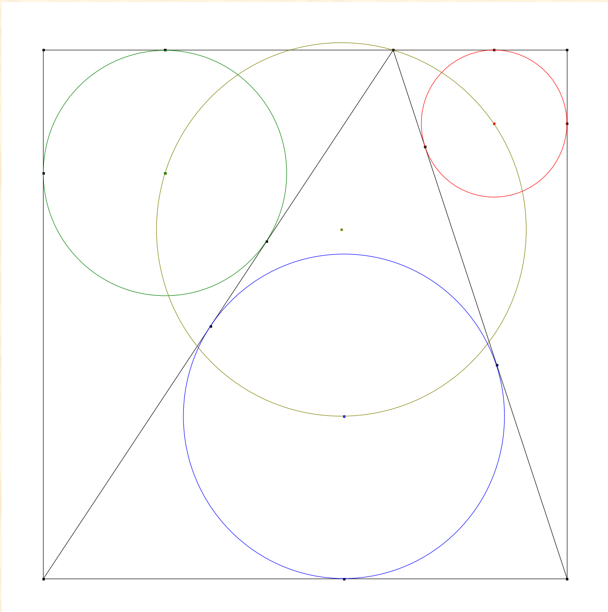
LE RÉSULTAT

DE

LARROSA CANESTRO

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. Nous présentons une preuve entièrement synthétique d'un résultat d'Ignacio Larrosa Canestro dont une généralisation rappelle le San Gaku de la préfecture de Fukusima [2] (Japon) datant de 1877.
Certains résultats de l'auteur sont présentés sous la forme d'exercices ou de scolies.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

---

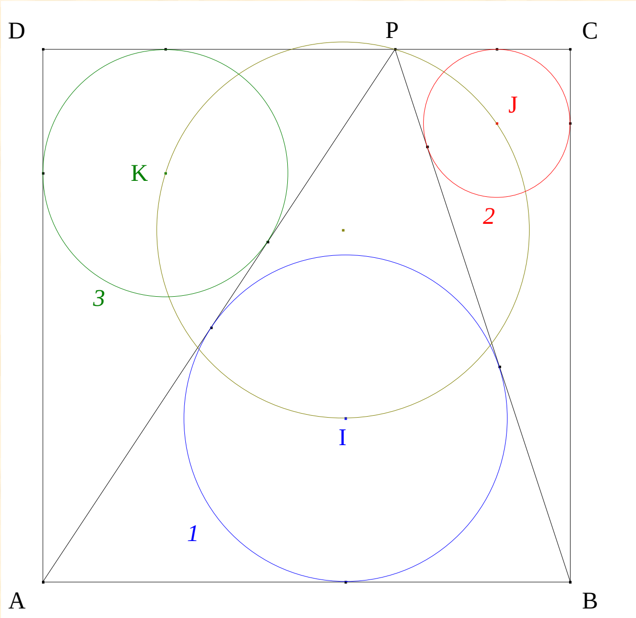
1 St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/06/2017 ; jeanlouisayme@yahoo.fr
2 Fukusima (1968), vol. **3**, Kira Hirayama and Hachio Norii, private circulation

Sommaire

A. LA VISION

D'IGNACIO LARROSA CANESTRO

Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	P	un point de [CD],
	1, 2, 3	les cercles inscrits resp. des triangles PAB, PBC, PDA
et	I, J, K	les centres resp. de *1*, *2*, *3*.

Donné : I, J, K et P sont cocycliques.

Historique : tout commence le 19 avril 2009 par une communication privée d'Ignacio Larrosa Cañestro de La Corogne (Espagne) sollicitant mon aide pour résoudre une conjecture concernant la "cocyclicité" de ces quatre points.

Le problème de Larrosa [3] s'inspire d'une situation d'Antonio Gonzales [4] apparemment inexacte, découverte à l'aide du logiciel Geogebra et présentée sur le site *es.ciencia.mathematicas* [5] le 13 avril 2009. Le jour suivant i.e. le 14, Larrosa [6] propose son problème et fait référence à un fil initié par Quang Tuan Bui [7] en 2008 sur le site *Mathlinks*. Au cours de ce fil, l'auteur a conjecturé la présence d'une tangente commune aux trois cercles.

Comme les informations circulent rapidement sur le net, le problème de Larrosa réapparaît sans nom d'auteur sur le site *Les-Mathématiques.net* [8] le 23 avril 2009 où il fait l'objet d'un échange entre Georges Zehler et Catherine Nadault qui en propose la première solution analytique par les complexes, puis une solution mettant en œuvre des transformations (similitude pour la "cocyclicité", puis symétrie et même produit de symétrie pour la tangente commune).

---

3 http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/Conciclicos_inesperados.html

4 Gonzales A., Uno conciclico, *es.ciencia.mathematicas* du 13/04/2009 ; http://groups.google.es/group/es.ciencia.matematicas/browse_thread/thread/6f89094cff9e8e92?hl=es#

5 http://groups.google.es/group/es.ciencia.matematicas/topics?hl=es

6 Larrosa Canestro I., Conciclicos inesperados, *es.ciencia.mathematicas* du 14/04/2009 ; http://groups.google.es/group/es.ciencia.matematicas/browse_thread/thread/c5ff4cdbf1e79ce3?hl=es#

7 Bui Q. T., Three Incenters Concyclic With One Point, *Mathlinks* du 04/08/2008 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=218636

8 http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,508015

L'auteur est ensuite intervenu pour proposer une approche inverse i.e. tangente commune, puis "cocyclicité".
D'autres idées ont été ensuite émises…

Une courte biographie : Ignacio Larrosa Canestro [9] est né à Ténériffe (Îles Canaries, Espagne) et enseigne depuis plus de 26 ans les mathématiques à l'IES Rafael Dieste de La Corogne (Galicie, Espagne).

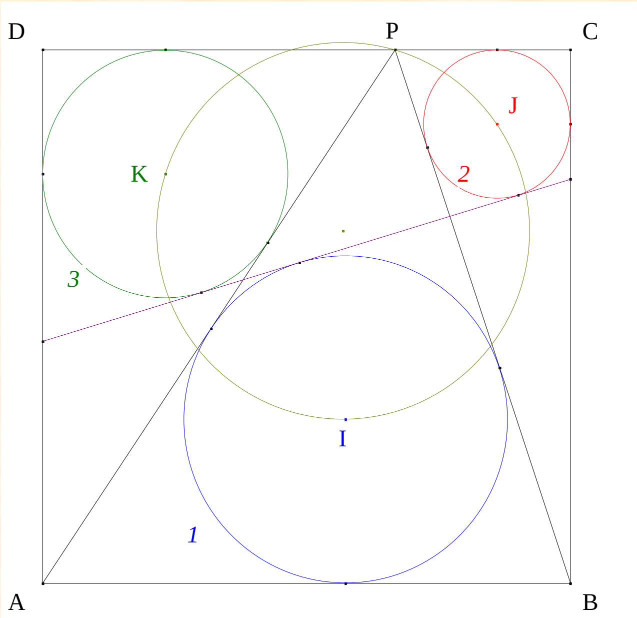
Commentaire : constatons que le carré ABCD est circonscriptible à un cercle.

B. LA CONJECTURE DE L'AUTEUR

1. La conjecture :

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

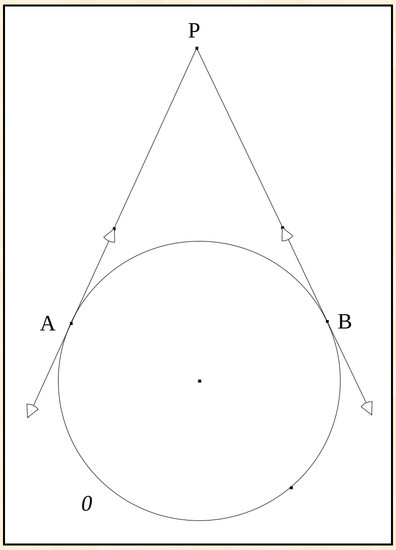
Donné : *1*, *2* et *3* ont une tangente commune [10].

2. Deux tangentes égales

[9] ilarrosa@mundo-r.com
[10] Ayme J.-L., http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=218636
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,508015

VISION

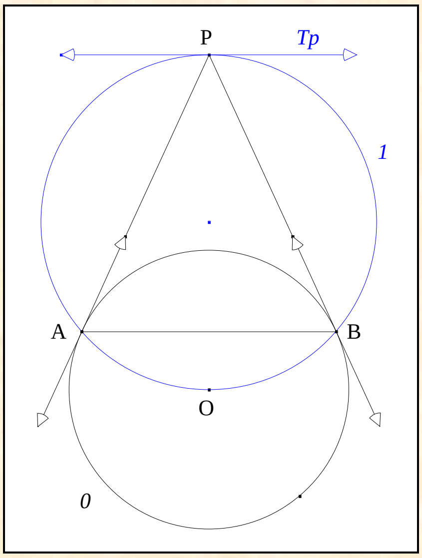
Figure :



Traits : *0* un cercle,
P un point extérieur à *0*,
et A, B les points de contact des deux tangentes à *0* menées à partir de P.

Donné : PA = PB.[11]

VISUALISATION



- Notons O le centre de *0*,
  1 le cercle de diamètre [PO] ; il passe par A, B et O.
  et *T*p la tangente à ce cercle en P.

- Les cercles *0* et *1*, les points de base A et B, les moniennes (AAP) et (BBP), conduisent au théorème **5** de Reim; il s'en suit que (AB) // *T*p.

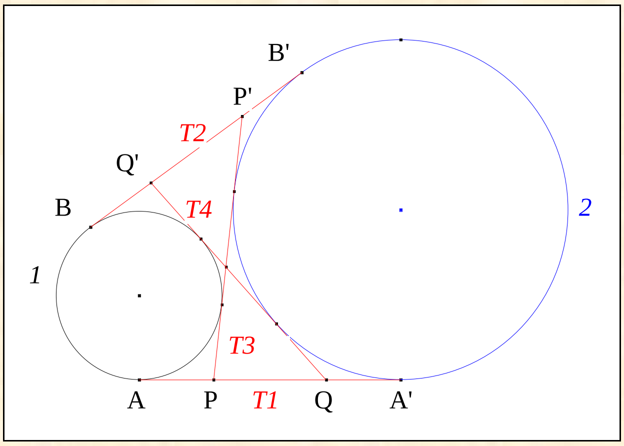
[11] Conséquence de la proposition **36** du Livre **III** des *Éléments* d'Euclide

- D'après "La tangente au sommet" (Cf. Annexe **1**), le triangle PAB est P-isocèle.
- **Conclusion :** PA = PB.

3. Quatre tangentes égales

VISION

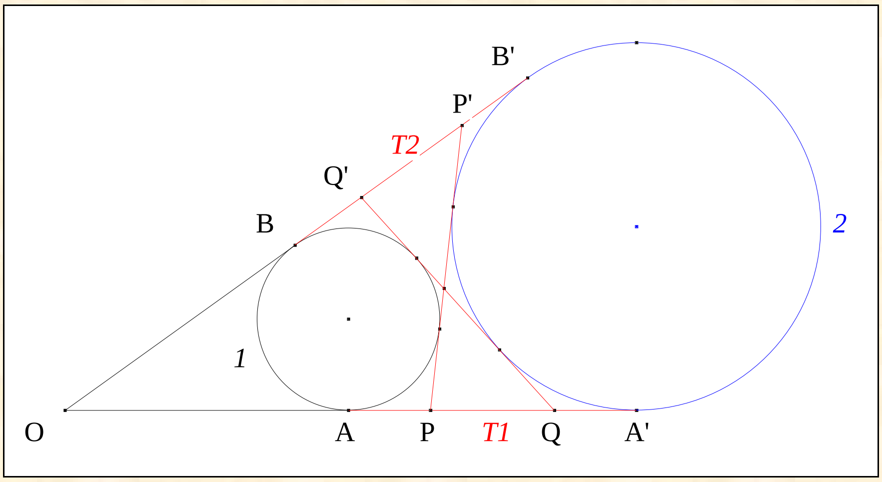
Figure :



Traits : *1*, *2* deux cercles extérieurs l'un de l'autre,
*T*1, *T*2 les deux tangentes communes extérieures de *1* et *2*,
A, A', B, B' les points de contact de *T*1, *T*2 avec *1* et *2* comme indiqués sur la figure,
*T*3, *T*4 les deux tangentes communes intérieures de *1* et *2*,
P, P' les points d'intersection de *T*3 resp. avec *T*1, *T*2
et Q, Q' les points d'intersection de *T*4 resp. avec *T*1, *T*2.

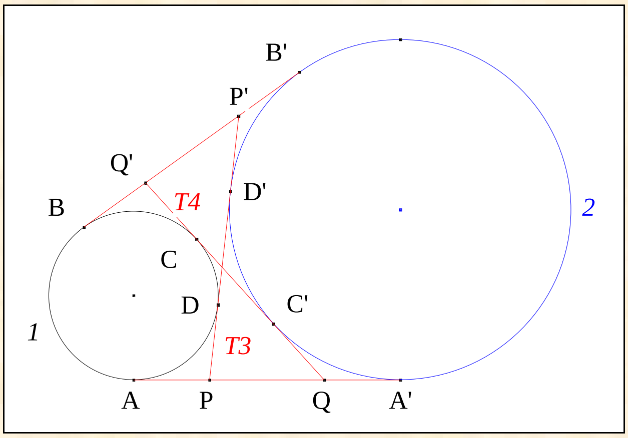
Donné : AA' = BB' = PP' = QQ'. [12]

VISUALISATION



[12] Revue *Arbelos* (novembre 1984)

- Notons O le point d'intersection de (AA') et (BB').
- D'après II. 2. Deux tangentes égales, OA' = OB' et OA = OB.
- **Conclusion partielle :** par soustraction membre à membre, AA' = BB'.



- Notons C, C', D, D' les points de contact de *T*3, *T*4 avec *1*, *2* comme indiqués sur la figure.
- Une chasse segmentaire

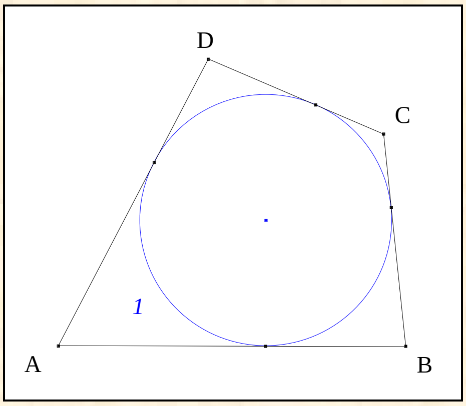
d'après II. 2. Deux tangentes égales,	P'B = P'D et P'B' = P'D' ;
nous avons :	BB' = P'B + P'B' ;
par substitution,	BB' = P'D + P'D' ;
par décomposition,	BB' = P'D' + DD' + P'D' = DD' + 2.P'D'.
d'après II. 2. Deux tangentes égales,	PA' = PD' et PA = PD ;
nous avons :	AA' = AP + PA' ;
par substitution,	AA' = PD + PD' ;
par décomposition,	AA' = PD + PD + DD' = 2.PD + DD'.
Nous avons :	AA' = BB' ;
par équivalence,	2.PD + DD' = DD' + 2.P'D' ;
d'où,	PD = P'D'.

