LE CERCLE

DE

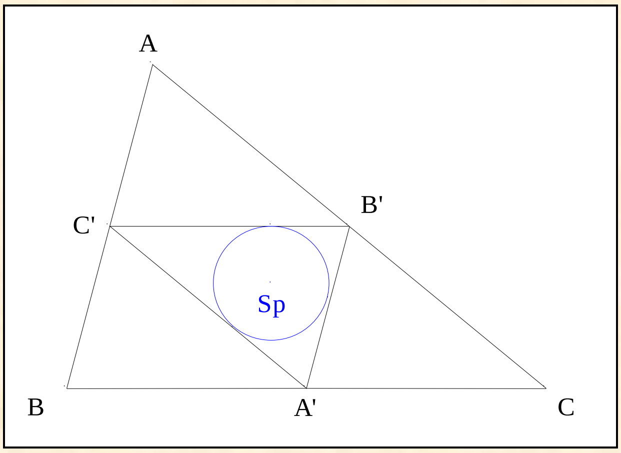
THEODOR SPIEKER

OU

LE P-CERCLE

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'article présente un résultat de Theodor Spieker datant de 1862 ainsi que différentes situations.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The paper presents a result of Theodor Spieker dating back to 1862 and different situations.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

---

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/09/2012.

Sommaire

A. Le cercle et le point de Spieker 3
1. Présentation
2. Une courte biographie de Theodor Spieker
3. Archive ou la démarche de Spieker
4. Commentaire
5. Remarques de T. Spieker et de M. de Villiers

B. Position du centre du cercle de Spieker 8
1. La droite de Nagel ou la seconde droite d'Euler
2. Le centre du cercle de Spieker

C. Parallèle à une bissectrice 13
1. Une parallèle à (AI)
2. Deux exercices
3. Une autre parallèle à (AI)
4. Exercice
5. Exercice résolu

D. Le triangle de Spieker 20
1. Présentation
2. Le cercle inscrit du triangle de Spieker

E. Deux lignes centrales passant par Sp 25
1. L'alignement I-G-Sp-Na
2. L'alignement H-Sp-Mt-Be

F. Autres natures de Sp 27
I. Centre radical
1. Un lemme
2. Sp centre radical des trois excercles
3. Un résultat de l'auteur
II. Centre clivien
1. Une bissectrice
2. Le théorème de la corde brisée d'Archimède
3. Un étonnant parallélisme
4. Clivienne
5. Sp est centre clivien
III. Le centre du cercle de Taylor du triangle excentral 39
1. Présentation du cercle de Taylor
2. Commentaire

G. Appendice 40
1. Une bissectrice d'un parallélogramme

A. LE CERCLE ET LE POINT

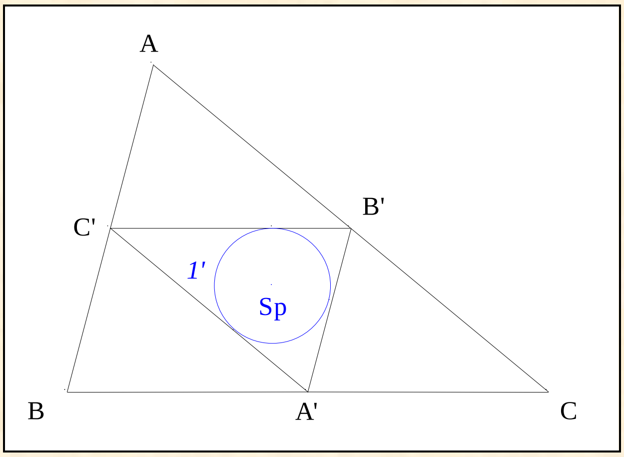
DE

SPIEKER

1. Présentation

VISION

Figure :



Finition :	ABC	un triangle,
	A'B'C'	le triangle médian de ABC,
	1'	le cercle inscrit de A'B'C'
et	Sp	le centre de *1'*.

Définitions : *1'* est "le cercle de Spieker de ABC" et Sp "le point de Spieker de ABC". [2]

Énoncés traditionnels :

le cercle de Spieker d'un triangle
est
le cercle inscrit du triangle médian de ce triangle.

Le centre du cercle de Spieker d'un triangle
est
le centre du triangle médian de ce triangle.

Scolie : Sp est répertorié sous X_{10} chez ETC [3].

---

[2] Spieker T., *Lehrbuch der ebenen Geometrie* (1909) p. 181

[3] Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

2. Une courte biographie de Theodor Spieker

Theodor Spieker est né en 1823.
Il a été professeur au Carls-Gymnasium de Bernburg (Saxe-Anhalt, Prusse) et plus tard à celui de Potsdam (Brandebourg, Prusse) où François-Marie Arouet dit Voltaire a résidé en tant qu'invité du roi Frédérick II de 1749 à 1753.
Ce géomètre allemand, docteur en Mathématiques, est connu pour avoir écrit *Lehrbuch der ebenen Geometrie* [4] en 1862 qui connaîtra plus d'une vingtaine de rééditions. Notons que ce livre est écrit en gothique qui est une manière d'écrire l'alphabet latin en "cassant" ses lettres (*gebrochene Schrift*), car les arrondis sont brisés.

Il décède en 1913.

Une petite anecdote :

Max Talmey (né Max Talmud) était un pauvre étudiant juif polonais en médecine. Tous les jeudis, la famille d'Albert Einstein le recevait à sa table comme il était de coutume pour les familles juives aisées d'Europe d'aider les pauvres étudiants de leur communauté. En remerciement, Max Talmud qui devenait au fil de ces invitations, un tuteur officieux, initiait le jeune Albert de 10 ans son cadet, aux merveilles de la science, des mathématiques et de la philosophie. C'est ainsi qu'Albert à l'âge de 12 ans a découvert le manuel de géométrie de Theodor Spieker intitulé *Lehrbuch der ebenen Geometrie*.

3. Archive ou la démarche de Theodor Spieker

*§ 221.

Sätze vom fünften merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

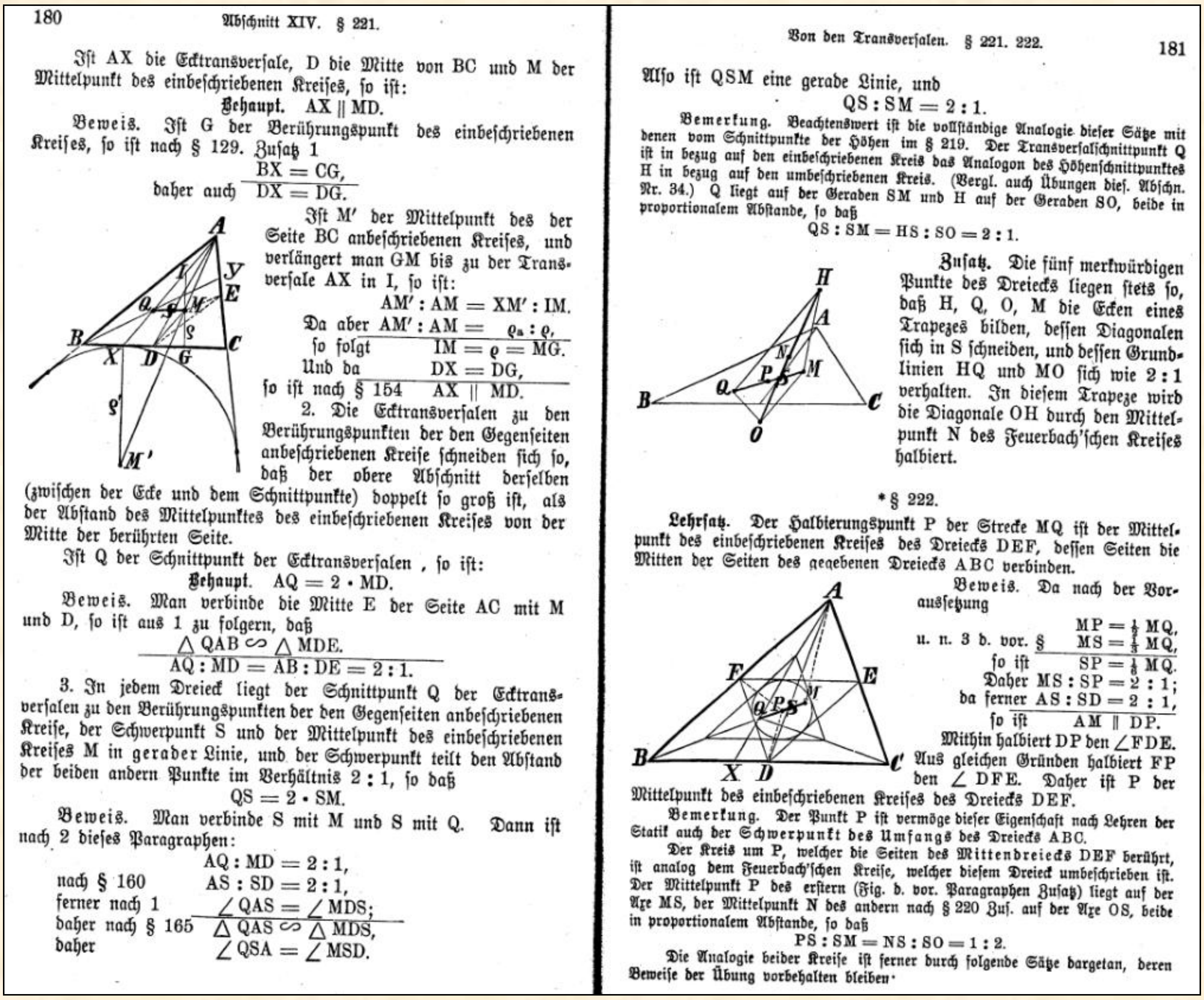
1. Die Ecktransversale zum Berührungspunkte des der Gegenseite anbeschriebenen Kreises ist parallel der Verbindungslinie der Mitte dieser Seite mit dem Mittelpunkte des einbeschriebenen Kreises.

12*

Lemme : parallèle à une nagelienne [5]

4 Spieker T., *Lehrbuch der ebenen Geometrie mit Übungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten* (Verlag von August Stein, Potsdam, 1862)

5 Spieker T., *Lehrbuch der ebenen Geometrie* (1862) 179-181



180 Abschnitt XIV. § 221.

Ist AX die Ecktransversale, D die Mitte von BC und M der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, so ist:

Behaupt. AX ∥ MD.

Beweis. Ist G der Berührungspunkt des einbeschriebenen Kreises, so ist nach § 129. Zusatz 1

$$BX = CG,$$
daher auch $DX = DG.$

Ist M′ der Mittelpunkt des der Seite BC anbeschriebenen Kreises, und verlängert man GM bis zu der Transversale AX in I, so ist:

$$AM' : AM = XM' : IM.$$

Da aber $AM' : AM = \varrho_a : \varrho$,
so folgt $IM = \varrho = MG.$
Und da $DX = DG,$
so ist nach § 154 $AX \parallel MD.$

2. Die Ecktransversalen zu den Berührungspunkten der den Gegenseiten anbeschriebenen Kreise schneiden sich so, daß der obere Abschnitt derselben (zwischen der Ecke und dem Schnittpunkte) doppelt so groß ist, als der Abstand des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises von der Mitte der berührten Seite.

Ist Q der Schnittpunkt der Ecktransversalen , so ist:

Behaupt. AQ = 2 · MD.

Beweis. Man verbinde die Mitte E der Seite AC mit M und D, so ist aus 1 zu folgern, daß

$$\triangle QAB \backsim \triangle MDE.$$
$$AQ : MD = AB : DE = 2 : 1.$$

3. In jedem Dreieck liegt der Schnittpunkt Q der Ecktransversalen zu den Berührungspunkten der den Gegenseiten anbeschriebenen Kreise, der Schwerpunkt S und der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises M in gerader Linie, und der Schwerpunkt teilt den Abstand der beiden andern Punkte im Verhältnis 2 : 1, so daß

$$QS = 2 \cdot SM.$$

Beweis. Man verbinde S mit M und S mit Q. Dann ist nach 2 dieses Paragraphen:

$AQ : MD = 2 : 1,$
nach § 160 $AS : SD = 2 : 1,$
ferner nach 1 $\angle QAS = \angle MDS;$
daher nach § 165 $\triangle QAS \backsim \triangle MDS,$
daher $\angle QSA = \angle MSD.$

Von den Transversalen. § 221. 222. 181

Also ist QSM eine gerade Linie, und

$$QS : SM = 2 : 1.$$

Bemerkung. Beachtenswert ist die vollständige Analogie dieser Sätze mit denen vom Schnittpunkte der Höhen im § 219. Der Transversalschnittpunkt Q ist in bezug auf den einbeschriebenen Kreis das Analogon des Höhenschnittpunktes H in bezug auf den umbeschriebenen Kreis. (Vergl. auch Übungen dies. Abschn. Nr. 34.) Q liegt auf der Geraden SM und H auf der Geraden SO, beide in proportionalem Abstande, so daß

$$QS : SM = HS : SO = 2 : 1.$$

Zusatz. Die fünf merkwürdigen Punkte des Dreiecks liegen stets so, daß H, Q, O, M die Ecken eines Trapezes bilden, dessen Diagonalen sich in S schneiden, und dessen Grundlinien HQ und MO sich wie 2 : 1 verhalten. In diesem Trapeze wird die Diagonale OH durch den Mittelpunkt N des Feuerbach'schen Kreises halbiert.

