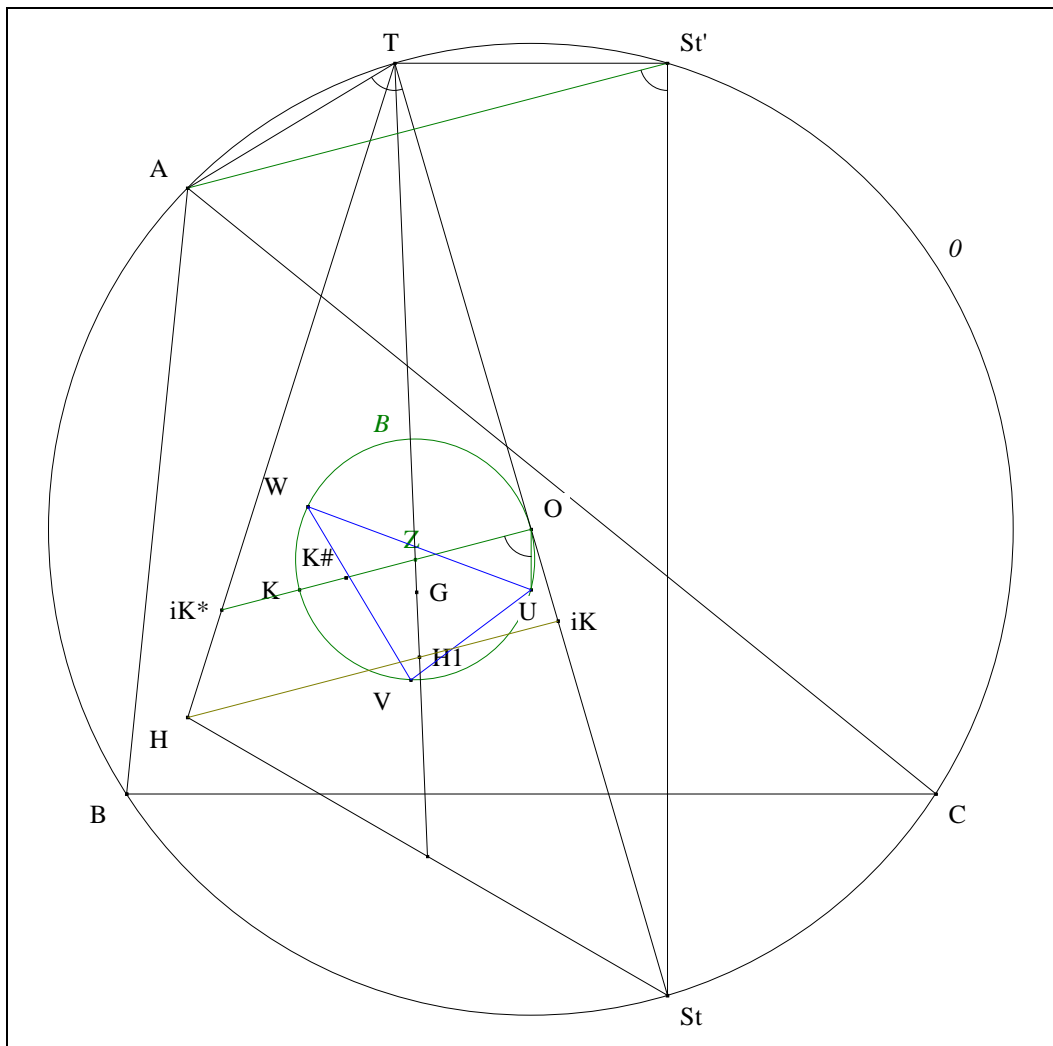
VISION

Figure :

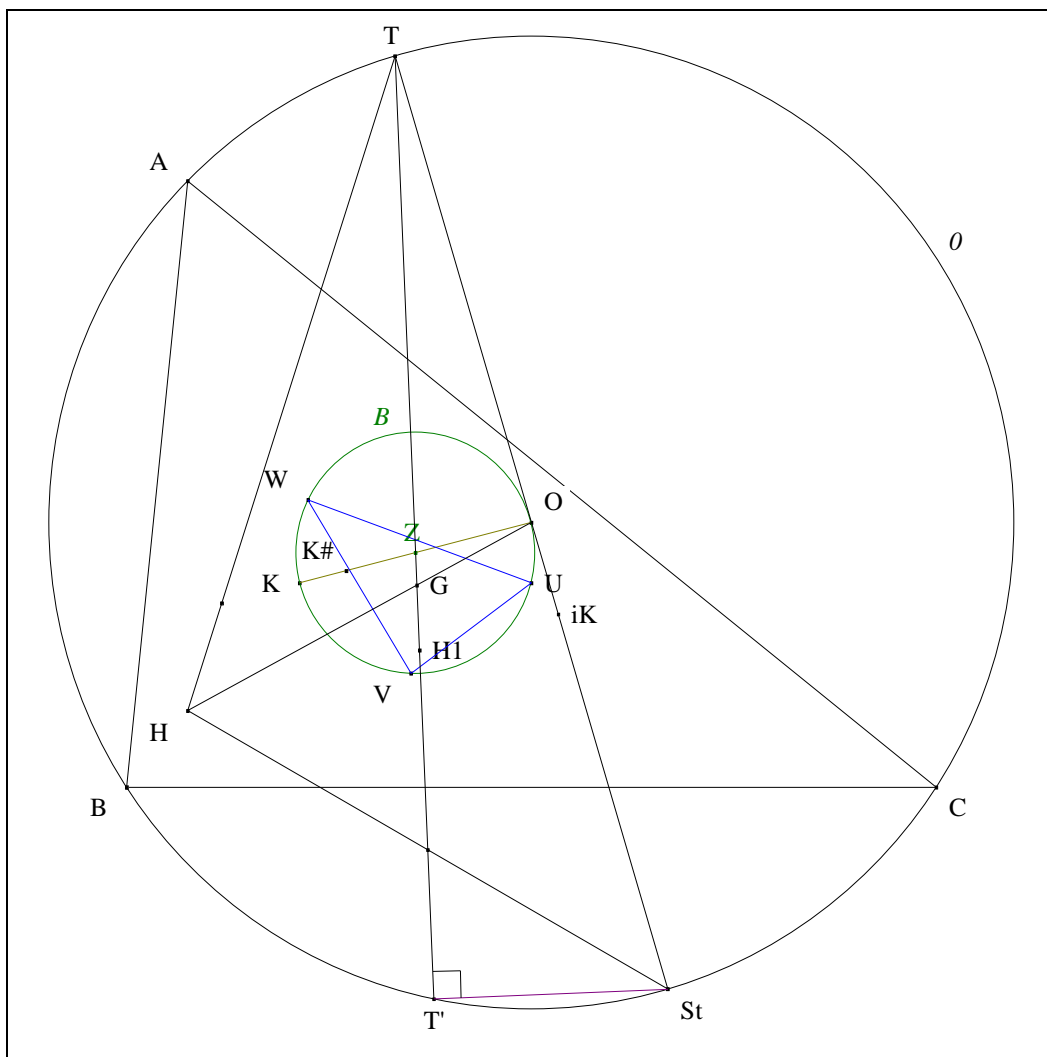


- Notons S la droite de Simson de pôle St relativement à ABC
 et St' le second point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) passant par St avec θ .
- D'après Heinen "Direction d'une droite de Simson" (Cf. Annexe 26), S a la même direction que $(St'A)$.
- Une chasse angulaire à π près :
 d'après D. VI. Le point de Tarry, scolies, $\angle UOK = \angle StTA$;
 d'après le théorème de l'angle inscrit, $\angle StTA = \angle StSt'A$;
 par transitivité de la relation $=$, $\angle UOK = \angle StSt'A$;
 d'après le théorème "Angles à côtés parallèles", $(St'A)$ a la même direction que (OK) .
- **Conclusion :** par transitivité de la relation "a même direction que",
 S a même direction que (OK) .

Scolies : (1) la droite de Steiner de St relativement à ABC



- D'après D. VI. 14. Une parallèle à l'axe de Brocard, $(HiK) // (OK)$.
- **Conclusion :** (HiK) est la droite de Steiner de St relativement à ABC .
 - (2) (TSt') est parallèle à (BC) .
 - (3) T' est l'antipoint d'Euler de ABC (Cf. Annexe 27)



- Notons T' le second point d'intersection de (TZ) avec θ .
 - La droite de Simson de St relativement à ABC est parallèle à (OK) .
 - Une chasse angulaire :
 nous avons : $\angle StT' = \angle OTG$
 les triangle GOT et GZO étant inversement semblables, $\angle OTG = \angle GOZ$;
 par transitivité de la relation $=$, $\angle StT' = \angle GOZ$.
 - D'après Steiner "Angle des droites de Simson de deux points" (Cf. Annexe 28),
 la droite de Simson de T' relativement à ABC est parallèle à (OGH) i.e. à la droite de Steiner.
 - **Conclusion :** T' est l'antipoint d'Euler de ABC .
- (4) T' est répertorié sous X_{110} chez ETC.

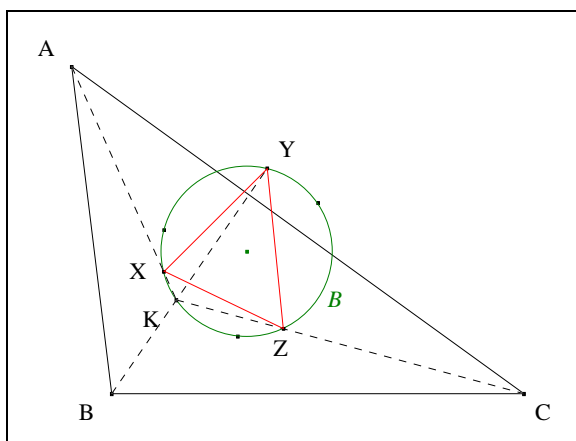
VII. LE SECOND TRIANGLE DE BROCARD

Ouverture : l'allemand Hellwig en a été un grand contributeur. Notons qu'il y a eu plusieurs géomètres portant ce nom avec J. C. L. ou C. ou encore O. pour initiales des prénoms.

1. Le second triangle de Brocard

VISION

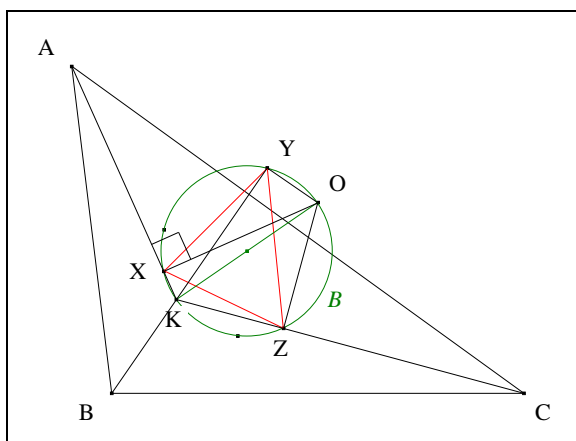
Figure :



Finition : ABC un triangle,
 K le point de Lemoine de ABC ,
 B le cercle de Brocard de ABC
 et X, Y, Z les seconds points d'intersection de B resp. avec $(AK), (BK), (CK)$.

Définition : XYZ est "le second triangle de Brocard de ABC ".

Scolie : un autre point de vue

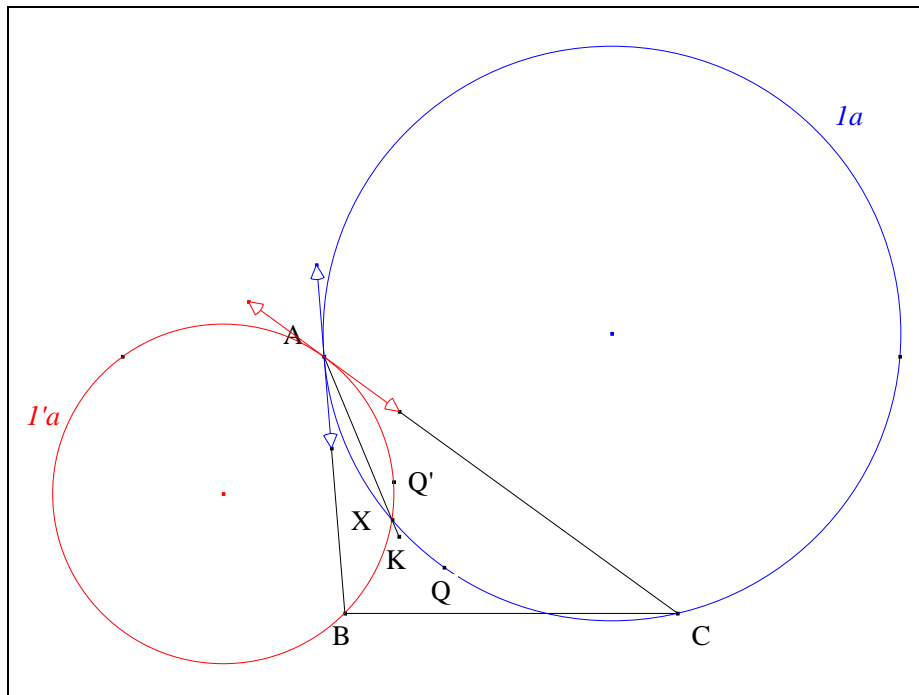


- Notons O le centre du cercle circonscrit à ABC .
- **Conclusion :** X, Y, Z sont les pieds des perpendiculaires issues de O resp. sur les A, B, C -symédianes de ABC .

2. Une approche par les cercles adjoints par un sommet

VISION

Figure :



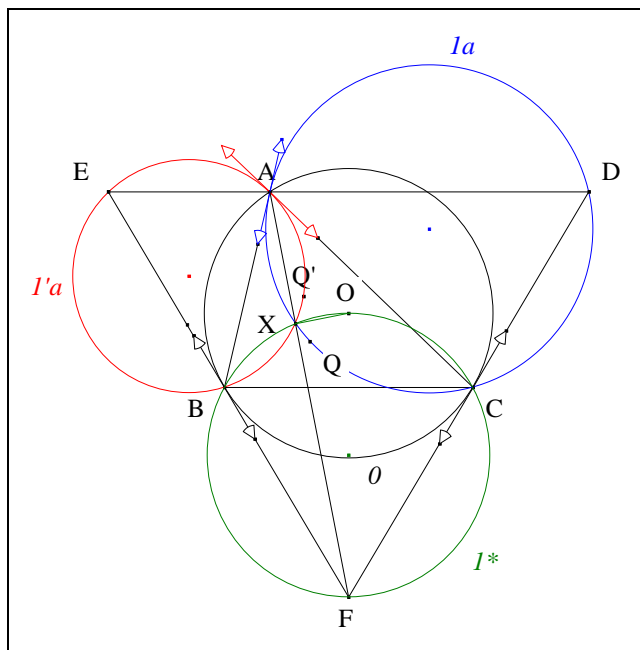
Traits : ABC un triangle,
 Ia, Ia' les A-cercles adjoints de ABC
 et X le second point d'intersection de Ia et Ia' .

Donné : X est le A-sommet du second triangle de Brocard de ABC.

VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après C. 1. Le cercle et l'axe de Brocard,
 X est le A-sommet du second triangle de Brocard de ABC.

Solie : le A-cercle de Kosnita

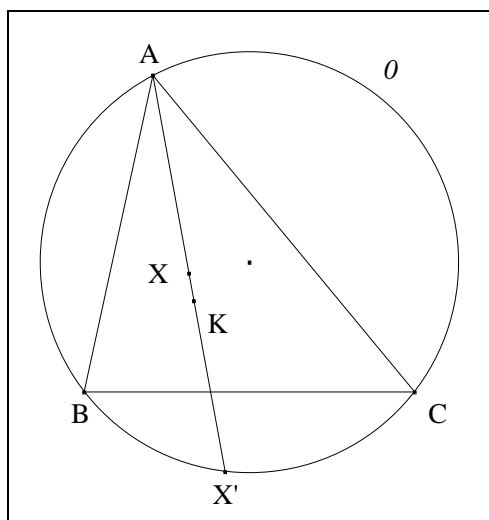


- Notons l^* le A-cercle de Kosnitza ¹⁰⁵ de ABC ; il passe par O, B, C.
- **Conclusion :** d'après D. II. 1. La parallèle absente..., scolie 2, X est sur l^* .

3. Une approche avec les circumsymédianes

VISION

Figure :

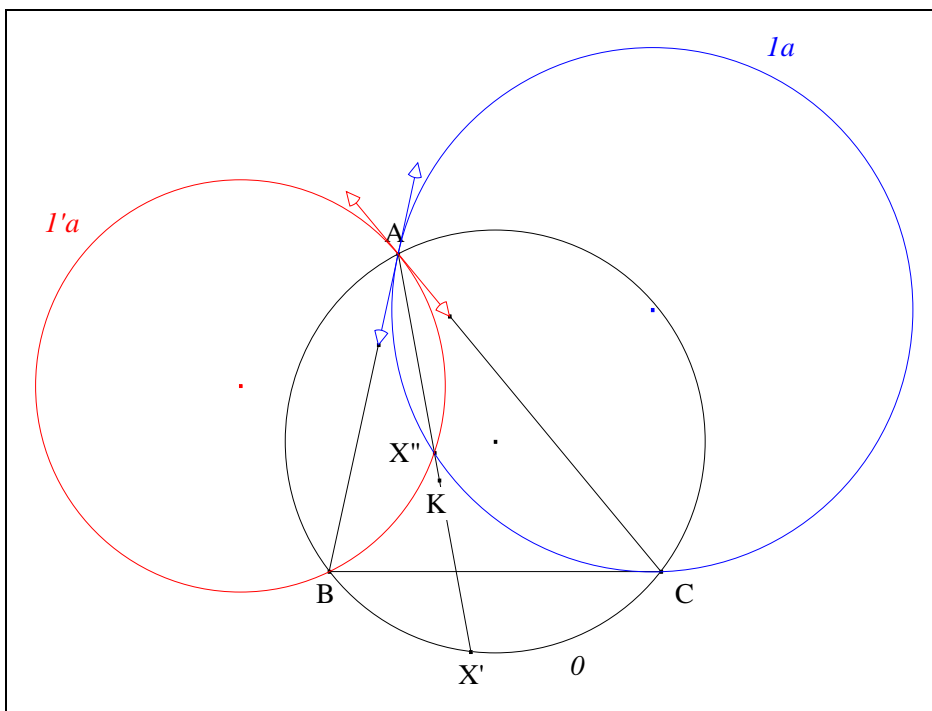


- Traits :**
- ABC un triangle,
 - K le point de lemoine de ABC,
 - O le cercle circonscrit à ABC,
 - X' le second point d'intersection de (AK) avec O
- et
- X le milieu de [AX'].

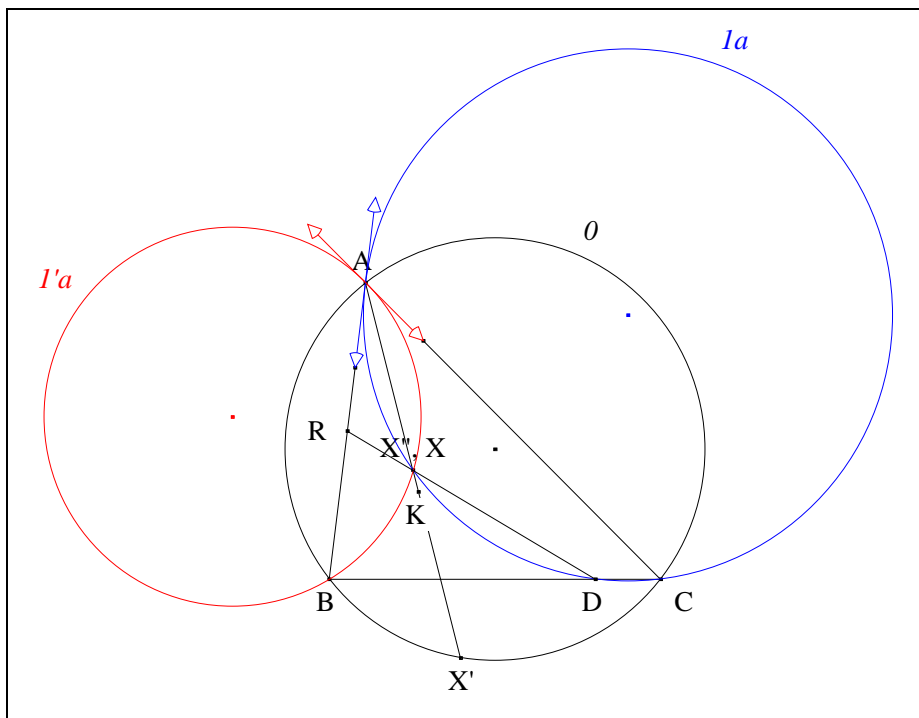
¹⁰⁵ Ayme J.-L., Le point de Kosnitza, G.G.G. vol. 1 p. 7-9 ; <http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>.

Donné : X est le A-sommet du second triangle de Brocard de ABC.

VISUALISATION



- Notons $Ia, I'a$ les A-cercles adjoints de ABC
 et X'' le second point d'intersection de Ia et $I'a$.
- D'après D. VII. 2. Une approche avec les cercles adjoints, A, X'' et K sont alignés ;
 d'après l'axiome d'incidence Ia , A, X'', K et X' sont alignés.



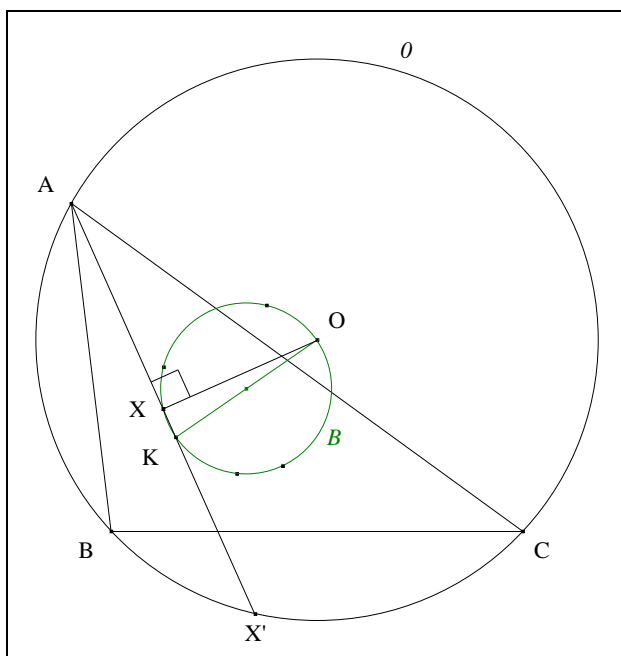
- Notons D le second point d'intersection de (BC) avec Ia

et R le point d'intersection de (DX'') avec (AB) .

- D'après "Milieu d'une corde" (Cf. Annexe 29), R est le milieu de $[AB]$.
- Les cercles Ia et O , les points de base C et A , les moniennes (DCB) et $(X''AX')$, conduisent au théorème 0 de Reim ; il s'en suit que $(DX'') // (BX')$.
- D'après Thalès "La droite des milieux", en conséquence, X'' est le milieu de $[AX']$ ¹⁰⁶; X'' et X sont confondus.
- **Conclusion** : X est le A-sommet du second triangle de Brocard de ABC .

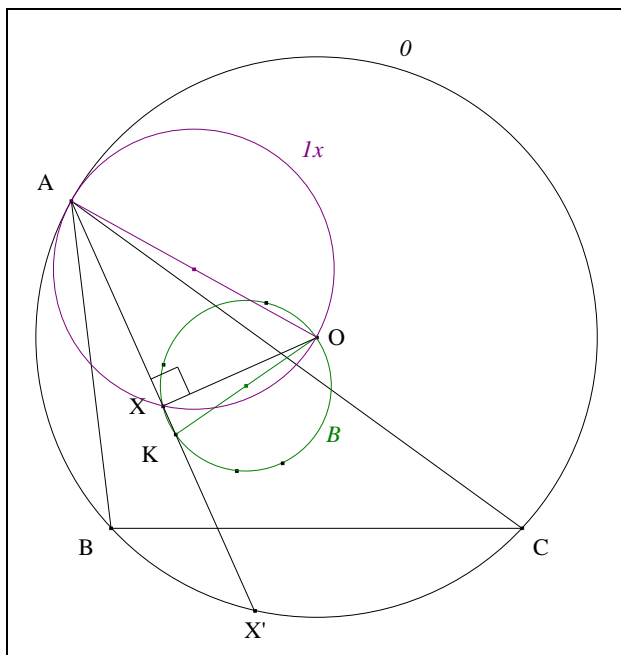
Commentaire : les milieux des circumsymédianes de ABC génèrent le second triangle de Brocard de ABC .