- **Conclusion partielle :** PP' = PD + DD' + D'P' = AA' = BB'.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que QQ' = AA' = BB'.
- **Conclusion :** AA' = BB' = PP' = QQ'.

4. Le théorème d'Henri Pitot

VISION

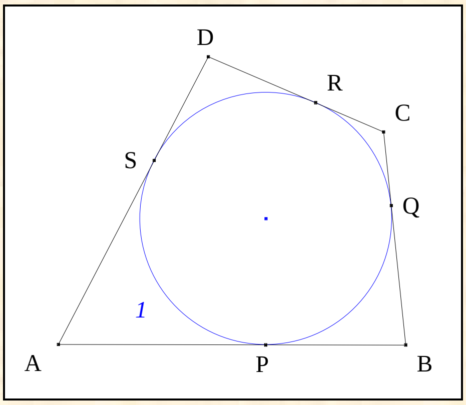
Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe
et *1* un cercle,

Donné : *1* est inscrit dans ABCD *si, et seulement si,* AB + CD = BC + DA.

VISUALISATION NÉCESSAIRE [13]



- Notons P, Q, R S les points de contact de *1* resp. avec [AB], [BC], [CD], [DA].

- D'après II. 2. Deux tangentes égales,
  (1) AP = SA
  (2) PB = BQ
  (3) CR = QC
  (4) RD = DS.

- En additionnant ces égalités, membre à membre, (AP + PB) + (CR + RD) = (BQ + QC) + (DS + SA)

- **Conclusion :** AB + CD = BC + DA.

Énoncé traditionnel : pour tout quadrilatère circonscriptible à un cercle,
la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres.

Scolie : tout quadrilatère circonscriptible à un cercle est dit "de Pitot".

Note historique : de tels quadrilatères ont été envisagés dès le XIIIe siècle par Jordanus de Nemore, un contemporain de Léonard de Pise et un résultat significatif a été trouvé en

[13] Pitot H. (1725)

1725 par l'ingénieur Henri Pitot que Jacob Steiner a complété en 1846.
Rappelons que dans le film de Louis Malle, *Au revoir les enfants* (1987), Jean est au tableau noir sur lequel a été tracé un quadrilatère de Pitot...

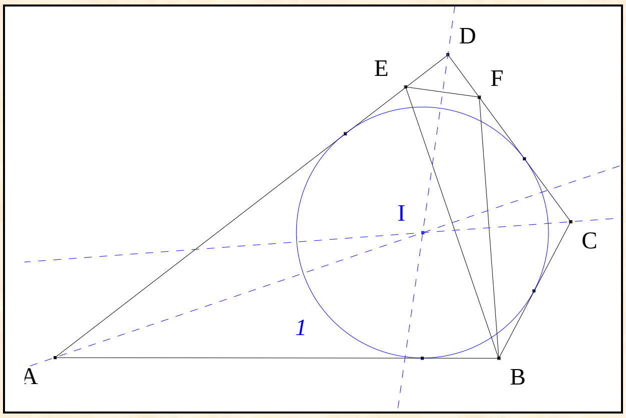
Une courte biographie d'Henri Pitot

Henri Pitot est né à Aramon (Gard) le 29 mai 1695.
Sa formation en mathématique et en astronomie, lui permet en 1723 de devenir l'assistant du physicien Réaumur. L'année suivante, il est adjoint mécanicien à l'Académie des Sciences, puis associé mécanicien en 1727 et, en fin, pensionnaire géomètre en 1733. Ingénieur en chef des États du Languedoc en 1740, il participe à à l'élargissement du Pont du Gard, à la conception de l'aqueduc Saint Clément à Montpellier en 1772, à la construction du Canal du Midi qui s'appelait à l'époque Canal du Languedoc dont il en devient le surintendant. En 1740, il devient membre de la Royal Society. Publiant plusieurs mémoires concernant la Géométrie, Henri Pitot est aussi un inventeur qui a mis au point le "tube de Pitot" pour mesurer la vitesse des cours d'eau. Son traité sur *la théorie de la manoeuvre des vaisseaux*.
Il décède à Aramon le 27 décembre 1771.
Aujourd'hui, le collège d'Aramon porte son nom.

VISUALISATION SUFFISANTE [14]

- Raisonnons par disjonction des cas.

- Premier cas : AB < AD



[14] Pitot H. (1725)

- L'égalité AB + CD = BC + DA est équivalente à AD - AB = CD - CB.

- Plaçons sur **(1)** [AD] le point E tel que DE = AD - AB
  (2) [CD] le point F tel que DF = CD - CB.

- Les triangles ABE, CFB et DEF sont isocèles resp. en A, C et D ;
  les bissectrices intérieures de ces triangles resp. en A, C et D sont resp. les médiatrices de [BE], [BF] et [EF] i.e. les médiatrices du triangle BFE ;
  ces médiatrices concourent au centre du cercle circonscrit de BFE.

- Notons I ce point de concours.

- I étant sur les bissectrices intérieures évoquées précédemment, est équidistant des côtés de ABCD.

- **Conclusion partielle :** *1* est inscrit dans ABCD.

- Second cas : AB $\geq$ AD.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *1* est inscrit dans ABCD.

- **Conclusion :** *1* est inscrit dans ABCD.

Énoncé traditionnel : pour tout quadrilatère convexe,
si, la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres
alors, ce quadrilatère est circonscriptible à un cercle.

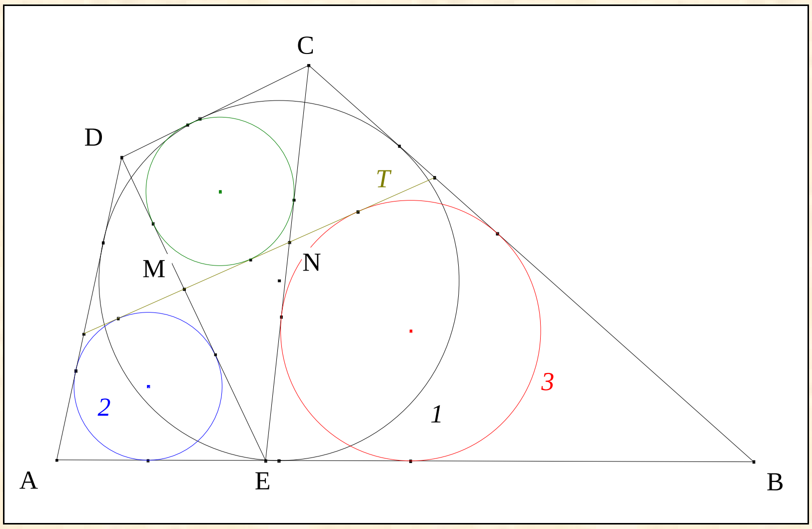
Note historique : cette réciproque du théorème de Pitot a été proposée [15] en 1814 comme Question, et résolue directement l'année suivante par J. B. Durrande[16] professeur à Cahors (Lot, France).
La visualisation suffisante présentée est due à R. Fricke [17], mathématicien allemand de Brême et L. Gérard qui la proposa en 1904 dans la revue belge *Mathesis*.

5. Un quadrilatère circonscriptible à un cercle [18]

VISION

Figure :

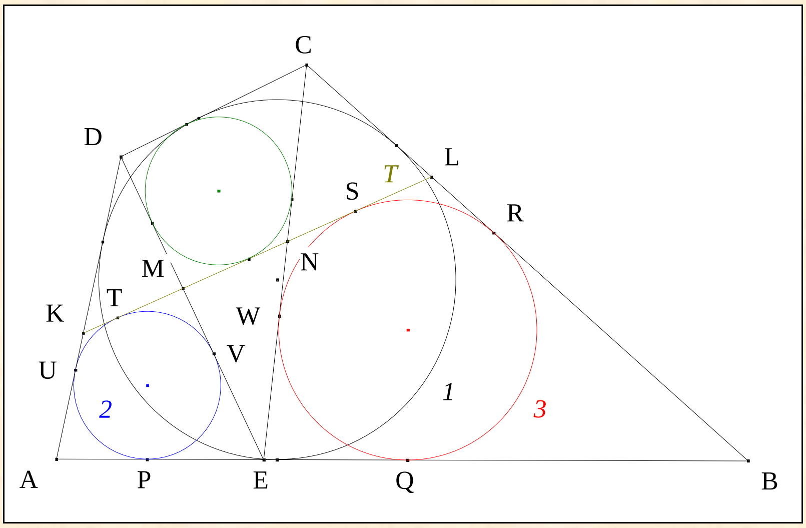
[15] Questions proposées, *Annales* de Gergonne **5** (1814-1815) 384
[16] Durrande J. B. (1797-1825), *Annales* de Gergonne **6** (1815-1816) 49-50
[17] Fricke R., Gérard L., *Mathesis* (1904) **13**, 2° et **67** n° 10
[18] ou tangentiel



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
E un point de]AB[,
2, *3* les cercles inscrits resp. des triangles EAD, EBC,
T la seconde tangente commune extérieure à *2* et *3*,
et M, N les points d'intersection de *T* resp. avec (ED), (EC).

Donné : le quadrilatère CDMN est circonscriptible à un cercle
si, et seulement si,
ABCD est circonscriptible à un cercle.

VISUALISATION



- Notons K, L les points d'intersection de *T* resp. avec (AD), (BC).
  P, Q les points de contact resp. de *2*, *3* avec (BC),
  T, S les points de contact resp. de *2*, *3* avec *T*,
  U le point de contact de *2* avec (AD),
  R le point de contact de *3* avec (BC),
  V le point de contact de *2* avec (ED)
  et W le point de contact de *3* avec (EC).

- Raisonnons par équivalence logique.

- **Hypothèse :** le quadrilatère CDMN circonscriptible à un cercle d'après **II. 4.** Le théorème de Pitot, CD + MN = CN + DM ;

par ajout de (MT + NS) de part et d'autre, CD + MN + MT + NS = CN + DM + MT + NS ;
par associativité : CD + TS = CN + DM + MT + NS ;

d'après **II. 2.** Deux tangentes égales", MT = MV et NS = NW ;
par substitution : CD + TS = CN + DM + MV + NW ;

par associativité : CD + TS = CW + DV ;
d'après **II. 2.** Deux tangentes égales, DV = DU ;
d'après **II. 3.** Quatre tangentes égales, TS = PQ ;
par substitution : CD + PQ = CW + DU ;

d'après **II. 2.** Deux tangentes égales, CW = CR ;
par substitution, CD + PQ = CR + DU ;

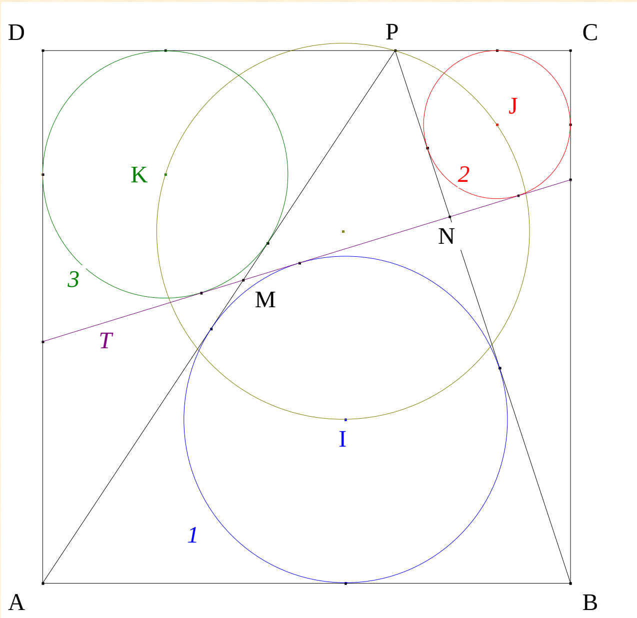
d'après **II. 2.** Deux tangentes égales, AP = AU et BQ = BR ;

par addition membre à membre, CD + PQ + AP + BQ = CR + DU + AU + BR ;
par associativité : CD + AB = BC + AD

- **Conclusion :** d'après II. 4. Le théorème de Pitot, ABCD est circonscriptible à un cercle.

- Notons *1* ce cercle,

6. La preuve



- Notons *T* la seconde tangente commune extérieure à *2* et *3*.
  et M, N les points d'intersection de *T* resp. avec (PA), (PB).

- Par hypothèse, ABCD est circonscriptible à un cercle.

- D'après **II. 4.** Un quadrilatère circonscriptible à un cercle,
  le quadrilatère AMNB est circonscriptible à un cercle.

- **Conclusion :** *1*, *2* et *3* admettent *T* pour tangente commune.

C. VISUALISATION

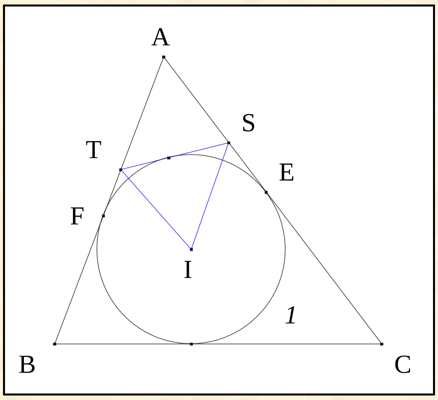
DU

PROBLÈME DE LARROSA CANESTRO

1. L'angle au centre

VISION

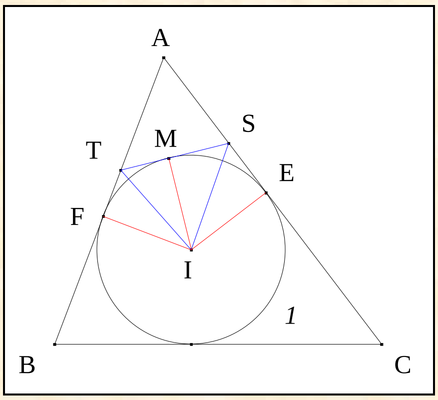
Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
I le centre de *1*,
E, F les points de contact de *1* avec [AC], [AB]
et S, T deux points resp. de [AE], [AF] tels que (ST) soit tangente à *1*.

Donné : <SIT = Π/2 –A/2. [19]

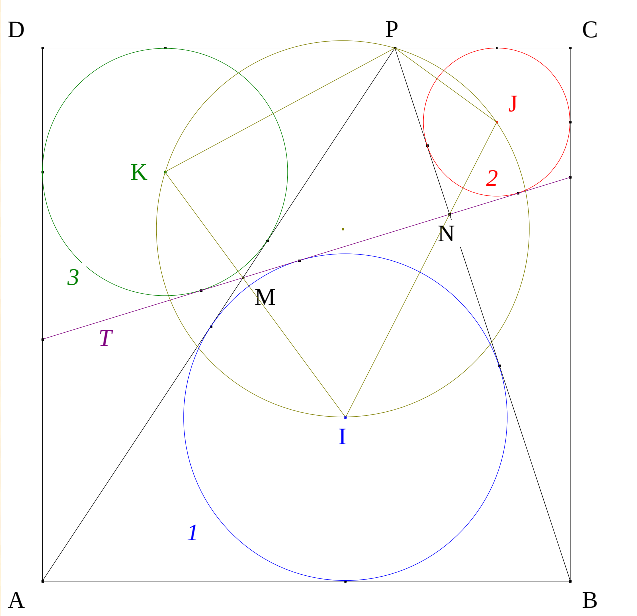
VISUALISATION



[19] Poncelet J. V., n° **462-463**, *Propriétés Projectives*, Seconde édition (1866)

- Notons M le point de contact de (ST) avec *1*.
- **Conclusion :** une chasse angulaire conduit à <SIT = Π/2 –A/2.

