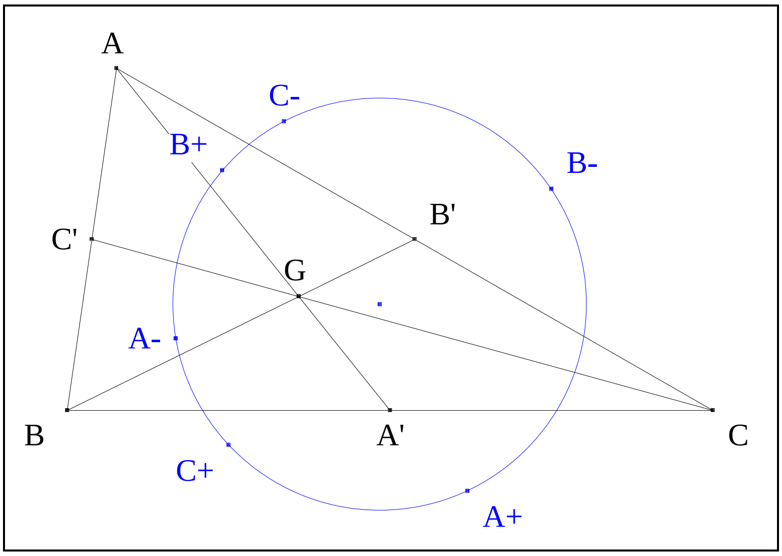
LE CERCLE DE van LAMOEN [1]

Jean-Louis AYME

Résumé. Nous présentons une preuve originale et purement synthétique concernant le cercle de de van Lamoen trouvé par ordinateur en 2000.
Tous les résultats cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle quelconque,
G le point médian de ABC,
A'B'C' le triangle médian de ABC
et A+, A-, B+, B-, C+, C- les centres des cercles circonscrits des triangles GCB', GC'B, GAC', GA'C, GBA', GB'A.

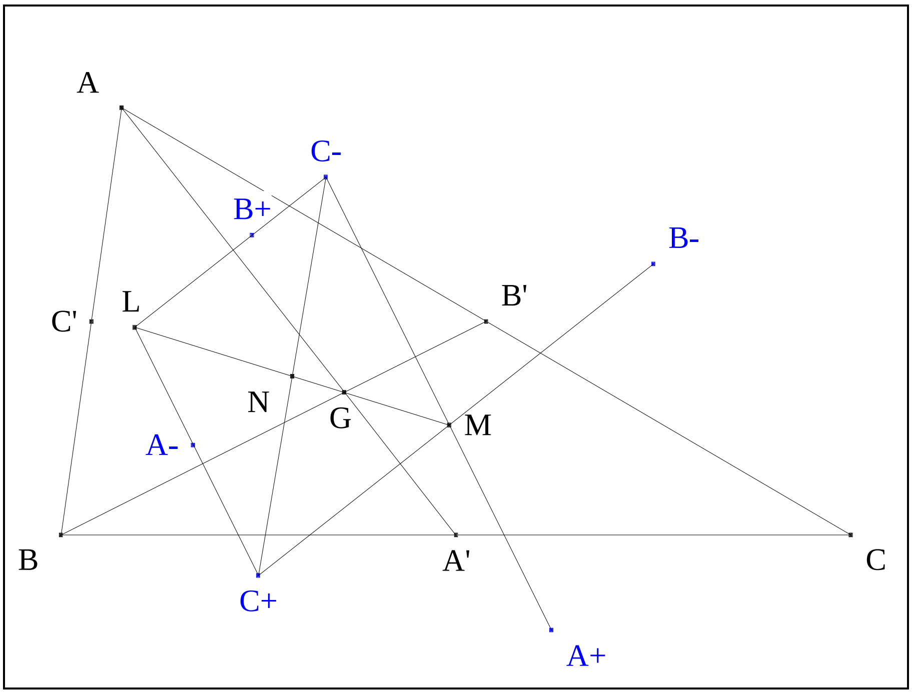
Donné : les points A+, A-, B+, B-, C+, C- sont cocycliques.

VISUALISATION

- Les points A+, A-, B+, B-, C+, C- sont deux à deux distincts.

---

[1] Lamoen (van) F. M., Problème 10830, *Americam Mathematical Monthly* 107 (2000) 863 ; solution des éditeurs du *Monthly* 109, 4 (2002) 396-397.