Scolies : (1) une preuve fulgurante



(2) $[AX']$ est "la A-circumsymédiane de ABC ".

(3) Un A-cercle tangent

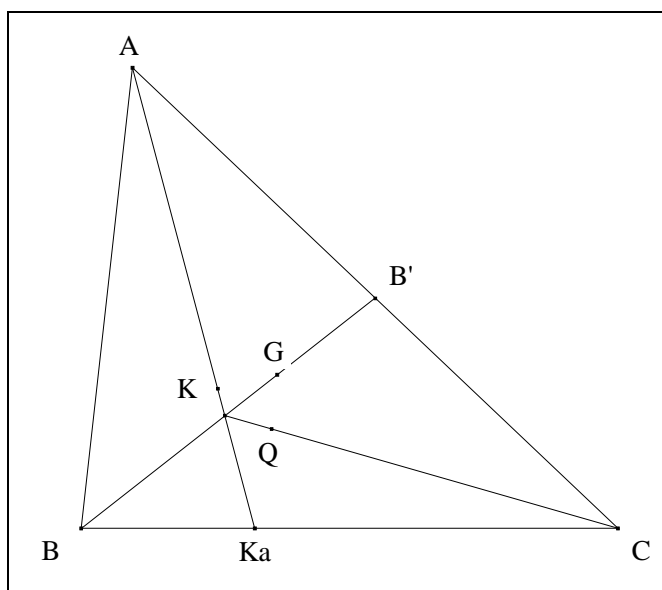


- Notons I_x le cercle passant par A, O et X.
- **Conclusion :** I_x est tangent à O en A.

4. Le résultat K, G, Q, Q' de Lemoine

VISION

Figure :

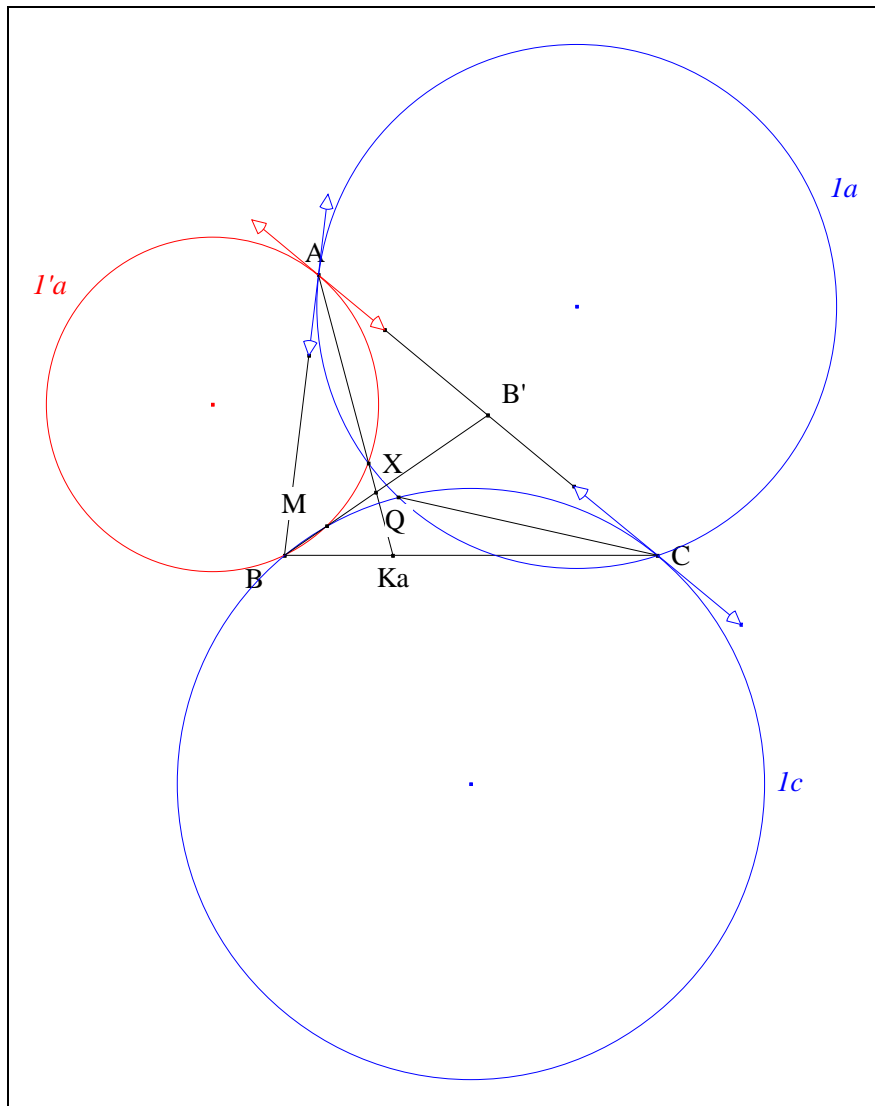


- Traits :**
- ABC un triangle,
 - K le point de Lemoine de ABC,
 - Ka le pied de la A-symédiane de ABC,
 - G le point médian de ABC,

et B' le pied de la B-médiane de ABC
 Q le premier point de Brocard de ABC.

Donné : (AKa) , (BB') et (CQ) sont concourantes.¹⁰⁷

VISUALISATION



- Notons Ia le premier A-cercle adjoint de ABC,
 $I'a$ le second A-cercle adjoint de ABC,
 X le second point d'intersection de Ia et $I'a$,
 Ic le premier C-cercle adjoint de ABC
 et M le second point d'intersection de $I'a$ et Ic .
- D'après D. VII. 2. Une approche par les cercles adjoints par un sommet,
 $(AXKa)$ est la A-symédiane de ABC.
- D'après "Médiane et cercles adjoints" (Cf. Annexe 30), (BMB') est la B-médiane de ABC.
- D'après B. 1. "Le point Q", Q est le second point d'intersection de Ia et Ic .

¹⁰⁷

Résultat de Lemoine.

- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 6) appliqué à la , $l'a$ et lc , (Aka) , (BB') et (CQ) sont concourantes.

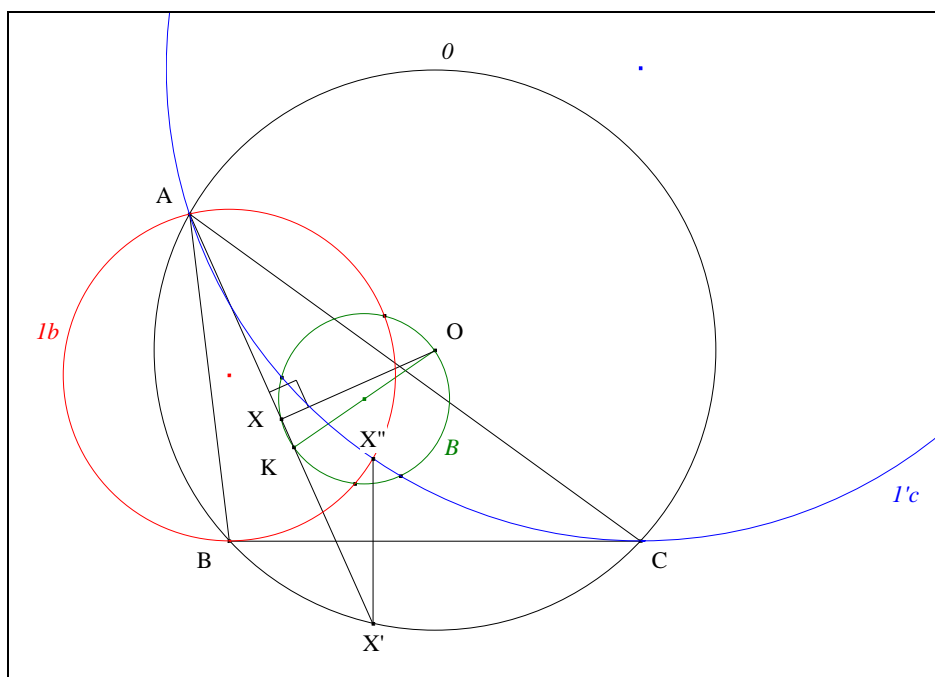
Scolie : (CQ) est une C-cévienne de Brocard relativement à ABC .

Énoncé traditionnel : la symédiane d'un sommet, la médiane d'un autre sommet et la céviene de Brocard appropriée du troisième sommet d'un triangle, sont concourantes.

5. Avec les cercles adjoints par un côté

VISION

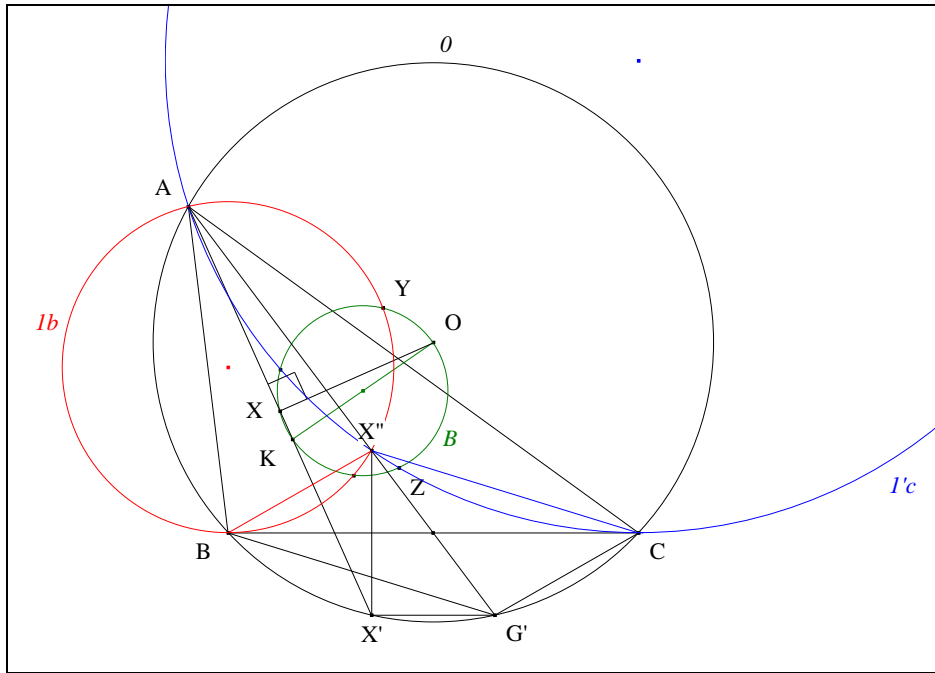
Figure :



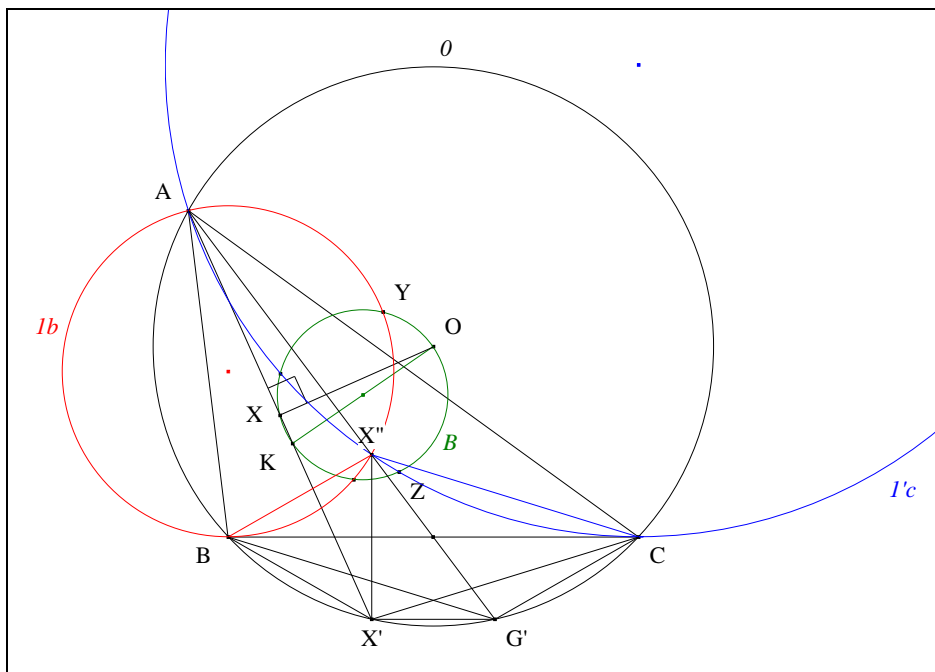
Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit de ABC ,
 K le point de Lemoine de ABC ,
 X' le second point d'intersection de (AK) avec O ,
 $Ib, I'c$ les premier, second B, C-cercles adjoints de ABC
 et X'' le second point d'intersection de Ib et $I'c$.

Donné : X'' est la symétrique de X' par rapport à (BC) .

VISUALISATION



- Notons G' le second point d'intersection de (AX'') avec O
 et G le point médian de ABC .
- Les cercles lb et O , les points de base A et B , les moniennes $(X''AG')$ et (BBC) , conduisent au théorème 3 de Reim ; il s'en suit que $(X''B) \parallel G'C$.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $(X''C) \parallel G'B$.
- Le quadrilatère $X''BG'C$ ayant ses côtés opposés parallèles, est un parallélogramme ; en conséquence, ses diagonales $[X''G']$ et $[BC]$ se coupent en leur milieu.
- **Conclusion partielle :** (AX'') passe par G .



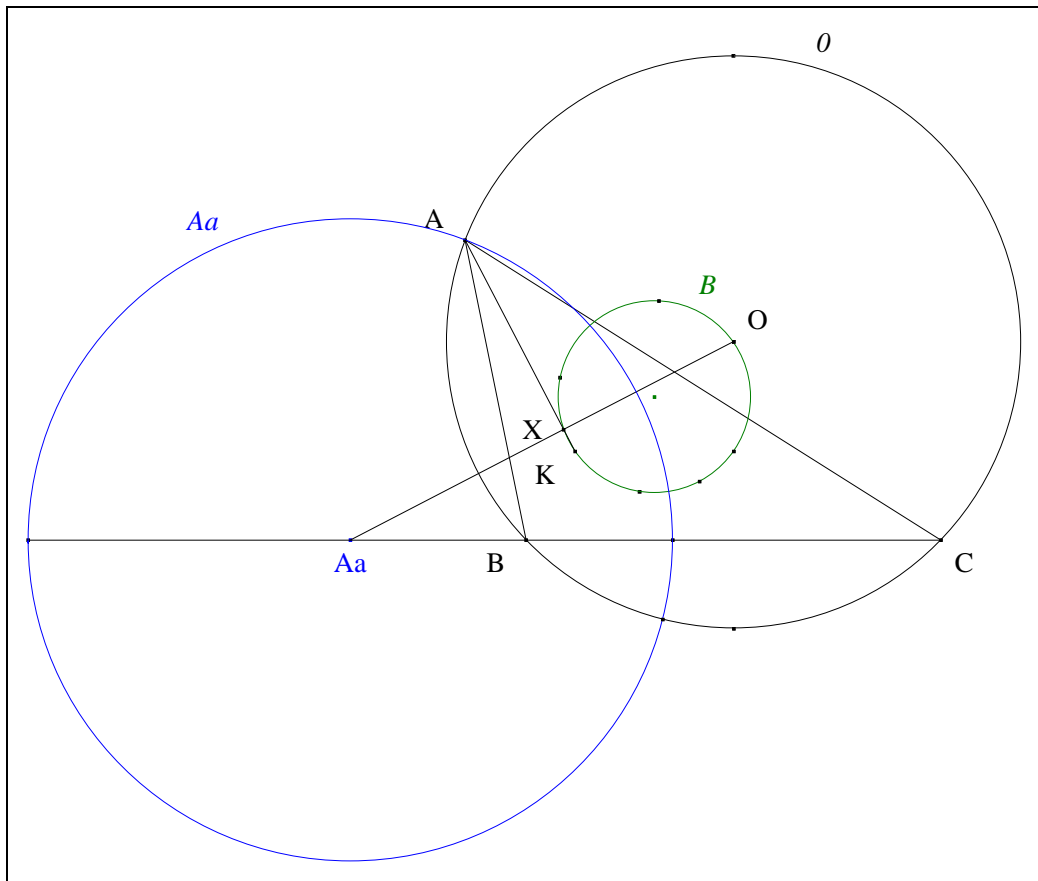
- G et K étant deux points isogonaux, $(G'X') \parallel (BC)$.

- Le quadrilatère cyclique $BCG'X'$ ayant deux côtés parallèles, est un trapèze isocèle.
- Une chasse segmentaire :
 $X''BG'C$ étant un parallélogramme, $BX'' = CG'$ et $CX'' = BG'$;
 $BCG'X'$ étant un trapèze isocèle, $CG' = BX'$ et $BG' = CX'$;
par transitivité de la relation $=$, $BX'' = BX'$ et $CX'' = CX'$.
- D'après le théorème de la médiatrice, (BC) est la médiatrice de $[X'X'']$.
- **Conclusion** : X'' est le symétrique de X' par rapport à (BC) .

6. Avec un cercle d'Apollonius

VISION

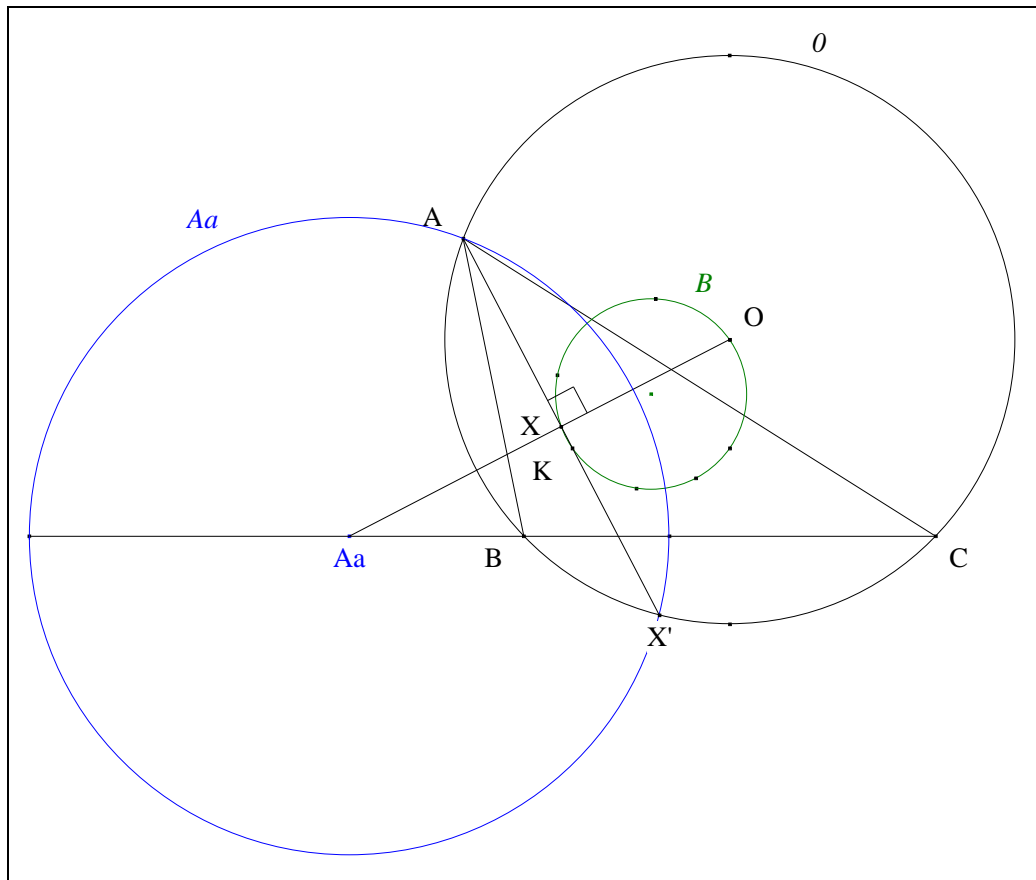
Figure :



- Traits :**
- ABC un triangle,
 - θ le cercle circonscrit de ABC ,
 - O le centre de θ ,
 - K le point de Lemoine de ABC ,
 - B le cercle de Brocard de ABC ,
 - X le second point d'intersection de (AK) avec B
 - Aa le A-cercle d'Apollonius de ABC
- et Aa le centre de Aa .

Donné : (OX) passe par Aa.¹⁰⁸

VISUALISATION

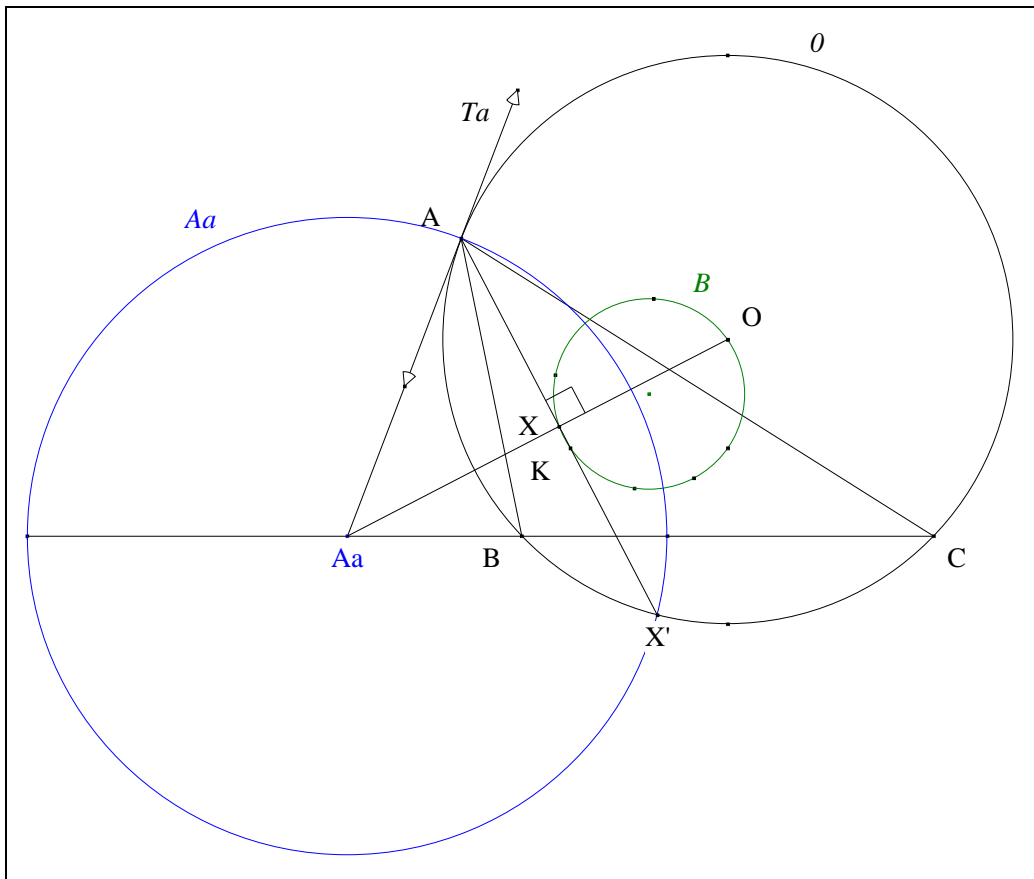


- **Scolie :** Aa est sur (BC).
- Notons X' le second point d'intersection de (AK) avec θ .
- D'après John Casey¹⁰⁹, (AK) passe par X' .
- D'après D. VII. 3. Une approche avec les circumsymédianes, X est le milieu de $[AX']$.
- D'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi cercle", $(OX) \perp (AX')$;
- **Conclusion :** (OX) étant la médiatrice de la corde commune $[AX']$ entre θ et Aa, (OX) passe par Aa.