2. La preuve



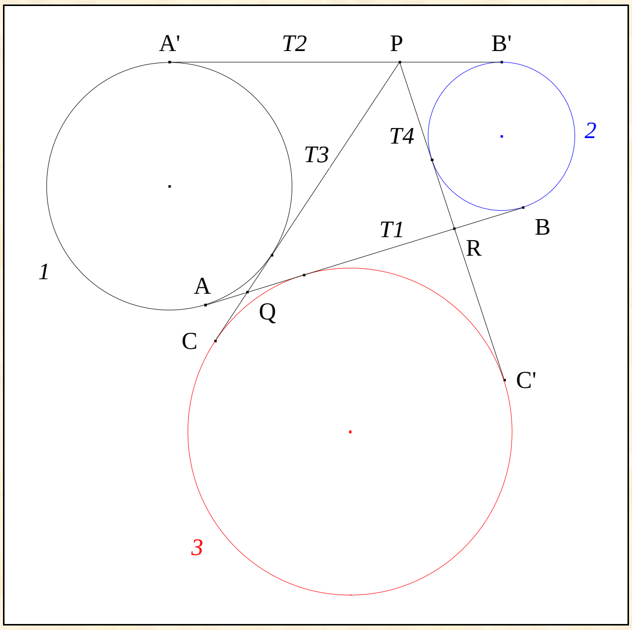
- **Scolies :** **(1)** I, N et J sont alignés
  (2) I, M, K sont alignés.
- D'après **III. 1.** L'angle au centre constant, <JIK = Π/2 - 1/2.<APB.
- Par une chasse angulaire, nous montrerions que <KPJ = Π/2 + 1/2.<APB.
  par addition membre à membre, <JIK + <KPJ = Π.
- **Conclusion :** I, J, K et P sont cocycliques.

D. INTERMÈDE

1. Quatre nouvelles tangentes égales

VISION

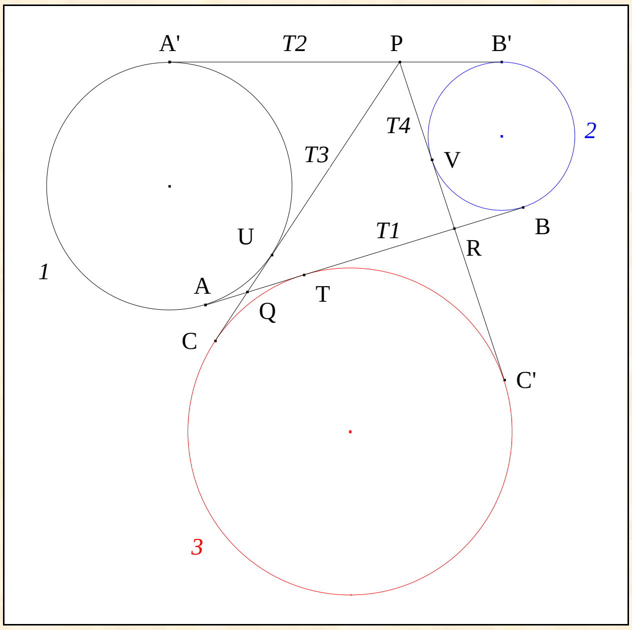
Figure :



Traits :	*1*, *2*	deux cercles extérieurs l'un de l'autre,
	*T*1, *T*2	les deux tangentes communes extérieures de *1* et *2*,
	A, B, A', B'	les points de contact de *T*1, *T*2 avec *1* et *2* comme indiqués sur la figure,
	P	un point de [A'B'],
	*T*3, *T*4	les deux tangentes intérieures issues de P' resp. à *1* et *2*,
	Q, R	les points d'intersection resp. de *T*3, *T*1 avec *T*1,
	3	le P-excercle du triangle PQR
et	C, C'	les points de contact resp. de *T*3, *T*4 avec *3*.

Donné : AB = A'B' = PC = PC'.

VISUALISATION



- D'après **II. 3.** Quatre tangentes égales, AB = A'B'.

- Notons T le point de contact de *T1* avec *3*,
  U le point de contact de *T3* avec *1*

et V le point de contact de *T4* avec *2*.

- Une chasse segmentaire

d'après **II. 2.** Deux tangentes égales,	PA' = PU et	PB' = PV ;
nous avons :	A'B' = PA' + PB' ;	
par substitution,	A'B' = PU + PV ;	
d'après **II. 2.** Deux tangentes égales,	A'B' = AB ;	
par addition membre à membre,	2.A'B' = PU + PV + AB ;	
par décomposition,	2.A'B' = PU + PV + AT + TB ;	
d'après **II. 2.** Deux tangentes égales,	AT = UC et	TB = VC' ;
par substitution,	2.A'B' = PU + PV + UC + VC' ;	
par associativité,	2.A'B' = PC + PC' ;	
d'après **II. 2.** Deux tangentes égales,	PC = PC' ;	
par substitution,	2.A'B' = 2.PC ;	
d'où :	A'B' = PC.	

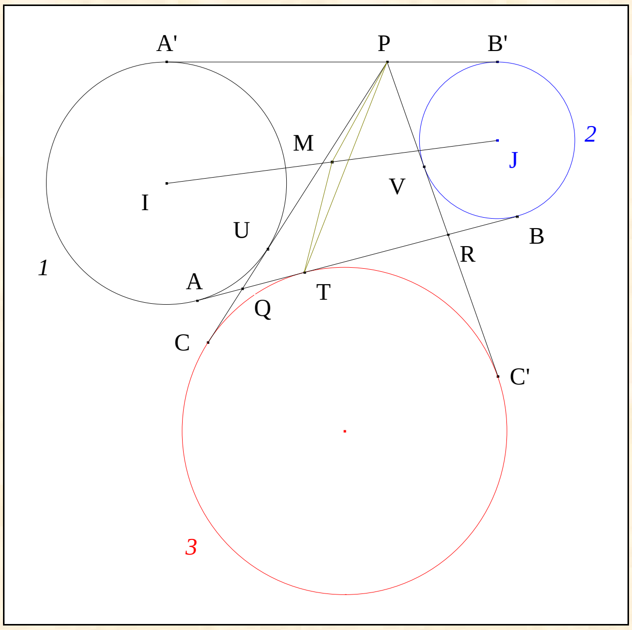
- **Conclusion :** AB = A'B' = PC = PC'.

Scolie : AT = PB'.

2. Un triangle isocèle

VISION

Figure :



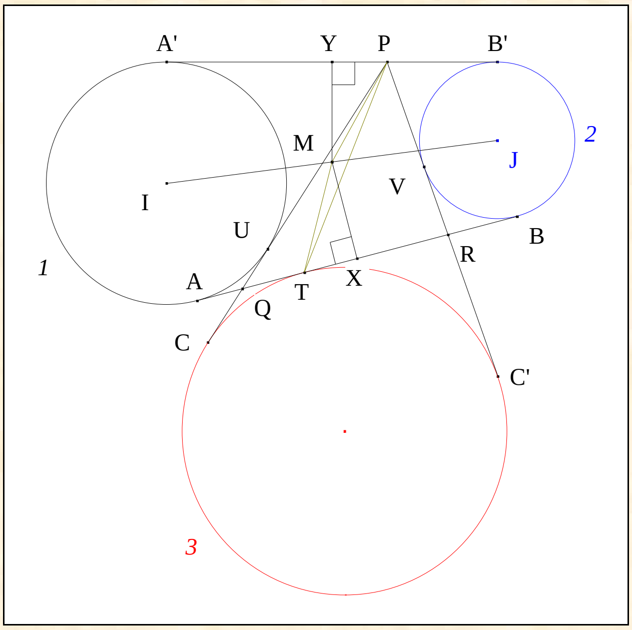
Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,

I, J les centres respectifs de *1*, *3*

et M le milieu de [IJ].

Donné : le triangle MPT est isocèle en M.

VISUALISATION



- Notons X, Y les pieds des perpendiculaires abaissées de M resp. sur (AB), (A'B').

- Par symétrie, MX = MY.

- (MY) étant l'axe médian de la bande de frontières (IA) et (JB),
  d'après l'axiome de passage IIIb, X est le milieu de [AB].

- Mutatis mutandis, nous montrerions que Y est le milieu de [A'B'].
- Un calcul segmentaire : AB = A'B' ;
  X, Y étant les milieux resp. de [AB], [A'B'], AX = B'Y ;
  par décomposition, AT + TX = B'P + PY ;
  par simplification, TX = PY.

- D'après le théorème "c.a.c." appliqué aux triangles rectangles XMT et YMP, MT = MP.

- **Conclusion :** le triangle MPT est isocèle en M.

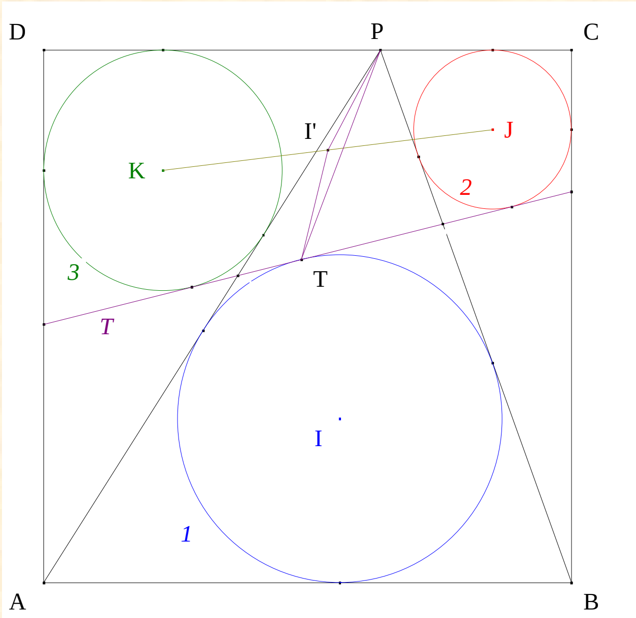
E. DES RÉSULTATS ÉPARS DE L'AUTEUR

Avertissement : dans cette partie, les hypothèses et les notations sont les mêmes de situation en situation.

1. Un triangle isocèle

VISION

Figure :

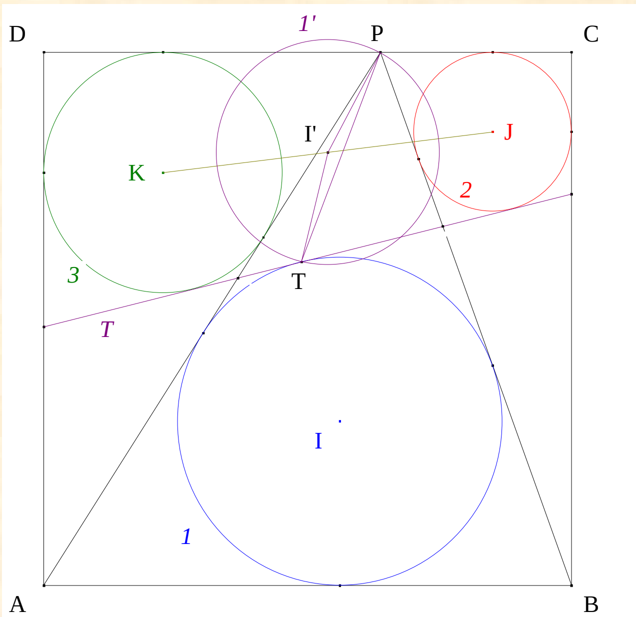


Traits : ABCD un carré,
P un point de [CD],
1, 2, 3 les cercles inscrits resp. des triangles PAB, PBC, PDA,
I, J, K les centres resp. de *1, 2, 3*,
T la seconde tangente commune extérieure à *2* et *3*,
T le point de contact de *T* avec *1*
et I' le milieu de [IJ].

Donné : le triangle I'PT est isocèle en I'.

VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après **IV. 2.** Un triangle isocèle, le triangle I'PT est isocèle en I'.

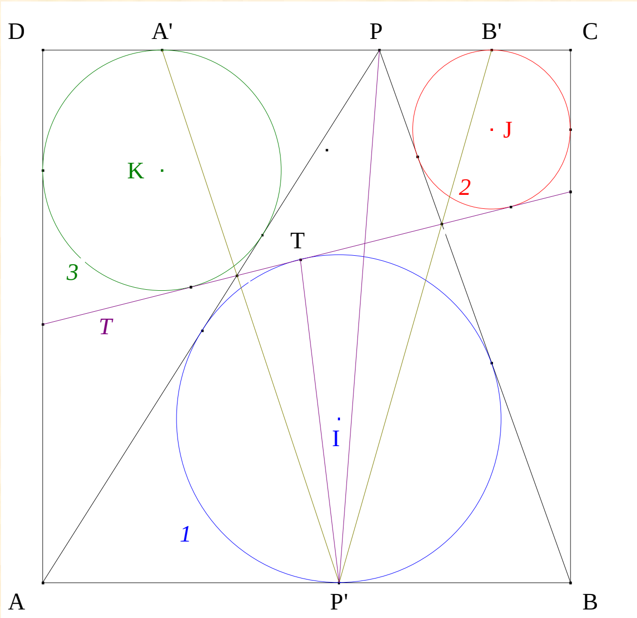


- Notons *1'* le cercle de centre I' passant par P et T.

2. Deux droites isotomiques

VISION

Figure :



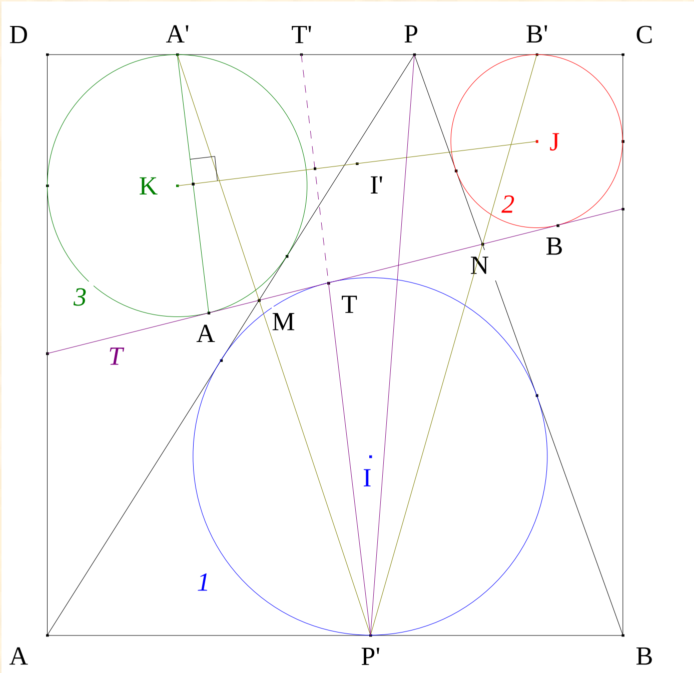
Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment

P' le point de contact de *1* avec (AB)

et A', B' les points de contact de (CD) resp. avec *3*, *2*.