* § 222.

Lehrsatz. Der Halbierungspunkt P der Strecke MQ ist der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises des Dreiecks DEF, dessen Seiten die Mitten der Seiten des gegebenen Dreiecks ABC verbinden.

Beweis. Da nach der Voraussetzung

$MP = \frac{1}{2} MQ,$
u. n. 3 d. vor. § $MS = \frac{1}{3} MQ,$
so ist $SP = \frac{1}{6} MQ.$
Daher $MS : SP = 2 : 1;$
da ferner $AS : SD = 2 : 1,$
so ist $AM \parallel DP.$

Mithin halbiert DP den ∠FDE. Aus gleichen Gründen halbiert FP den ∠ DFE. Daher ist P der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises des Dreiecks DEF.

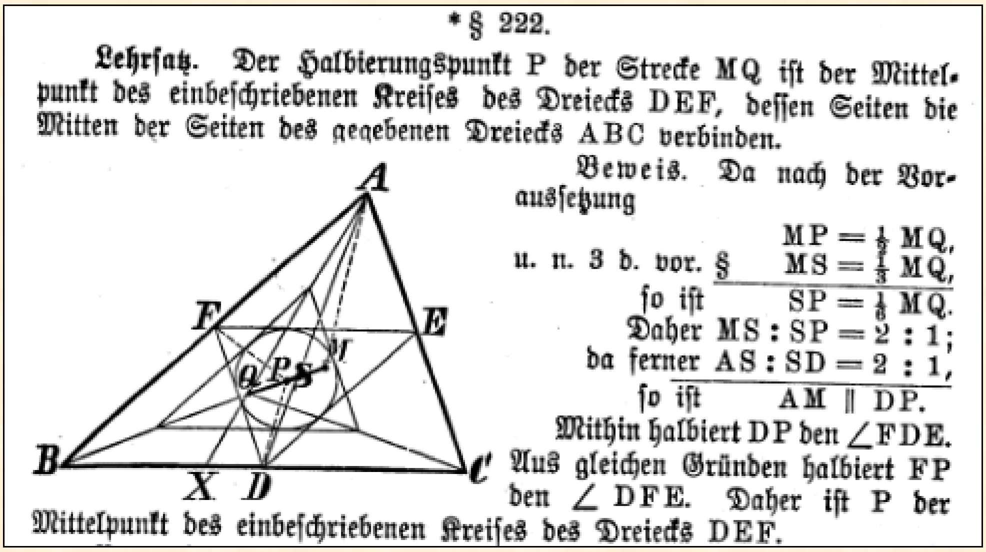
Bemerkung. Der Punkt P ist vermöge dieser Eigenschaft nach Lehren der Statik auch der Schwerpunkt des Umfangs des Dreiecks ABC.

Der Kreis um P, welcher die Seiten des Mittendreiecks DEF berührt, ist analog dem Feuerbach'schen Kreise, welcher diesem Dreieck umbeschrieben ist. Der Mittelpunkt P des erstern (Fig. d. vor. Paragraphen Zusatz) liegt auf der Axe MS, der Mittelpunkt N des andern nach § 220 Zus. auf der Axe OS, beide in proportionalem Abstande, so daß

$$PS : SM = NS : SO = 1 : 2.$$

Die Analogie beider Kreise ist ferner durch folgende Sätze dargetan, deren Beweise der Übung vorbehalten bleiben.

La démarche de Theodor Spieker



* § 222.

Lehrsatz. Der Halbierungspunkt P der Strecke MQ ist der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises des Dreiecks DEF, dessen Seiten die Mitten der Seiten des gegebenen Dreiecks ABC verbinden.

Beweis. Da nach der Voraussetzung

$MP = \frac{1}{2} MQ,$
u. n. 3 d. vor. § $MS = \frac{1}{3} MQ,$
so ist $SP = \frac{1}{6} MQ.$
Daher $MS : SP = 2 : 1;$
da ferner $AS : SD = 2 : 1,$
so ist $AM \parallel DP.$

Mithin halbiert DP den ∠FDE. Aus gleichen Gründen halbiert FP den ∠ DFE. Daher ist P der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises des Dreiecks DEF.

Le cercle et le triangle de Theodor Spieker

4. Commentaire

Dans cette archive, nous observons que Theodor Spieker a d'abord introduit l'alignement Q-M-S (i.e. Na-I-G avec les notations actuelles), ensuite le point milieu P de [MQ] (i.e. Sp) et, enfin, le cercle en question.
Cette approche l'a conduit à parler du "P-cercle de ABC" (le cercle de Spieker) terminologie que de nombreux géomètres comme Julian Lowell Coolidge [6], ont repris par la suite.

5. Remarques

de Theodor Spieker

Bemerkung. Der Punkt P ist vermöge dieser Eigenschaft nach Lehren der Statik auch der Schwerpunkt des Umfangs des Dreiecks ABC.

Der Kreis um P, welcher die Seiten des Mittendreiecks DEF berührt, ist analog dem Feuerbach'schen Kreise, welcher diesem Dreieck umbeschrieben ist. Der Mittelpunkt P des erstern (Fig. d. vor. Paragraphen Zusatz) liegt auf der Axe MS, der Mittelpunkt N des andern nach § 220 Zus. auf der Axe OS, beide in proportionalem Abstande, so daß

$$PS : SM = NS : SO = 1 : 2.$$

Die Analogie beider Kreise ist ferner durch folgende Sätze dargetan, deren Beweise der Übung vorbehalten bleiben.

[7]

182 Abschnitt XIV. § 222—224.

Zusätze. 1. Der Punkt P liegt auf den Verbindungslinien der Mitte jeder Seite mit der Mitte des obern Abschnitts der zugehörigen Ecktransversale durch Q.

2. Der Radius des dem Mittendreieck DEF einbeschriebenen Kreises ist halb so groß, als der Radius des einbeschriebenen Kreises des Dreiecks ABC.

3. Der dem Mittendreieck DEF einbeschriebene Kreis berührt auch die Seiten des Dreiecks, dessen Ecken die Mitten der oberen Abschnitte der Ecktransversalen durch Q sind, und zwar in den Punkten, wo sie von den Strahlen aus M nach den Ecken des Mittendreiecks geschnitten werden.

4. Derselbe Kreis berührt die Seiten des Mittendreiecks DEF in den Punkten, wo sie von den Ecktransversalen durch Q geschnitten werden.

---

[6] Coolidge J. L., A treatise on the circle and the sphère (1916) 55-56

[7] Spieker T., *Lehrbuch der ebenen Geometrie* (1862) 180-182

de Michael de Villiers

Spieker circle and Nagel line

The discovery of the nine-point circle and the associated Euler-line has often been described as one of the crowning glories of post-Greek synthetic geometry (see De Villiers, 2005 for more details). However, less well known seems to be an interesting analogue or parallel result involving the Spieker circle and the Nagel line. The Spieker circle is named after Theodor Spieker whose 1890 geometry book *Lehrbuch der ebenen Geometrie* was one of the books that greatly inspired the young Einstein (see Pyenson, 1985). The rather remarkable parallelism between the nine-point circle and Euler line on the one hand, and that of the Spieker circle and Nagel line on the other hand, is contrasted in the table below, and illustrated in Figure 4. (The reader is reminded that the median triangle is the one formed by the midpoints of the sides of a triangle.)

[8]

The *nine-point* circle is the *circumcircle* of *ABC*'s median triangle and has radius half that of *circumcircle* of *ABC*.	The *Spieker* circle is the *incircle* of *ABC*'s median triangle and has radius half that of *incircle* of *ABC*.
The *circumcentre* (*O*), centroid (*G*) & *orthocentre* (*H*) of any triangle *ABC* are collinear (*Euler* line), $GH = 2GO$ and the midpoint of *OH* is the centre of the *nine-point* circle (*P*) so that $HP = 3\ PG$.	The *incentre* (*I*), centroid (*G*) & *Nagel* point (*N*) of any triangle are collinear (*Nagel* line), $GN = 2GI$ and the midpoint of *IN* is the centre of the *Spieker* circle (*S*) so that $NS = 3\ SG$.
The *nine-point* circle cuts the sides of *ABC* where the extensions of the altitudes through the *orthocentre* meet the sides of *ABC*.	The *Spieker* circle touches the sides of the median triangle where they meet the lines from the *Nagel* point to the vertices of *ABC*.
The *nine-point* circle passes through the midpoints of the segments from the *orthocentre* to the vertices of the triangle.	The *Spieker* circle touches the sides of the triangle whose vertices are the midpoints of the segments from the *Nagel* point to the vertices of *ABC*.

8 de Villiers M., A generalisation of the Spieker circle and Nagelline, School of Science Mathematics, & Technology Education, University of KwaZulu-Natal (Afrique du Sud)

B. POSITION DU CENTRE

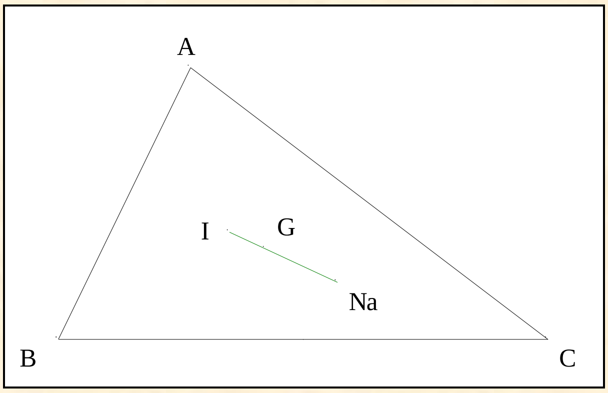
DU

CERCLE DE SPIEKER

1. La droite de Nagel ou la seconde droite d'Euler

VISION

Figure :



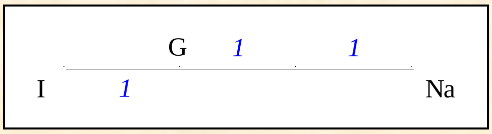
Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
G le point médian de ABC
et Na le point de Nagel de ABC.

Donné : I, G et Na sont alignés.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [9]

Scolies : **(1)** (IGNa) est "la droite de Nagel de ABC"

(2) Disposition



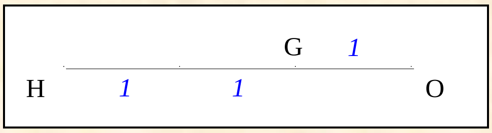
Énoncé traditionnel :

le point médian d'un triangle
partage
le segment déterminé par le centre et le point de Nagel du triangle,
dans le rapport 1:2.

Note historique : en se basant sur le résultat de Leonhard Euler [10] datant de 1765

---

[9] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 12-14 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



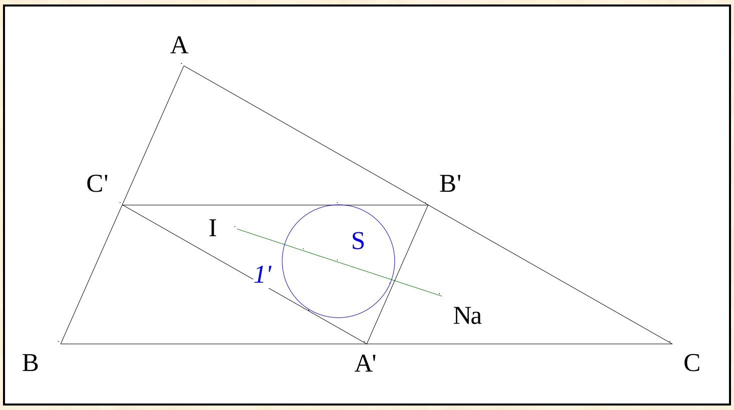
le point médian d'un triangle
partage
le segment déterminé par le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle,
dans le rapport 1: 2

(IGNa) apparaît comme "la seconde droite d'Euler de ABC".

2. Le centre du cercle de Spieker

VISION

Figure :

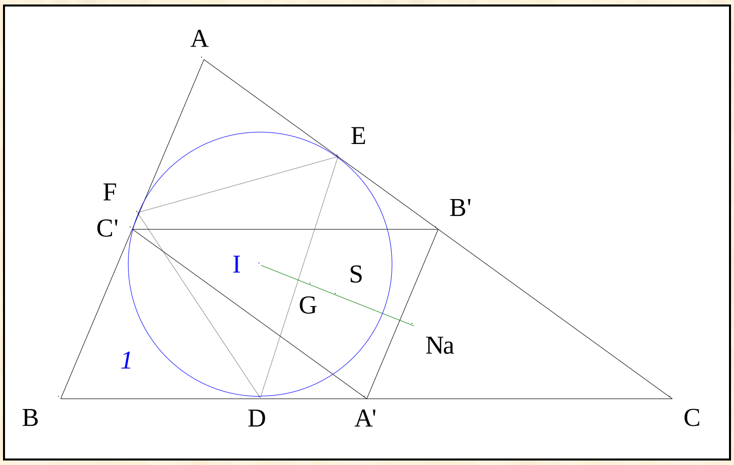


Traits :	ABC	un triangle,
	A'B'C'	le triangle médian de ABC,
	I	le centre de ABC,
	Na	le point de Nagel de ABC,
	1'	le cercle de Spieker de ABC
et	S	le milieu de [INa].