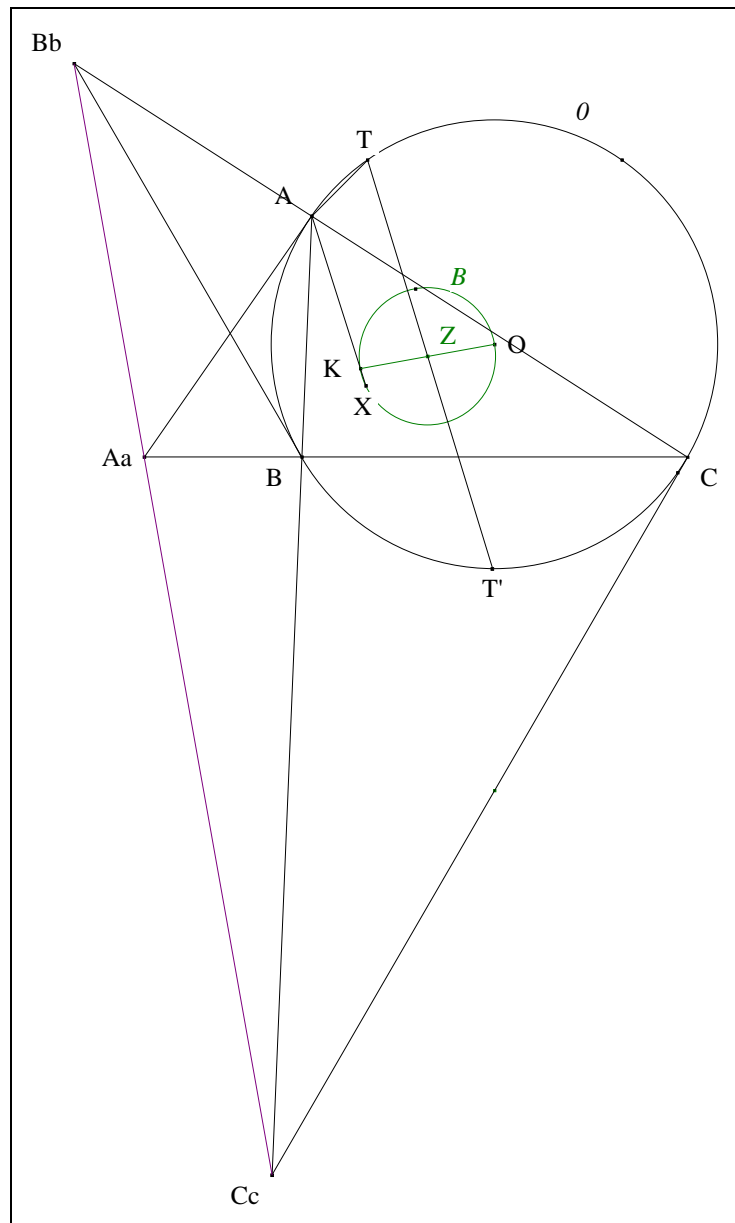
Scolies : (I) la tangente à θ en A

¹⁰⁸ Neuberg J., cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 78, art. 38, 7°.

¹⁰⁹ Casey J., *Treatise on the Analytic Geometry of the Point, Line and Conic Sections*, Dublin, (1885) 146 ; Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2 p. 5-6 ; <http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>.



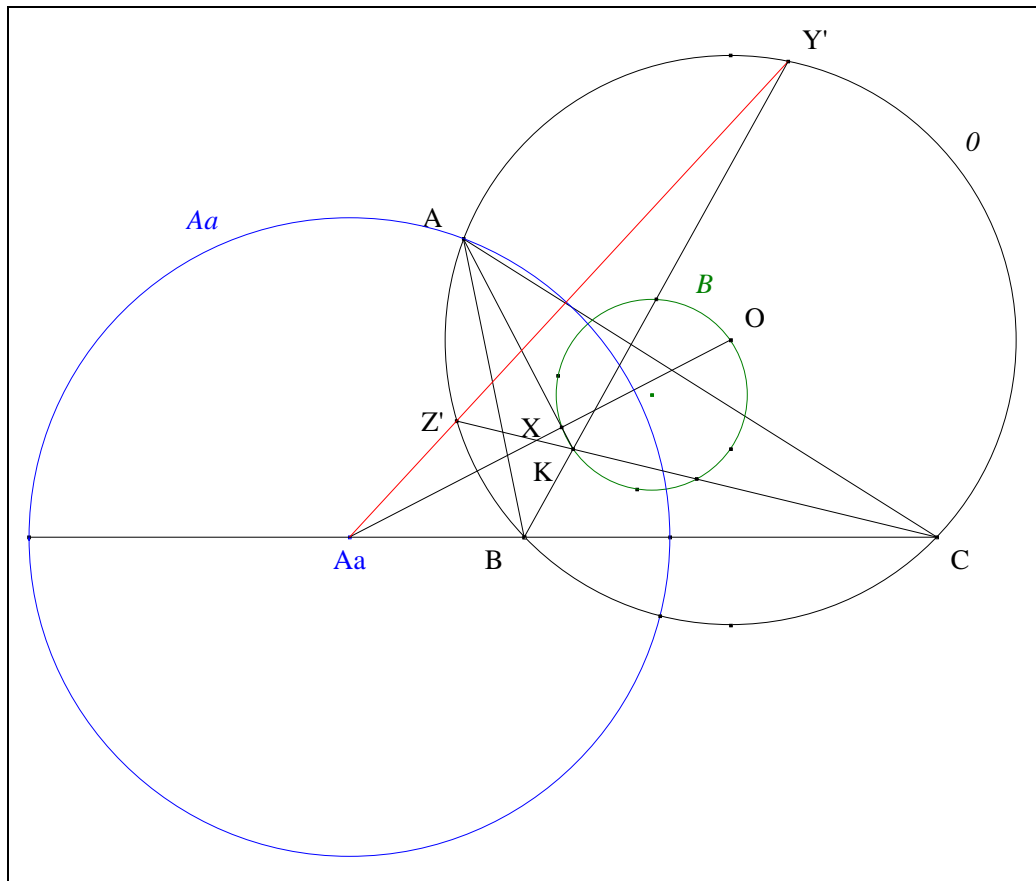
- Notons Ta la tangente à O en A .
 - **Conclusion :** O et Aa étant orthogonaux, Ta passe par Aa .
- (2) Vision triangulaire



- Notons T_b, T_c les tangentes à θ resp. en B, C
 et B_b, C_c les B, C-cercles d'Apollonius de ABC.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que, T_b passe par B_b
 T_c passe par C_c .

(3) Une droite passant par A_a



• Notons Y', Z' les seconds points d'intersection de $(BK), (CK)$ avec θ .

• **Conclusion :** $(Y'Z')$ passe par Aa .¹¹⁰
voir p. 264 du Livre

(4) Aa et B sont orthogonaux¹¹¹.

(5) L'axe radical de B et θ est l'axe de Lemoine¹¹².

7. Le point A''

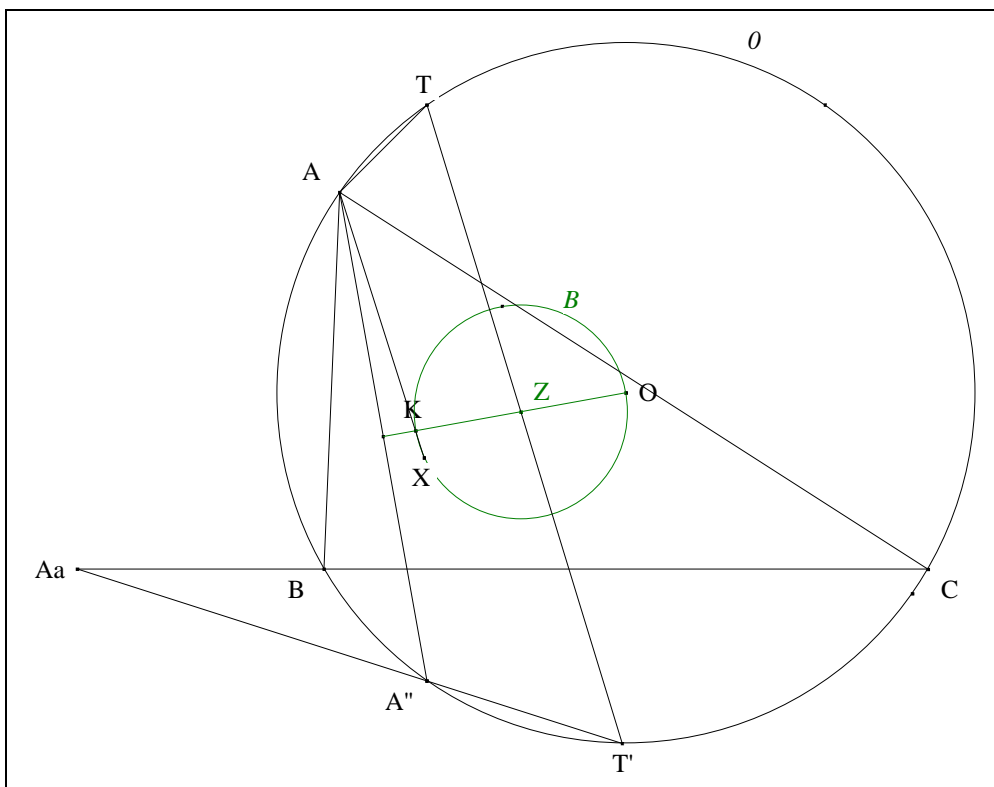
VISION

Figure :

¹¹⁰ Altshiller-Court N., On the Circles of Apollonius, Monthly XXII (1915) 304-305 ; Mathesis (1926) 144.

¹¹¹ Gallatly W., The modern Geometry of the Triangle (2nd ed.) London (1922) 106 art. n° 150.

¹¹² Neuberg J., cité par Rouché E., de Comberousse C., *Traité de Géométrie*, Gauthier-Villars, Paris, 6-ième édition (1891), Rééditions J. Gabay, Paris (1997) 480 art. 42.



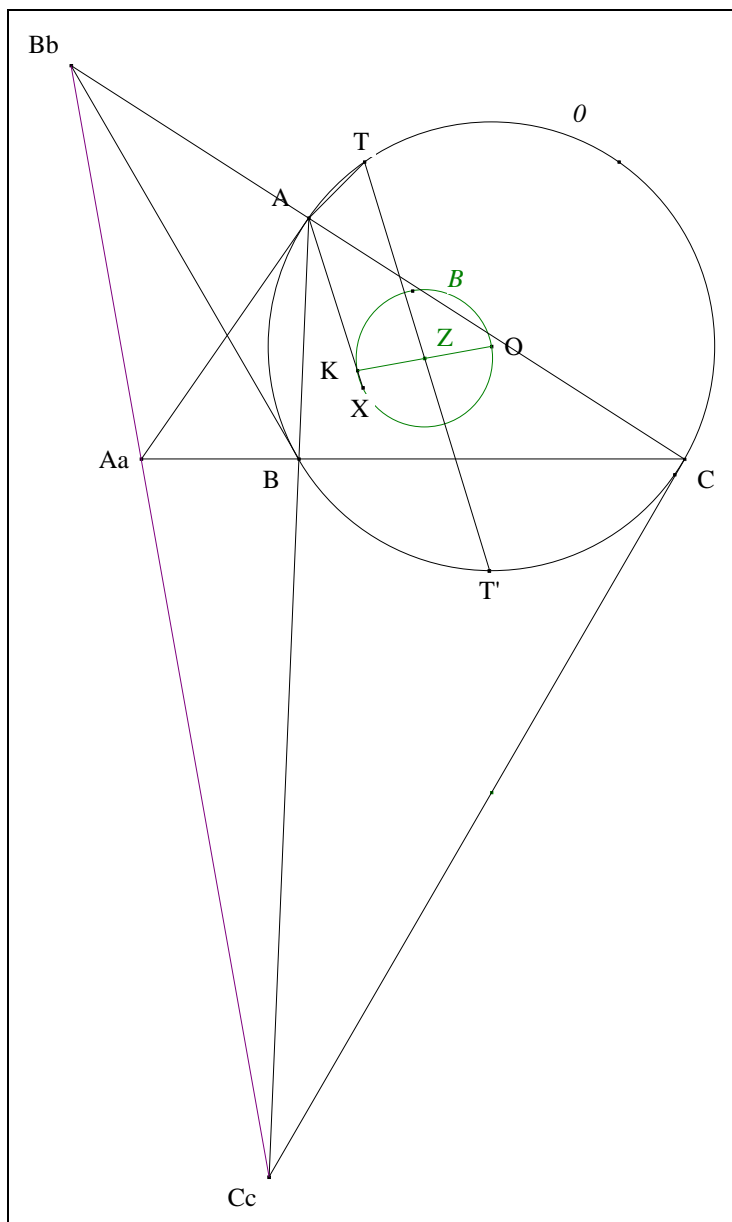
- Traits :**
- ABC un triangle,
 - θ le cercle circonscrit de ABC,
 - O le centre de θ ,
 - K le point de Lemoine de ABC,
 - B le cercle de Brocard de ABC,
 - Z le centre de B ,
 - Aa le A-cercle d'Apollonius de ABC,
 - Aa le centre de Aa ,
 - T le point de Tarry de ABC,
 - T' le second point d'intersection de (TZ) avec θ
- et
- A'' le second point d'intersection de la perpendiculaire à (OK) passant par A avec θ .

Donné : Aa, T' et Aa sont alignés. ¹¹³

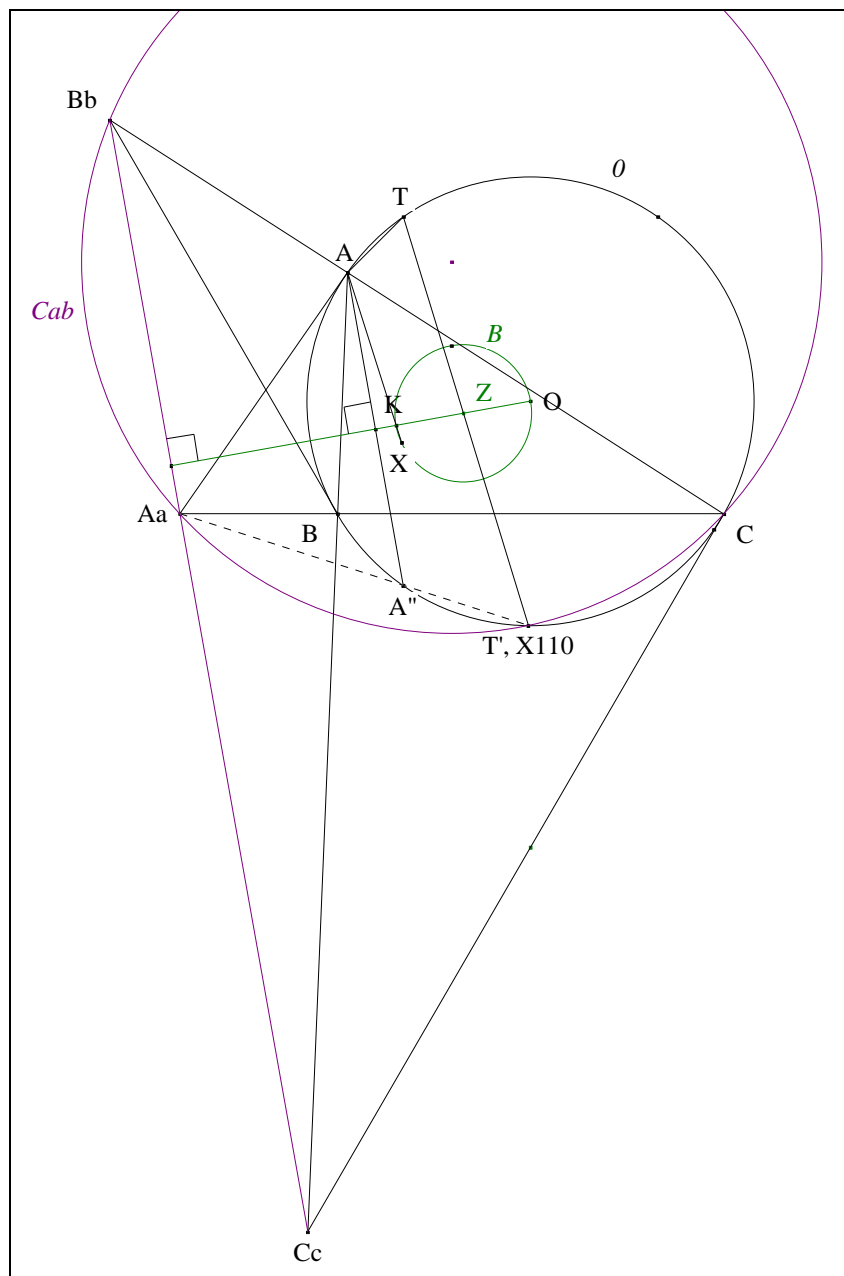
VISUALISATION

¹¹³

Ayme J.-L., Anti Euler point, *Mathlinks* du 20/12/2009 ; <http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?p=1717792#1717792>.



- Notons T_a, T_b, T_c les tangentes à O resp. en A, B, C
 et Bb, Cc les B, C -cercles d'Apollonius de ABC .
- D'après D. VII. 6. Avec un cercle d'Apollonius, scolie 2, T_a passe par Aa
 T_b passe par Bb
 T_c passe par Cc .
- D'après D. VI. 19. La droite de Simson de St relativement à ABC , scolie 2, T' est l'antipoint d'Euler de ABC .
- **Scolies :** (1) T' est le point X_{110} de ABC
 (2) $(AaBbCc)$ est l'axe de Lemoine de ABC (Cf. Annexe 31).



- **Commentaire :** l'auteur demande au lecteur d'accepter les résultats suivants qu'il démontrera ultérieurement sur le site.
- **Scolies :**
 - (1) T' est le point de Feuerbach du triangle tangentiel de ABC
 - (2) T' est le point de Miquel du delta déterminé par ABC et $(AaBbCc)$.
 - (3) le cercle passant par C, Aa, Bb passe aussi par T' .
- Notons Cab ce cercle.
- ABC et son triangle tangentiel étant perspectifs et orthologiques d'après "Le théorème de Sondat"¹¹⁴,
par hypothèse, $(AaBbCc) \perp (OK)$;
d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, $(OK) \perp (AA'')$;
 $(BbAa) \parallel (AA'')$.
- **Conclusion :** les cercles Cab et O , les points de base C et T' , la monienne $(BbAC)$, les parallèles $(BbAa)$ et (AA'') , conduisent au théorème **0** de Reim ;

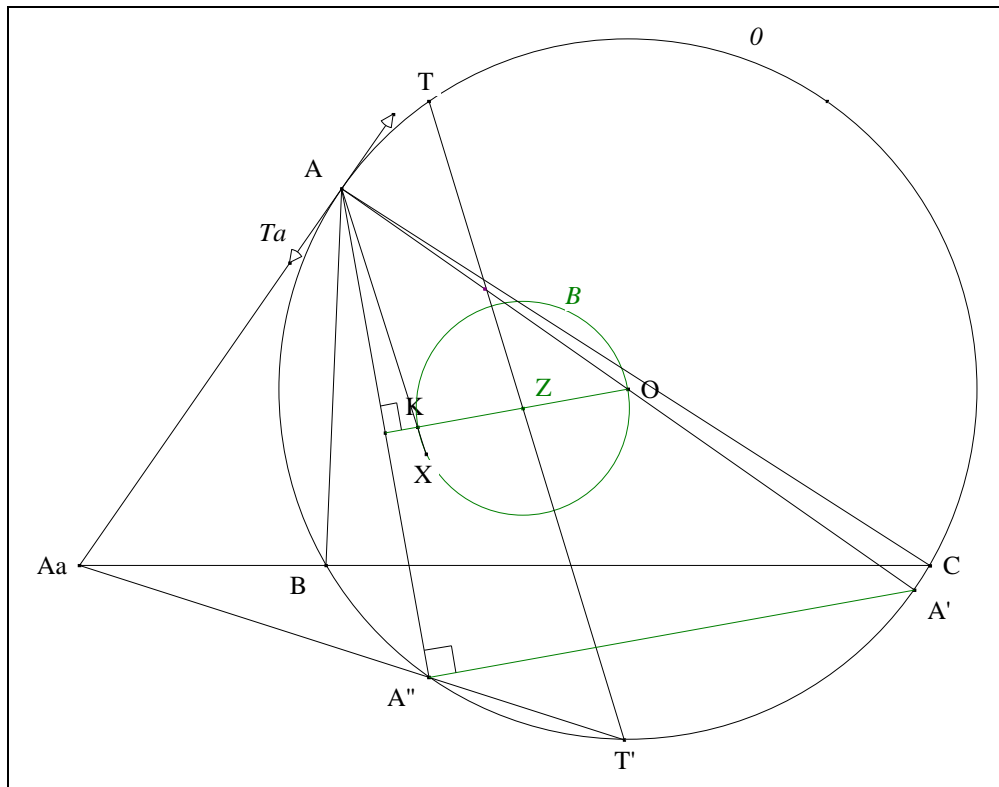
114

Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol.1 ; <http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>.

en conséquence, Aa , T' et A'' sont alignés.

Note historique : une preuve trigonométrique en a été donnée par Nguyen Van Linh du Highschool for gifted student de l'université des sciences de Hanoi (Viet Nam) et une autre par le chinois "Lym" sur *Mathlinks*.

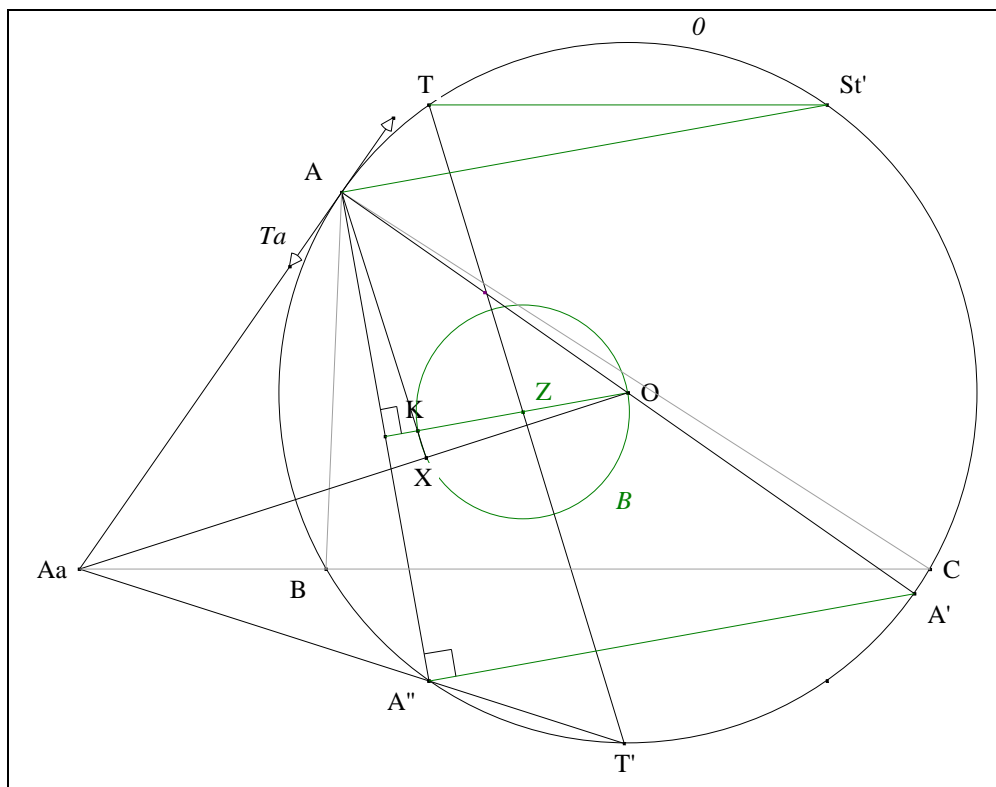
Scolies : (1) une parallèle à (OK)



• Notons A' l'antipôle de A relativement à θ .

• **Conclusion :** $(A'A'')$ est parallèle à (OK) .