Donné : (P'T) et (P'P) sont deux P'-isotomiques du triangle P'B'A'.

VISUALISATION



- Notons A, B les points de contact de *T* resp. avec *3*, *2*,
  M, N les points d'intersection de *T* resp. avec (PA), (PB)
  et T' le point d'intersection de (P'T) et (CD).

- **Scolies :** **(1)** M est le centre d'homothétie interne de *1* et *3*
  (2) N est le centre d'homothétie interne de *1* et *2*.

- Les tangentes en P', A' resp. à *1*, *3* étant parallèles, P', M et A' sont alignés.

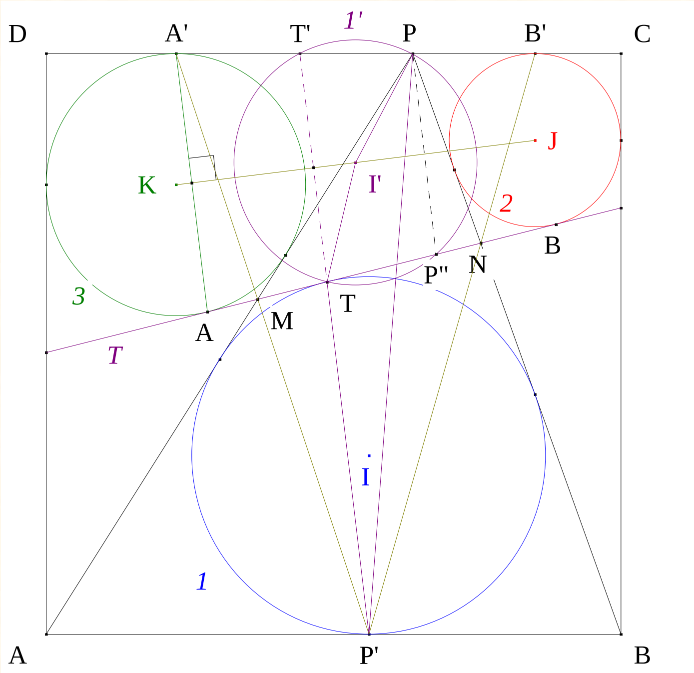
- Mutatis mutandis, nous montrerions que P', N et B' sont alignés.

- *1* et *3* étant homothétiques de centre M, (P'T) // (A'A) ;
  nous savons que (A'A) ⊥ (JK) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (P'T) ⊥ (JK).

- Nous avons : A'T' = AT ;
  d'après **IV. 1.** Quatre nouvelles tangentes, scolie, AT = B'P ;
  par transitivité de la relation =, A'T' = B'P ;
  en conséquence, T' et P sont isotomiques relativement à [A'B'].

- **Conclusion :** par définition, (P'T) et (P'P) sont deux P'-isotomiques du triangle P'B'A'.

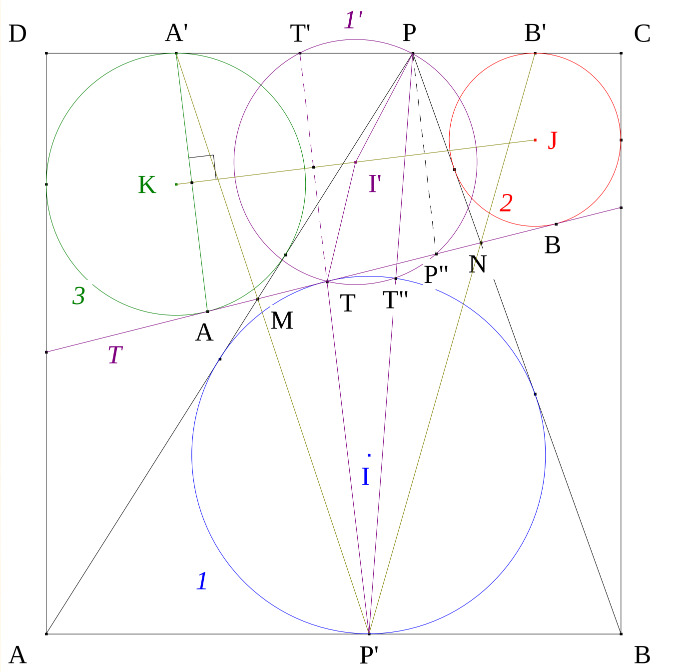
Scolies : **(1)** deux points sur *1'*



- Notons P'' le point d'intersection la perpendiculaire abaissée de P sur (JK) avec *T*.

- **Conclusion :** *1'* passe par T' et P''.

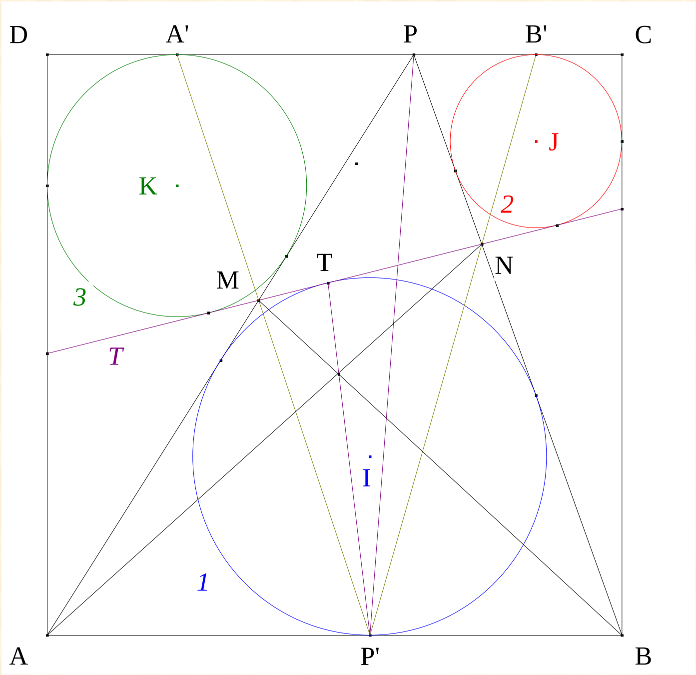
(2) Un alignement



- Notons T'' le second point d'intersection de *1* et *1'*.

- **Conclusion :** les cercles *1* et *1'*, les points de base T et T'', la monienne (P'TP'), les parallèles (AB) et (T'P), conduisent au théorème **1'** de Reim ; en conséquence, P', T'' et P sont alignés.

(3) Un point sur (P'T)

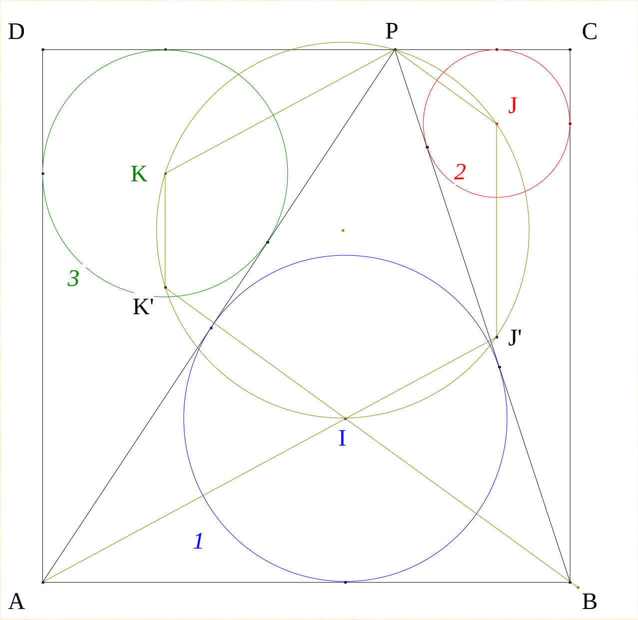


- **Conclusion :** d'après le théorème de Newton (Cf. Annexe **2**) appliqué au quadrilatère ABNM circonscriptible à *1*, (AN) et (BM) concourent sur (P'T).

3. Un hexagone de Catalan

VISION

Figure :

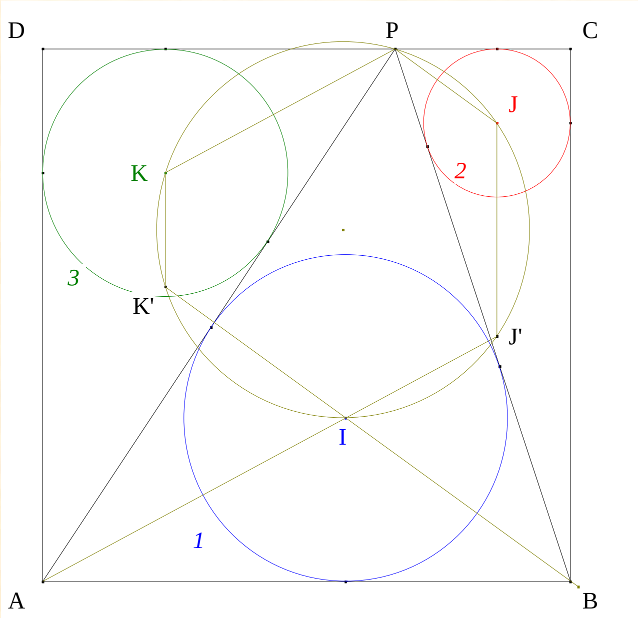


Traits :	ABCD	un carré,
	P	un point de [CD],

	1, *2*, *3*	les cercles inscrits resp. des triangles PAB, PBC, PDA,
	I, J, K	les centres resp. de *1*, *2*, *3*,
	4	le cercle passant par I, J, K, P
et	J', K'	les seconds points d'intersection de (AI), (BI) avec *4*.

Donné : (JJ') est parallèle à (KK') [20].

VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** (IJ') // (PK)
  (2) (IK') // (PJ).

- Le trapèze PKIJ' étant cyclique, est isocèle ; en conséquence, KJ' = PI ;
  le trapèze PJIK' étant cyclique, est isocèle ; en conséquence, PI = JK' ;
  par transitivité de la relation =, KJ' = JK'.

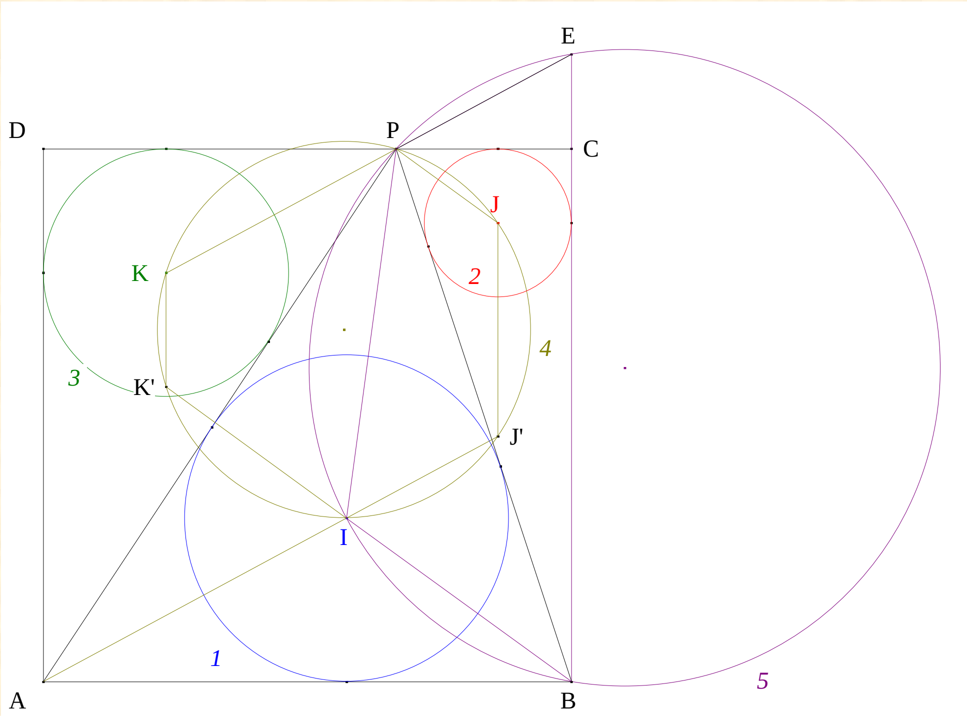
- Le quadrilatère cyclique KK'J'J ayant ses diagonales égales, est un trapèze.

- **Conclusion :** (JJ') est parallèle à (KK').

Scolies : **(1)** l'hexagone convexe PKK'IJ'J
ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux et ses diagonales égales
est dit de Catalan

(2) Trois droites parallèles entre elles

[20] Ayme J.-L., Communication privée à Larrosa Canestro I.



- Notons E le point d'intersection de (PK) et (BC).

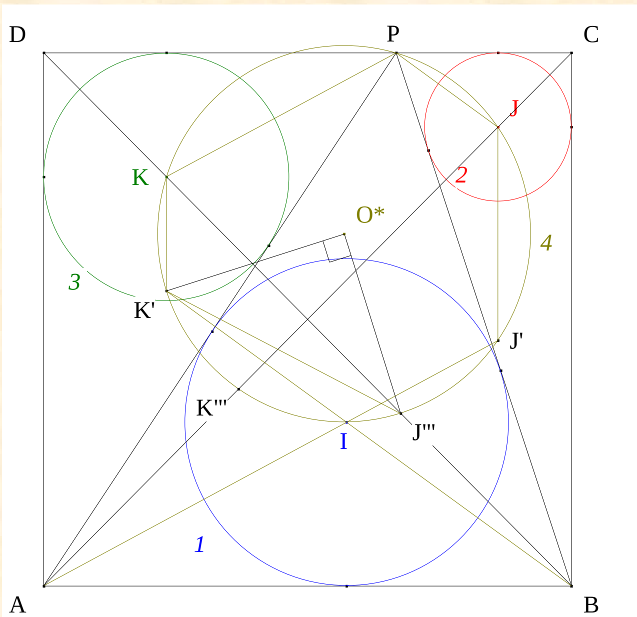
- Un chasse angulaire permet de montrer que le quadrilatère PIBE est cyclique.

- Notons *5* ce cercle.

- Les cercles *5* et *4*, les points de base P et I, les moniennes (EPK) et (BIK'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (EB) // (KK') i.e. (BC) // (KK') ;
  nous savons que (KK') // (JJ') ;
  par transitivité de la relation //, (BC) // (JJ').

- **Conclusion :** (JJ'), (KK') et (BC) sont parallèles entre elles.

(3) Deux triangles rectangles isocèles



- Notons O* le centre de *4*
  et J''', K''' les seconds points d'intersection resp. de (BD), (AC) avec *4*.

- Nous avons : <K'KJ''' = 45° ;
  d'après le théorème des angles inscrit et au centre, <K'O*J''' = 90°.