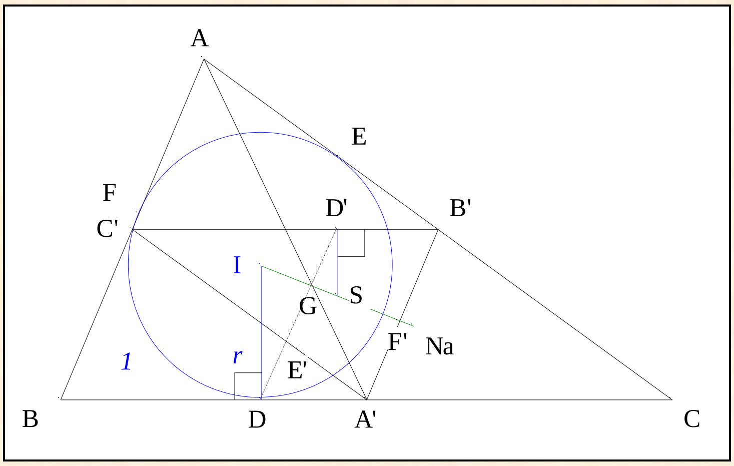
Donné : S est le centre de *1'*.

VISUALISATION

[10] Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. **2**, p. 4 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons G le point médian de ABC,
  1 le cercle inscrit de ABC
  et DEF le triangle de contact de ABC.

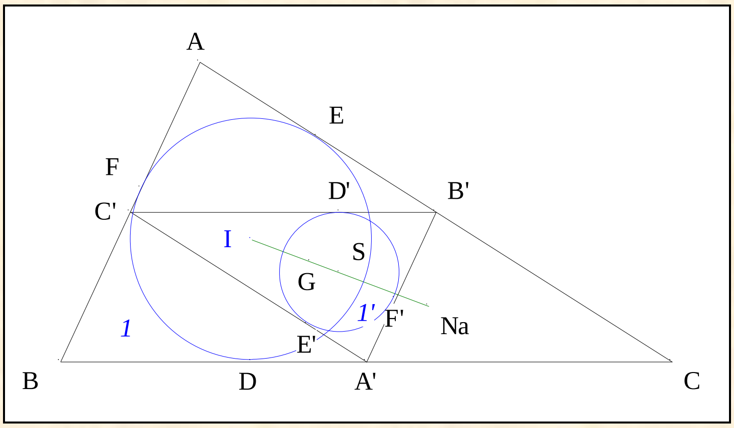


- Notons D', E', F' les pieds des perpendiculaires abaissées de S resp. (B'C'), (C'A'), (A'B')
  et r le rayon de *1*.

- **Scolies :** **(1)** G est le premier tiers-point de [AA'] à partir de A'
  (2) G est le premier tiers-point de [IS] à partir de S
  (3) (SD') // (ID)
  (4) D, G et D' sont alignés.

- **Conclusion partielle :** d'après Thalès "Rapports", 2.SD' = r.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que 2.SE' = r
  2.SF' = r.



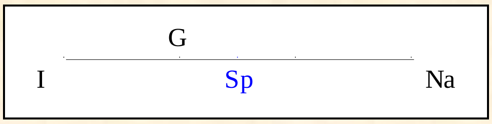
- **Conclusion :** S est le centre de *1'*.

Commentaire : la preuve serait plus rapide en évoquant une homothétie, mais l'auteur se refuse d'avoir recours aux transformations (application de l'Analyse à la Géométrie) pour mieux rester dans le domaine de la Géométrie pure.

Cette approche
nous permettrait de montrer que Na est le centre du triangle antimédian de ABC.

Scolies : **(1)** ce centre est noté Sp

(2) Disposition



Énoncé traditionnel :

le centre du cercle de Spieker d'un triangle
est
le milieu du segment joignant le centre du triangle au point de Nagel de ce triangle.

Analogie et remarques de T. Spieker et M. de Villiers

Der Kreis um P, welcher die Seiten des Mittendreiecks DEF berührt, ist analog dem Feuerbach'schen Kreise, welcher diesem Dreieck umbeschrieben ist. Der Mittelpunkt P des erstern (Fig. d. vor. Paragraphen Zusatz) liegt auf der Axe MS, der Mittelpunkt N des andern nach § 220 Zus. auf der Axe OS, beide in proportionalem Abstande, so daß

PS : SM = NS : SO = 1 : 2.[11]

[11] Spieker T., *Lehrbuch der ebenen Geometrie* (1862) 180-182

The *circumcentre* (*O*), centroid (*G*) & *orthocentre* (*H*) of any triangle *ABC* are collinear (*Euler* line), *GH* = 2*GO* and the midpoint of *OH* is the centre of the *nine-point* circle (*P*) so that *HP* = 3 *PG*.	The *incentre* (*I*), centroid (*G*) & *Nagel* point (*N*) of any triangle are collinear (*Nagel* line), *GN* = 2*GI* and the midpoint of *IN* is the centre of the *Spieker* circle (*S*) so that *NS* = 3 *SG*.

[12]

(3) Exercice **2** de T. Spieker : rayon de *1'*

Énoncé traditionnel :

le rayon du cercle de Spieker d'un triangle
est
la moitié du rayon du cercle inscrit de ce triangle.

Remarque de T. Spieker et M. de Villiers

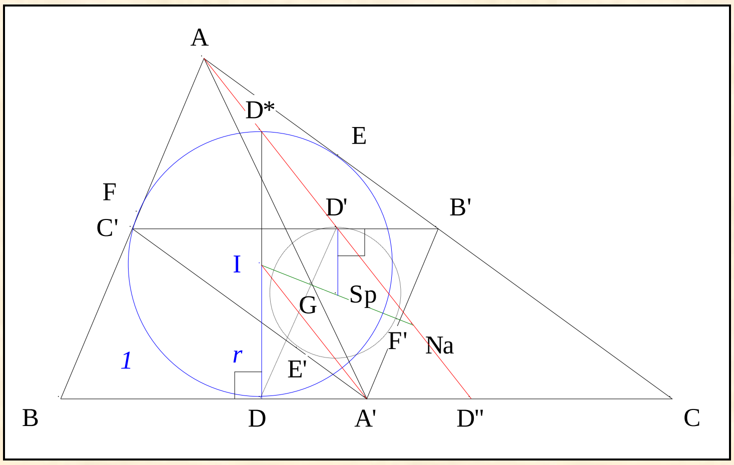
2. Der Radius des dem Mittendreieck DEF einbeschriebenen Kreises ist halb so groß, als der Radius des einbeschriebenen Kreises des Dreiecks ABC.

[13]

The *nine-point* circle is the *circumcircle* of *ABC*'s median triangle and has radius half that of *circumcircle* of *ABC*.	The *Spieker* circle is the *incircle* of *ABC*'s median triangle and has radius half that of *incircle* of *ABC*.

[14]

(4) Exercice **4** de T. Spieker : points de contact du cercle de Spieker avec A'B'C'



- Notons D* l'antipôle de D relativement à *1'*
  et D'' le symétrique de D par rapport à A'.

- Nous savons que
  * A, D*, Na et D'' sont alignés [15]
  * D' est le point de contact de *1'* avec (B'C').

---

[12] de Villiers M., A generalisation of the Spieker circle and Nagelline, School of Science Mathematics, & Technology Education, University of KwaZulu-Natal (Afrique du Sud)

[13] Spieker T., *Lehrbuch der ebenen Geometrie* (1862) 180-182

[14] de Villiers M., A generalisation of the Spieker circle and Nagelline, School of Science Mathematics, & Technology Education, University of KwaZulu-Natal (Afrique du Sud)

[15] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 7 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

- **Conclusion :** d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle NaID*, D' est sur (ANa).

Remarque de T. Spieker et M. de Villiers

4. Derselbe Kreis berührt die Seiten des Mittendreiecks DEF in den Punkten, wo sie von den Ecktransversalen durch Q geschnitten werden.[16]

The *nine-point* circle cuts the sides of *ABC* where the extensions of the altitudes through the *orthocentre* meet the sides of *ABC*.	The *Spieker* circle touches the sides of the median triangle where they meet the lines from the *Nagel* point to the vertices of *ABC*.

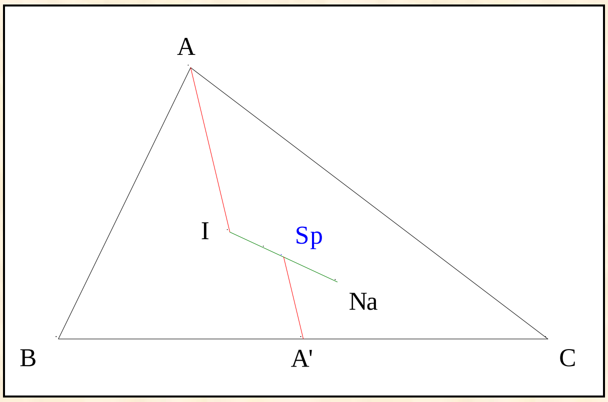
[17]

C. PARALLÈLE À UNE BISSECTRICE

1. Une parallèle à (AI)

VISION

Figure :



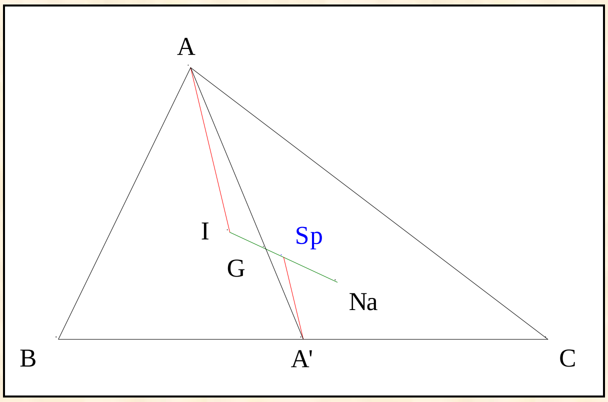
Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
Na le point de Nagel de ABC,
A' le milieu de [BC]
et Sp le milieu de [INa].

Donné : (A'Sp) est parallèle à (AI).

[16] Spieker T., *Lehrbuch der ebenen Geometrie* (1862) 180-182

[17] de Villiers M., A generalisation of the Spieker circle and Nagelline, School of Science Mathematics, & Technology Education, University of KwaZulu-Natal (Afrique du Sud)

VISUALISATION

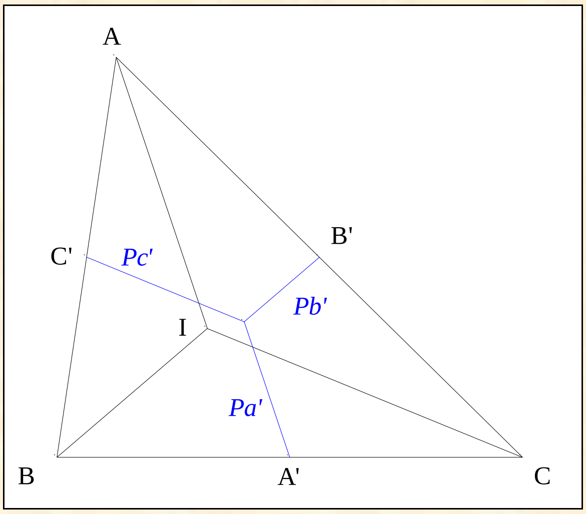


- Notons G le point médian de ABC.
- **Scolie :** **(1)** G est le premier tiers-point de [AA'] à partir de A'
  (2) G est le premier tiers-point de [ISp] à partir de Sp
- **Conclusion :** d'après Thalès "Rapports", (A'Sp) est parallèle à (AI).

2. Deux exercices

EXERCICE 1

Figure :

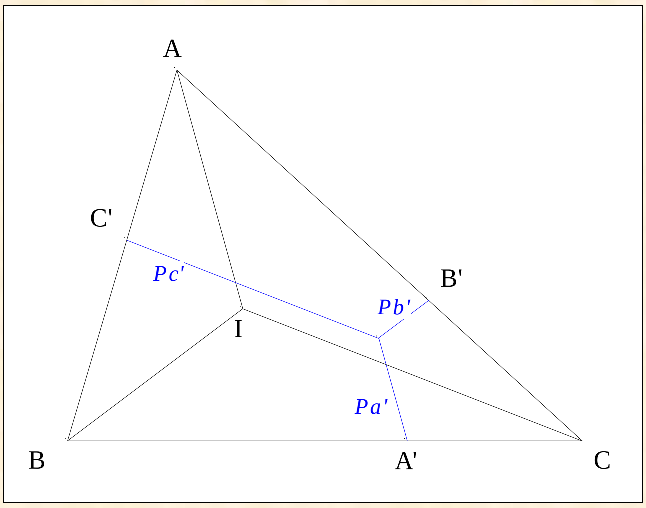


Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
A'B'C' le triangle médian de ABC
et *Pa'*, *Pb'*, *Pc'* les parallèles à (AI), (BI), (CI) passant resp. par A', B', C'.