(2) Une intéressante figure



- **Commentaire :** cette figure permet de résoudre le problème de construction suivant

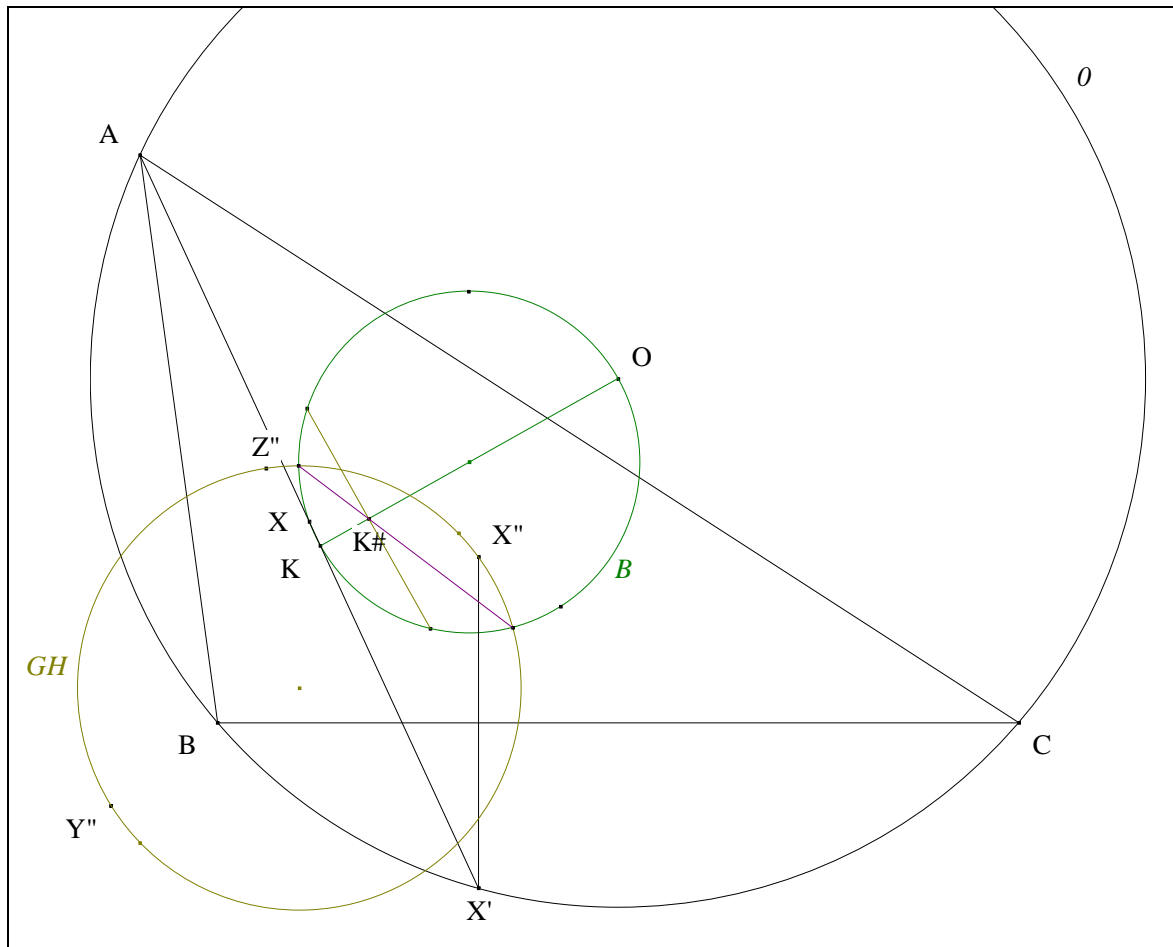
*étant donnés
un cercle O de centre O , le sommet A d'un triangle inscrit dans O , et
le point de Lemoine K de ce triangle,
déterminer
les deux autres sommets B et C de ce triangle.¹¹⁵*

8. Conjecture du X-ième anniversaire de *Hyacinthos*

VISION

Figure :

¹¹⁵ Point de Lemoine, *Les mathématiques.net* ; <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,557486> ; F. G.-M.,



Traits : ABC un triangle,
 B le cercle de Brocard de ABC ,
 GH le cercle orthocentroidal de ABC
 et R l'axe radical de (OH) et B .

Donné : R passe par le milieu de Brocard.¹¹⁶

Scolie : GH est le K-cercle de Hagne de ABC ;
 il a pour diamètre $[GH]$ où H est l'orthocentre de ABC et G son point médian.

Commentaire : cette conjecture a été confirmée par Paul Yiu par un "This is true".

VIII. LES DEUX TRIANGLES DE BROCARD

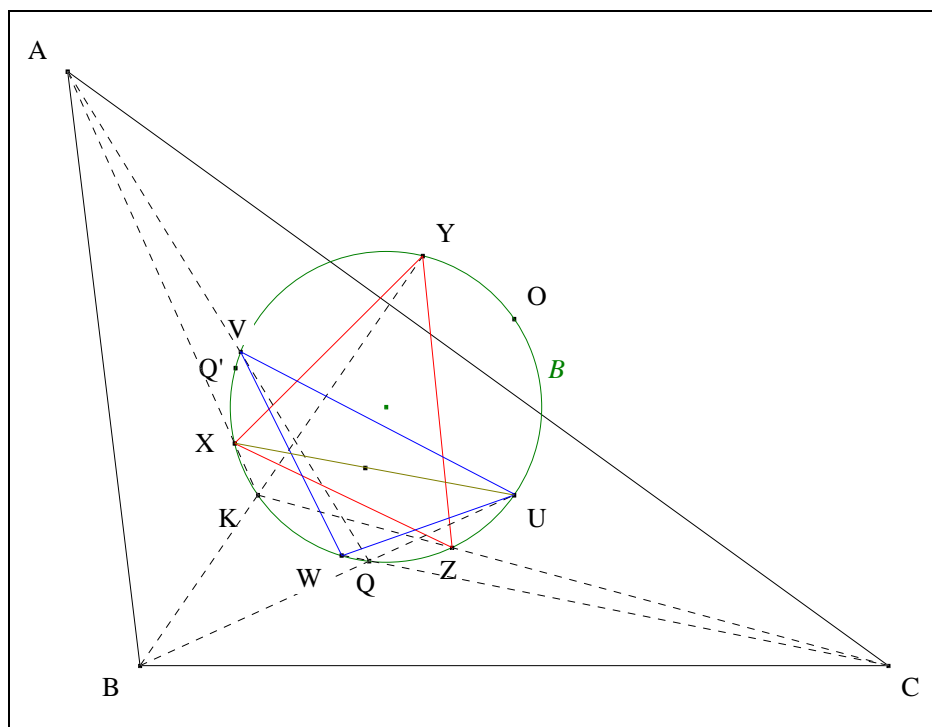
Ouverture : l'auteur est aussi passé par ces triangles avant de trouver le chemin menant au résultat présenté dans le résumé de cet article.

¹¹⁶ Ayme J.-L., Conjecture of the 10th anniversary of Hyacinthos, Message *Hyacinthos* # 18493 du 22/12/2009 ; <http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/>.
 Brocard and Hagne, *Mathlinks* du 22/12/2009 ; <http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=320075>.

1. XYZ et UVW sont comédiens

VISION

Figure :



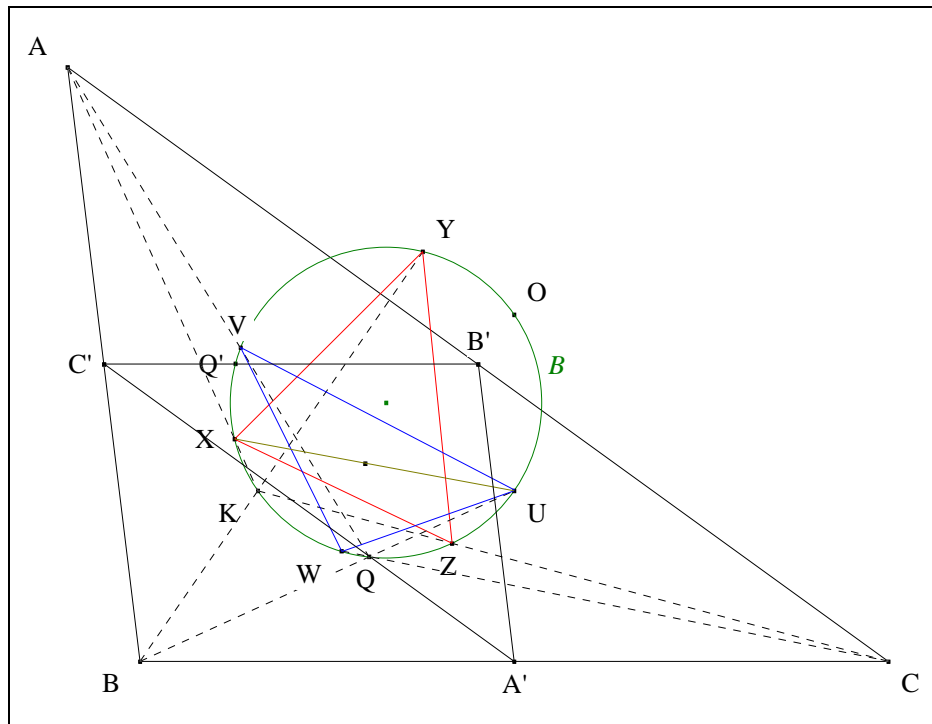
Traits : ABC un triangle,
 UVW le premier triangle de Brocard de ABC
 et XYZ le second triangle de Brocard de ABC.

Donné : UVW et XYZ sont comédiens.¹¹⁷

VISUALISATION

¹¹⁷

Brocard H.
 cité par Emmerich (von) E, *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 93, art. 44, 1°.



- Notons G le point médian de ABC ,
 $A'B'C'$ le triangle médian de ABC
 et K' le point de Lemoine de $A'B'C'$.
- **Scolies :**
 - (1) $A'B'C'$ et ABC sont comédiens
 - (2) O est l'orthocentre de $A'B'C'$
 - (3) K est l'anticomplément de K'
 - (4) K' est l'isogonal de G relativement à $A'B'C'$.
- D'après "Le P-cercle de Hagge"¹¹⁸,
 - (1) B est le G-cercle de Hagge de $A'B'C'$
 - (2) (UX) , (VY) et (WZ) sont concourantes en G .
- **Conclusion :** XYZ et UVW sont comédiens.

Note historique : une preuve non simple a été donnée par Vladimir Zajic.¹¹⁹

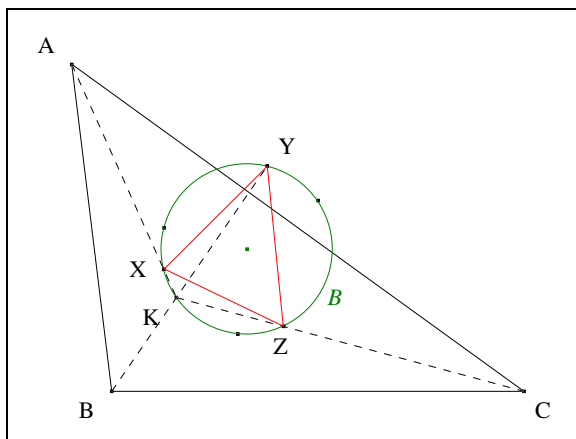
2. ABC et XYZ sont comédiens

VISION

Figure :

¹¹⁸ Ayme J.-L., Le P-cercle de Hagge, G.G.G. vol. 5, p. 1-8 ; 17-19 ; <http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>.

¹¹⁹ Ayme J.-L., A nice parallelism, Message *Hyacinthos* # 16600 du 25/07/2008 ; <http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/>.
Mathlinks du 25/07/2008 ; <http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=216893>.



Traits : ABC un triangle,
 et XYZ le second triangle de Brocard de ABC

Donné : XYZ et ABC sont comédiens.¹²⁰

VISUALISATION

- Notons UVW le premier triangle de Brocard de ABC .
- D'après D. VIII. 1., XYZ et UVW sont comédiens.
- D'après D. V. 7., UVW et ABC sont comédiens,
- **Conclusion :** par transitivité, XYZ et ABC sont comédiens

IX. LES DEUX TRIANGLES ADJOINTS

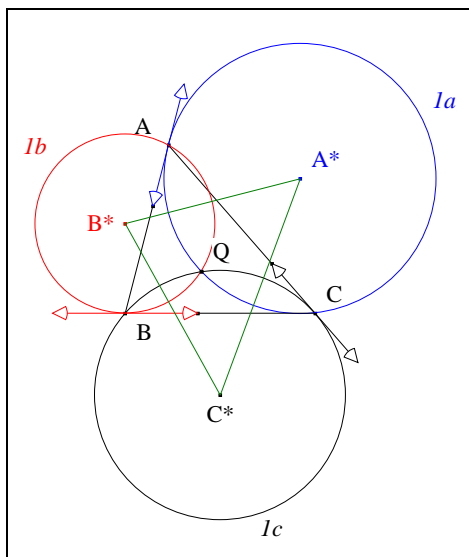
Ouverture : l'auteur est aussi passé par ces triangles avant de trouver le chemin menant au résultat présenté dans le résumé de cet article.

1. Le premier triangle adjoint

VISION

Figure :

¹²⁰ Emmerich E., *Die Brocardschen Gebilde*, Berlin (1891) 90, art. 43, 1°.



Finition : ABC un triangle,
 Ia, Ib, Ic les premiers A, B, C-cercles adjoints de ABC,
 A^*, B^*, C^* les centres resp. de Ia, Ib, Ic
 et Q le premier point de Crellé-Brocard de ABC.

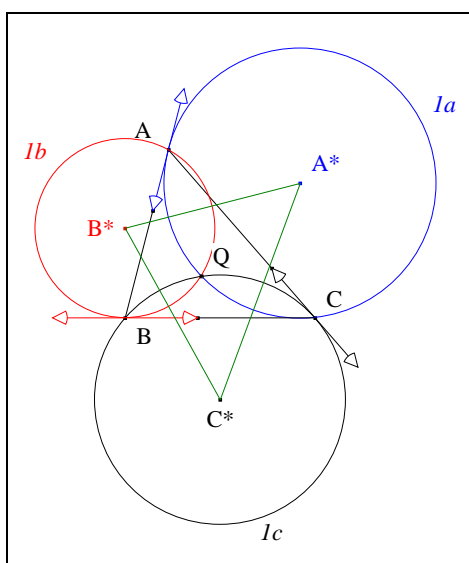
Définition : $A^*B^*C^*$ est "le premier triangle adjoint de ABC".

Scolie : les côtés de ce triangle sont les médiatrices de $[AQ], [BQ], [CQ]$.

2. Deux triangles semblables

VISION

Figure :

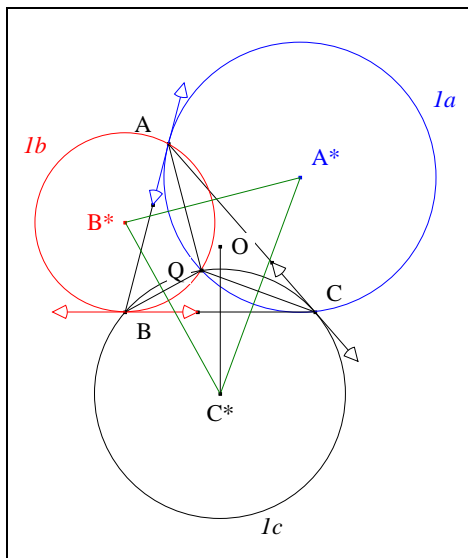


Traits : ABC un triangle,
 Ia, Ib, Ic les premiers A, B, C-cercles adjoints de ABC

et $A^*B^*C^*$ le premier triangle adjoint de ABC .

Donné : $A^*B^*C^*$ est semblable à ABC .¹²¹

VISUALISATION



- Une chasse angulaire à 2π près :

par décomposition, $\angle A^*C^*B^* = \angle A^*C^*O + \angle OC^*B^*$;

d'après le théorème "Angles à côtés perpendiculaires", $\angle A^*C^*O = \angle QCB$

$\angle OC^*B^* = \angle CBQ$;

d'après le théorème de la tangente, $\angle QCB = \angle QAC$

$\angle CBQ = \angle BAQ$;

par substitution, $\angle A^*C^*B^* = \angle QAC + \angle BAQ$;

par addition angulaire, $\angle A^*C^*B^* = \angle BAC$.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $\angle B^*A^*C^* = \angle CBA$

$\angle C^*B^*A^* = \angle ACB$.

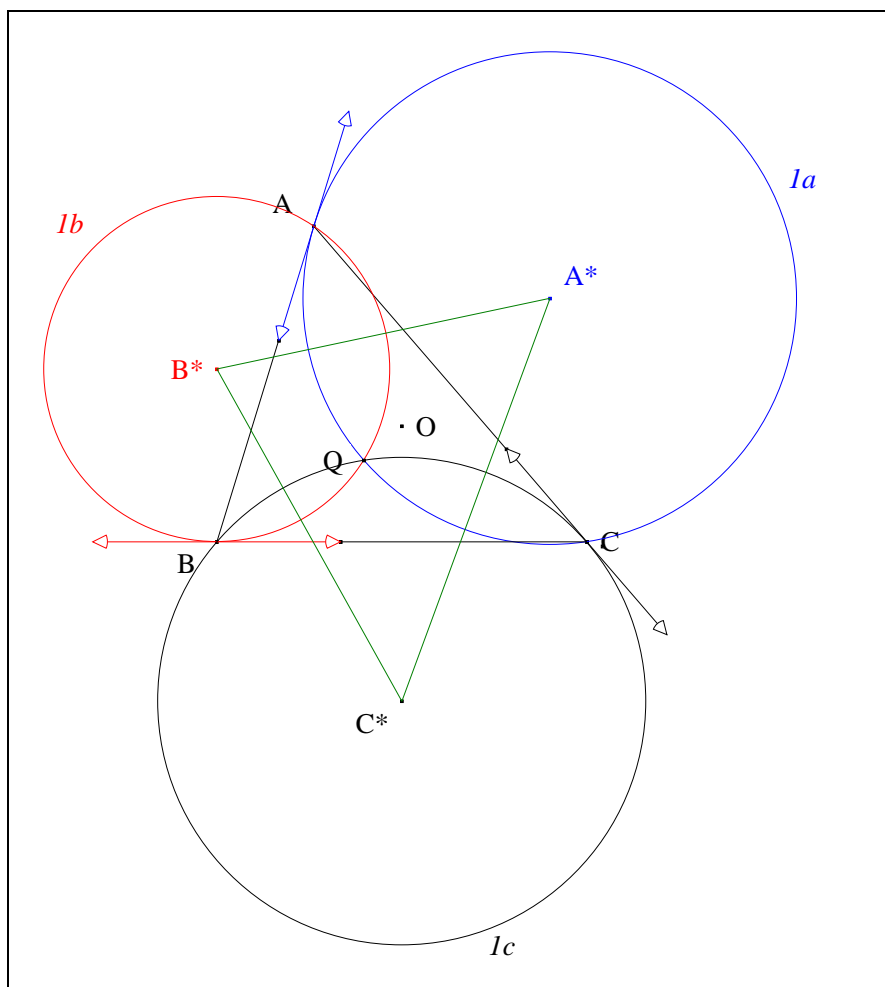
Conclusion : $A^*B^*C^*$ est semblable à BCA .

3. Le premier point de Crellé-Brocard du premier triangle adjoint

VISION

Figure :

¹²¹ Hellwig, Die durchgeschriebenen Kreise und die Kreisternionspunkte des Dreiecks, Halle (1855) ;
 cité par Emmerich (von) A., Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten
 und Kreisen des Dreiecks, G. Reimer (1891) 70, art. 34, 1°.



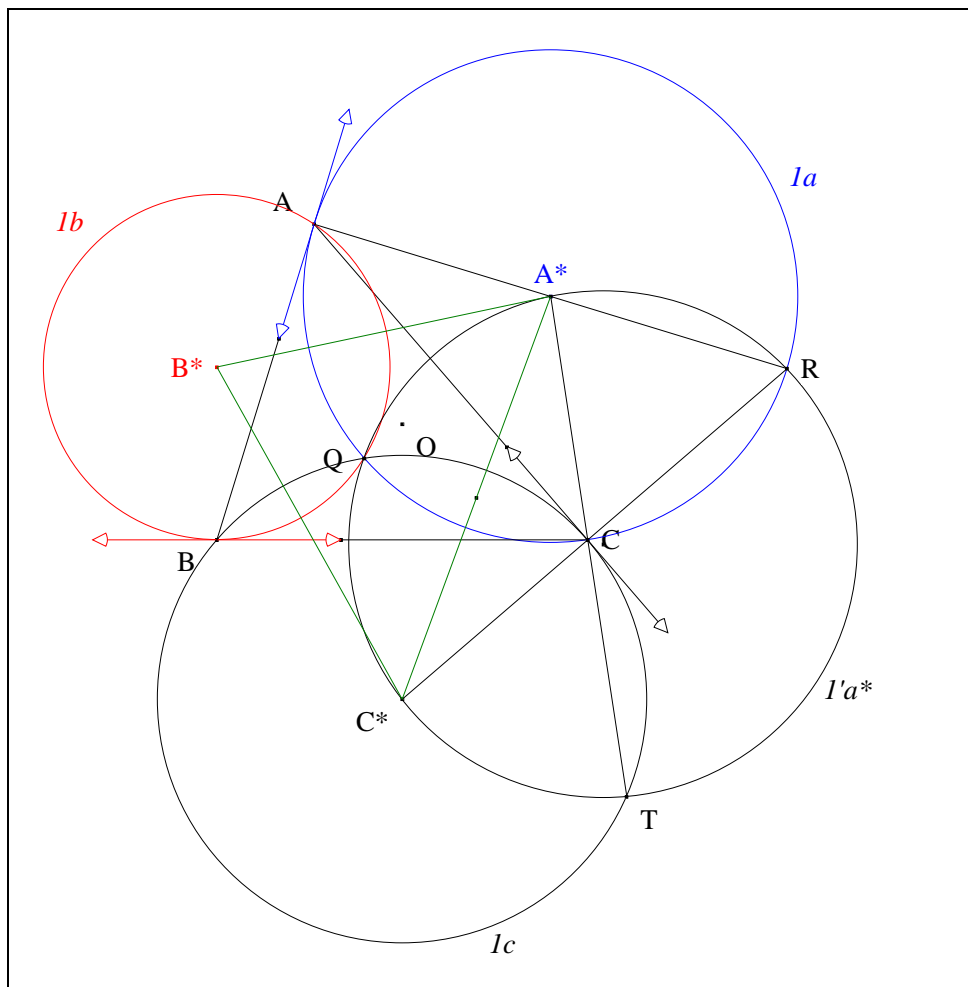
Traits : ABC un triangle,
 $1a, 1b, 1c$ les premiers A, B, C-cercles adjoints de ABC ,
 $A^*B^*C^*$ le premier triangle adjoint de ABC
 et Q le premier point de Crelle-Brocard de ABC .

Donné : Q est le premier point de Crelle-Brocard de $A^*B^*C^*$.¹²²

VISUALISATION

¹²²

Hellwig, Die durchgeschriebenen Kreise und die Kreisternionspunkte des Dreiecks, Halle (1855) ;
 cité par Emmerich (von) A., *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 70, art. 34, 2°.