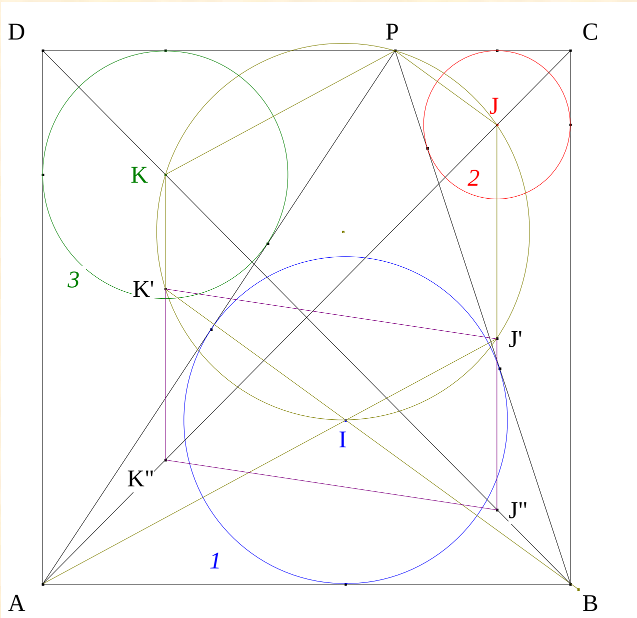
- **Conclusion :** le triangle O*K'J''' est rectangle-isocèle en O*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que le triangle O*J'K''' est rectangle-isocèle en O*.

4. Un parallélogramme

VISION

Figure :



Traits :

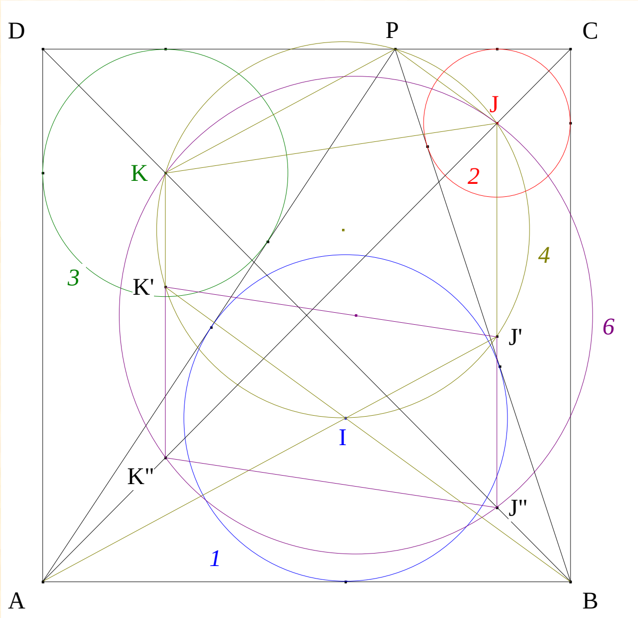
	ABCD	un carré,
	P	un point de [CD],
	1, *2*, *3*	les cercles inscrits resp. des triangles PAB, PBC, PDA,
	I, J, K	les centres resp. de *1*, *2*, *3*,
	4	le cercle passant par I, J, K, P
	J', K'	les seconds points d'intersection de (AI), (BI) avec *4*
	J'', K''	les points d'intersection de ((BD) et (JJ'), de (AC) et (KK').

Donné : le quadrilatère K'K''J''J' est un parallélogramme [21].

VISUALISATION

---

[21] Ayme J.-L., A nice parallelogram, dedicated to Ignacio Larrosa Canestro, *Mathlinks* du 25/04/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=273356



- Par symétrie de la figure, les quadrilatères AK"KD et BJ"JC sont des trapèzes isocèles ; ces deux trapèze ont le même axe de symétrie à savoir la médiatrice de [AD] ; en conséquence, **(1)** le quadrilatère KK"J"J est un trapèze isocèle **(2)** KK"J"J est cyclique.

- Notons *6* ce cercle.

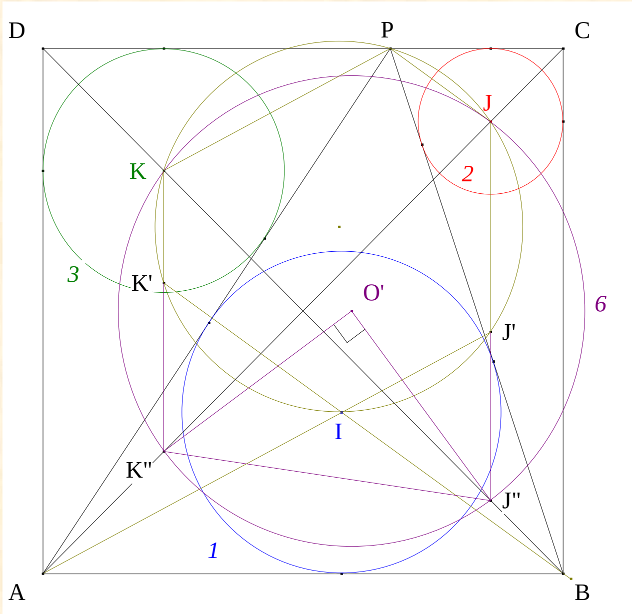
- Les cercles *4* et *6*, les points de base J et K, les moniennes (J'JJ") et (K'KK"), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (J'K') // (J"K").

- Nous savons que (J'J") // (K'K").

- **Conclusion :** par définition, le quadrilatère K'K"J"J' est un parallélogramme

Note historique : une solutions métrique a été proposée par Vladimir Zajic plus connu sous le pseudonyme de Yetti sur le site *Mathlinks*, et une trigonométrique par Virgil Nicula.

Scolies : **(1)** un triangle rectangle-isocèle



- Notons O' le centre de *6*.

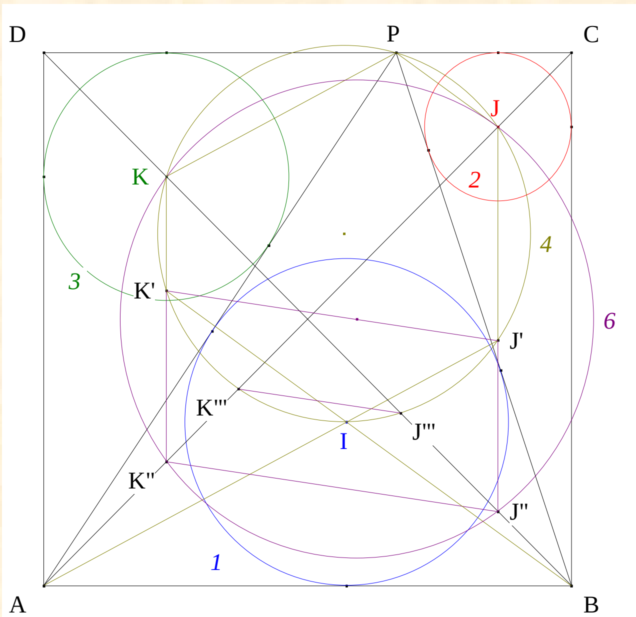
- Le triangle O'K"J" est isocèle en O'.

- Nous constatons que <K"KB = 45°;
  d'après le théorème des angles inscrit et au centre, <K"O'J" = 90°.

- **Conclusion :** le triangle O'K"J" est rectangle-isocèle en O'.

(2) La médiatrice de [J"K"] passe par O'.

(3) Trois droites parallèles entre elles



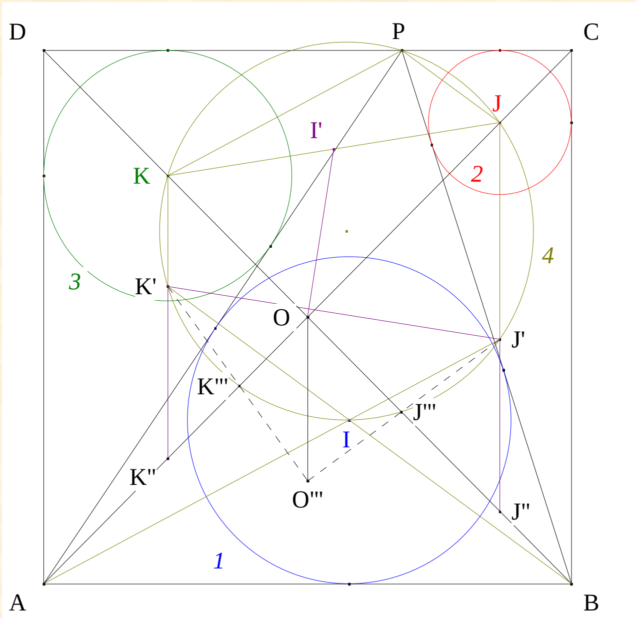
- Notons J'", K'" les seconds points d'intersection resp. de (BD), (AC) avec *4*.

- Les cercles *4* et *6*, les points de base K et J, les moniennes (J'"KJ") et (K'"JK"),
  conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (J'"K'") // (J"K") ;
  nous savons que (J"K") // (J'K') ;

par transitivité de la relation //, (J'''K''') // (J'K').

- **Conclusion :** (J'K'), (J''K'') et (J'''K''') sont parallèles entre elles.

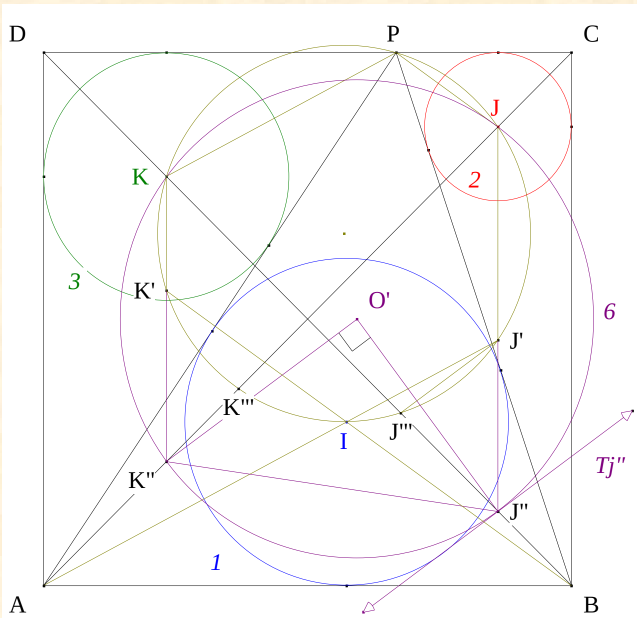
(4) Une parallèle à (AD)



- Notons O''' le point d'intersection de (J'J''') et (K'K''').

- **Conclusion :** d'après le Théorème de Desargues appliqué aux triangles K'K''K''' et J'J''J''', (OO'') // (AD).

(4) Deux perpendiculaires

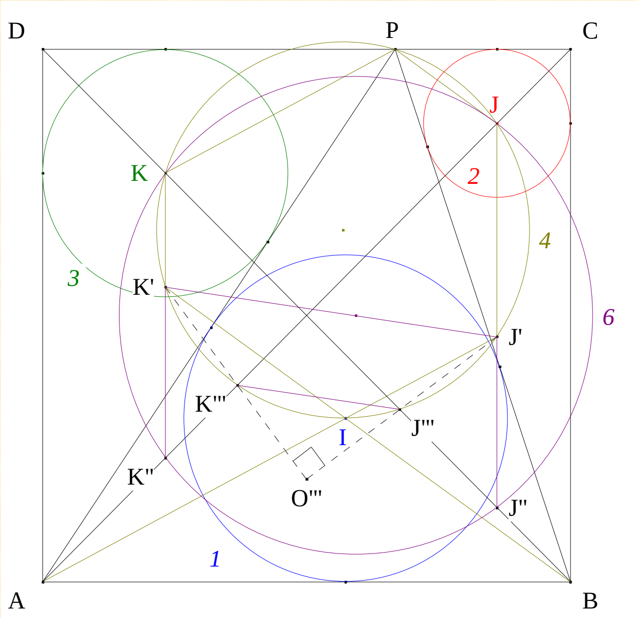


- Notons Tj'' la tangente à *6* en J''
  et Tk'' la tangente à *6* en K''.

- Les cercles *4* et *6*, les points de base K et J, les moniennes (J'''KJ'') et (J'JJ''), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que Tj'' // (J'''J').

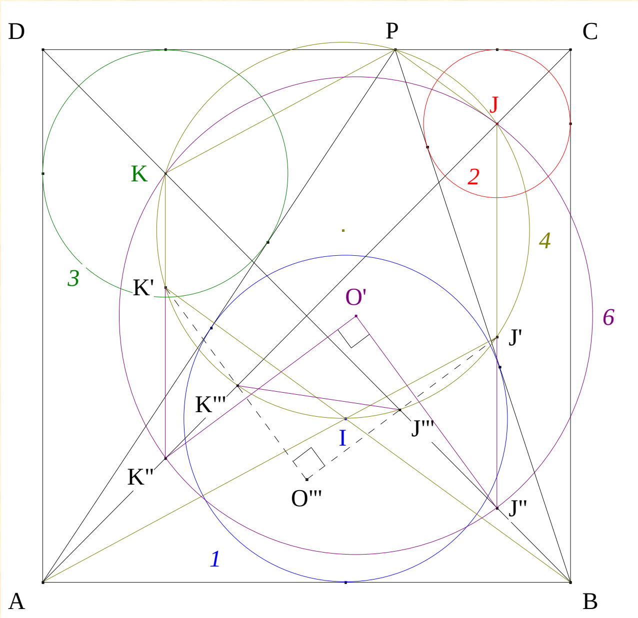
- Mutatis mutandis, nous montrerions que Tk" // (K"'K').

- D'après le théorème de l'angle inscrit, <K"O'J" = 2.<K"JJ" (= 90°) ;
  en conséquence, Tj" ⊥ Tk" ;
  la relation ⊥ étant compatible avec la relation //, (J"'J') ⊥ (K"'K').



- **Conclusion :** (J'J"') est perpendiculaire à (K'K"').

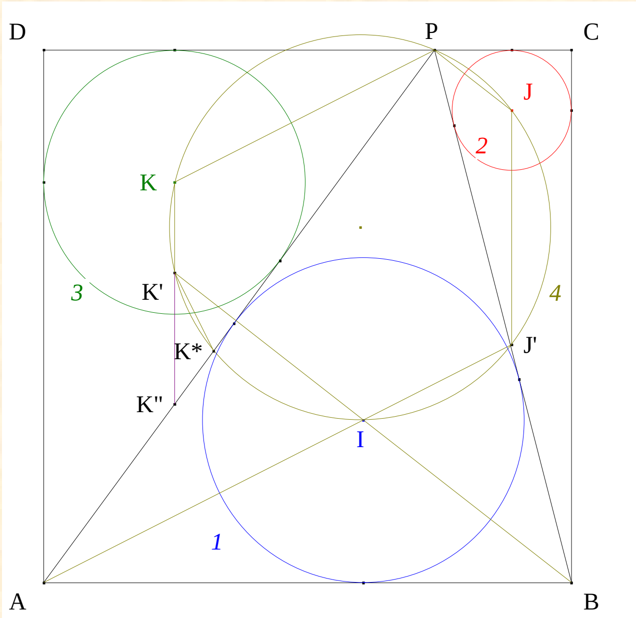
(5) Deux couples de droites parallèles



- **Conclusion :** (J'J"') // (O'K") et (K'K"') // (O'J").

Commentaire : nous conjecturons que * O' est sur (J'K')
* O"' est sur (J"K").