Donné : *Pa'*, *Pb'* et *Pc'* sont concourantes.

EXERCICE 2

Figure :



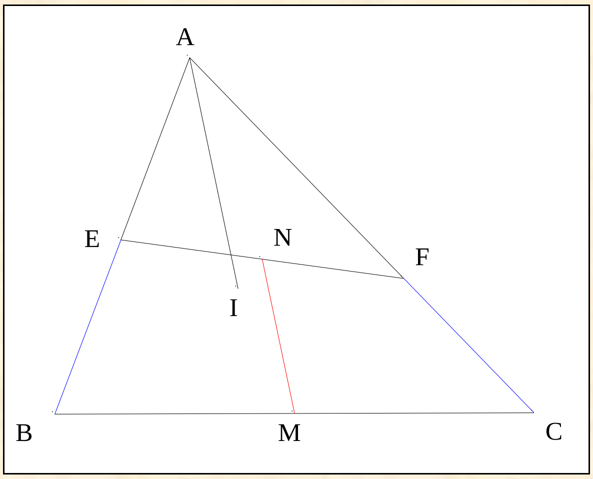
Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	A'B'C'	le triangle de Nagel
et	*Pa'*, *Pb'*, *Pc'*	les parallèles à (AI), (BI), (Ci) passant par A', B', C'.

Donné : *Pa'*, *Pb'* et *Pc'* sont concourantes. [18]

3. Une autre parallèle à (AI)

VISION

Figure :

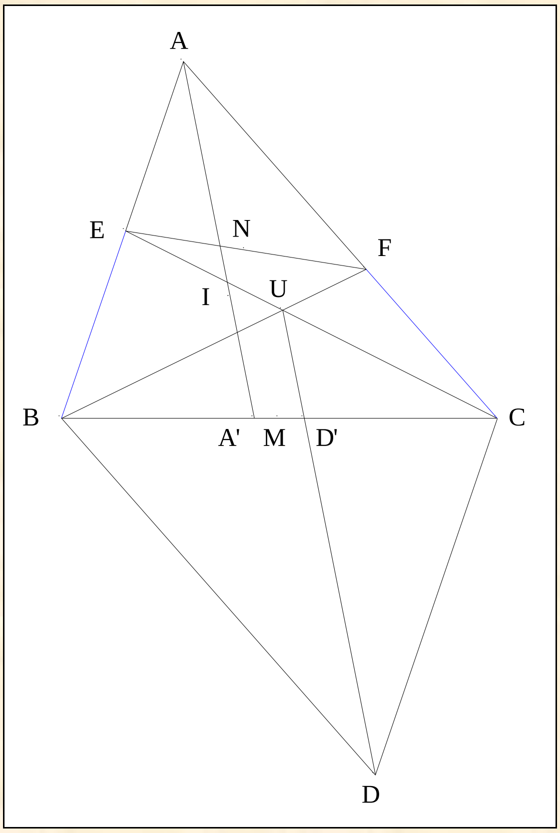


Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	E, F	deux points resp. de (AB), (AC) tels que BE = CF
et	M, N	les milieux resp. de [BC], [EF].

[18] Emelyanov L., Russie 1992

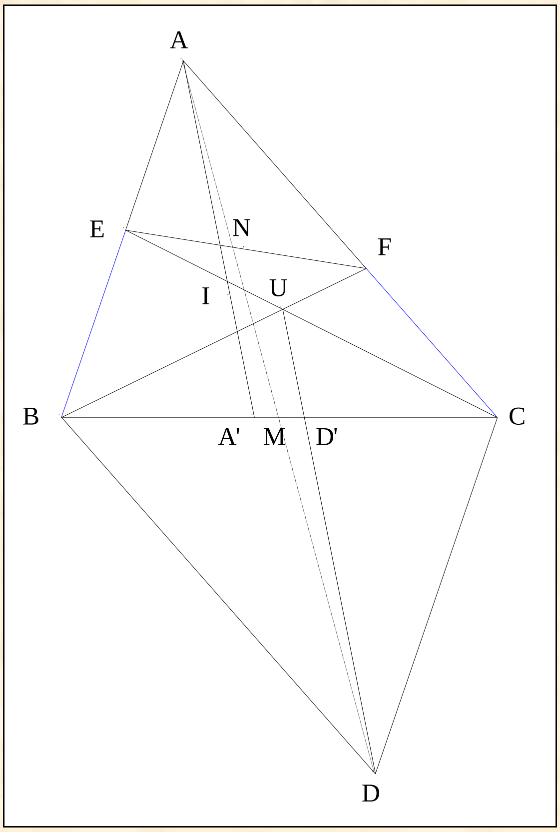
Donné : (MN) est parallèle à (AI).

VISUALISATION

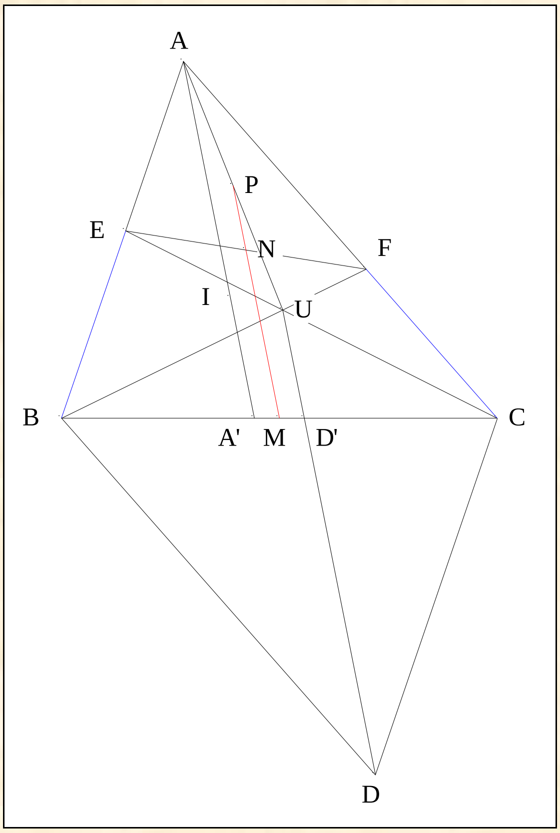


- Notons D le point tel que le quadrilatère ABDC soit un parallélogramme
  U, D' le point d'intersection resp. de (BF) et (CE), (DU) et (BC),
  et A' le pied de la A-bissectrice de ABC.

- D'après Pappus "Bissectrice d'un parallélogramme" (Cf. **G.** Appendice **1**),
  (DD'U) est la D-bissectrice intérieure de ABDC ;
  en conséquence, (DD'U) // (AIA').



- Les diagonales d'un parallélogramme se coupant en leur milieu, M est le milieu de [AD] ;
  d'après l'axiome de passage **IIIb**
  appliqué à la bande de frontière (AA') et (DD'), M est le milieu de [A'D'].



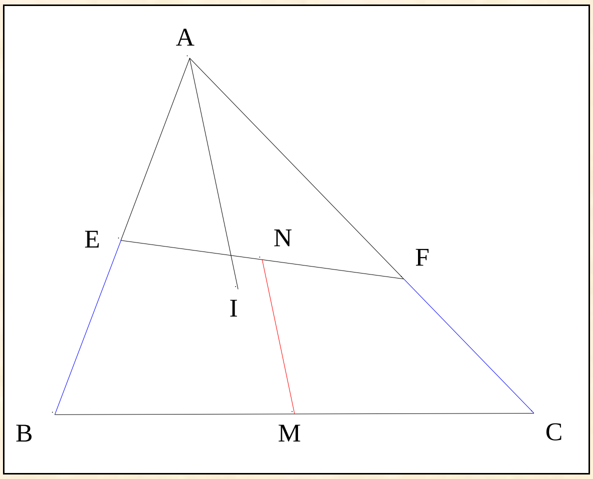
- Notons P le milieu de [AU].

- D'après "La ponctuelle de Gauss" [19]
  appliqué au quadrilatère complet AEUF, M, N et P sont alignés.

- **Conclusion :** (MN) étant l'axe médian du trapèze AA'D'U, (MN) est parallèle à (AI).

4. Exercice

Figure :



Traits : ABC un triangle,
E, F deux points resp. de (AB), (AC) tels que BE = CF,
M, N les milieux resp. de [BC], [EF]
et Sp, S'p les points de Spieker resp. des triangles ABC, AEF.

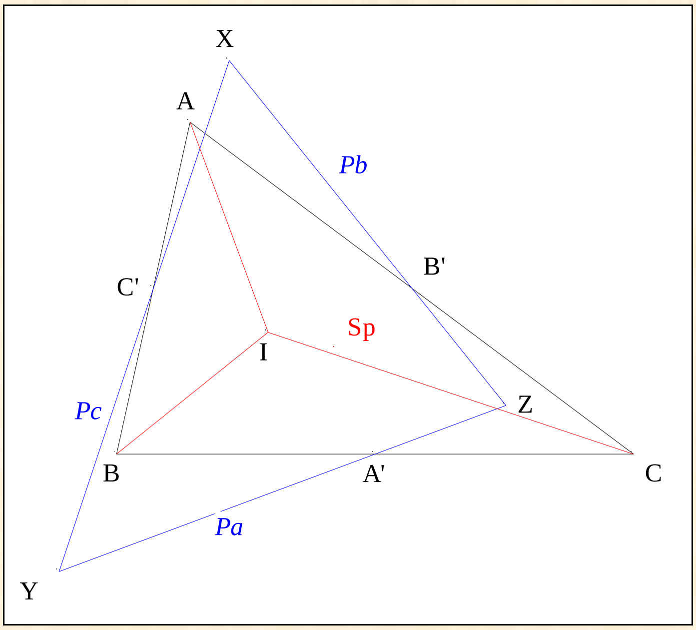
Donné : Sp, S'p, M et N sont alignés. [20]

5. Exercice résolu

VISION

Figure :

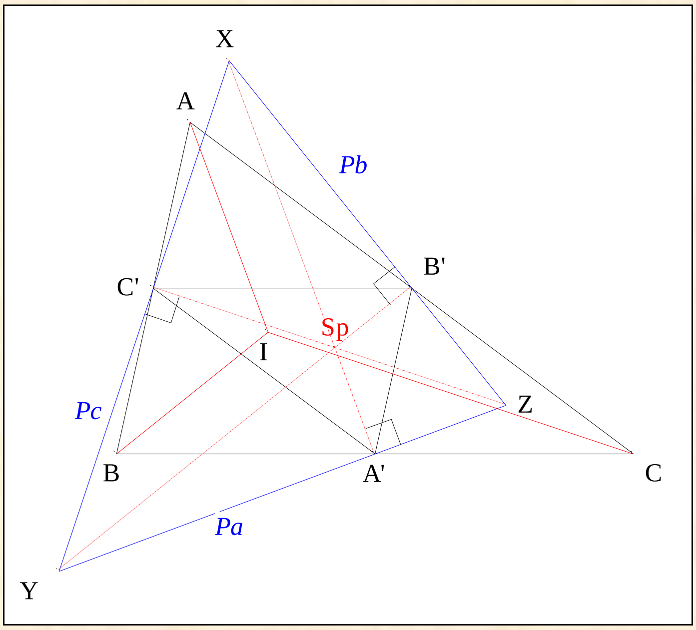
[19] Ayme J.-L., La droite de Gauss et la droite de Steiner, G.G.G. vol. **4** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
[20] Spieker point, AoPS du 05/08/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=492437



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	A'B'C'	le triangle médian de ABC,
	Pa, *Pb*, *Pc*	les perpendiculaires à (AI), (BI), (CI) passant resp. par A', B', C',
	X, Y, Z	les points d'intersection de *Pb* et *Pc*, *Pc* et *Pa*, *Pa* et *Pb*,
et	Sp	le point de Spieker de ABC.

Donné : Sp est l'orthocentre du triangle XYZ. [21]

VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** XYZ est le triangle excentral de A'B'C'
  (2) (XA'), (YB') et (ZC') sont les X, Y, Z-hauteur de XYZ

---

[21] Nice result in a triangle, AoPS du 28/05/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=481519
Various centers of a triangle, AoPS du 28/10/2006 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=116578

(3) (XA'), (YB') et (ZC') sont resp. parallèles à (AI), (BI), (CI).

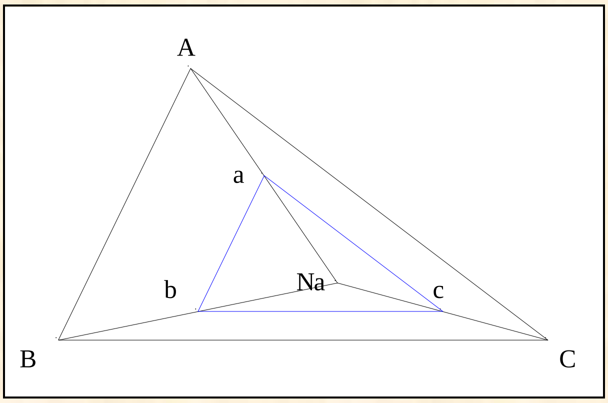
- D'après (XA'), (YB') et (ZC') sont concourantes en Sp.
- **Conclusion :** Sp est l'orthocentre du triangle XYZ.