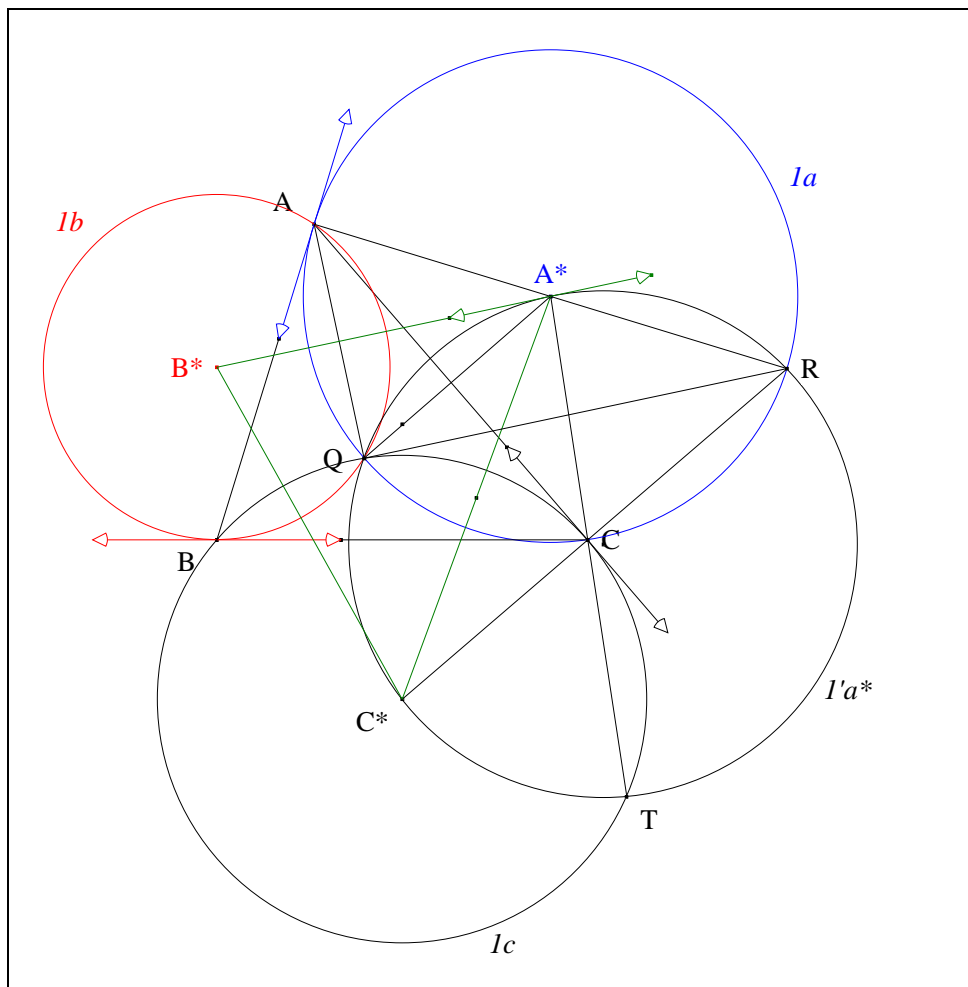


- Notons $I'a^*$ le cercle passant par C^* , Q , A^* .
- **Scolie :** $I'a^*$ est le Q-cercle de Morley¹²³ relativement à Ia et Ic .
- Notons R, T les seconds points d'intersection de $I'c$ resp. avec Ia, Ic .
- $I'a^*$ étant le Q-cercle de Morley relativement à Ia et Ic ,

(1)	A^*, C et T sont alignés
(2)	C^*, C et R sont alignés.
- D'après Miquel "Le théorème des trois cercles" appliqué à $I'a^*, Ia, Ic$, A, A^* et R sont alignés.
- Nous avons :

$(A^*B^*) \perp (AQ)$;
$(AQ) \perp (QR)$;
$(A^*B^*) \parallel (QR)$.

123

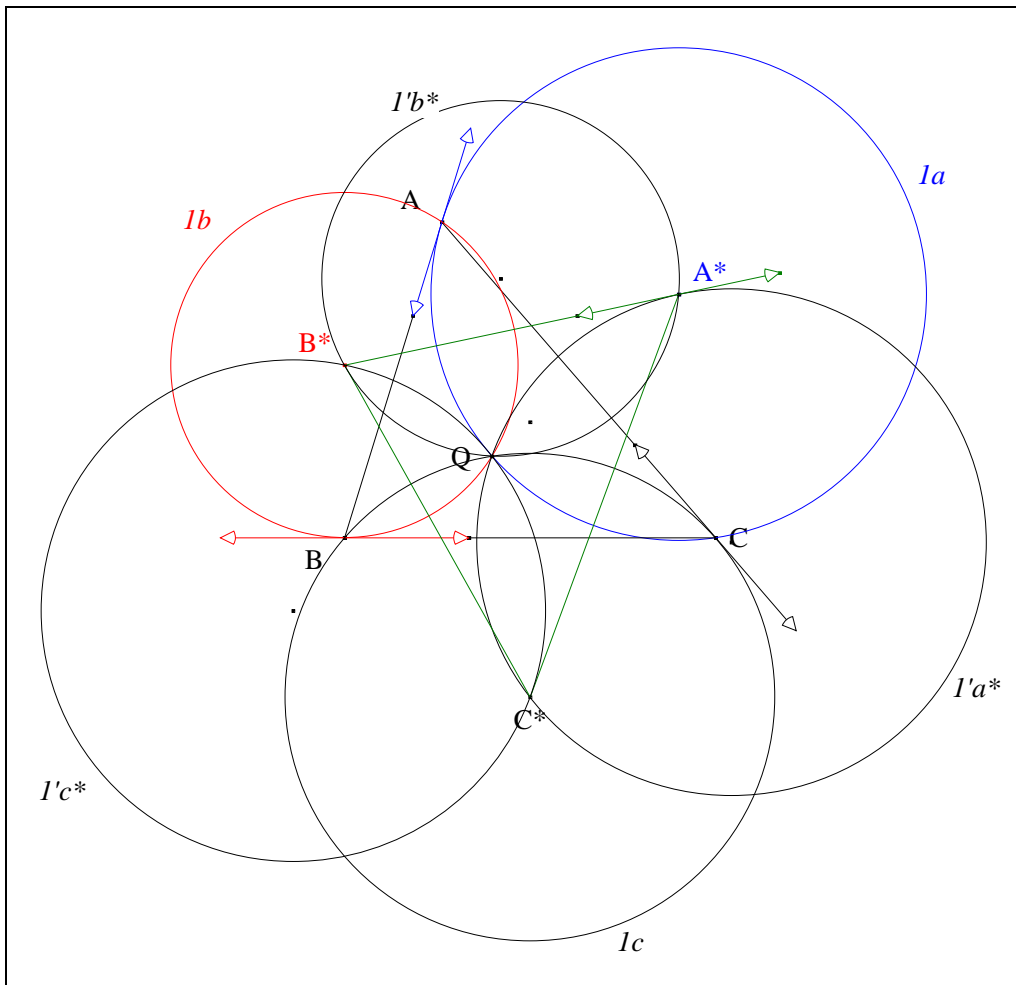


• D'après "La tangente au sommet" (Cf. Annexe 8),

(A^*B^*) est la tangente à $l'a^*$ en A.

• **Conclusion partielle :**

$l'a^*$ est le premier A^* -cercle adjoint de $A^*B^*C^*$.

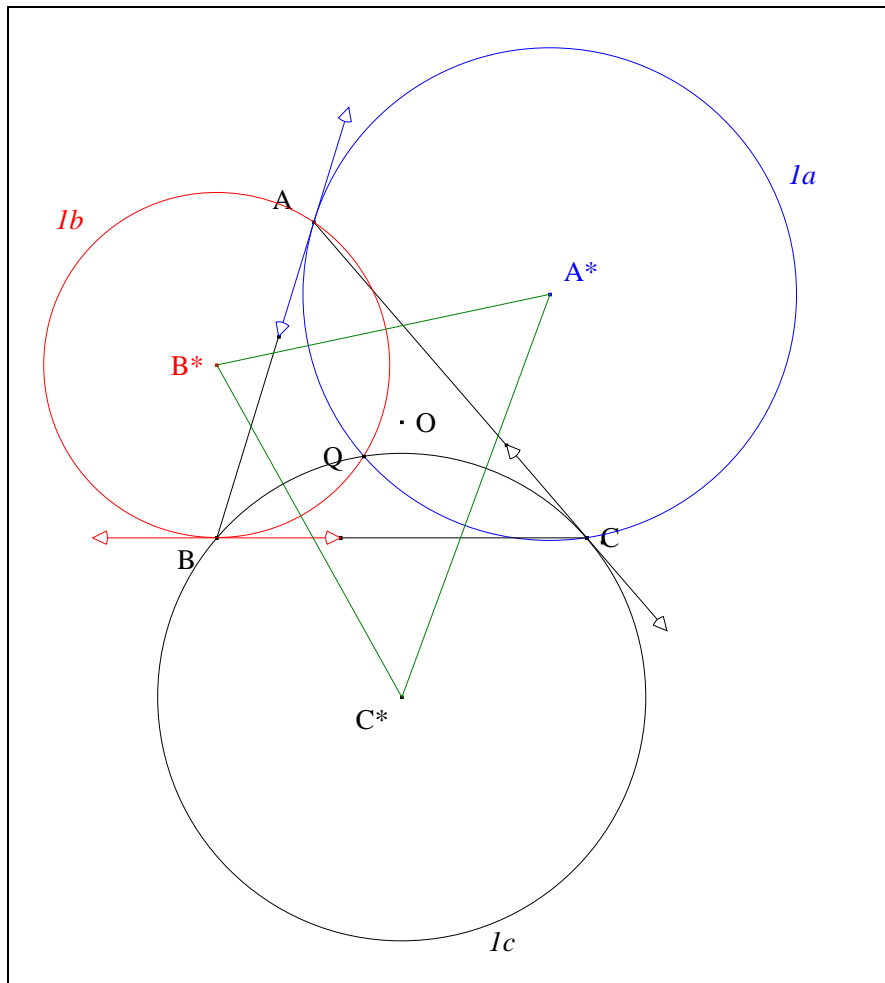


- Notons $I'b^*$ le cercle passant par A^* , Q , B^*
 $I'c^*$ le cercle passant par B^* , Q , C^* .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $I'b^*$ est le premier B^* -cercle adjoint de $A^*B^*C^*$
 $I'c^*$ est le premier C^* -cercle adjoint de $A^*B^*C^*$.
- **Conclusion** : Q est le premier point de Brocard de $A^*B^*C^*$.

4. Q centre de similitude entre ABC et $A^*B^*C^*$

VISION

Figure :



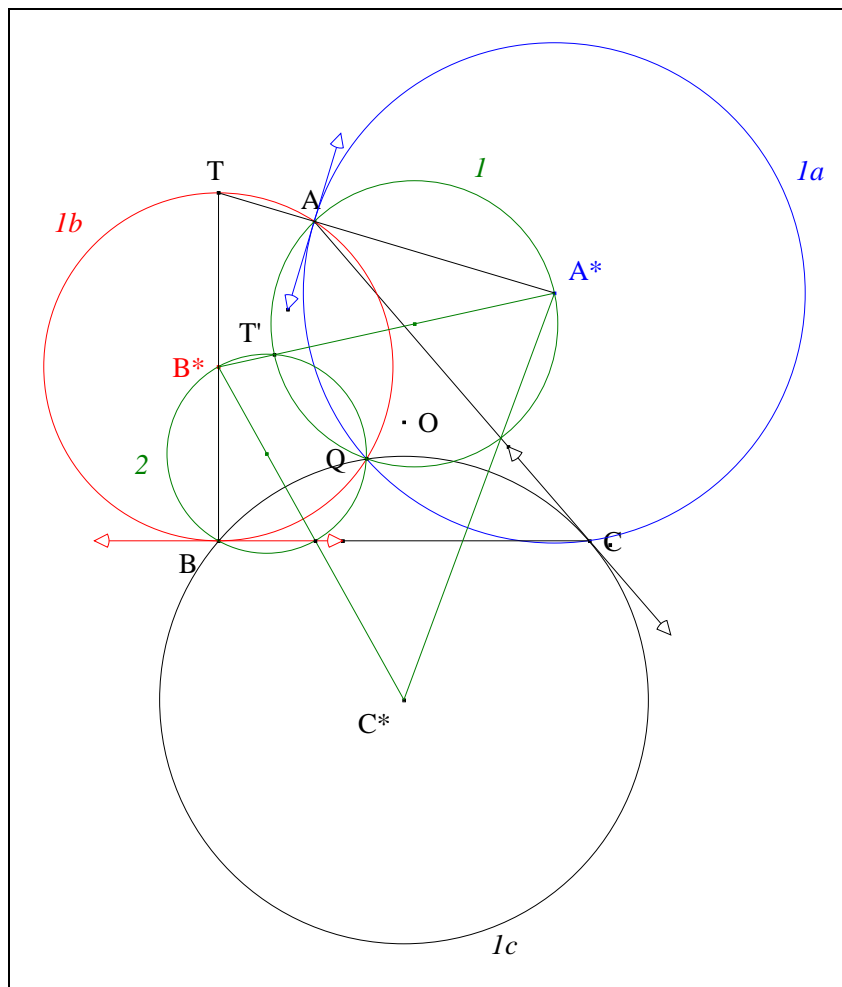
Traits : ABC un triangle,
 $1a, 1b, 1c$ les premiers A, B, C-cercles adjoints de ABC ,
 $A^*B^*C^*$ le premier triangle adjoint de ABC
 et Q le premier point de Crellé-Brocard de ABC .

Donné : Q est le centre de la similitude entre ABC et $A^*B^*C^*$.¹²⁴

VISUALISATION

¹²⁴

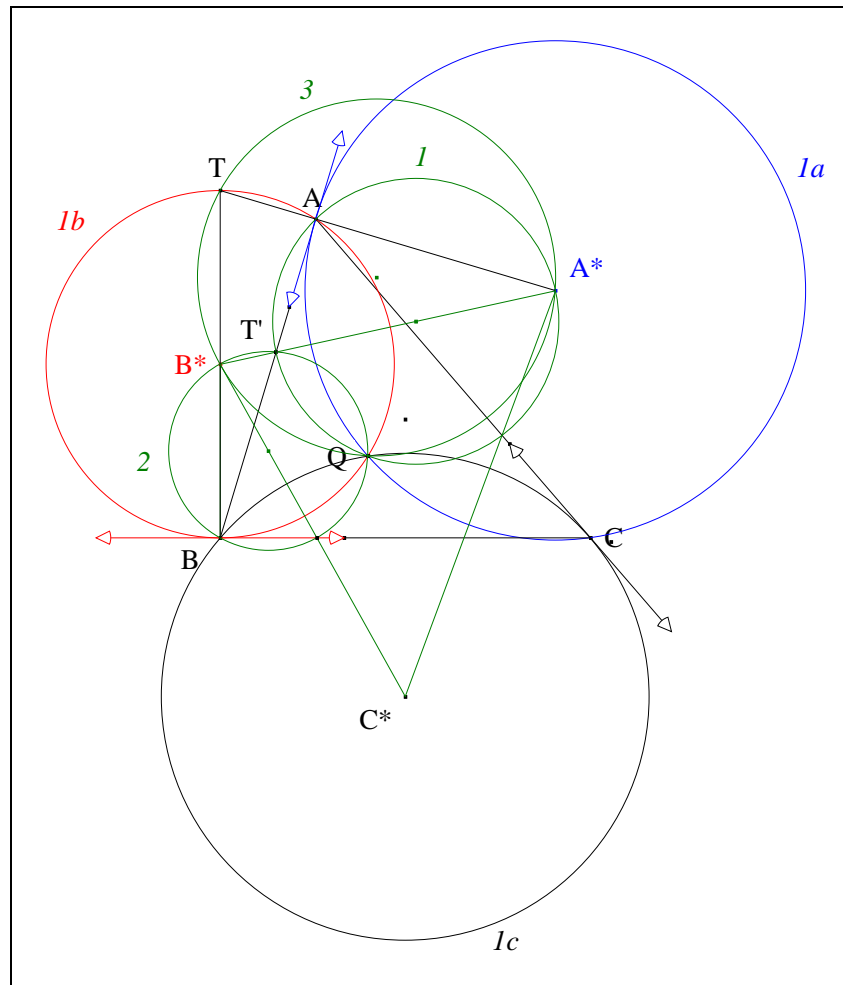
Hellwig, Die durchgeschriebenen Kreise und die Kreisternionspunkte des Dreiecks, Halle (1855) ;
 cité par Emmerich (von) A., *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten
 und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 70, art. 34, 2°.



- Notons

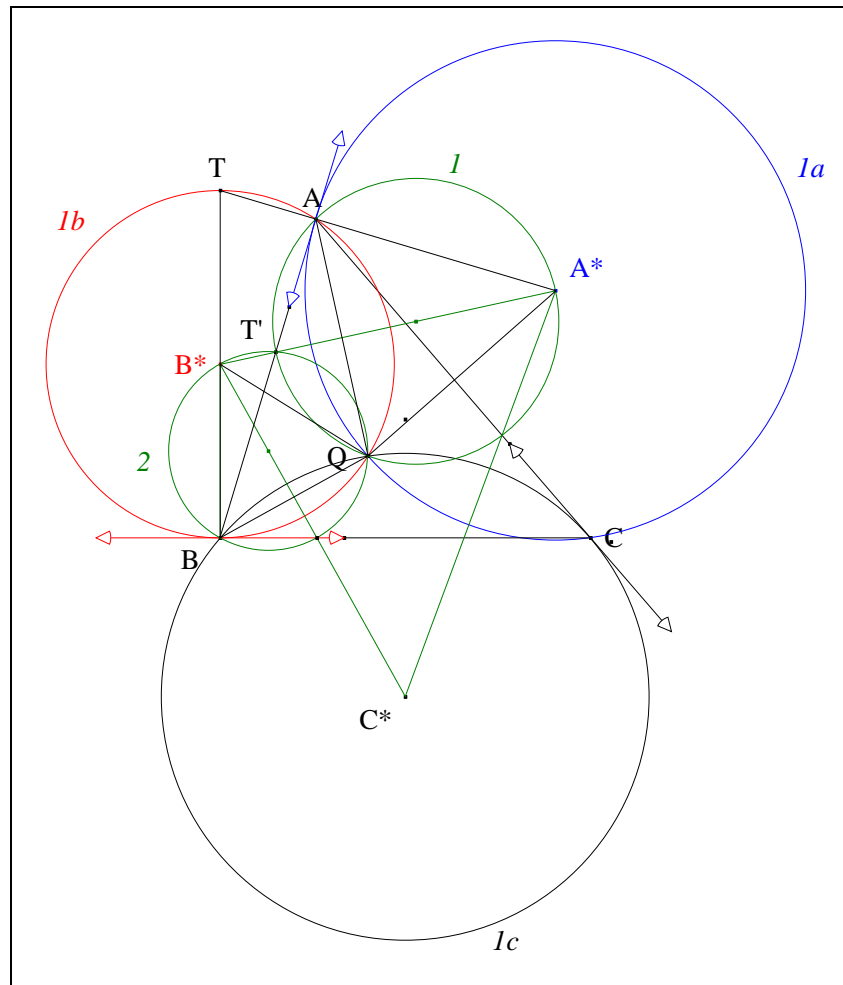
1	le cercle passant par A, A^*, Q ,
2	le cercle passant par B, B^*, Q ,
T	le point d'intersection de (AA^*) et (BB^*) ,
et T'	le second point d'intersection de 1 et 2 .
- Une chasse angulaire à $2 \cdot \pi$ près :

d'après le théorème "Angles à côtés perpendiculaires",	$\angle CBA = \angle BTA$;
d'après le théorème de la tangente,	T est sur $1b$.
- D'après Miquel "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 6) appliqué à $1, 2$ et $1b$, A^*, T' et B^* sont alignés.



- Une chasse angulaire à $2 \cdot \pi$ près :
 par symétrie d'axe (A^*B^*) ,
 le triangle B^*AT étant B^* -isocèle,
 par addition membre à membre,
 en conséquence, A^*, B^*, Q et T sont cocycliques.

$$\begin{aligned} \angle A^*QB^* &= \angle B^*AA^* ; \\ \angle B^*TA &= \angle TAB \\ \angle A^*QB^* + \angle B^*TA &= \pi ; \end{aligned}$$
- Notons 3 ce cercle.
- D'après Miquel "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 6)
 appliqué à $1, 3$ et 2 , A, T' et B sont alignés.



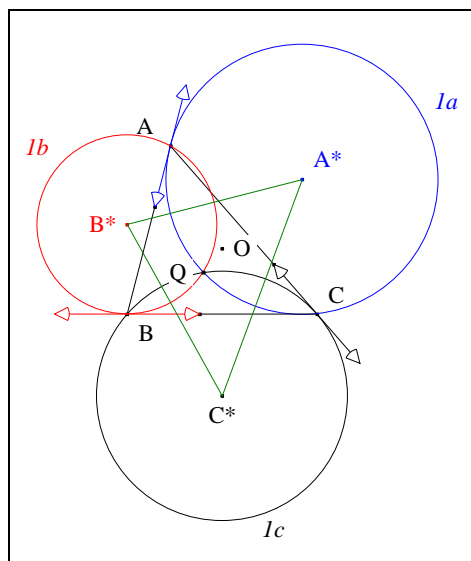
- D'après Möbius "Angle de deux cercles" appliqué à 1 et 2, $\angle A^*QB^* = \angle AQB$.
- Une chasse angulaire à $2 \cdot \pi$ près :
 d'après D. III. 8. L'angle de Brocard de ABC,
 que nous pouvons écrire : $\omega = \angle BAQ$;
 d'après "Le théorème de l'angle inscrit", $\angle BAQ = \angle T'AQ$;
 par transitivité de la relation =, $\angle T'AQ = \angle T'A^*Q$;
 d'après "Le théorème 180", $\omega = \angle T'A^*Q$;
 $\angle A^*QA = \frac{\pi}{2} - \omega$.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $\angle B^*QB = \frac{\pi}{2} - \omega$
 $\angle C^*QC = \frac{\pi}{2} - \omega$.
- Calculons : $\frac{QA}{QA^*} = 2 \cdot \sin \omega$.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $\frac{QB}{QB^*} = 2 \cdot \sin \omega$
 $\frac{QC}{QC^*} = 2 \cdot \sin \omega$.
- **Conclusion** : ABC se déduit de $A^*B^*C^*$

dans la similitude de centre Q, de rapport $2 \cdot \sin \omega$ et d'angle $\frac{\pi}{2} - \omega$.

5. Le second point de Crellé-Brocard du premier triangle adjoint

VISION

Figure :



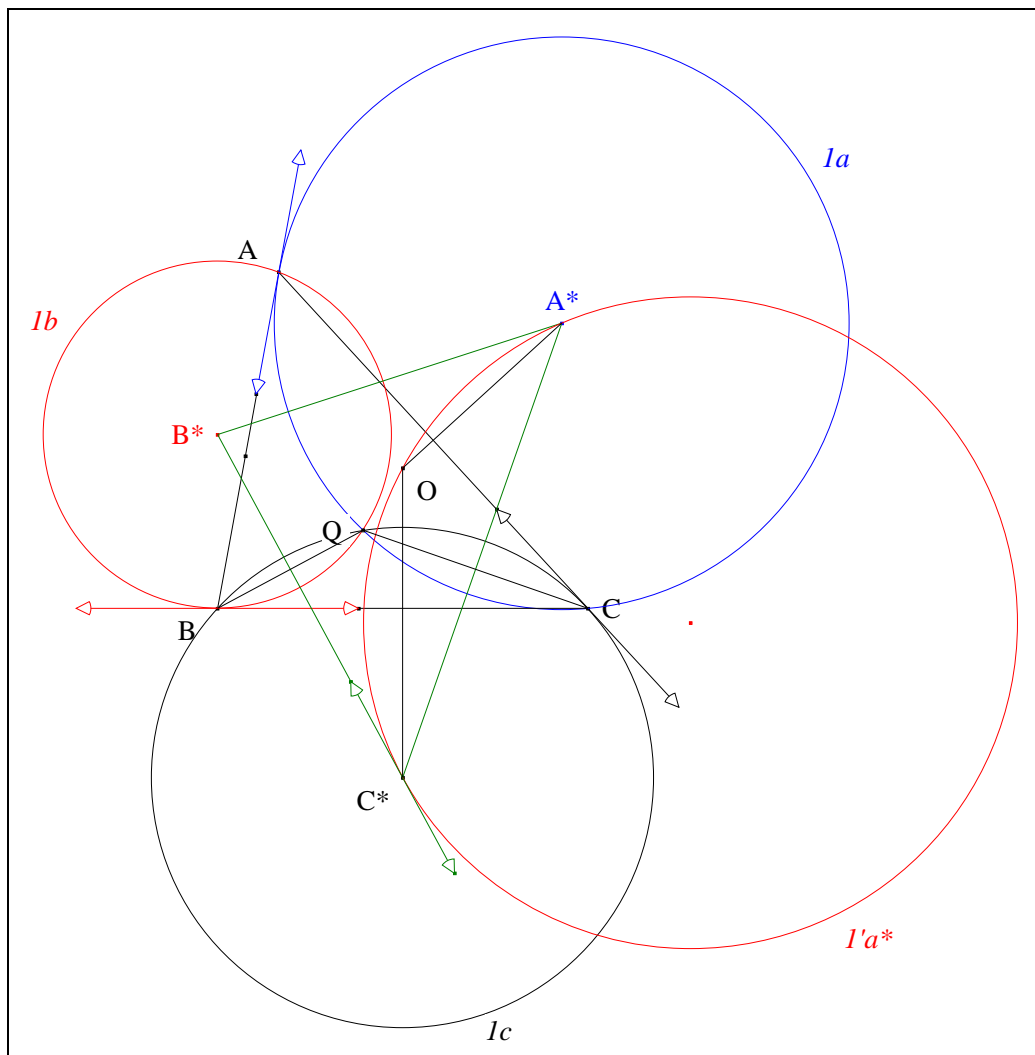
Traits : ABC un triangle,
 la, lb, lc les premiers A, B, C-cercles adjoints de ABC,
 $A^*B^*C^*$ le premier triangle adjoint de ABC
 et O le centre du cercle circonscrit à ABC.