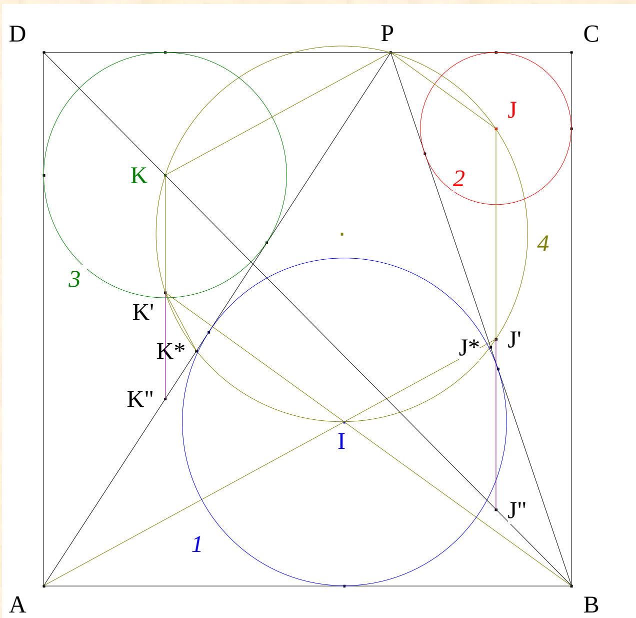
(6) Deux droites perpendiculaires



- Notons K* le second point d'intersection de (PA) avec *4*.

- Une chasse angulaire :
  le quadrilatère PKK'K* étant cyclique, <K"K'K* = <KPK* ;
  nous avons : <KPK* = <KPA ;
  (PK) et (AIJ') étant parallèles, <KPA = <IAP ;
  par hypothèse, <IAP = <BAI ;
  par transitivité de la relation =, <K"K'K* = <BAI .

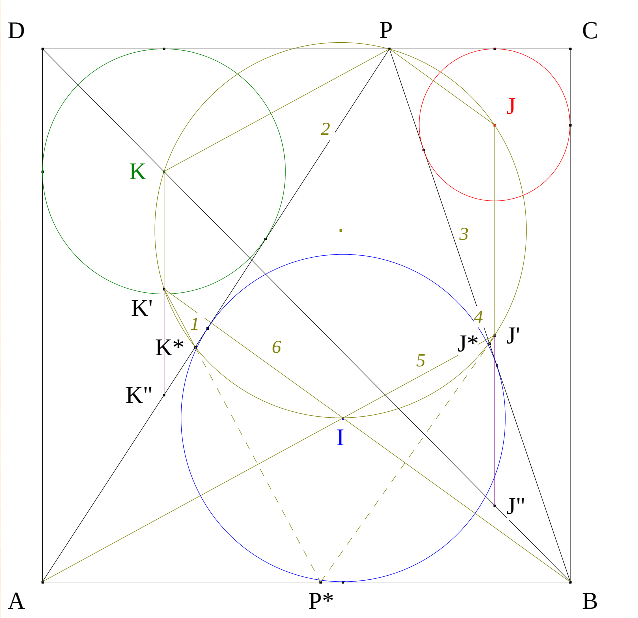
- **Conclusion :** d'après le théorème des angles à côtés perpendiculaires, (K'K*) ⊥ (AI).



- Notons J* le second point d'intersection de (PB) avec *4*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (J'J*) ⊥ (BI).

(7) Un point remarquable sur (AB)



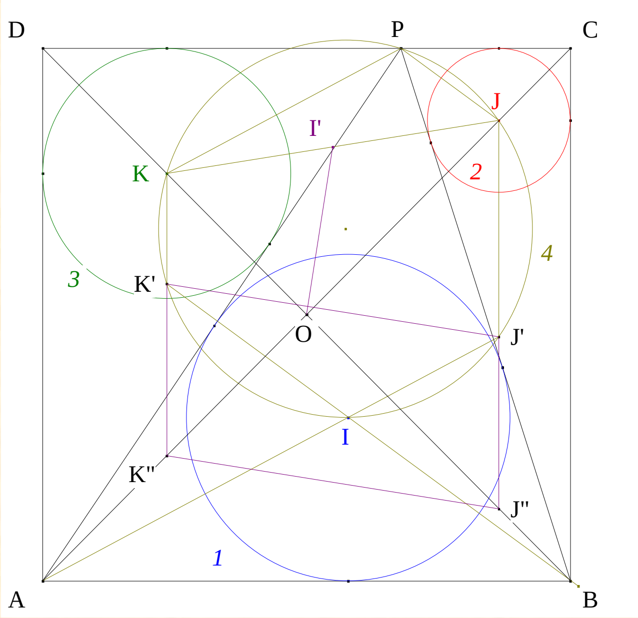
- Notons P* le point d'intersection de (J'J*) et (K'K*).
- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe **3**),
  (P*AB) est la pascale de l'hexagone cyclique K'K*PJ*J'IK'.
- **Conclusion :** P* est sur (AB).

Commentaire : ce point P* va jouer un rôle important pour établir la conjecture de la page 29.

5. Deux perpendiculaires

VISION

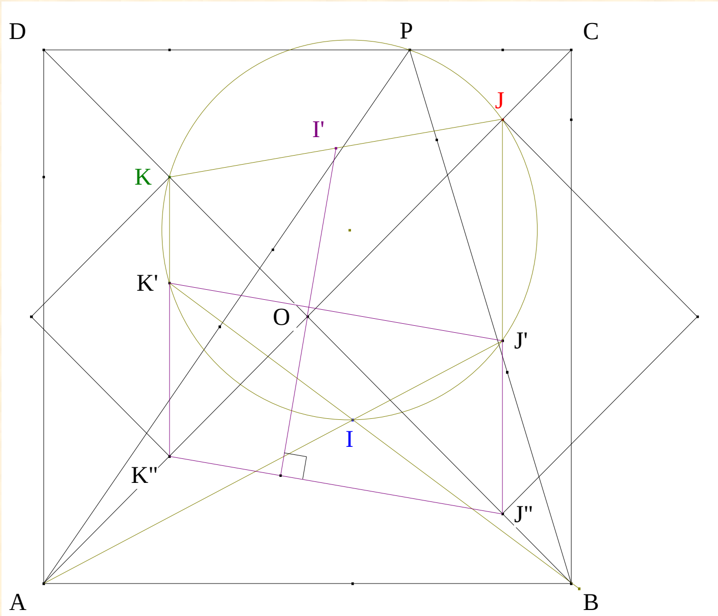
Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment
et O le point d'intersection de (AC) et (BD).

Donné : (OI') est perpendiculaire à (J'K').

VISUALISATION



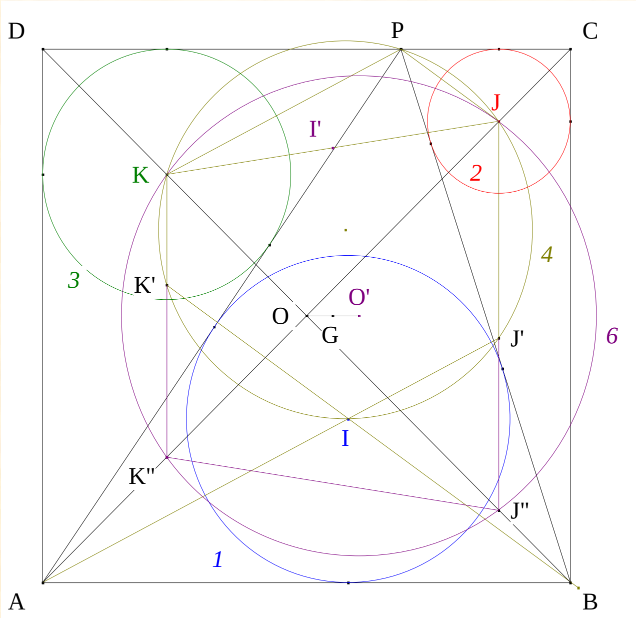
- Les triangles OJJ" et OKK" étant isocèles en O, nous pensons à la figure de Vecten.

- D'après "D'une médiane à une hauteur" appliqué aux triangle OJK et OJ"K", (OI') ⊥ (J"K") ;
  d'après **V. 4.** Un parallélogramme, (J"K") // (J'K') ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (OI') ⊥ (J'K').

- **Conclusion :** (OI') est perpendiculaire à (J'K').

Scolies : **(1)** O est l'anticentre du quadrilatère cyclique JKK"J"

(2) Position de O

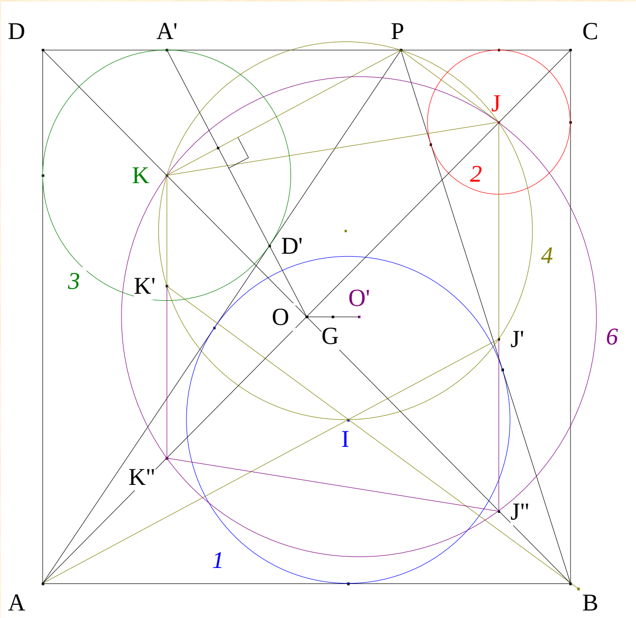


- Notons G le point médian de JKK"J".

- (OO') est un axe de symétrie de ABCD.

- **Conclusion :** G est le milieu de [OO'].

(3) Une droite remarquable passant par O

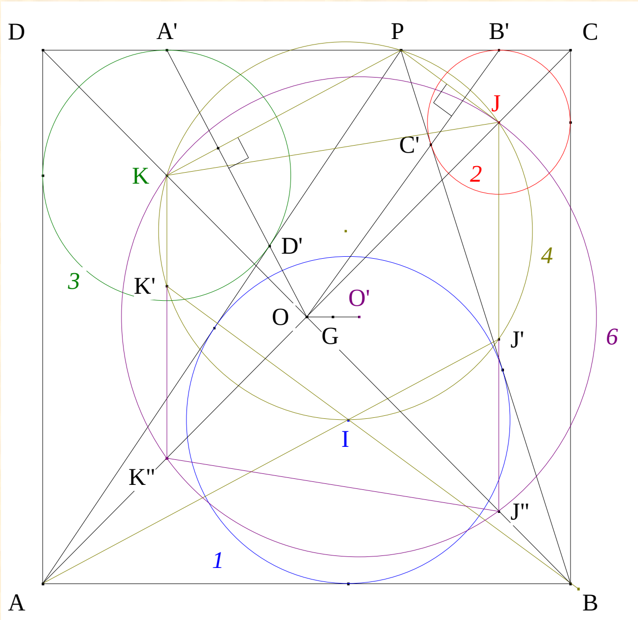


- Notons O le point d'intersection de (AC) et (BD) i.e. le centre de ABCD
  et A', D' les points de contact de *3* resp. avec (CD), (PA).

- **Conclusion :** d'après "Trois droites concourantes" [22] (Cf. Annexe **4**),
  (A'D') passe par O et est perpendiculaire à (PK).

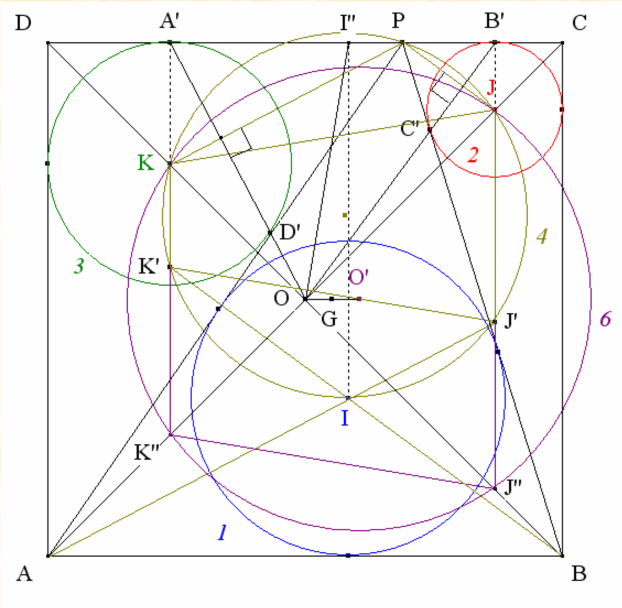
---

[22] Ayme J.-L., An unlikely concurrence, revisited and generalized, G.G.G. vol. 4, p.3-5 ;
http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/



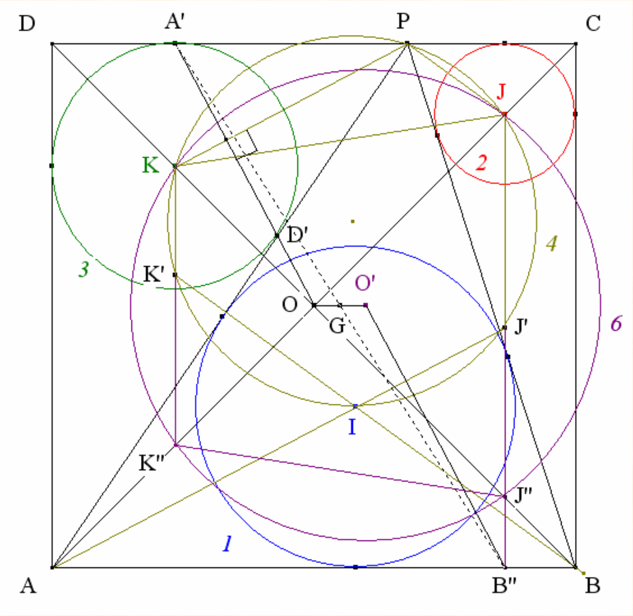
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B'C') passe par O et est perpendiculaire à (PJ).

(4) Une autre nature de O



- Notons I" le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur (CD).
- **Conclusion :** O est l'orthopôle de (CD) relativement au triangle IJ'K'.
- En conséquence, (I"O) $\perp$ (J'K').

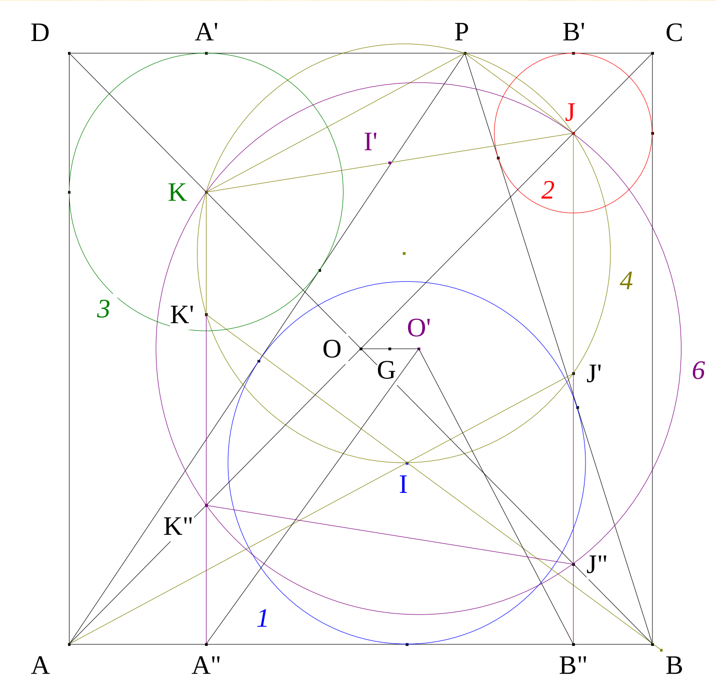
(5) Une autre nature de O'



- Notons B" le point d'intersection de (JJ") et (AB).