D. LE TRIANGLE DE SPIEKER

1. Présentation

VISION

Figure :



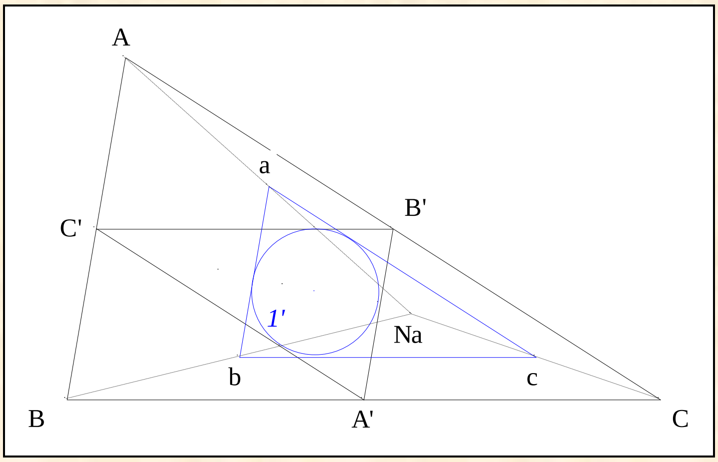
Finition : ABC un triangle,
Na le point de Nagel de ABC,
et a, b, c les milieux resp. de [ANa], [BNa], [CNa].

Définition : abc est "le triangle de Spieker de ABC".

2. Le triangle de Spieker

VISION

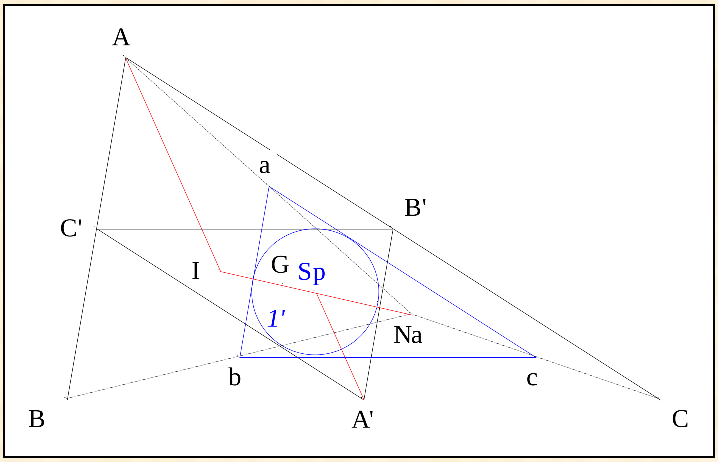
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	Na	le point de Nagel de ABC,
	A'B'C'	le triangle médian de ABC,
	1'	le cercle de Spieker de ABC,
et	a, b, c	les milieux resp. de [ANa], [BNa], [CNa].

Donné : *1'* est le cercle inscrit du triangle abc.[22]

VISUALISATION

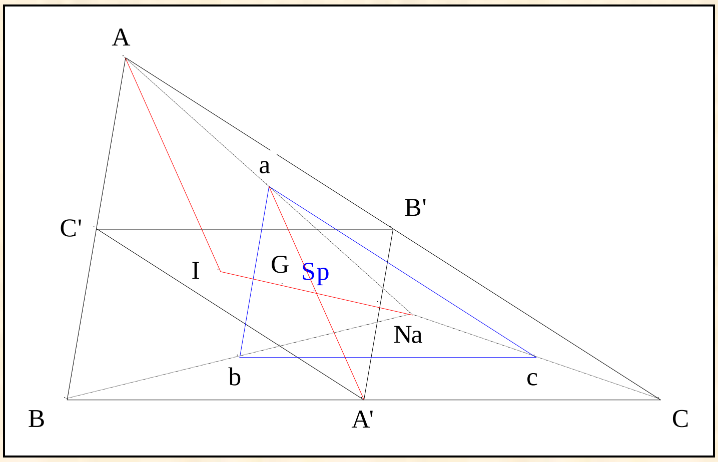


• Notons	G	le centre de gravité de ABC,
	I	le centre du cercle inscrit dans ABC,
et	Sp	le centre de *1'*.

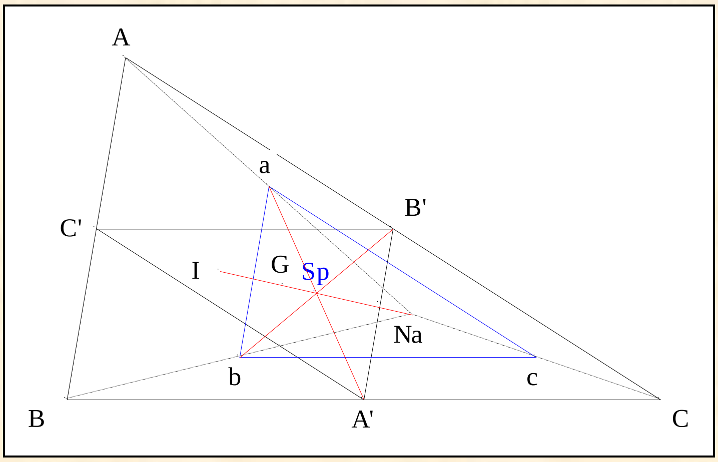
• D'après **B. 1.** et **2.**
(1) Na, S, G et I sont alignés
(2) Sp est le milieu de [NaI].

• D'après **C. 1.** (AI) // (A'Sp).

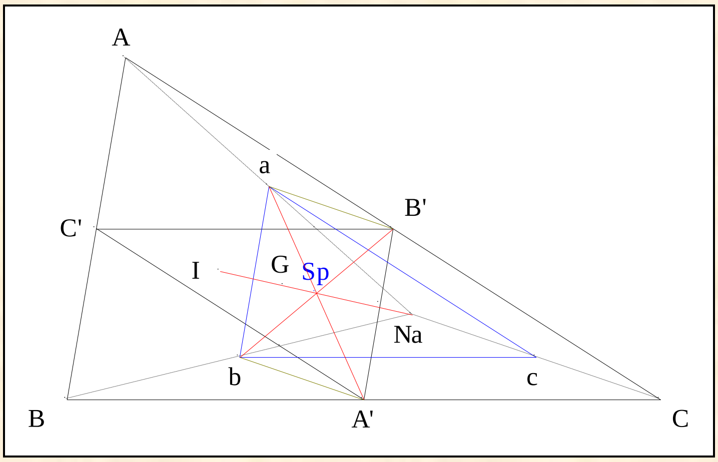
[22] Spieker T., Ein merkwürdiger Kreis um den Schwerpunkt des Perimeters des gerdlinigen als Analogen des Kreises der neuen Punkte, *Archives* de Grunert **51** (1870) 10-14



- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au triangle AINa, (aS) // (AI) ;
  nous savons que (AI) // (A'Sp) ;
  par transitivité de la relation //, (aS) // (A'Sp) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (aS) = (A'Sp) ;
  en conséquence, (A'Sp) passe par a. (Cf. scolie **2**)



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B'Sp) passe par b
  (C'Sp) passe par c.



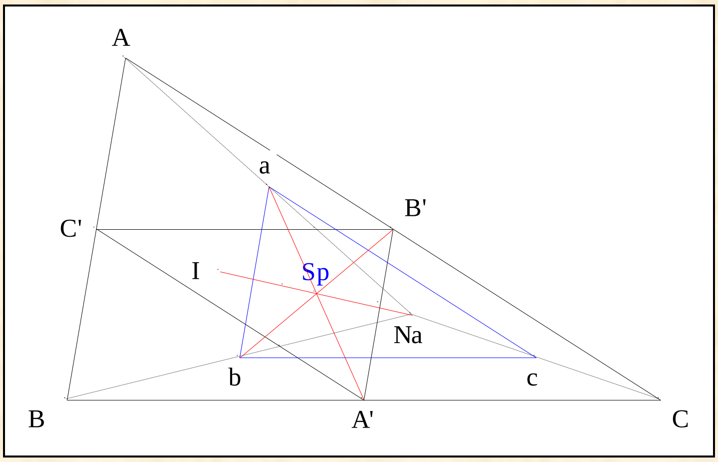
- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué **(1)** au triangle ACNa, (aB') // (NaC) et 2.aB' = CNa

(2) au triangle BCNa (NaC) // (bA') et CNa = 2.bA' ;

par transitivité de la relation //, (aB') // (bA') et aB = bA' ;

en conséquence, le quadrilatère abA'B' est un parallélogramme.

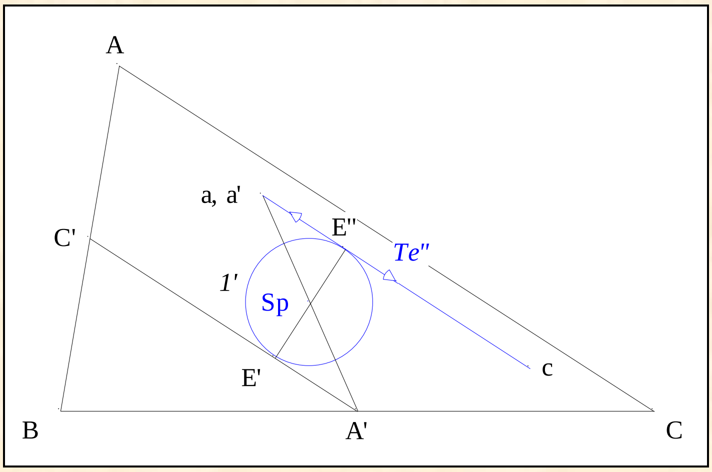
- **Conclusion partielle :** Sp est le milieu [aA']. (Cf. scolie **2**)



- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au triangle ABNa, (ab) // (AB) ;
  nous savons que (AB) // (A'B') ;
  par transitivité de la relation //, (ab) // (A'B') ;

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (bc) // (B'C') et (ca) // (C'A').

- **Conclusion partielle :** les triangles A'B'C' et abc sont homothétiques de centre Sp.



- Notons E' le point de contact de (A'C') avec *1'*,
  E" l'antipôle de E' sur *1'*,
  Te" la tangente à *1'* en E"
  et a' le point d'intersection de (SpA') avec *Te"*.

- D'après l'axiome **IIIa** de passage, appliqué à la bande de frontières (A'C') et *Te"*,
  Sp étant le milieu de [E'E"], S est le milieu de [A'a'] ;

  en conséquences, **(1)** a' et a sont confondus
  (2) *Te"* et (ca) sont confondus.

- **Conclusion partielle :** (ca) est tangente à *1'* en E".

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (ab) est tangente à *1'*
  (bc) est tangente à *1'*.

- **Conclusion :** *1'* est le cercle inscrit du triangle abc.

Scolies : **(1)** abc est "le triangle de Spieker" de ABC

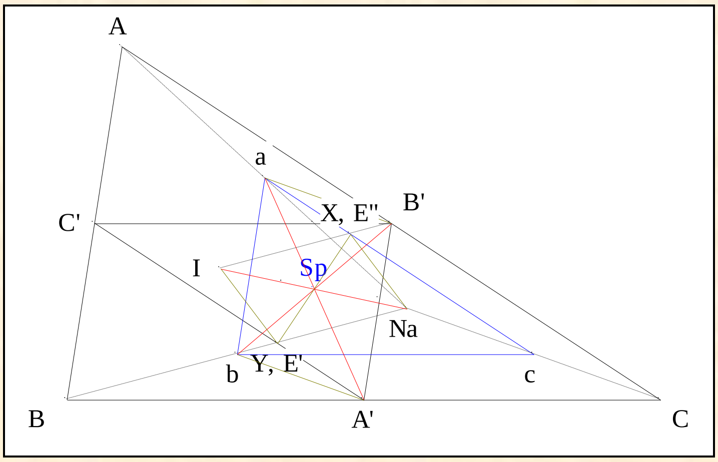
(2) c'est l'exercice **1** de T. Spieker

182 Abschnitt XIV. § 222—224.

Zusätze. 1. Der Punkt P liegt auf den Verbindungslinien der Mitte jeder Seite mit der Mitte des obern Abschnitts der zugehörigen Ecktransversale durch Q.

[23]

(3) Exercice **3** de T. Spieker



- Le quadrilatère IB'A'b ayant ses diagonales se coupant en leur milieu est un parallélogramme ;
  en conséquence, (IB') // (bNa).

- Notons X, Y le point d'intersection resp. de (IB') et (ab), (BNa) et (A'C').

- Le quadrilatère IXNaY ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux, est un parallélogramme ;
  Sp étant le milieu de la diagonale [INa], Sp est le milieu de [XY].

- **Conclusion :** d'après **B. 2.** Scolie **4**, Y i.e. E' étant le point de contact de *1'* avec (A'C')
  X i.e. E" est le point de contact de *1'* avec (ac).

3. Der dem Mittendreieck DEF einbeschriebene Kreis berührt auch die Seiten des Dreiecks, dessen Ecken die Mitten der oberen Abschnitte der Ecktransversalen durch Q sind, und zwar in den Punkten, wo sie von den Strahlen aus M nach den Ecken des Mittendreiecks geschnitten werden.