Donné : O est le second point de Brocard de $A^*B^*C^*$.¹²⁵

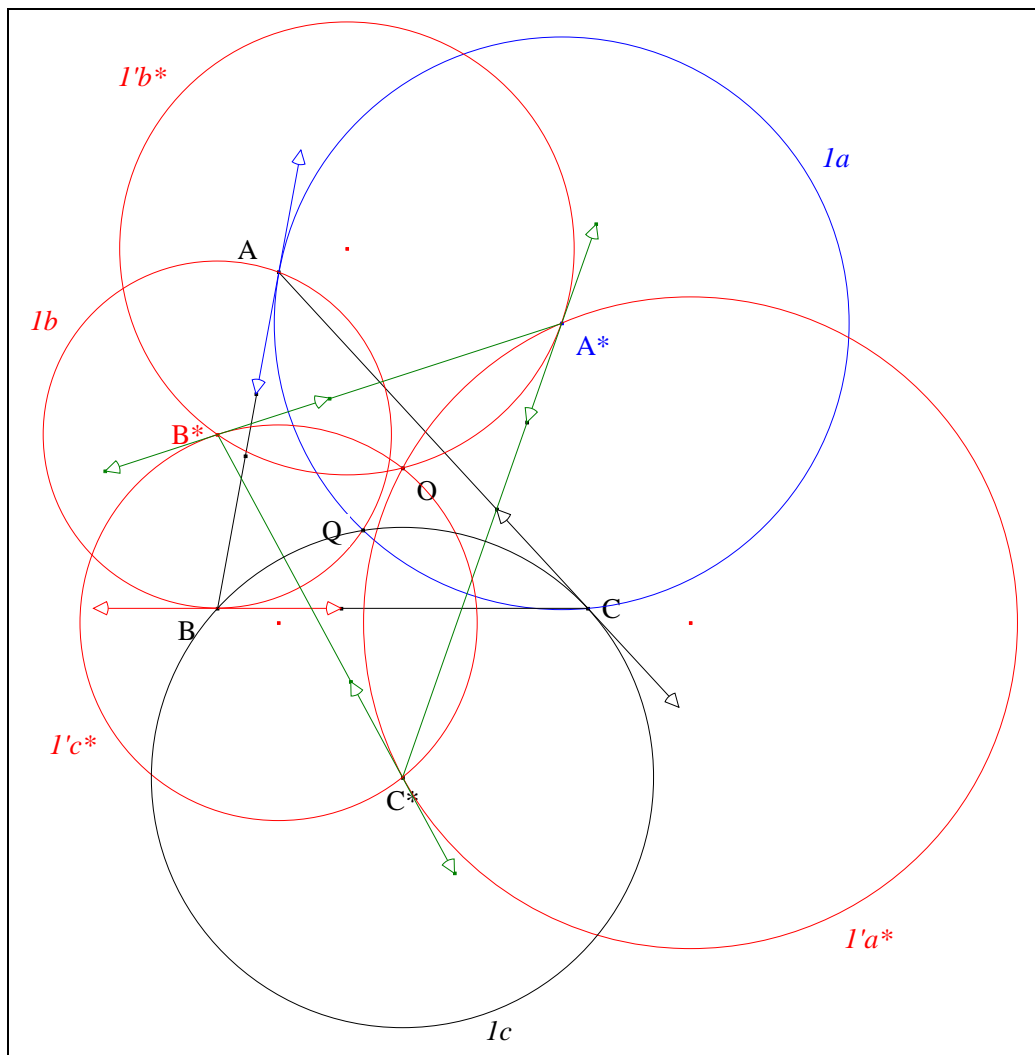
VISUALISATION

¹²⁵

Hellwig, Die durchgeschriebenen Kreise und die Kreisternionspunkte des Dreiecks, Halle (1855) ;
 cité par Emmerich (von) A., *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 70, art. 34, 3°.



- Notons $l'a^*$ le cercle passant par C^* , O , A^* .
- Une chasse angulaire à 2π près :
 d'après le théorème "Angles à côtés perpendiculaires", $\angle OA^*C^* = \angle ACQ$;
 d'après ? L'angle de Brocard", $\angle ACQ = \angle CBQ$;
 d'après le théorème "Angles à côtés perpendiculaires", $\angle CBQ = \angle A^*C^*O$;
 par transitivité de la relation $=$, $\angle OA^*C^* = \angle A^*C^*O$;
 d'après le théorème de la tangente, (C^*B^*) est la tangente à $l'a^*$ en C^* .
- **Conclusion partielle :** $l'a^*$ est le second A-cercle adjoint de $A^*B^*C^*$.

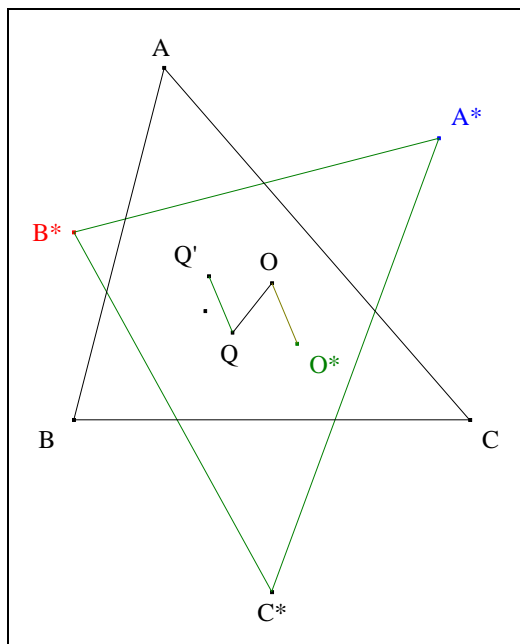


- Notons $I'b^*$ le cercle passant par A^* , O , B^*
 et $I'c^*$ le cercle passant par B^* , O , C^* .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $I'b^*$ est le second B-cercle adjoint de $A^*B^*C^*$
 $I'c^*$ est le second C-cercle adjoint de $A^*B^*C^*$.
- **Conclusion** : O est le second point de Brocard de $A^*B^*C^*$.

6. Une parallèle à (QQ')

VISION

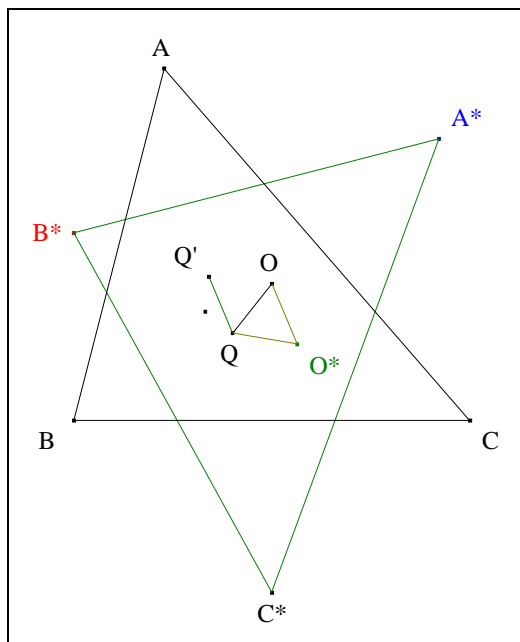
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 Q, Q' les premier, second points de Crelle-Brocard de ABC,
 A*B*C* le premier triangle adjoint de ABC
 et O* le centre du cercle circonscrit à A*B*C*.

Donné : (OO*) est parallèle à (QQ').¹²⁶

VISUALISATION



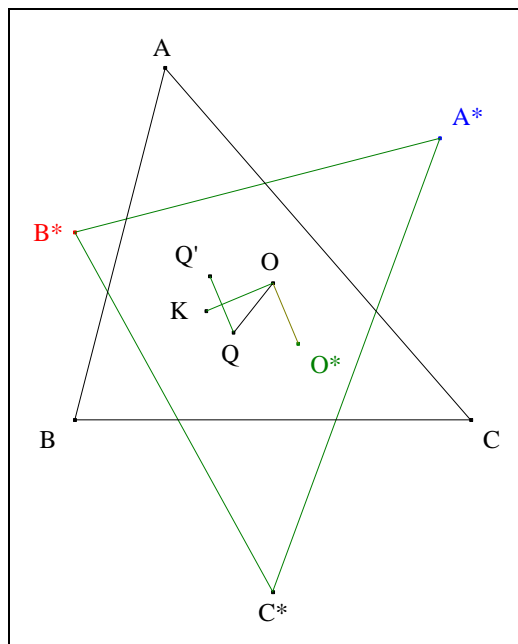
- Par hypothèses, Q, Q' sont les premier et second point de Crelle-Brocard de ABC.

¹²⁶

Hellwig, Die durchgeschriebenen Kreise und die Kreisternionspunkte des Dreiecks, Halle (1855) ;
 cité par Emmerich (von) A., *Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 71, art. 34, 5°.

- D'après D. IX. 3. et 5., Q et O sont les premier et second point de Crelle-Brocard de $A^*B^*C^*$.
- D'après D. IX. 3., $A^*B^*C^*$ se déduit de ABC dans la similitude de centre Q, de rapport $2 \cdot \sin \omega$ et d'angle $\frac{\pi}{2} - \omega$; en conséquence, $\angle OQQ' = \angle O^*QO$.
- D'après D. II. 2., le triangle O^*QO est O^* -isocèle ; en conséquence, $\angle O^*QO = \angle QOO^*$; par transitivité de la relation =, $\angle OQQ' = \angle QOO^*$.
- **Conclusion :** (OO^*) est parallèle à (QQ') .

Solie : deux droites perpendiculaires

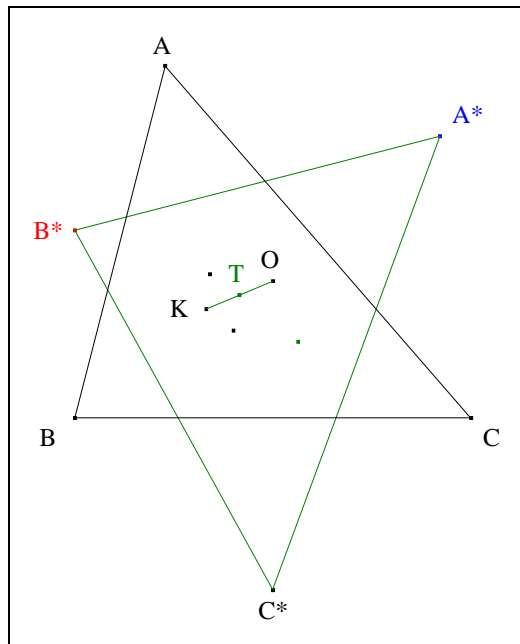


- Notons K le point de Lemoine de ABC .
- **Conclusion :** (OO^*) est perpendiculaire à (OK) .

7. Le point de Lemoine de $A^*B^*C^*$

VISION

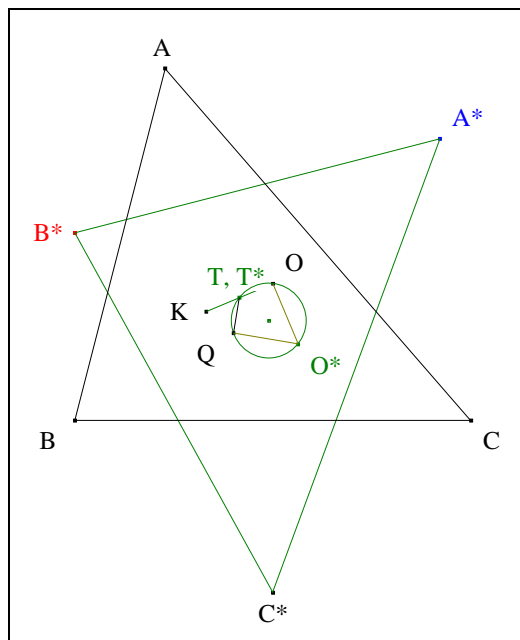
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 K le point de Lemoine de ABC,
 T le milieu de [OK]
 et A*B*C* le premier triangle adjoint de ABC.

Donné : T est le point de Lemoine de A*B*C*. ¹²⁷

VISUALISATION



¹²⁷

Artzt, Untersuchungen über ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreiecks und auf deren Mittelsenkrechten, sowie über kongruente Strahlbüschel auf den Ecken desselben ; ein Beitrag zur Geometrie des Brocard'schen Kreises, Recklinghausen. Programm des Gymnasiums (1884, 1886) ;

Stoll ;

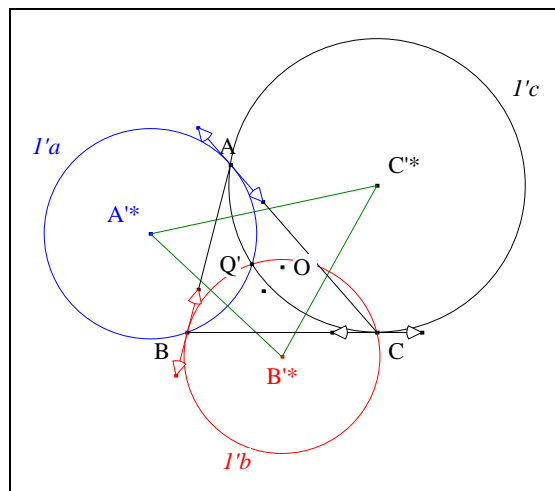
cités par Emmerich (von) A., *Die Brocard'schen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks*, G. Reimer (1891) 71, art. 34, 6°.

- Notons B^* le cercle de Brocard de $A^*B^*C^*$; il passe par O^* , O et Q ;
et T^* le second point d'intersection de B^* avec (OK) .
- D'après D. II. 2. Le triangle OQQ' , le triangle O^*QO est O^* -isocèle ;
- D'après D. IX. 6. Une parallèle à (QQ') , scolie, $(KTT^*O) \perp (OO^*)$.
en conséquence, (1) T^* est l'antipôle de O^* relativement à B^*
(2) $T^*O = T^*Q$
(3) T^* est sur la médiatrice de $[OQ]$ et sur (OK) .
- D'après C. 2. L'axe ou le diamètre de Brocard, T est sur la médiatrice de $[OQ]$ et sur (OK) ;
en conséquence, T et T^* sont confondus.
- **Conclusion :** d'après C. 2. L'axe ou le diamètre de Brocard,
 T est le point de Lemoine de $A^*B^*C^*$.

8. Le second triangle adjoint

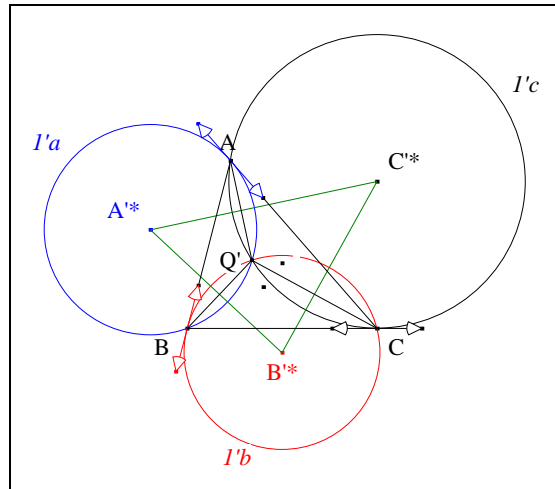
VISION

Figure :

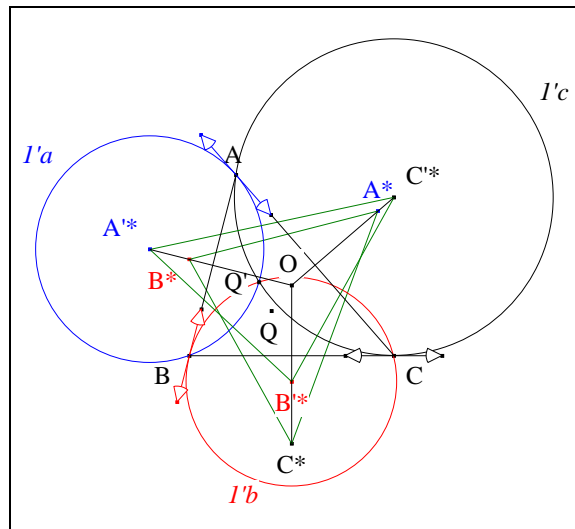


Finition : ABC un triangle,
 $I'a, I'b, I'c$ les seconds A, B, C -cercles adjoints de ABC ,
 A^*, B^*, C^* les centres resp. de $I'a, I'b, I'c$
et Q' le second point de Crellé-Brocard de ABC .

Définition : $A^*B^*C^*$ est "le second triangle adjoint de ABC ".



Scolies : (1) les côtés de ce triangle sont les médiatrices de $[AQ']$, $[BQ']$, $[CQ']$



(2) $A^*B^*C^*$ et $C^*A^*B^*$ sont perspectifs de centre O.

(3) Mutatis mutandis, nous montrerions que

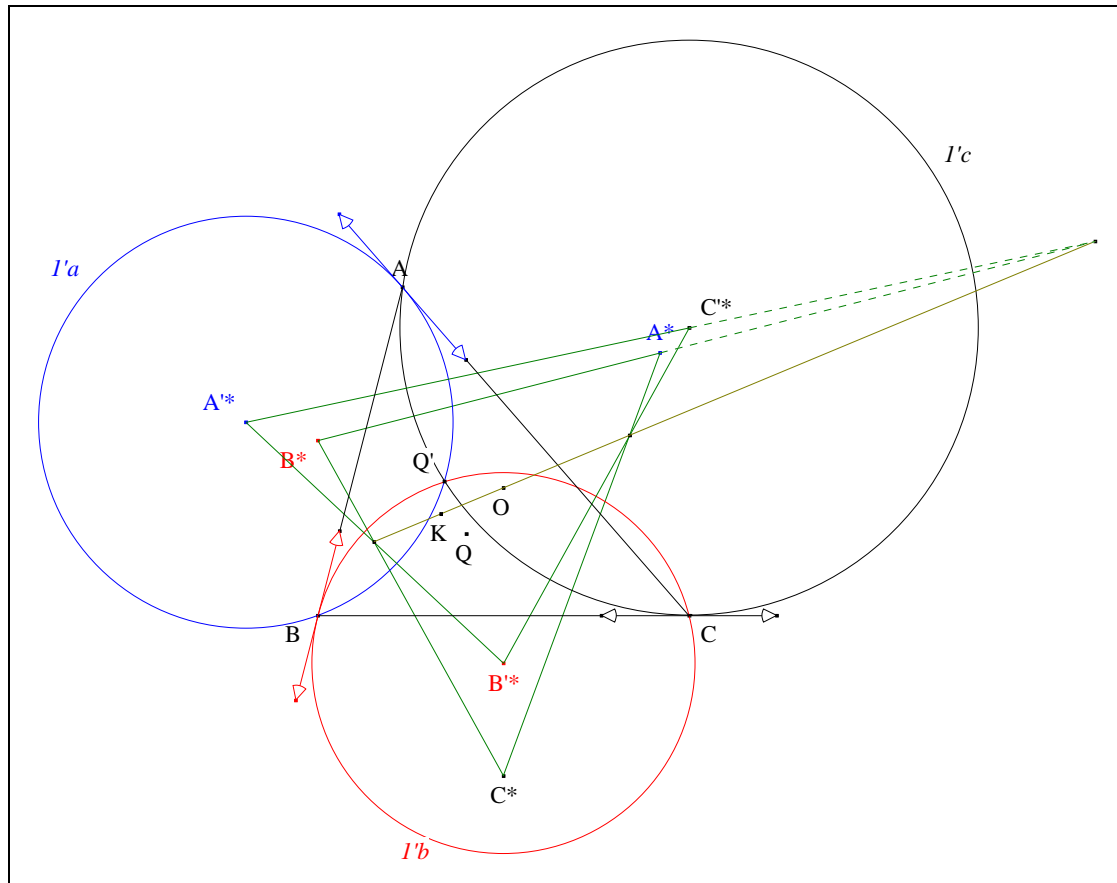
- * $A^*B^*C^*$ est semblable à ABC
- * O est le premier point de Crellé-Brocard de $A^*B^*C^*$
- * Q' est le second point de Crellé-Brocard de $A^*B^*C^*$
- * $A^*B^*C^*$ est semblable à $A^*B^*C^*$
- * $A^*B^*C^*$ se déduit de ABC dans la similitude de centre Q', de rapport $\frac{1}{2 \cdot \sin \omega}$ et d'angle $\frac{\pi}{2} - \omega$
- * (OO^*) est parallèle à (QQ') , O^* étant le centre du cercle circonscrit à $A^*B^*C^*$
- * Le milieu T de $[OK]$ est le point de Lemoine de $A^*B^*C^*$.

(4) $A^*B^*C^*$ et $A'^*B'^*C'^*$ sont égaux.¹²⁸

9. Les deux triangles adjoints

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 $A^*B^*C^*$ le premier triangle adjoint de ABC ,
 $A'^*B'^*C'^*$ le second triangle adjoint de ABC .
 et (OK) l'axe de Brocard de ABC .

Donné : (OK) est l'axe de perspective de $A^*B^*C^*$ et $C'^*A'^*B'^*$.¹²⁹

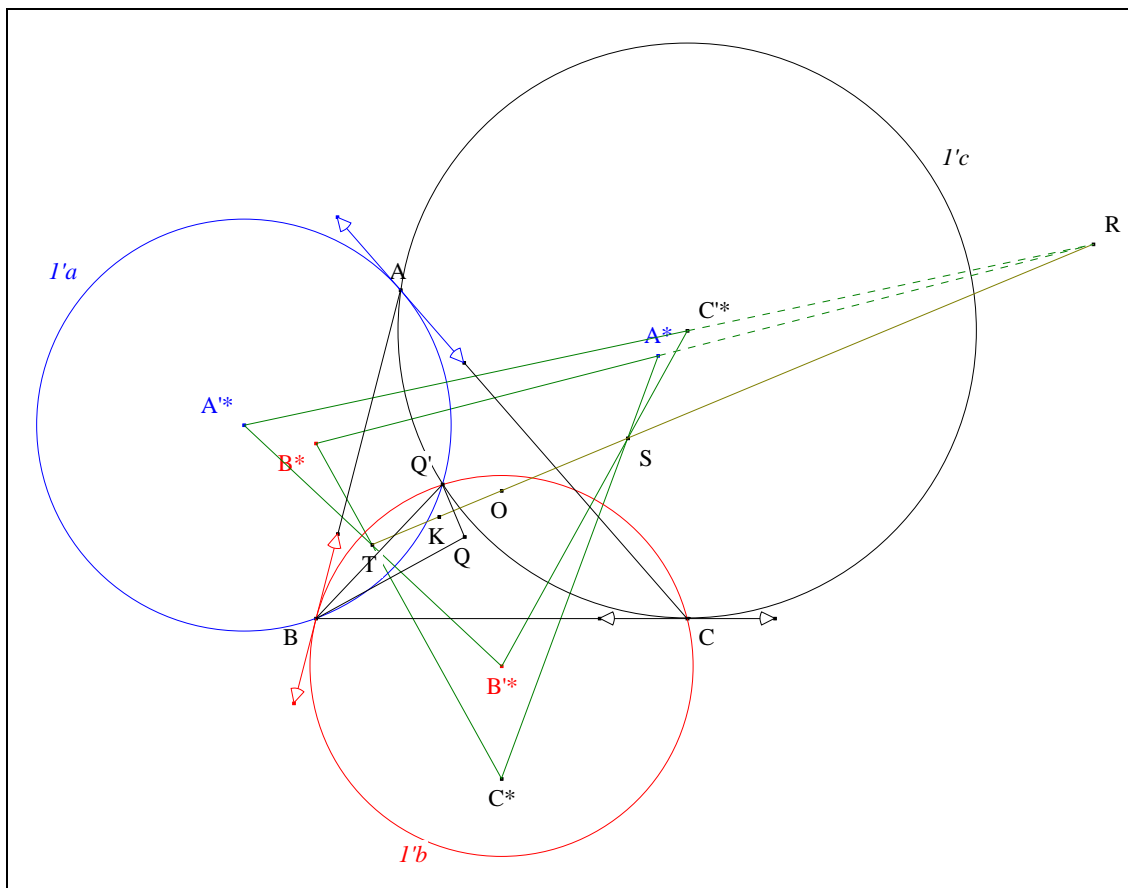
VISUALISATION

¹²⁸

Hellwig, Die durchgeschriebenen Kreise und die Kreisternionspunkte des Dreiecks, Halle (1855) ;
 cité par Emmerich (von) A., Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten
 und Kreisen des Dreiecks, G. Reimer (1891) 70, art. 34, 4°.