- A', G et B" sont alignés.

- Le quadrilatère A'OB"O' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu est un parallélogramme ;
  en conséquence, (O'B") // (A'O) ;
  nous savons que (A'O) ⊥ (PK) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (O'B") ⊥ (PK).

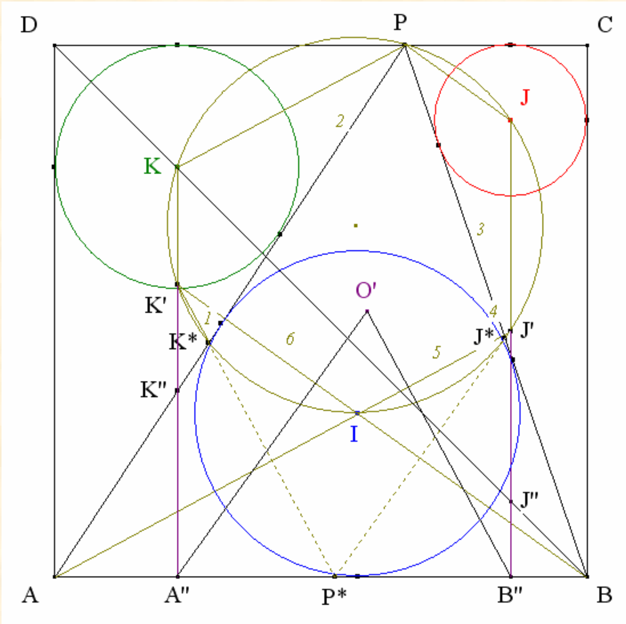


- Notons A" le point d'intersection de (KK") et (AB).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (O'A") ⊥ (PJ).

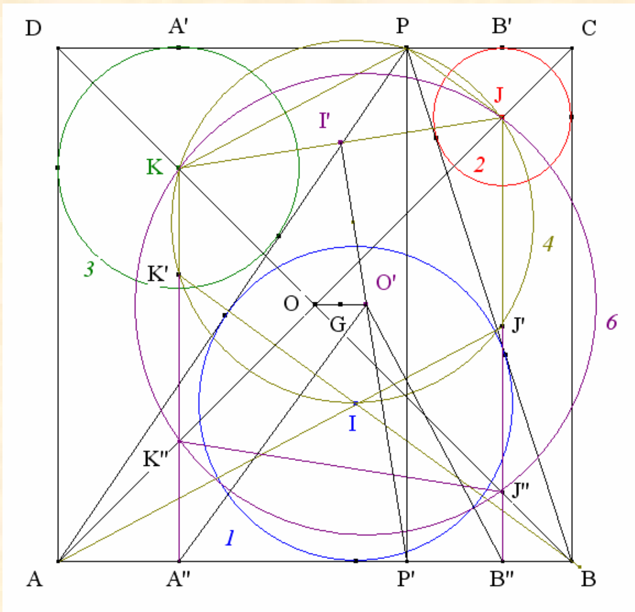
- **Conclusion :** par définition, O' est l'orthopôle de (AB) relativement au triangle PKJ. [23]

(6) Un important résultat :



- **Conclusion :** (O'A") // (J'J*P*) et (O'B") // (K'K*P*)

(7) Trois points alignés



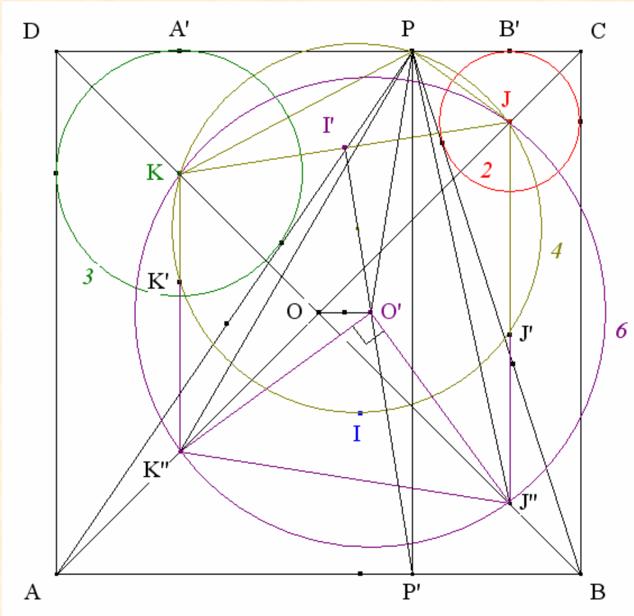
- Notons P' le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur (AB).
- O' étant l'orthopôle de (AB) relativement au triangle PKJ, (O'P') ⊥ (JK).
- **Conclusion :** le triangle O'JK étant rectangle-isocèle en O', O', P' et I' sont alignés.

(8) Un remarquable triangle isocèle [24]

---

[23] Ayme J.-L., Center on a line, *Mathlinks* du 14/05/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?p=1497517#1497517

[24] Ayme J.-L., Prove or disprove, *Mathlinks* du 30/05/2009; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=279958



- Par symétrie axiale d'axe (OO'), (O'P) ⊥ (J"K").

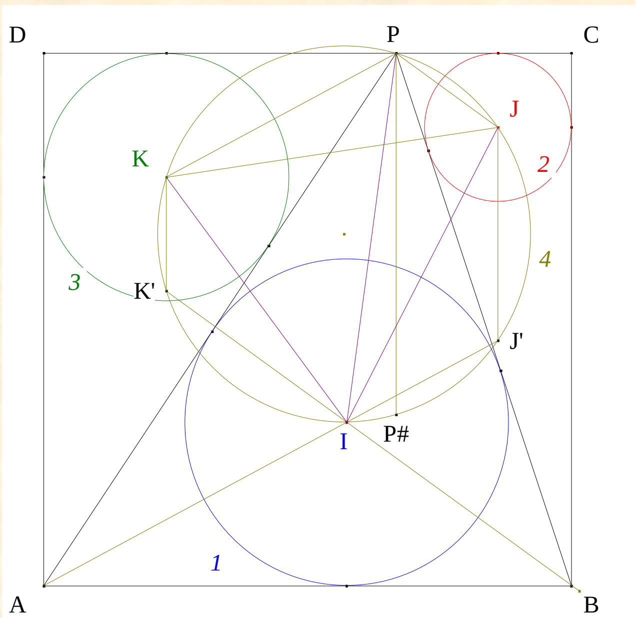
- Le triangle O'J"K" étant rectangle-isocèle en O', (O'P) est la O'-médiane de O'J"K".

- **Conclusion :** (O'P) étant à la fois hauteur et médiane du triangle PJ"K",
PJ"K" est isocèle en P.

6. Une "concourance"

VISION

Figure :

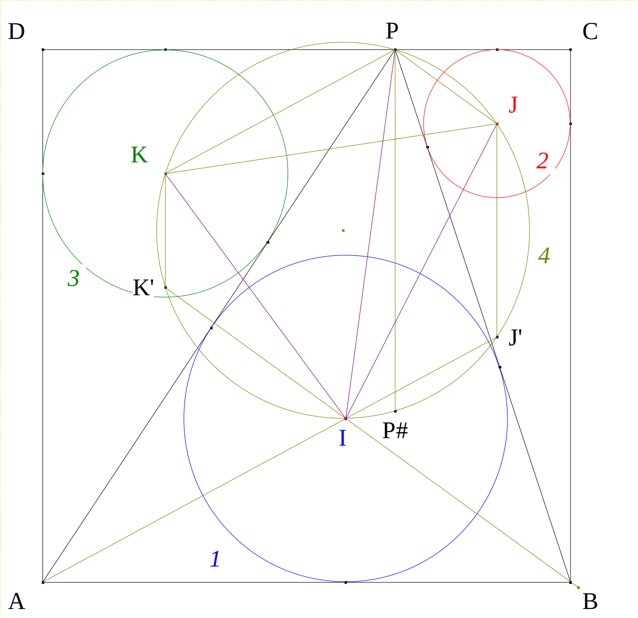


Traits : ABCD un carré,

	P	un point de [CD],
	1, *2*, *3*	les cercles inscrits resp. des triangles PAB, PBC, PDA,
	I, J, K	les centres resp. de *1*, *2*, *3*,
	4	le cercle passant par I, J, K, P
	J', K'	les seconds points d'intersection de (AI), (BI) avec *4*
et	P#	le second point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par P avec *4*.

Donné : les isogonales de (PP#), (JJ') et (KK') relativement au triangles PJK concourent en I [25].

VISUALISATION



- D'après le théorème de Beltrami (Cf. Annexe **5**) appliqué à PJK,
  les isogonales de (PP#), (JJ') et (KK') relativement au triangles PJK concourent sur *4*.

- Par une chasse angulaire, (PI) est l'isogonale de (PP#) relativement à PJK.

- **Conclusion :** les isogonales de (PP#), (JJ') et (KK') relativement au triangles PJK concourent en I.

Scolie : (IP#) // (JK).

Note historique : une solution a été proposée par Vladimir Zajic dit "Yetti".

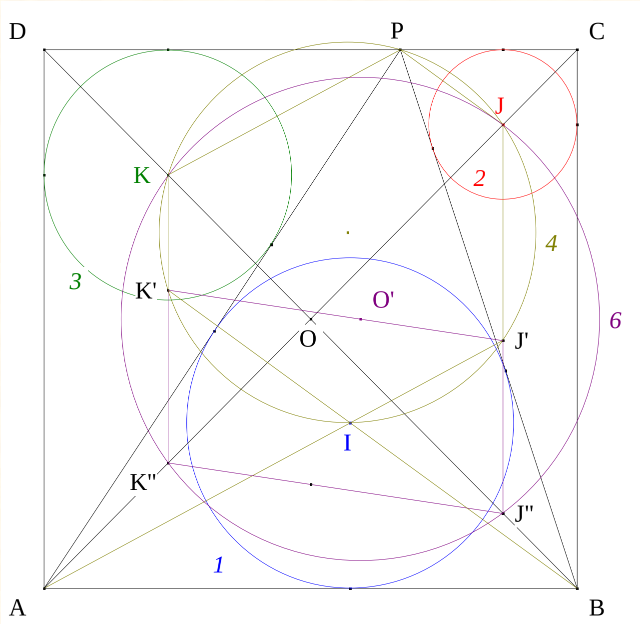
F. UN SURPRENANT RÉSULTAT DE L'AUTEUR

VISION

Figure :

---

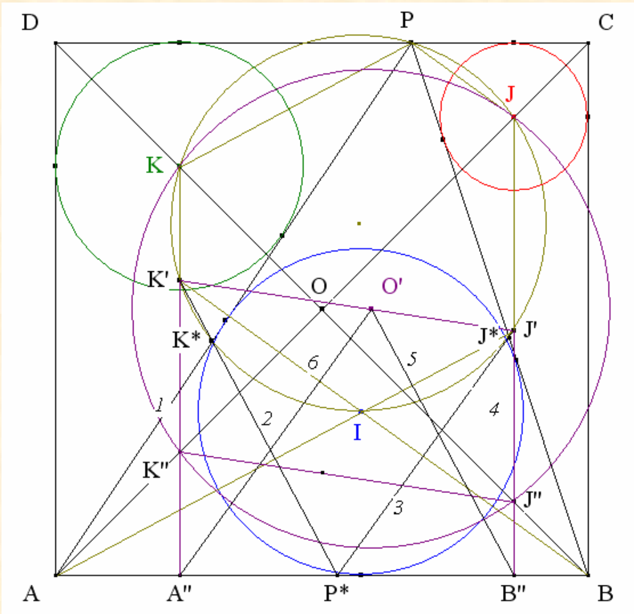
[25] Ayme J.-L., A nice concurrence, *Mathlinks* du 28/04/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=273939



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment
et O' le centre de *6*.

Donné : O' est sur (J'K'). [26]

VISUALISATION

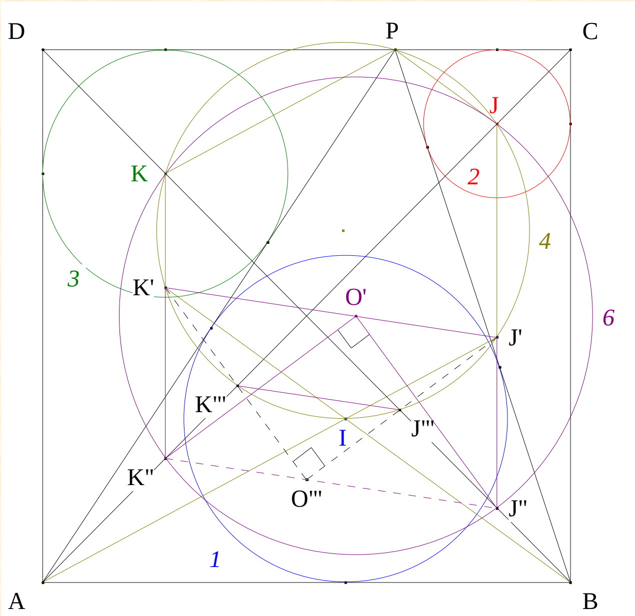


- D'après le petit théorème de Pappus (Cf. Annexe **6**) appliqué à l'hexagone A"K'P*J'B"O'A", K', O' et J' sont alignés.
- **Conclusion :** O' est sur (J'K').

Note historique : une contribution de nature métrique a été proposé par Vladimir Zajic.

[26] Ayme J.-L., Center on a line, *Mathlinks* du 14/05/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=276743

Scolie : un autre alignement



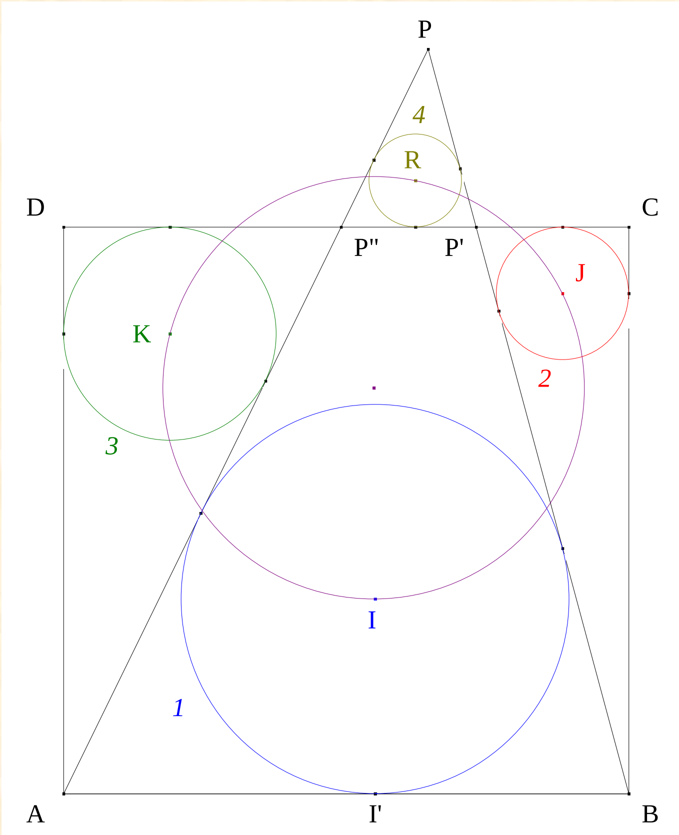
- D'après le petit théorème de Pappus (Cf. Annexe 6) appliqué à l'hexagone K"K'O"'J'J"O'K", K", O"' et J" sont alignés.