[23] Spieker T., *Lehrbuch der ebenen Geometrie* (1862) 180-182

[24]

The *nine-point* circle passes through the midpoints of the segments from the *orthocentre* to the vertices of the triangle.	The *Spieker* circle touches the sides of the triangle whose vertices are the midpoints of the segments from the *Nagel* point to the vertices of *ABC*.

[25]

E. DEUX LIGNES CENTRALES

PASSANT

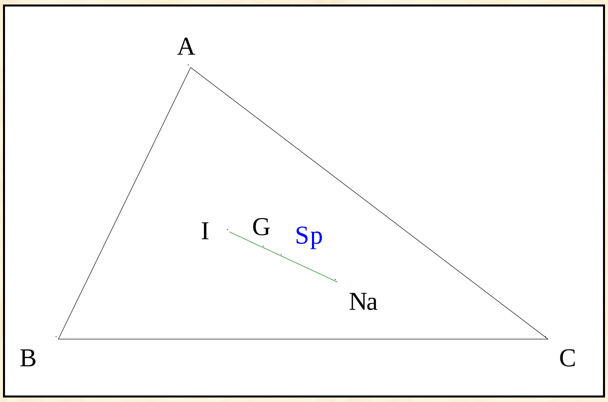
PAR

Sp

1. L'alignement I-G-Sp-Na

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
G le point médian de ABC,
I le centre de ABC,
Na le point de Nagel de ABC,
et Sp le milieu de [INa].

Donné : I, G, Sp et Na sont alignés.

Rappels **(1)** la preuve vient d'être faite
(2) Sp est le milieu de [INa].

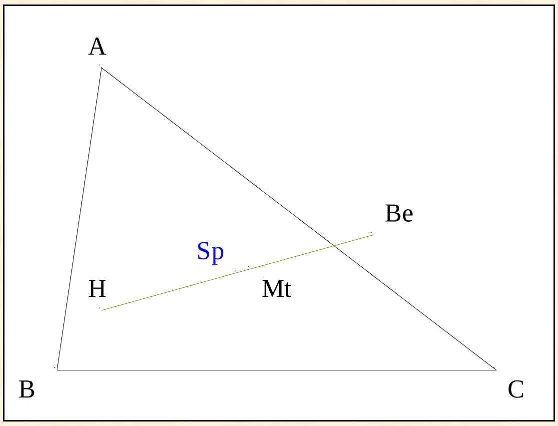
[24] Spieker T., *Lehrbuch der ebenen Geometrie* (1862) 180-182

[25] de Villiers M., A generalisation of the Spieker circle and Nagelline, School of Science Mathematics, & Technology Education, University of KwaZulu-Natal (Afrique du Sud)

2. L'alignement H-Sp-Mt-Be

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
Sp le point de Spieker de ABC,
Mt le Mittenpunkt de ABC
et Be le point de Bevan de ABC.

Donné : H, Sp, Mt et Be sont alignés.

Énoncé traditionnel :

la droite joignant l'orthocentre au Mittenpunckt d'un triangle
passe par
le point de Spieker de ce triangle.

Note historique : ce résultat a été rappelé par Gilbert Boutte [26] en 2002.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [27].

---

[26] Boutte G., *Sur quelques propriétés des triangles podaires des centres des cercles exinscrits* (16/03/2002) ; http://g.boutte.free.fr/articles.htm

[27] Ayme J.-L., La droite de Soddy-Hermès, G.G.G. vol. **6**, p. 30-31 ;
Trois alignements remarquables, G.G.G. vol. **9**, p. 13-23 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

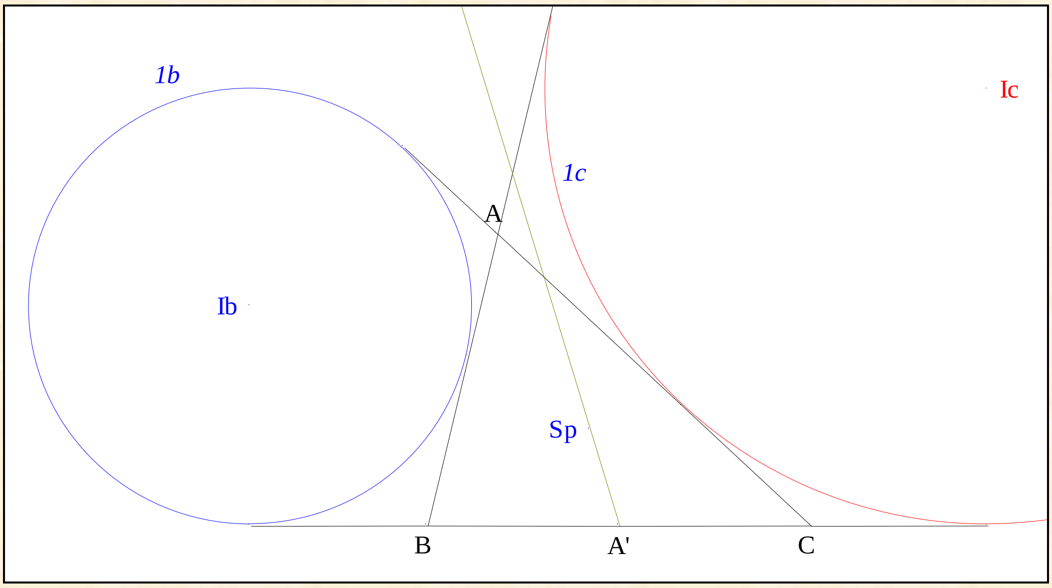
F. AUTRES NATURES DE Sp

I. CENTRE RADICAL

1. Un lemme

VISION

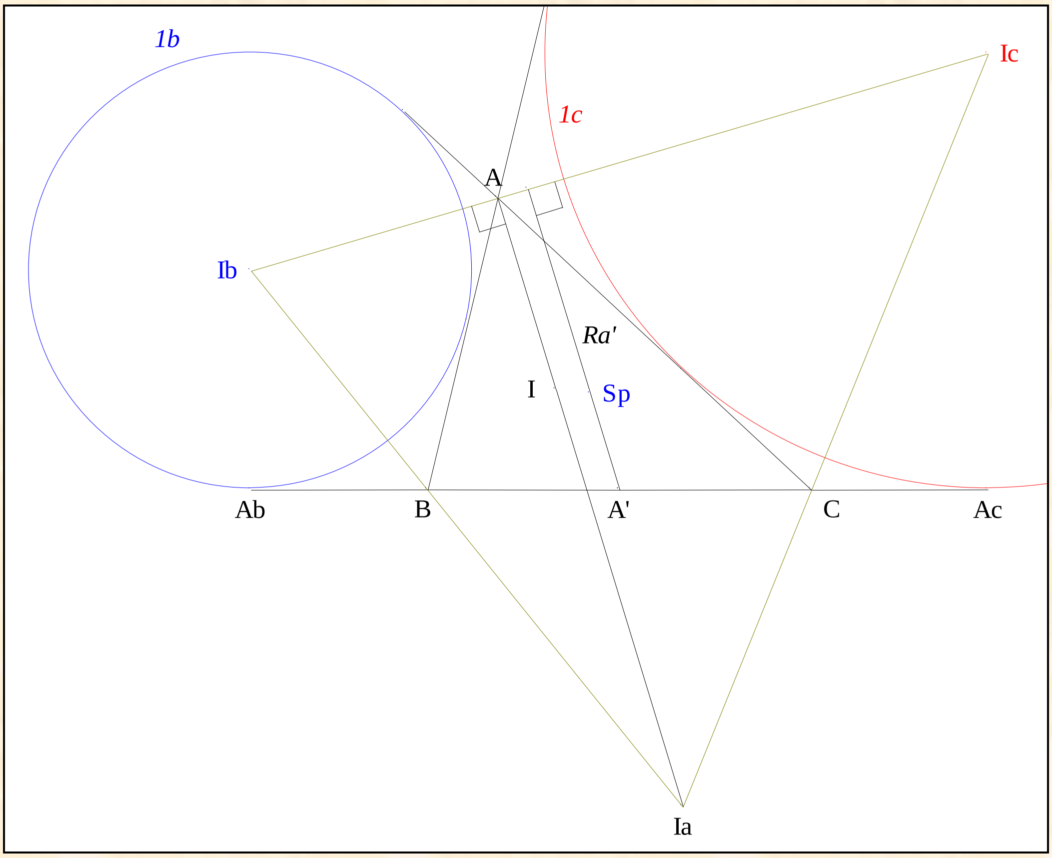
Figure :



Traits : ABC un triangle,
A' le milieu de [BC],
Sp le point de Spieker de ABC
et *1b*, *1c* les B, C-excercles de ABC.

Donné : (A'Sp) est l'axe radical de *1b* et *1c*.

VISUALISATION



- Notons Ia le A-excentre de ABC,
  Ib, Ic les centres resp. de *1b*, *1c*,
  Ab, Ac les points de contact de (BC) resp. avec *1b*, *1c*
  I le centre de ABC
  et *Ra'* la perpendiculaire à (IaIb) pasant par A'.

- **Scolie :** **(1)** A' est le milieu de [BC]
  (2) (AI) // *Ra'*
  (3) ABC est le triangle orthique de IaIbIc.

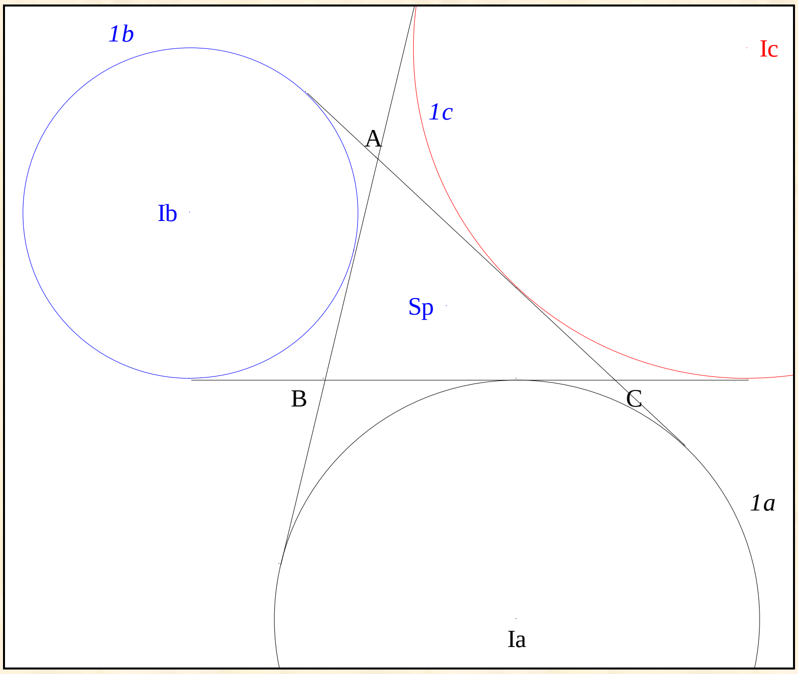
- D'après **C. 1.** Deux parallèles, *Ra'* passe par Sp.

- **Conclusion :** (A'Sp) est l'axe radical de *1b* et *1c*.

2. Sp centre radical des trois excercles

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
1a le A-excercles de ABC.

Donné : Sp est le centre radical de *1a*, *1b* et *1c*.

VISUALISATION

- D'après **F. I. 1.**, **(1)** (A'Sp) est l'axe radical de *1b* et *1c*
  (2) (B'Sp) est l'axe radical de *1c* et *1a*
  (3) (C'Sp) est l'axe radical de *1a* et *1b*.

- **Conclusion :** Sp est le centre radical de *1a*, *1b* et *1c*. [28]

Énoncé traditionnel :

le point de Spieker d'un triangle
est
le centre d'un cercle orthogonal aux trois excercles de ce triangle

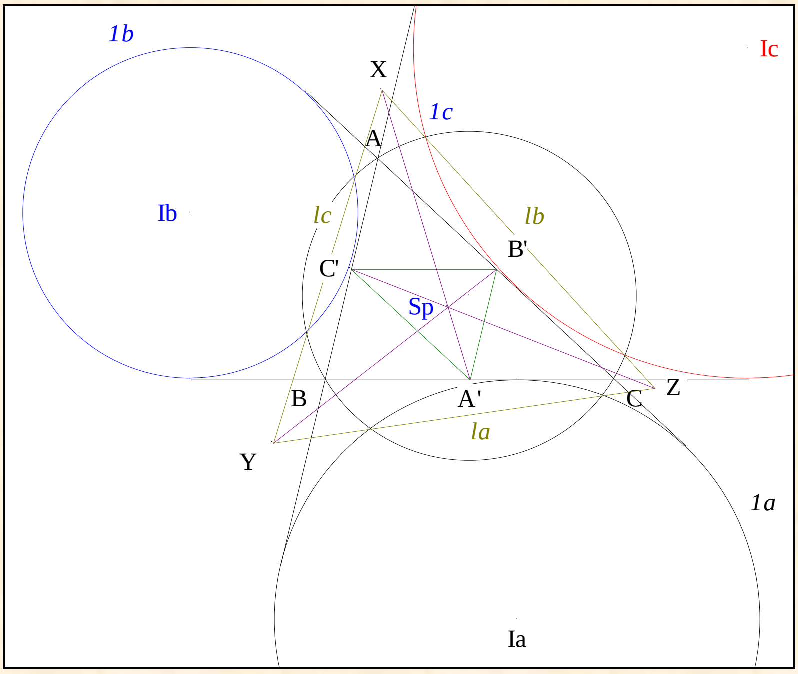
3. Un résultat de l'auteur

VISION

Figure :

---

[28] Spieker T., *Lehrbuch der ebenen Geometrie* (1909)
a question about The radical center of three excircles, AoPS du 19/10/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=439493&p=2479124



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	A'B'C'	le triangle médian de ABC,
	Sp	le point de Spieker de ABC
	1a, *1b*, *1c*	les A, B, C-excercles de ABC.
	la, *lb*, *lc*	les axes radicaux resp. de *1b* et *1c*, *1c* et *1a*, *1a* et*1b*,
et	X, Y, Z	les points d'intersection resp. de *lb* et *lc*, *lc* et *la*, *la* et*lb*.