¹²⁹

Stoll,
 cité par Emmerich (von) A., Die Brocardshen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten
 und Kreisen des Dreiecks, G. Reimer (1891) 71, art. 34, 7°.



- Notons R, S, T les points d'intersection resp. de (B^*C^*) et $(A''B'')$, de (C^*A^*) et $(B''C'')$, de $(A''B'')$ et (C^*A^*) .
- **Solie :** $A''B''C''$ et $C^*A^*B'^*$ sont perspectifs de centre O .
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 24), (RST) est l'axe de perspective de $A''B''C''$ et $C^*A^*B'^*$.
- **Solies :**
 - (1) (OK) est la médiatrice de $[QQ']$
 - (2) $(B''C'')$ est la médiatrice de $[BQ]$
 - (3) $(A''B'')$ est la médiatrice de $[AQ']$.
- D'après A. 1. Le point O , (OK) passe par T .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (OK) passe par R
 (OK) passe par S .
- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence I_a , (OK) est l'axe de perspective de $A''B''C''$ et $C^*A^*B'^*$.

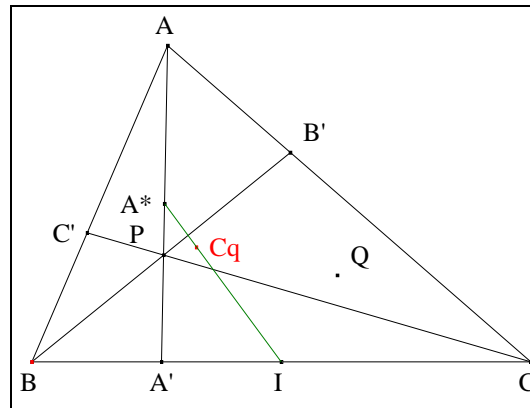
X. APPENDICE

1. Deux milieux et l'isotomcomplément ¹³⁰

¹³⁰ Kiehl H., *Mathesis* (1883) 103-104.

VISION

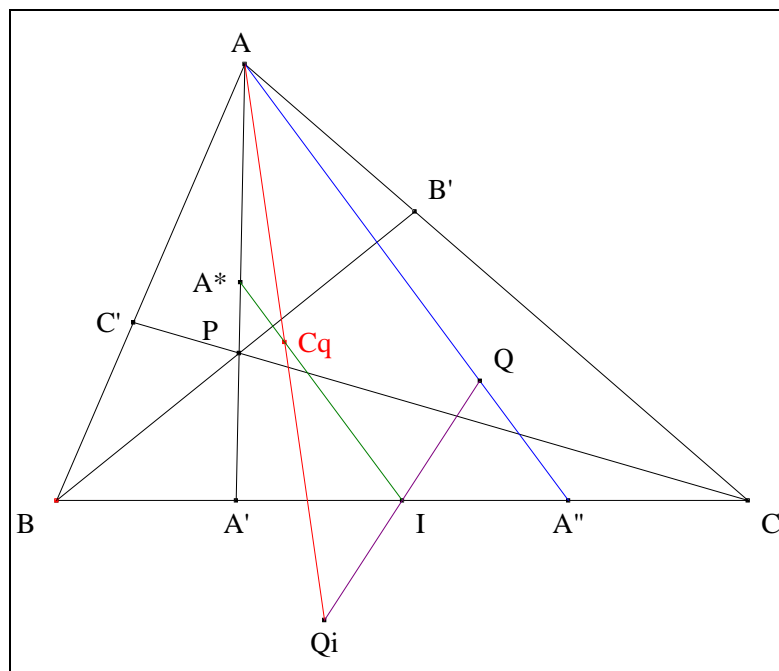
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 I le milieu du côté [BC],
 P un point,
 A'B'C' le triangle P-cévien de ABC,
 A* le milieu du segment [AA'],
 Q le conjugué isotomique de P
 et Cq le complément de Q.

Donné : Cq, A* et I sont alignés.

VISUALISATION



- Notons A'' le point isotomique de A' relativement à [BC]
 et Qi le symétrique de Q par rapport à I.

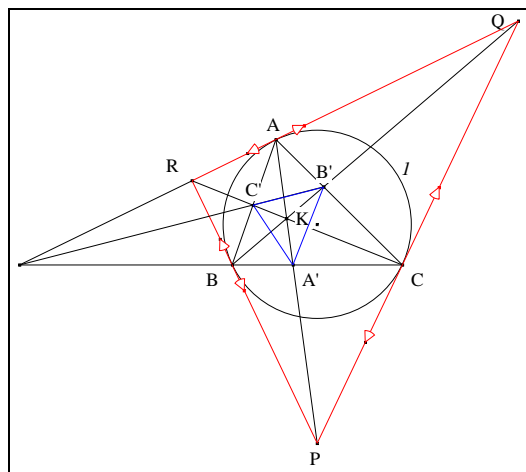
- D'après d'Ocagne "Le point d'...", C_q est le milieu du segment $[AQ_i]$.
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle Q_iQA , $(C_qI) \parallel (AQA'')$;
le quadrilatère $A'Q_iA''Q$ ayant ses diagonales se coupant en leur milieu est un parallélogramme;
en conséquence,
 $(AQA'') \parallel (A'Q_i)$;
d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle $AA'Q_i$, $(A'Q_i) \parallel (C_qA^*)$;
par transitivité de la relation \parallel , $(C_qI) \parallel (C_qA^*)$;
d'après le postulat d'Euclide, les droites (C_qI) et (C_qA^*) sont confondues.
- **Conclusion** : les points C_q , A^* et I sont alignés.

Note historique : ce résultat du professeur H. Kiehl à Bromberg (Allemagne) a été rappelé par Darij Grinberg¹³¹ au sein du groupe *Hyacinthos*.

2. Le triangle K-cévien

VISION

Figure :

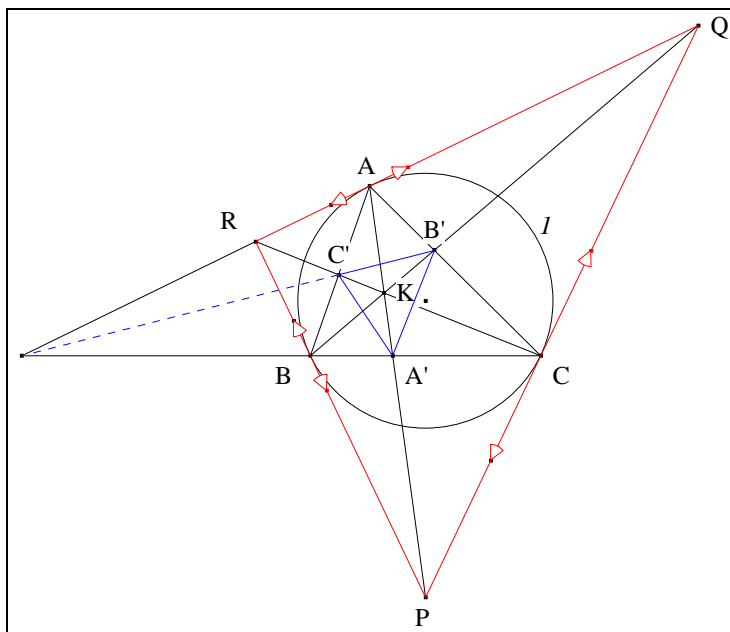


Traits : ABC un triangle non isocèle,
 $A'B'C'$ le triangle K-cévien de ABC ,
 I le cercle circonscrit à ABC ,
 et PQR le triangle tangentiel de ABC .

Donné : (BC) , $(B'C')$ et (QR) sont concourantes.

VISUALISATION

¹³¹ Grinberg D., Isotomcomplement Theory, Message *Hyacinthos* du 24/01/2003.

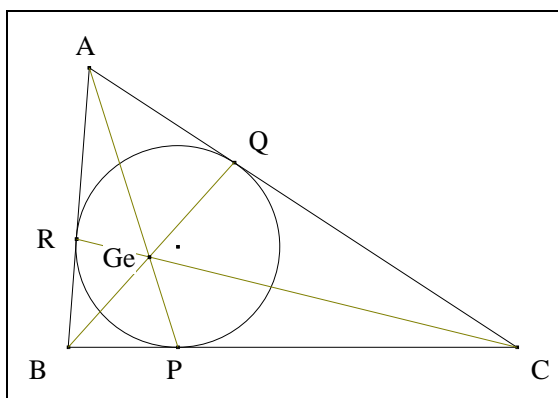


- **Solie :** A, K, A' et P sont alignés.
- Notons X le points d'intersection de (BC) et (QR).
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe) appliqué aux triangles perspectifs BC'R et CB'Q d'axe (AKP), (BC), (B'C') et (QR) sont concourantes.

Solie : PQR est le triangle K-anticévien de ABC.

XI. ANNEXE

1. Le point de Gergonne¹³²



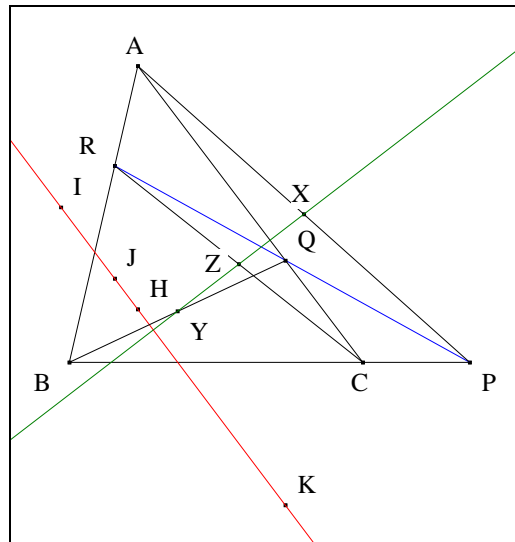
Traits : ABC un triangle,
 I le cercle inscrit dans ABC
 et P, Q, R les points de contact de I resp. avec (BC), (CA), (AB).

¹³² Gergonne, *Annales de Gergonne* IX (1818-19).

Donné : (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

Solie : ce point de concours est "le point de Gergonne" de ABC ;
il est noté Ge et répertorié sous X₇ chez ETC.

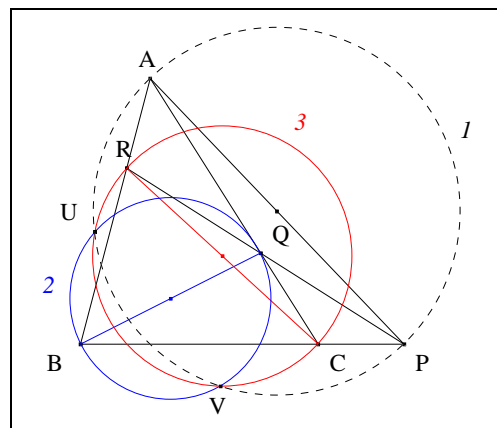
2. Gaussienne et droite de Steiner¹³³



Traits : ABC un triangle,
 Δ une ménélienne,
 P, Q, R les points d'intersection de Δ avec (BC), (CA), (AB)
 H, I, J, K les orthocentres des triangles ABC, ARQ, BPR, CPQ,
 X, Y, Z les milieux de [AP], [BQ], [CR].

Donné : la gaussienne (XYZ) est perpendiculaire à la droite de Steiner (IJKH).

3. Trois céviennes diamétrales¹³⁴



Traits : ABC un triangle acutangle,
 P, Q, R trois points de (AB), (BC), (CA),
 I, 2, 3 les cercles de diamètre [AP], [BQ], [CR]

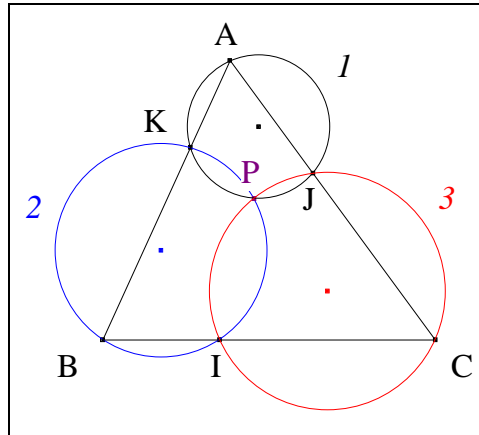
¹³³

¹³⁴ Steiner J., Théorèmes sur le quadrilatère complet (sans démonstration), *Annales de Gergonne* 18, proposition 7 (1827-28) 302.
 Bodenmiller, *Analytische Sphärik*, Cologne (1830) 138.

et U, V les points d'intersection de 2 et 3.

Donné : (PQR) est une ménélienne *si, et seulement si,* I passe par U et V .

4. Le théorème du pivot¹³⁵

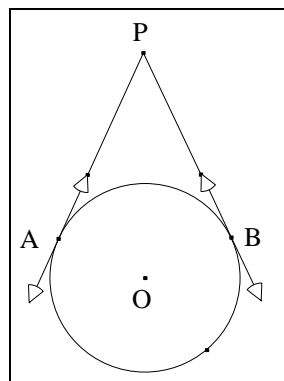


Traits : $I, 2, 3$ trois cercles sécants deux à deux,
 K, P les points d'intersection de 1 et 2 ,
 I l'un des points d'intersection de 2 et 3 ,
 J l'un des points d'intersection de 3 et 1 ,
 A un point de 1 ,
 B le second point d'intersection de la monienne (AK) avec 2
 et C le second point d'intersection de la monienne (BI) avec 3 .

Donné : (CJA) est une monienne de 3 et 1 *si, et seulement si,* 3 passe par P .

Scolie : P est le pivot de $1, 2$ et 3 relativement à ABC .

5. Deux tangentes égales¹³⁶



Traits : O un cercle,
 O le centre de O ,
 P un point extérieur à O ,
 et A, B les points de contact des deux tangentes à O menées à partir de P .

Donné : le triangle PAB est P -isocèle.

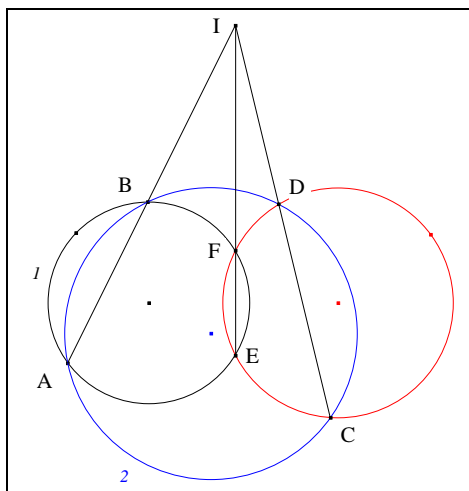
¹³⁵

Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. 1, 3 (1838) 485-487.

¹³⁶

Conséquence de la proposition 36 du Livre III des *Éléments*.

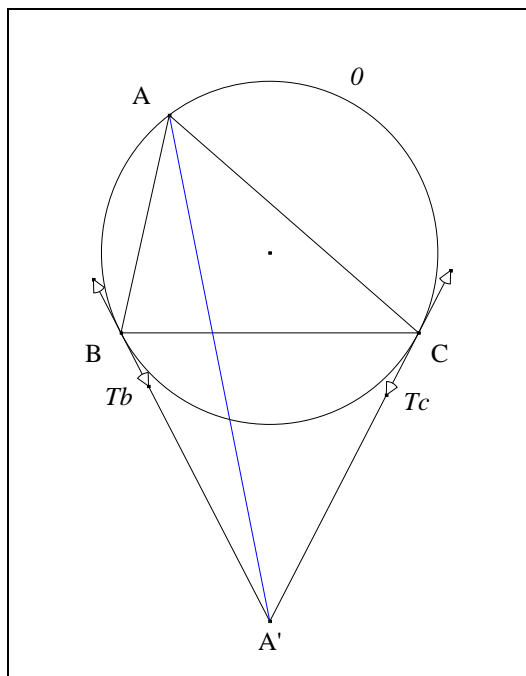
6. Le théorème des trois cordes¹³⁷



Traits : $1, 2$ deux cercles sécants,
 A, B les points d'intersection de 1 et 2 ,
 C, D deux points de 2 ,
 E, F deux points de 1
 et I le point d'intersection des droites (AB) et (CD) .

Donné : les points C, D, E et F sont cocycliques

7. La figure de Chasles



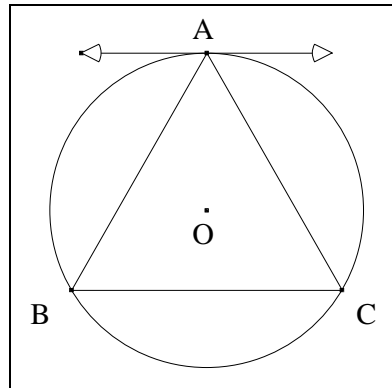
Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC ,
 Tb, Tc les tangentes à O resp. en B, C
 et A' le point d'intersection de Tb et Tc .

¹³⁷

Monge, d'après Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, I (1822) 40.

Donné : (AA') est la A-symédiane de ABC.

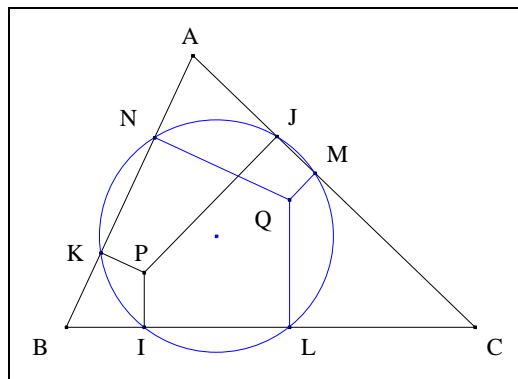
8. La tangente au sommet



Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC,
 O le centre de O
 et Ta la tangente à O en A.

Donné : ABC est isocèle en A si, et seulement si, Ta est parallèle à la base (BC).

9. The pedal circle theorem¹³⁸

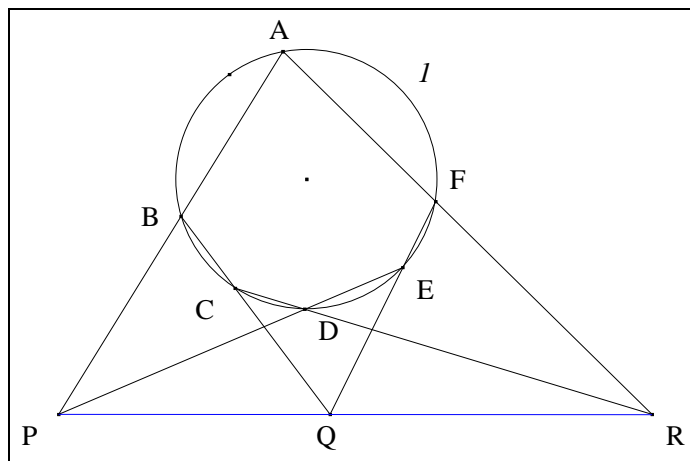


Traits : ABC un triangle,
 P un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC,
 I, J, K les pieds des perpendiculaires abaissées de P resp. sur (BC), (CA), (AB),
 Q l'isogonal de P relativement à ABC
 et L, M, N les pieds des perpendiculaires abaissées de Q resp. sur (BC), (CA), (AB).

Donné : I, J, K, L, M et N sont cocycliques.

10. Hexagramma mysticum¹³⁹

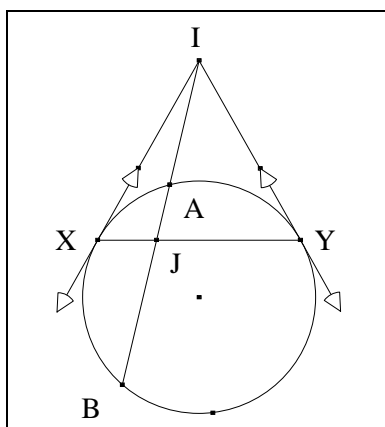
¹³⁸ Mathieu J. J. A...
¹³⁹ Pascal B. (1640)



Traits : I un cercle,
 ABCDEF un hexagone tels que les points A, B, C, D, E soient sur I ,
 et P, Q, R les points d'intersection resp. de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné : F est sur I si, et seulement si, P, Q et R sont alignés.

11. Une quaterne harmonique¹⁴⁰

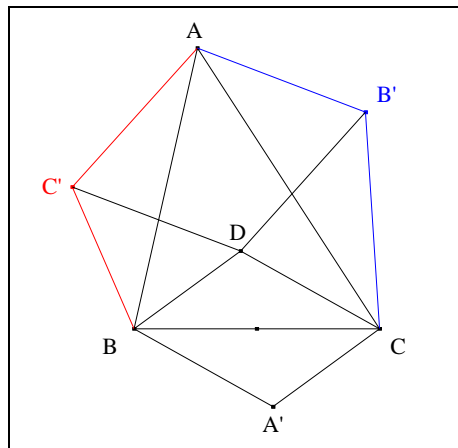


Traits : Γ un cercle de centre O,
 I un point extérieur à Γ ,
 Δ, Δ' deux droites passant par I et tangentes en X et Y à Γ ,
 Δ'' une droite passant par I et sécante à Γ en A et B
 et J le point d'intersection de Δ'' avec la corde [XY].

Donné : la quaterne (A, B, I, J) est harmonique.

12. Le parallélogramme de H. van Aubel¹⁴¹

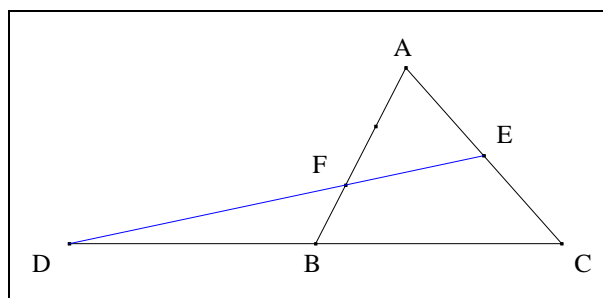
¹⁴⁰ Apollonius, *Collections*, Livre III, proposition 37.
¹⁴¹ van Aubel Hendricus Hubertus.



Traits : ABC un triangle,
 A'CB, B'AC, C'BA trois triangles semblables¹⁴², extérieurs à ABC
 et D le point tel que BA'CD soit un parallélogramme.

Donné : le quadrilatère AC'DB' est un parallélogramme.

13. Tiers point et milieu



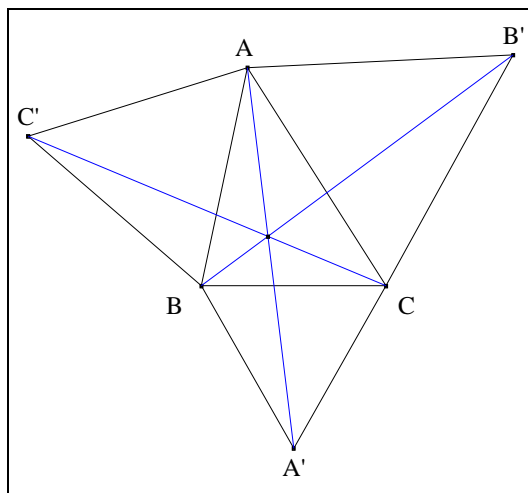
Traits : ABC un triangle,
 F le premier tiers-point de [BA] à partir de B,
 E le milieu de [AC]
 et D le point d'intersection de (EF) et (BC).

Donné : B est le milieu de [CD].

14. Le théorème de Kiepert¹⁴³

¹⁴² Dans la notation des triangles extérieurs, les sommets sont homologues.