- **Conclusion :** O"' est sur (J"K").

G. UNE GÉNÉRALISATION

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	P', P"	deux points de [CD],
	P	le points d'intersection de (AP") et (BP'),
	1, 2, 3, 4	les cercles inscrits resp. des triangles PAB, P'BC, P"DA, PP'P"
et	I, J, K, R	les centres resp. de *1*, *2*, *3* et *4*.

Donné : I, J, K et R sont cocycliques.

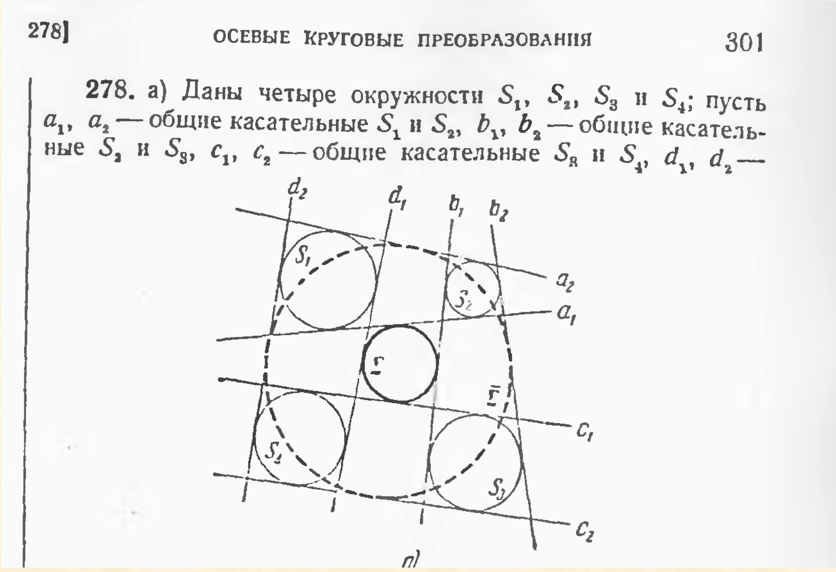
VISUALISATION

- **Conclusion :** en calquant notre démarche sur celle de III. La visualisation du problème de Larrosa Canestro, I, J, K et R sont cocycliques.

Note historique : dans une communication privée, Mark Tudosi m'a signalé que la figure de Larrosa Canestro est un cas particulier d'une situation plus générale envisagée par Isaac Moisevitch Yaglom[27] dans son livre paru en 1956 et intitulé *Transformations géométriques*. C'est dans le dernier chapitre "Circular transformations" qui n'a pas été traduit dans l'édition anglaise qu'apparaît un quadrilatère tangentiel où notre point P a été dédoublé sur le segment [CD] ainsi que notre tangente commune pour résoudre une question concernant un quadrilatère tangentiel comme le montre la photocopie suivante.

---

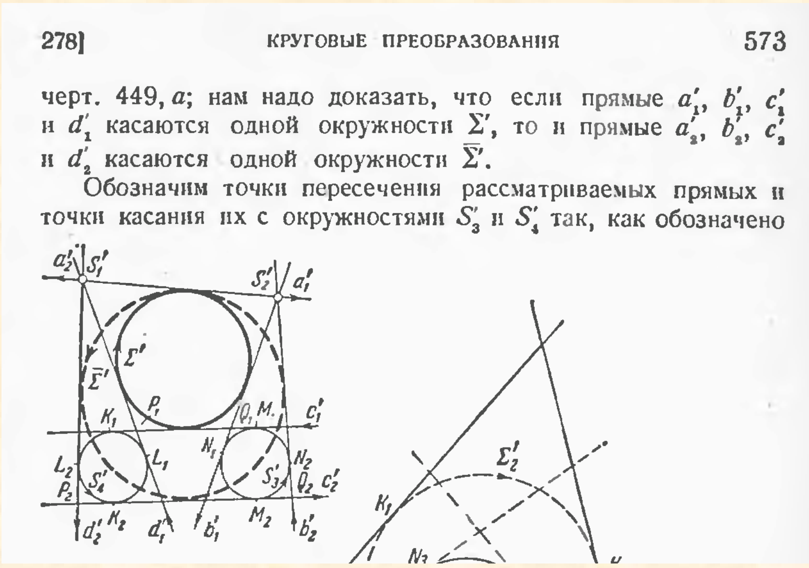
[27] Yaglom I. M. (1921-1988), Transformations géométriques, vol. **2** (1956), problème **278**, p. 301 ; solution p.572 ; http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/yaglom/tom2.htm


278] ОСЕВЫЕ КРУГОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ 301

278. а) Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4; пусть a_1, a_2 — общие касательные S_1 и S_2, b_1, b_2 — общие касательные S_2 и S_3, c_1, c_2 — общие касательные S_3 и S_4, d_1, d_2 —

le quadrilatère central est tangentiel
si, et seulement si,
le "grand" quadrilatère est tangentiel,

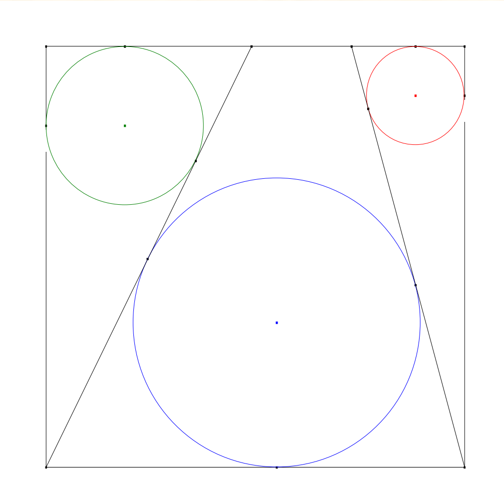
ce qui est une autre question.


278] КРУГОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ 573

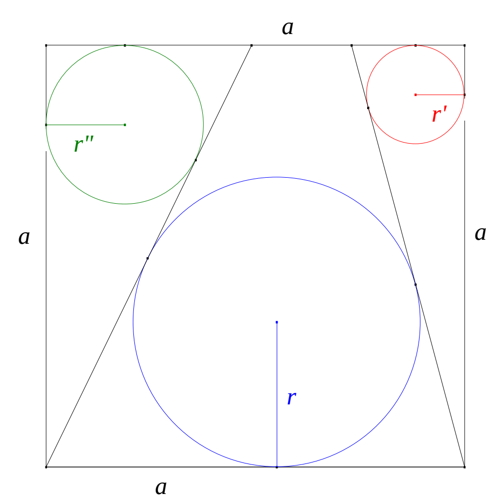
черт. 449, а; нам надо доказать, что если прямые a_1', b_1', c_1' и d_1' касаются одной окружности Σ', то и прямые a_2', b_2', c_2' и d_2' касаются одной окружности $\bar{\Sigma}'$.

Обозначим точки пересечения рассматриваемых прямых и точки касания их с окружностями S_3' и S_4' так, как обозначено

En regardant de plus près cette dernière figure, nous pouvons penser que Yaglom a peut-être été inspiré



par ce San Gaku de 1877, aujourd'hui disparu, de la préfecture de Fukusima [28] (Japon).



En notant, *r*, *r'*, *r''* les rayons resp. de *1*, *2*, *3* et *a* le côté du carré, ce San Gaku proposait la formule suivante [29] :

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{a-2r'} + \frac{1}{a-2r''}}$$

Un exercice [30] considérant comme point de départ un quadrilatère tangentiel et comme question celle de Larrosa Canestro a été proposé sur le site *Mathlinks* en 2008.

VIII. ANNEXE

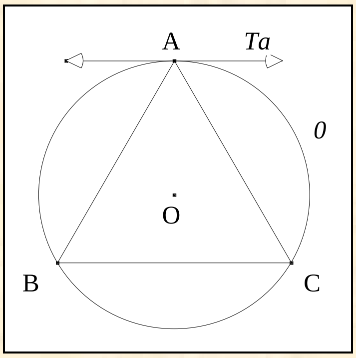
1. La tangente au sommet

---

28 Fukagawa H., Pedoe D., 3.2.4. Japanese Temple Geometry Problems (1989) 40
Fukusima (1968), vol. **3**, Kira Hirayama and Hachio Norii, private circulation

29 Luis, Seems easy .but watch out!!, *Mathlinks* du 13/03/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=264276

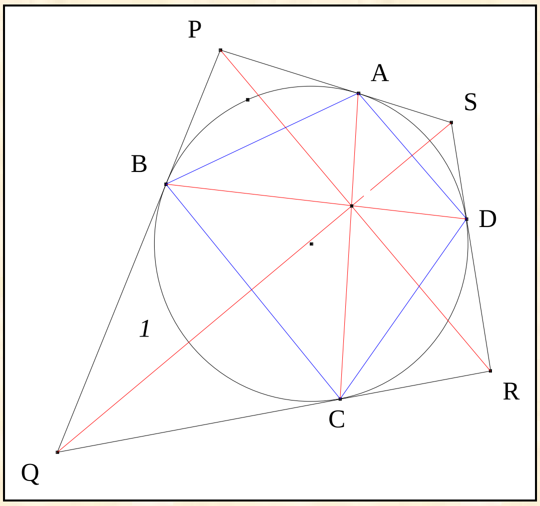
30 Tangential quadrangle, *Mathlinks* du 27/12/2008 ; http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=247411



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*
et *T*a la tangente à *0* en A.

Donné : ABC est isocèle en A *si, et seulement si,* *T*a est parallèle à la base (BC).

2. Le théorème de Newton [31]



Traits : *1* un cercle,
ABCD un quadrilatère inscrit dans *1*
et PQRS le quadrilatère tangentiel de ABCD.

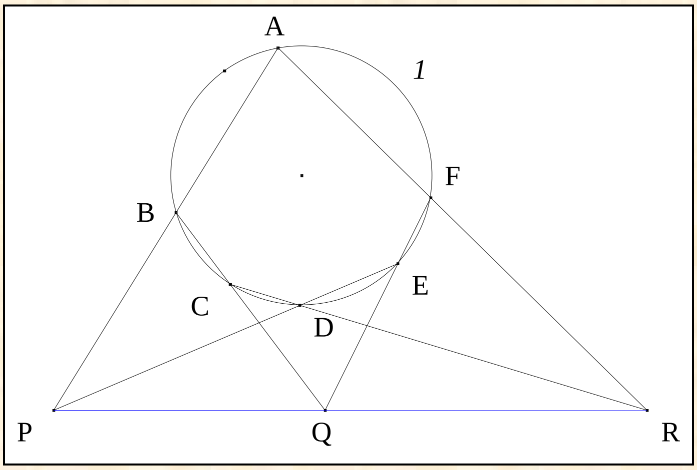
Donné : (PR), (SQ), (AC) et (BD) sont concourantes.

3. Hexagramma mysticum [32]

---

[31] Newton I., *Principes* (1686), corollaire **II** du lemme **XXIV**

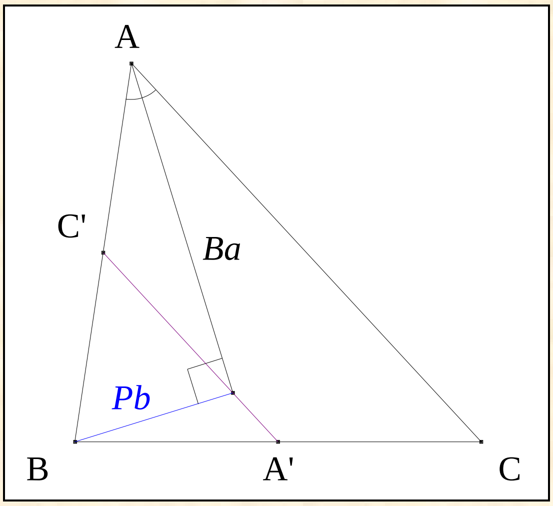
[32] Pascal B. (1640)



Traits :		*1*	un cercle,
		ABCDEF	un hexagone tels que les points A, B, C, D, E soient sur *1*,
	et	P, Q, R	les points d'intersection de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si,* les points P, Q et R sont alignés.

4. Trois droites concourantes [33]



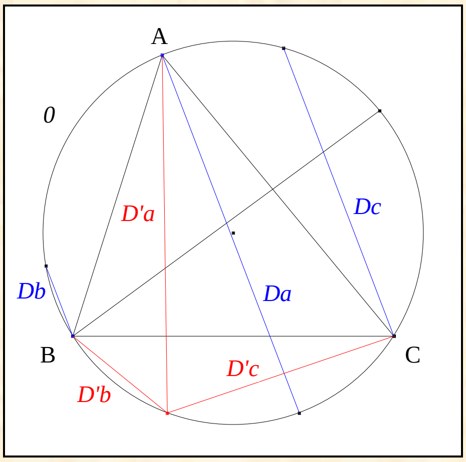
Traits :		ABC	un triangle,
		*B*a	la A-bissectrice de ABC,
		*P*b	la perpendiculaire à *B*a, passant par B,
	et	A', C'	les milieux resp. de [BC], [AB].

Donné : *B*a et *P*b se brisent sur (A'B').

5. Le théorème de Beltrami [34]

33 Ayme J.-L., An unlikely concurrence, revisited and generalized, G.G.G. vol. **4**, p.3-5 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/

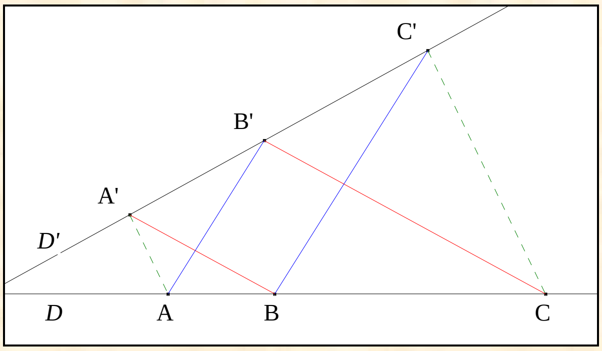
34 Beltrami E., *Archives* de Grünert **43**, p. 48



Traits:	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	*D*a, *D*b, *D*c	trois céviennes de ABC passant resp. par A, B, C,
et	*D*'a, *D*'b, *D*'c	les isogonales resp. de *D*a, *D*b, *D*c relativement à ABC.

Donné : *D*a, *D*b, *D*c sont parallèles *si, et seulement si,* *D*'a, *D*'b, *D*'c sont concourantes sur *0*.

6. Le petit théorème de Pappus [35]



Traits :	*D*, *D'*	deux droites,
	A, B, C	trois points pris dans cet ordre sur *D*,
	B'	un point
et	A', C'	deux points de *D'* tels que (AB') // (BC') et (A'B) // (B'C).

Donné : B' est sur *D'* *si, et seulement si,* (AA') et (CC') sont parallèles.

[35] Pappus, *Collections* Livre **VII**