Donné : Sp est le centre de perspective des triangles XYZ et A'B'C'. [29]

Commentaire : cette conjecture de l'auteur a été vérifiée par le calcul barycentrique.

---

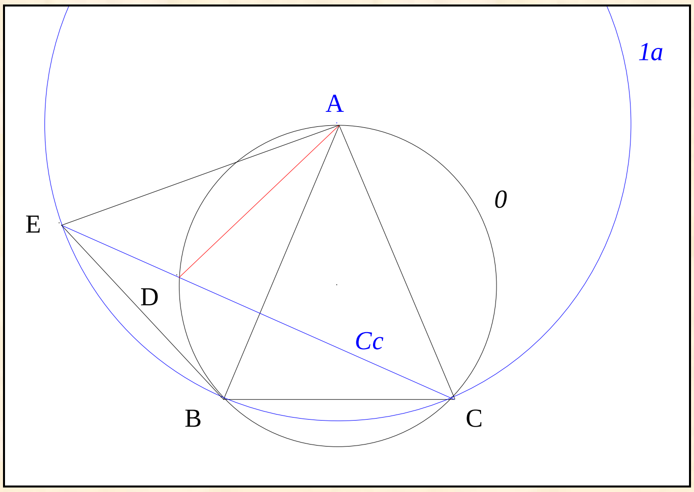
[29] Ayme J.-L., Conjecture about the Spieker's point, Message *Hyacinthos* #**19707** du 10/01/2011 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/messages/19707

II. CENTRE CLIVIEN

1. Une bissectrice

VISION

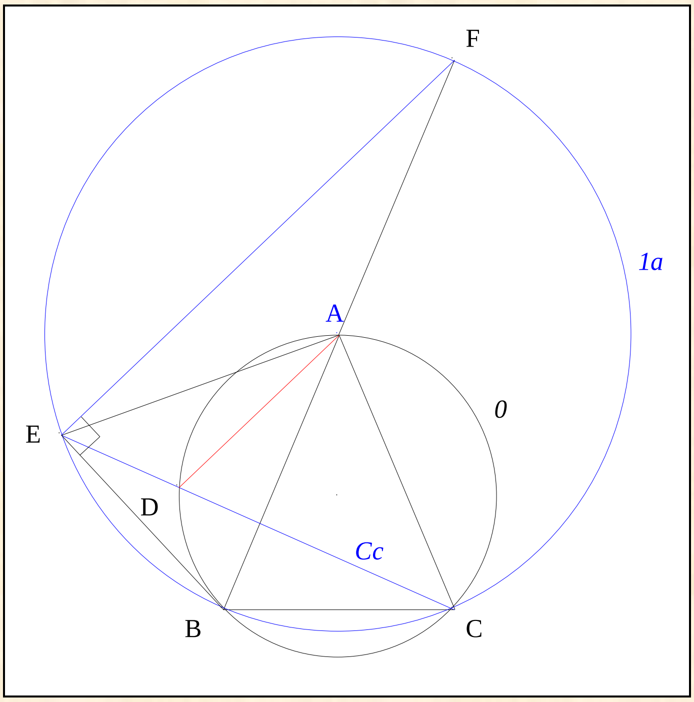
Figure :



Traits : ABC un triangle A-isocèle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
1a le cercle de centre A passant par B,
Cc une C-cévienne intérieure de ABC
et D, E les seconds points d'intersection de *Cc* resp. avec *0* et *1a*.

Donné : (AD) est la A-bissectrice du triangle AEB.

VISUALISATION



* Notons F le point diamétralement opposé à B sur *1a*.

* Les cercles *0* et *1a*, les points de base B et C, les moniennes (ABF) et (DCE) conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AD) // (EF) ;
  d'après Thalès, le triangle EBF étant inscriptible dans un demi-cercle, est E-rectangle ; (EF) ⊥ (BE) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (AD) ⊥ (BE) ;
  en conséquence, (AD) est la A-hauteur du triangle AEB.

* **Conclusion :** AEB étant A-isocèle, (AD) est aussi la A-bissectrice.

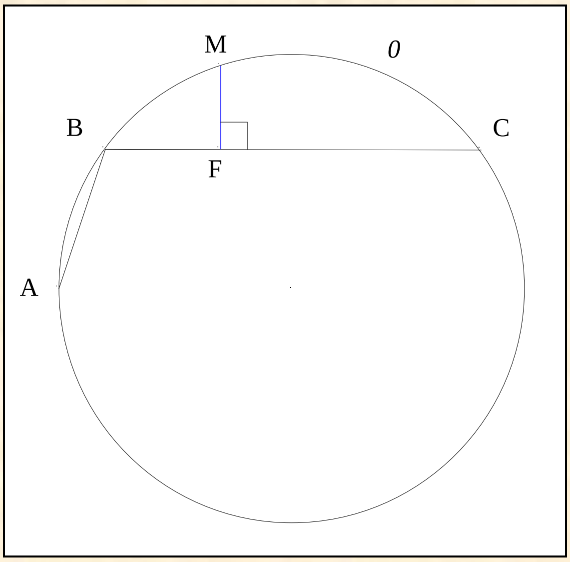
Scolies : **(1)** la A-hauteur (AD) de AEB est aussi la médiatrice de [BE]

(2) D'après le théorème de la médiatrice, le triangle DEB est D-isocèle.

2. **Le théorème de la corde brisée d'Archimède**

VISION

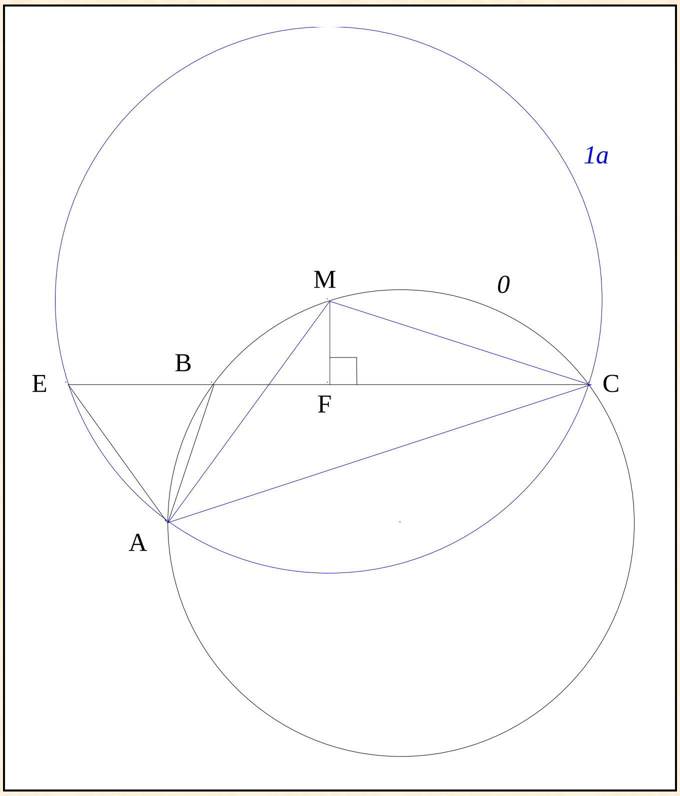
Figure :



Traits : *0* un cercle,
[ABC] une corde brisée en B tel que AB < BC,
M le milieu de l'arc ABC de *0*
et F le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur [BC].

Donné : F est le milieu de [ABC] i.e. AB + BF = FC. [30]

VISUALISATION



- M étant le point milieu de l'arc ABC, le triangle MAC est M-isocèle.

- Notons *1a* le cercle de centre M passant par A

30 Archimède.

et E le second point d'intersection de (BC) avec *0*.

- D'après **E. II. 2.** Scolie **2**, le triangle BEA étant B-isocèle, BE = BA.

- La droite diamétrale (MF) étant perpendiculaire à la corde [EC] de *0*, passe par le milieu de [CE]
  i.e. FB + BE = FC ou encore FB + BA = FC.

- **Conclusion :** F est le milieu de [ABC] i.e. AB + BF = FC.

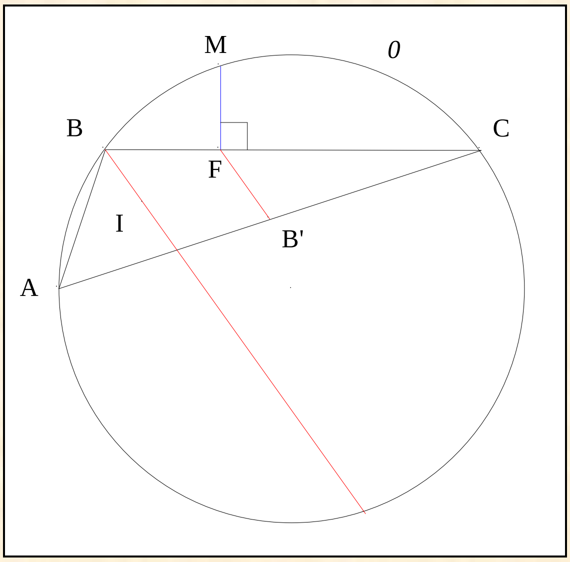
Note historique :

la trigonométrie grecque reposait sur l'utilisation des cordes et non des arcs.
Au 1-er siècle de notre ère, Claude Ptolémée trouva une série de théorèmes pour établir une table de cordes. Suite à l'émergence du sinus indou dans les siècles suivants, al Biruni [31] convertissait la table des cordes en la table des arcs grâce à ses propres théorèmes de passage. C'est au cours de cette laborieuse traduction qu'il rencontrait le théorème de la corde brisée. Parmi les 22 démonstrations qu'il recensa, il en attribua 3 à Archimède, 4 à lui et les autres à divers mathématiciens arabes. Notons qu'une des preuves d'Archimède consistait à construire le point E, symétrique de C par rapport à F, puis à mener ses calculs sur les cordes mises en jeu. Les historiens des mathématiques s'aperçurent par la suite que cette démarche revenait, en passant au sinus, à considérer la formule trigonométrique sin (x $\pm$ y).

3. Un étonnant parallélisme

VISION

Figure :

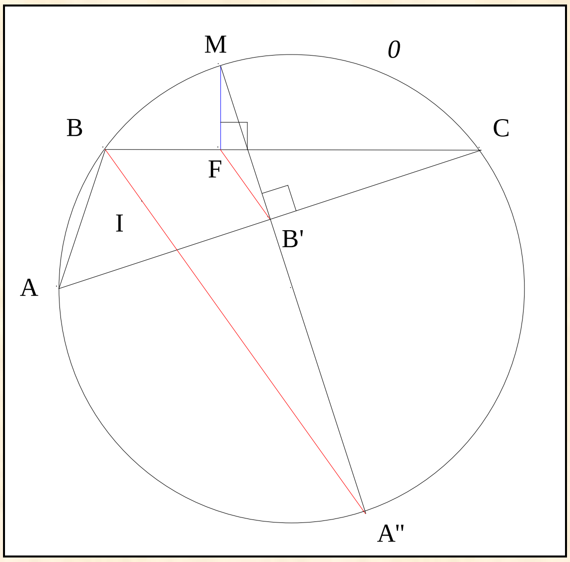


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
M le milieu de l'arc ABC de *0*,
F le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur [BC],
I le centre de ABC
et B' le milieu de [AC].

[31] Mathématicien arabe du Xème siècle

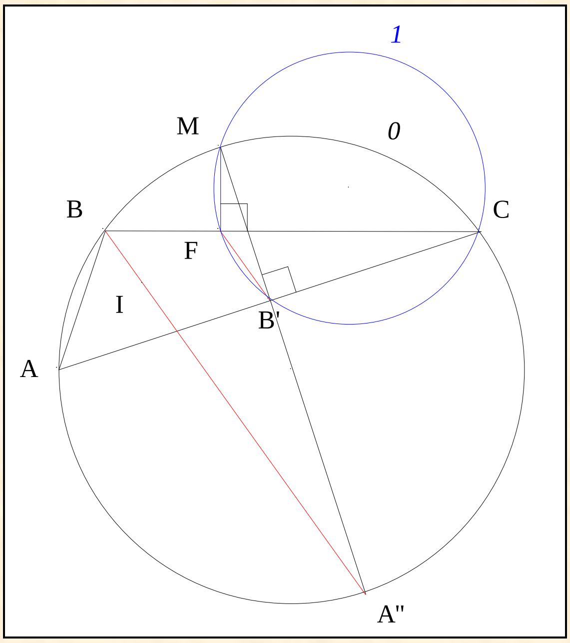
Donné : (B'F) est parallèle à (BI). [32]

VISUALISATION



- Notons B" le second point d'intersection de (BI) avec *0*.