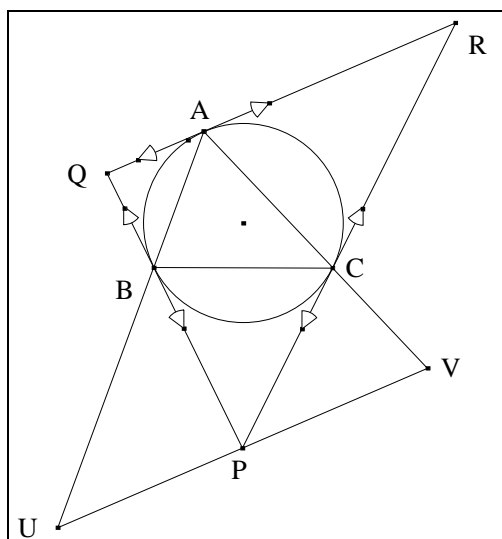
¹⁴³ Kiepert L., Solution de la question 864, *Nouvelles annales de Mathématiques* 8 (1869) 40-42.



Traits : ABC un triangle
 et $A'CB, B'AC, C'BA$ trois triangles isocèles semblables construits à l'extérieur de ABC .

Donné : $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes.

15. Le théorème de Boutin¹⁴⁴



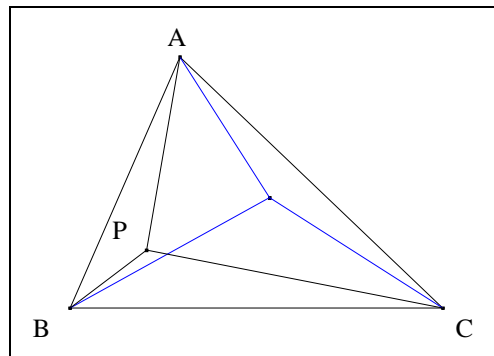
Traits : PQR un triangle,
 I le cercle inscrit dans PQR ,
 ABC le triangle de contact de PQR ,
 et Dp une droite passant par P telle que
 U, V soient les points d'intersection de Dp avec (AB) et (AC)

Donné : Dp est parallèle à (QR) si, et seulement si, P est le milieu de $[UV]$.

16. The isogonal theorem¹⁴⁵

¹⁴⁴ Boutin A., *Journal de mathématiques élémentaires* (1890).

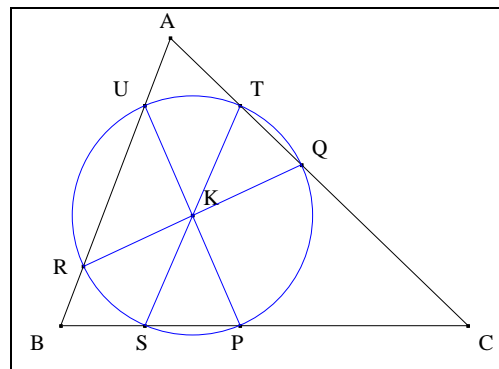
¹⁴⁵ Mathieu J. J. A., *Nouvelles Annales* (1865) 393 ff., 400.



Traits : ABC un triangle,
 P un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC
 et Da, Db, Dc les isogonales resp. de $(AP), (BP), (CP)$.

Donné : Da, Db et Dc sont concourantes.

17. Le second cercle de Lemoine¹⁴⁶



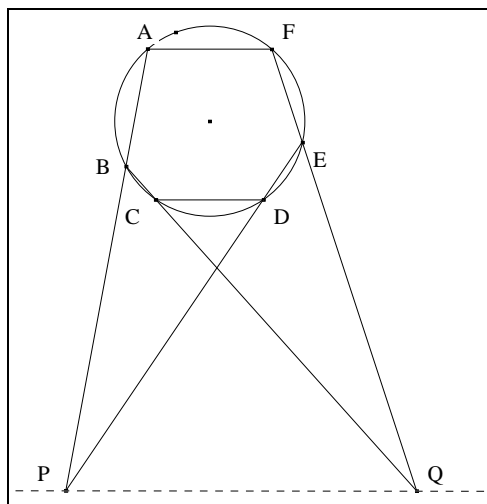
Traits : ABC un triangle,
 K le point de Lemoine de ABC,
 Da l'antiparallèle à (BC) passant par K,
 Q, R les points d'intersection de Da avec les côtés $[AC]$ et $[AB]$,
 Db l'antiparallèle à (CA) passant par K,
 U, P les points d'intersection de Db avec les côtés $[BA]$ et $[BC]$,
 Dc l'antiparallèle à (AB) passant par K,
 et S, T les points d'intersection de Dc avec les côtés $[CB]$ et $[CA]$.

Donné : P, Q, R, S, T et U sont cocycliques.

18. L'équivalence d'Aubert-MacKensie¹⁴⁷

¹⁴⁶ Lemoine E., Congrès de Lyon (1873).

¹⁴⁷ La condition nécessaire est de Paul Aubert.

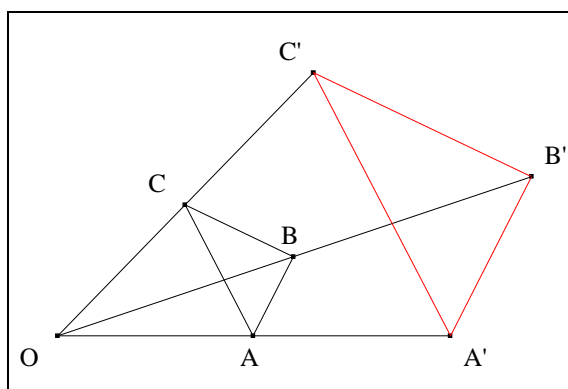


Traits : I un cercle,
 ABCDE un pentagone inscrit dans I ,
 F un point tel que (AF) soit parallèle à (CD)
 et P, Q les points d'intersection de (AB) et (DE) , de (BC) et (EF) .

Donné : F est sur I si, et seulement si, (PQ) et (AF) sont parallèles.

Scolie : la visualisation nécessaire est de Paul Aubert¹⁴⁸ et suffisante de M'Kensie¹⁴⁹.

19. Le théorème faible de Desargues



Hypothèses : ABC un triangle,
 et A'B'C' un triangle tel que (1) (AA') et (BB') soient concourantes en O
 (2) (AB) soit parallèle à $(A'B')$
 (3) (BC) soit parallèle à $(B'C')$

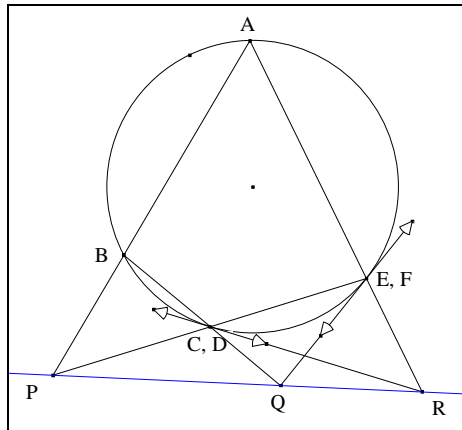
Conclusion : (CC') passe par O si, et seulement si, (AC) est parallèle à $(A'C')$.

20. Tetragramma mysticum¹⁵⁰

¹⁴⁸ Aubert P., Généralisation du problème de Pascal donnant neuf points en ligne droite, *Nouvelles Annales* (1899).

¹⁴⁹ M'Kensie, *Journal de Mathématiques Spéciales* de Longchamps (1887) 201.

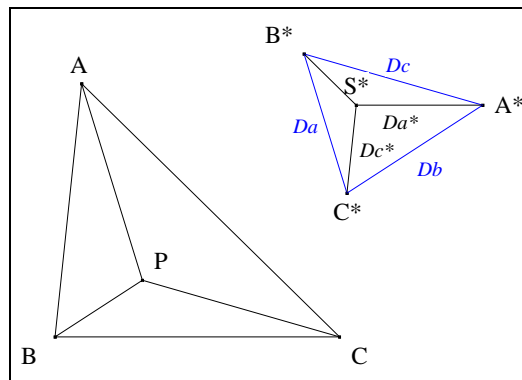
¹⁵⁰ MacLaurin Colin, *Traité des Fluxions*, Appendice (1748) § 36.



Traits : O un cercle,
 ABCEA un quadrilatère tels que les points A, C, E soient sur O ,
 Tc, Te les tangentes à O resp. en C, E
 et P, Q, R les points d'intersection resp. de (AB) et (CE), (BC) et Te, Tc et (EA).

Donné : B est sur O si, et seulement si, P, Q et R sont alignés.

21. Deux triangles parallélogiques¹⁵¹

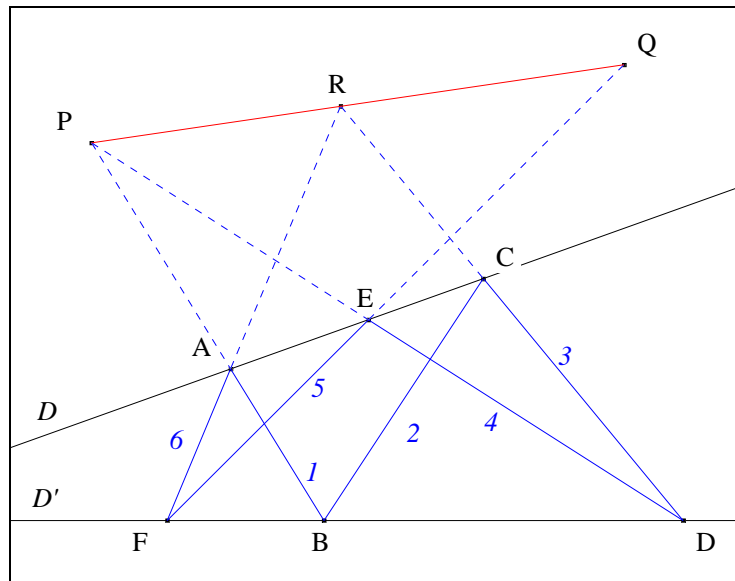


Traits : ABC un triangle,
 P un point,
 Dc une parallèle à (PC),
 Da une parallèle à (PA),
 Db une parallèle à (PB),
 C*, A*, B* les points d'intersection de Da et Db, de Db et Dc, de Dc et Da,
 Dc* la parallèle à (AB) passant par C*,
 Da* la parallèle à (BC) passant par A*
 et S* le point d'intersection de Dc* et Da*.

Donné : (B*S*) et (AC) sont parallèles.

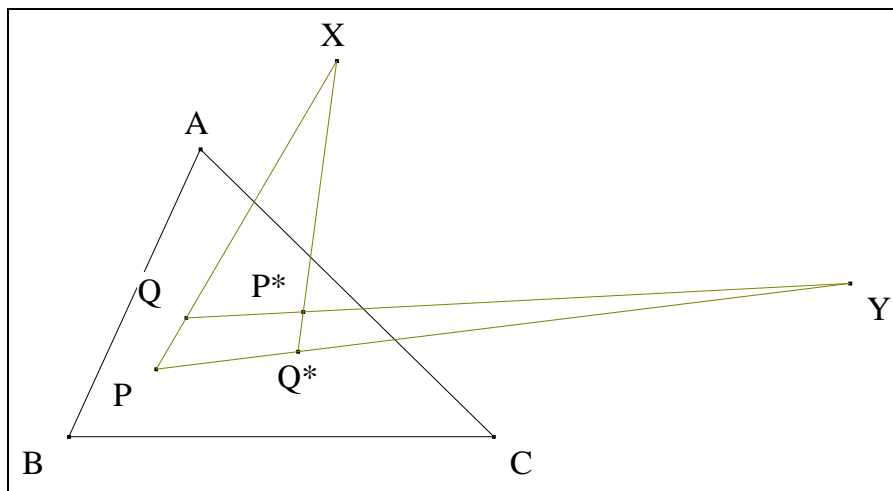
22. La proposition 139 de Pappus¹⁵²

¹⁵¹ Maxwell J. C. (1831-1879).
¹⁵² Pappus, *Collections*, Livre VII.



- Traits :** D, D' deux droites,
 $ABCDEF$ un hexagone de Pappus
 et P, Q, R les points d'intersection resp. de (AB) et (DE) , (BC) et (EF) , (CD) et (FA) .
- Donné :** E est sur (AC) si, et seulement si, P, Q et R sont alignés.

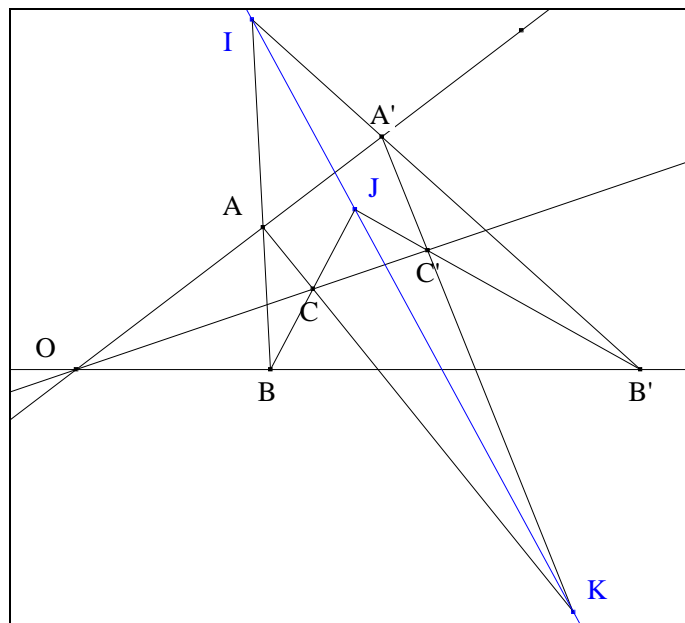
23. Le théorème de Hesse¹⁵³



- Traits :** ABC un triangle,
 P un point,
 P^* l'isogonal de P relativement à ABC ,
 Q un point,
 Q^* l'isogonal de Q relativement à ABC ,
 et X, Y les points d'intersection de (PQ) et (P^*Q^*) , de (PQ^*) et (P^*Q) .
- Donné :** Y est l'isogonal de X relativement à ABC .

24. Le théorème des deux triangles¹⁵⁴

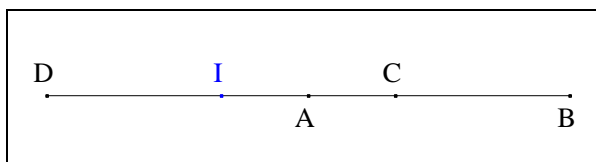
¹⁵³ Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2, p. 21-24 ; <http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/>.
¹⁵⁴ Bosse A. (1602-1676), *Perspective et de la Coupe des pierres*.



Traits : ABC un triangle,
 A'B'C' un triangle tel que (AA') et (BB') soient concourantes,
 O le point de concours de (AA') et (BB'),
 I le point d'intersection de (AB) et (A'B'),
 J le point d'intersection de (BC) et (B'C')
 et K le point d'intersection de (CA) et (C'A').

Donné : (CC') passe par O si, et seulement si, I, J et K sont alignés.

25. Une relation de MacLaurin¹⁵⁵



Traits : (A, B, C, D) une quaterne harmonique
 et I le milieu de [CD].

Donné : $IC^2 = IA \cdot IB$

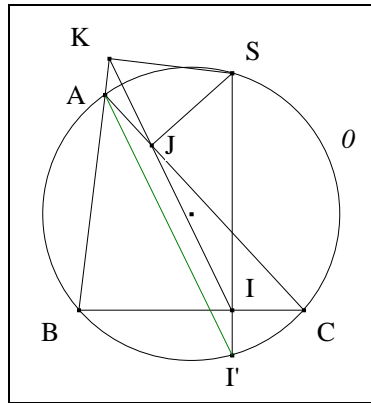
26. Direction d'une droite de Simson¹⁵⁶

¹⁵⁵

MacLaurin C..

¹⁵⁶

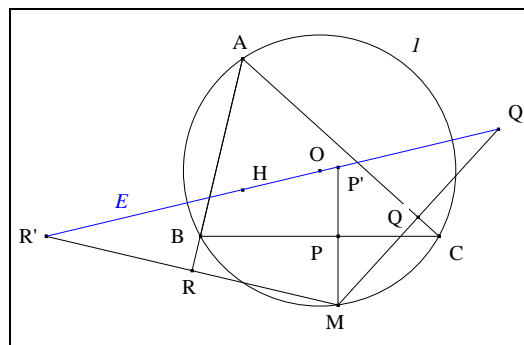
Heinen, *Journal de Crelle* 3 (1828) 285-287.



Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC,
 S un point de I ,
 I, J, K les pieds des perpendiculaires abaissées de S resp. sur (BC), (CA), (AB)
 et I' le second point d'intersection de (SI) avec O .

Donné : (AI') et (IJK) sont parallèles.

27. L'antipoint d'Euler¹⁵⁷



Traits : ABC un triangle acutangle,
 H l'orthocentre de ABC,
 I le cercle circonscrit à ABC,
 O le centre de I ,
 E la droite d'Euler de ABC
 et M un point tel que les symétriques de M par rapport à (BC), (CA), (AB)
 sont sur E .

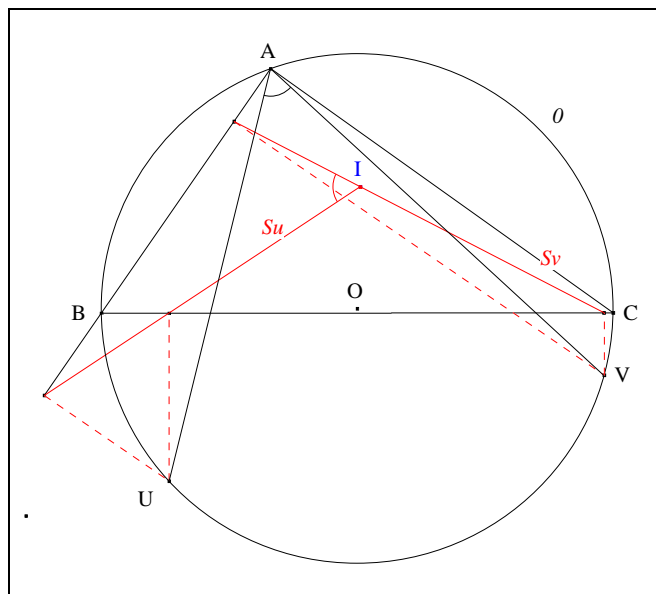
Donné : M est sur I .

28. Angle de deux droites de Simson¹⁵⁸

¹⁵⁷ Steiner J..

¹⁵⁸ Steiner J., *Journal de Crelle* 53 (1901) 107 ;

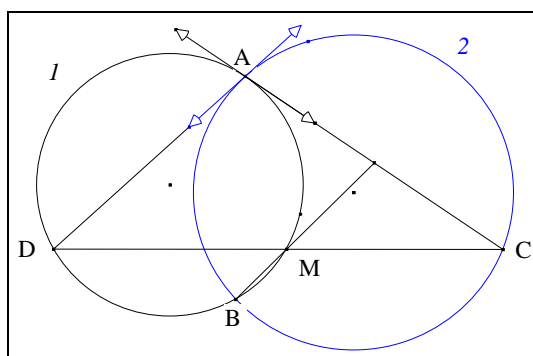
Besant W. H., *Quarterly Journal of Mathematics* 10 (1870) 110.



Traits : ABC un triangle acutangle,
 O le cercle circonscrit à ABC ,
 U, V deux points de O
 et Su, Sv les droites de Simson de pôle resp. U, V relatives à ABC .

Donné : $\angle Su Sv = \angle UAV$ à π près.

29. Milieu d'une corde¹⁵⁹

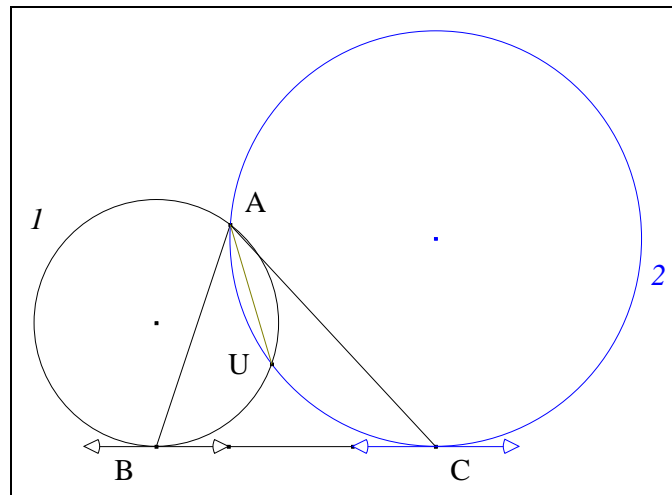


Traits : $1, 2$ deux cercles sécants,
 A, B les points d'intersection de 1 et 2 ,
 Ta la tangente à 1 en A ,
 C le second point d'intersection de Ta avec 2 ,
 $T'a$ la tangente à 2 en A ,
 D le point d'intersection de $T'a$ avec 1
 et M le second point d'intersection de (CD) avec 1 .

Donné : (MB) passe par le milieu de $[AC]$.

30. Médiane et cercles adjoints

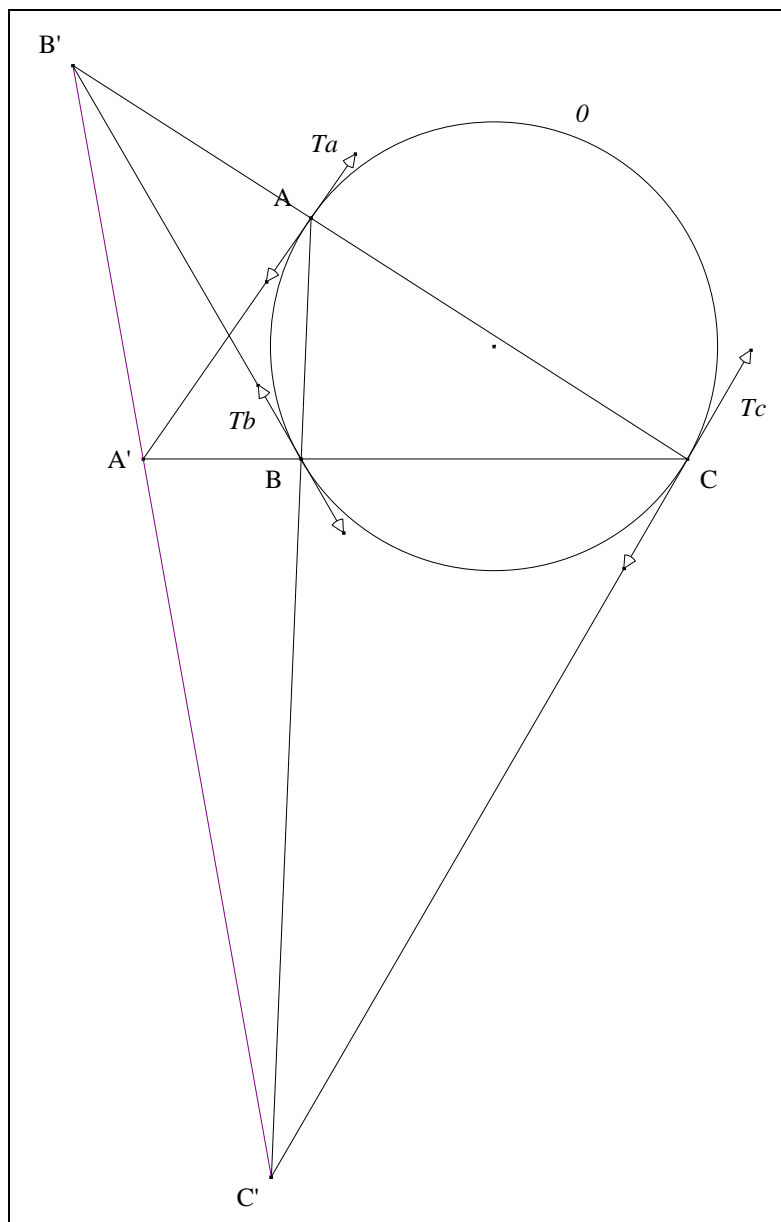
¹⁵⁹ Scarponi D., *Problemi matematici* (1951).



Traits : ABC un triangle
 1 le cercle passant par A et tangent à (AB) en B,
 2 un cercle passant par A, C
 et U le second point d'intersection de 1 et 2.

Donné : 2 est tangent à (BC) en C
si, et seulement si,
 (AU) est la A-médiane de ABC.

31. L'axe de Lemoine



Traits : ABC un triangle
 O le cercle circonscrit à ABC,
 Ta, Tb, Tc les tangentes à O resp; en A, B, C
 et A', B', C' les points d'intersection resp. de Ta et (BC), Tb et (CA), Tc et (AB).

Donné : A', B', C' sont alignés.

Solie : $(A'B'C')$ est la droite de Lemoine de ABC.