- **Scolies :** **(1)** (BI) est la B-bissectrice intérieure de ABC
  (2) B" et M sont deux antipôles de *0*
  (3) B', B" et M sont alignés
  (4) [MA"] et [AC] sont deux cordes perpendiculaires de *0*.



- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", C, M, F et B' sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle de diamètre [CM].

- Les cercles *1* et *0*, les points de base M et C, les moniennes (B'MA") et (FCB) conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (B'F) // (A"IB).

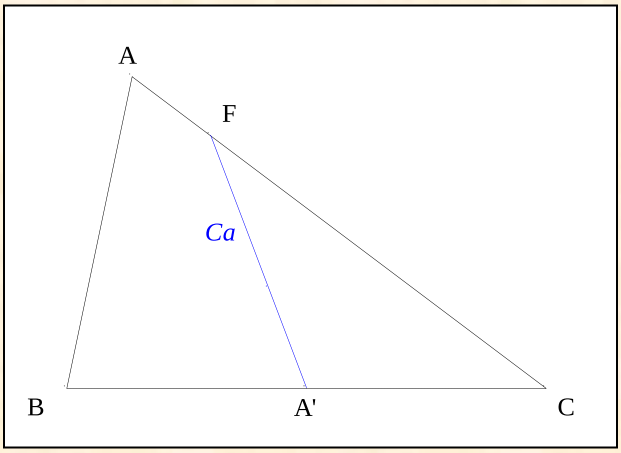
32

- **Conclusion :** (B'F) est parallèle à (BI).

4. Clivienne

VISION

Figure :



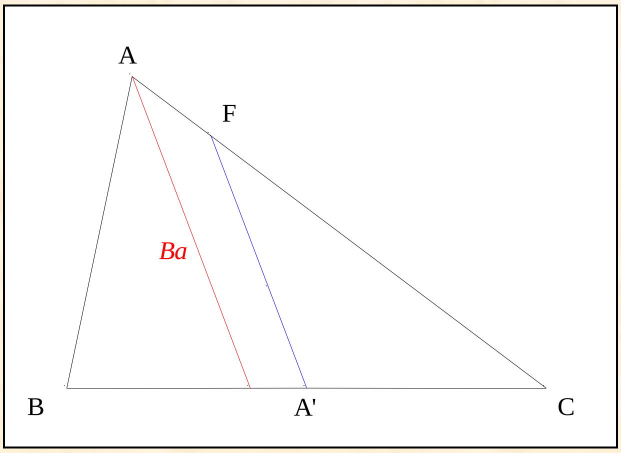
Finition : ABC un triangle tel que AB < AC,
A' le milieu de [BC],
et F le point de la ligne polygonale [BAC] tel que BA + AF = CF.

Définition : (A'F) est "la A-clivienne de ABC".

Notation : *Ca* la A-clivienne de ABC.

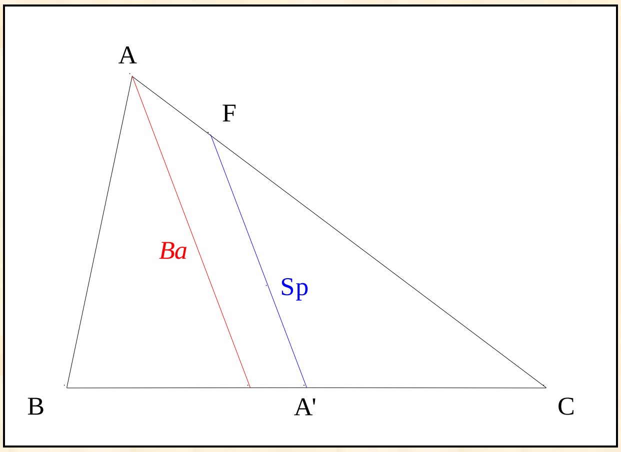
Commentaire : *Ca* divise le périmètre de ABC par deux.

Scolies : **(1)** une parallèle à une clivienne



- Notons *Ba* la A-bissectrice intérieure de ABC.
- **Conclusion :** d'après **F. II. 3.** (A'F) est parallèle à *Ba*.

(2) Un point sur une clivienne

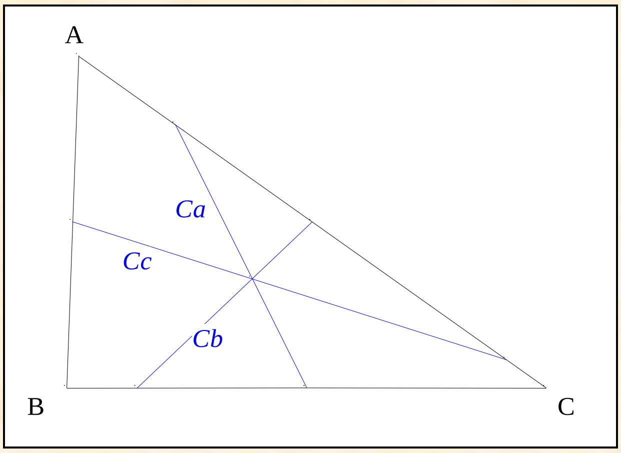


- Notons Sp le point de Spieker de ABC.
- **Conclusion :** d'après **C. I.**, (A'F) passe par Sp.

5. Sp est le centre clivien

VISION

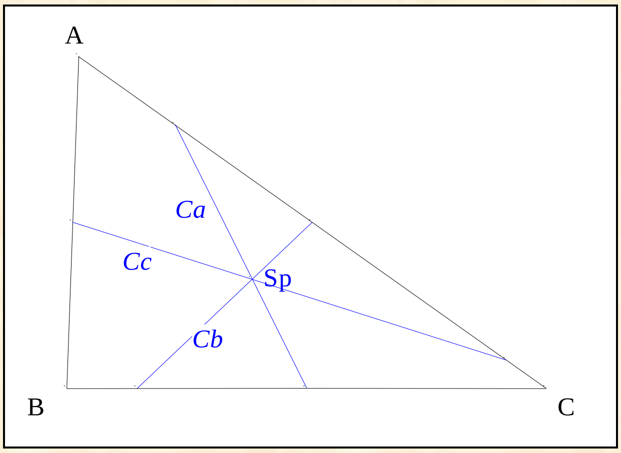
Figure :



Traits : ABC un triangle,
et *Ca*, *Cb*, *Cc* les A, B, C-cliviennes de ABC.

Donné : *Ca*, *Cb* et *Cc* sont concourantes.

VISUALISATION

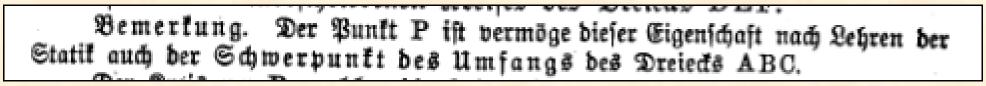


- Notons Sp le point de Spieker de ABC.

- **Conclusion :** d'après **F. II. 4.** scolie **2**, *Ca*, *Cb* et *Cc* sont concourantes en Sp.

Scolies : **(1)** Sp est "le centre clivien de ABC"

(2) Sp est le barycentre du triangle latéral



Bemerkung. Der Punkt P ist vermöge dieser Eigenschaft nach Lehren der Statik auch der Schwerpunkt des Umfangs des Dreiecks ABC.

[33]

Note historique : le concept de clivienne a été introduit en 1959 par Dov Avishalom [34] et repris par Ross Honsberger [35] en 1995.

---

33 Spieker T., *Lehrbuch der ebenen Geometrie* (1862) 180-182

34 Avishalom D., Perimeter-Bissector in a Triangle (en Hébreu), *Riveon Lematematika*, (1959) ;
Avishalom D., The Perimetric Bissection of Triangles, *Mathematical Magazin* **36** (1963) 60-62.

35 Honsberger R., *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*,
MAA, New Mathematical Library (1995) 1-4.

III. LE CENTRE DU CERCLE DE TAYLOR

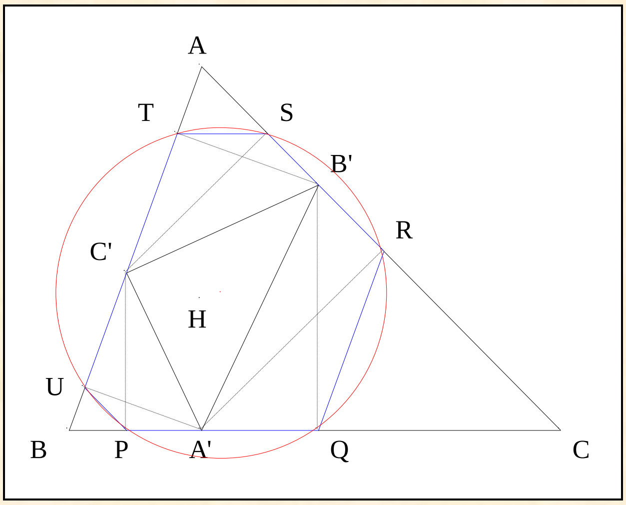
DU

TRIANGLE EXCENTRAL

1. Présentation du cercle de Taylor

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle **acutangle**,
	H	l'orthocentre de ABC,
	A', B', C'	les pieds des A, B, C-hauteurs de ABC,
	U, R	les pieds des perpendiculaires abaissées de A' resp. sur (AB), (CA),
	Q, T	les pieds des perpendiculaires abaissées de B' resp. sur (BC), (AB),
et	S, P	les pieds des perpendiculaires abaissées de C' resp. sur (CA), (BC).

Donné : l'hexagone PQRSTU est cyclique. [36]

2. Commentaire

Une étude de ce cercle et de la recherche de son centre peut être vue sur le site de l'auteur [37].
Le lecteur pourra y voir le résultat suivant

*Le centre du cercle de Taylor d'un triangle **acutangle***
est
le point de Spieker de son triangle orthique. [38]

[36] Taylor H.M., *Proceeding. of the London Mathematical Society*, vol. **XV**, p.122 ;
On a Six-Point Circle Connected with a triangle, *Messenger of Math* **LXXVII** (1881-82) 177-179

[37] Ayme J.-L., Le cercle de Taylor, G.G.G. vol. **9**, p. 12-15 ; http://perso.orange.fr:jl.ayme

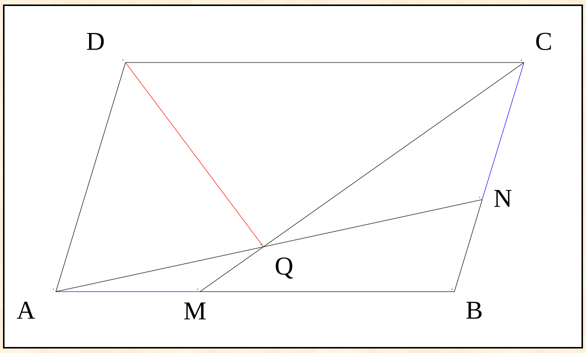
[38] Johnson R. A, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1960. (from 1929 original, p. 277).

G. APPENDICE

1. Une bissectrice d'un parallélogramme [39]

VISION

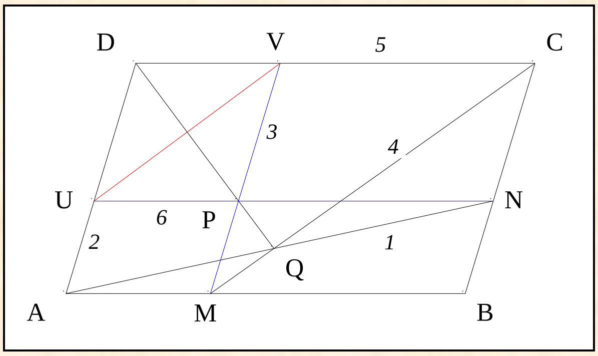
Figure :



Traits : ABCD un parallélogramme,
M, N deux points resp. de [AB], [BC] tels que AM = CN
et Q le point d'intersection de (AN) et (CM).

Donné : (DQ) est la D-bissectrice intérieure de ABCD.

VISUALISATION



- Notons *Dm* la parallèle à (BC) passant par M,
  Dn la parallèle à (AB) passant par N,
  U le point d'intersection de *Dn* avec (DA),
  V le point d'intersection de *Dm* avec (CD)
  et P le point d'intersection de *Dm* et *Dn*.

- D'après Pappus "Deux points à l'infini, scolie 3",
  (DPQ) est la pappusienne de l'hexagone dégénéré indiqué sur la figure ci-dessus.

- **Conclusion :** par construction, la quadrilatère DUPV étant un losange,
  (DQ) est la D-bissectrice intérieure de ABCD.

[39] Bundeswettbewerb Mathematik (2003) premier tour, problème **3**.

Note historique : ce problème a été reposé en 2004 aux épreuves de sélection de l'équipe française aux olympiades [40].

[40] French TST (2004) problem **2**.