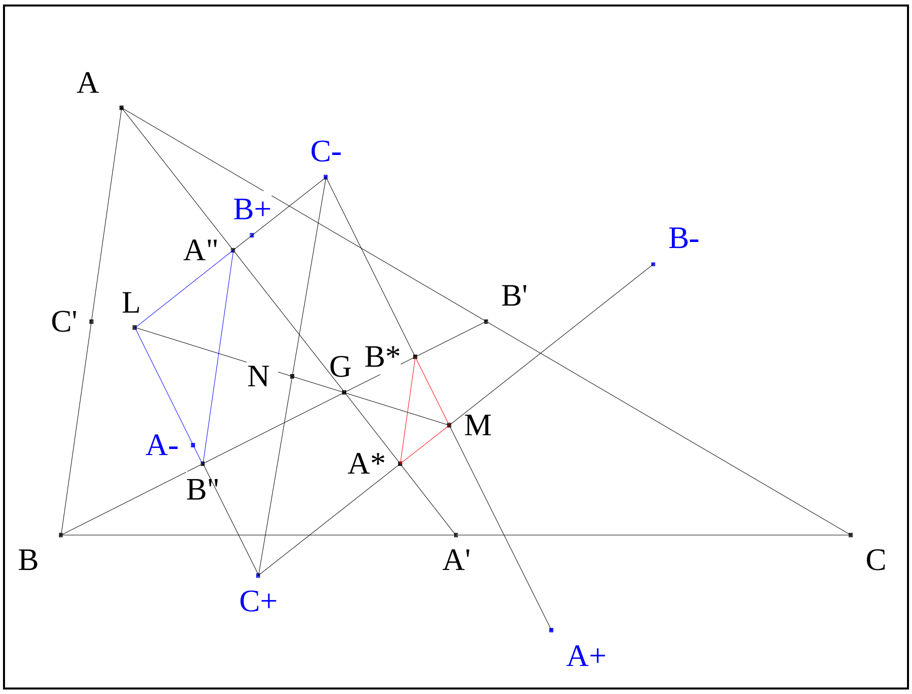


- Notons L le point d'intersection des droites (B+C-) et (C+A-).
  M le point d'intersection des droites (A+C-) et (C+B-)
  et N le point d'intersection des droites (LM) et (C+C-).

- Par hypothèses, **(1)** (B+C-) est la médiatrice de [GA] ; il s'en suit que (B+C-) ⊥ (GAA') ;
  (2) (C+B-) est la médiatrice de [GA'] ; il s'en suit que (GAA') ⊥ (C+B-) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (B+C-) // (C+B-).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (C+A-) // (A+C-).

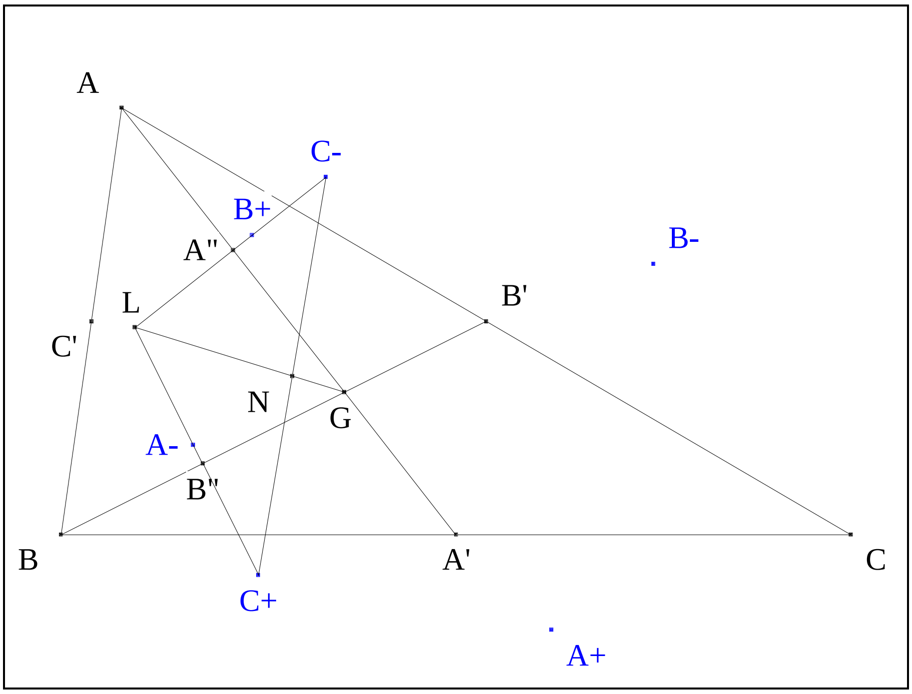
- **Conclusion partielle :** le quadrilatère LC+MC- étant un parallélogramme, N est le milieu de [C+C-].



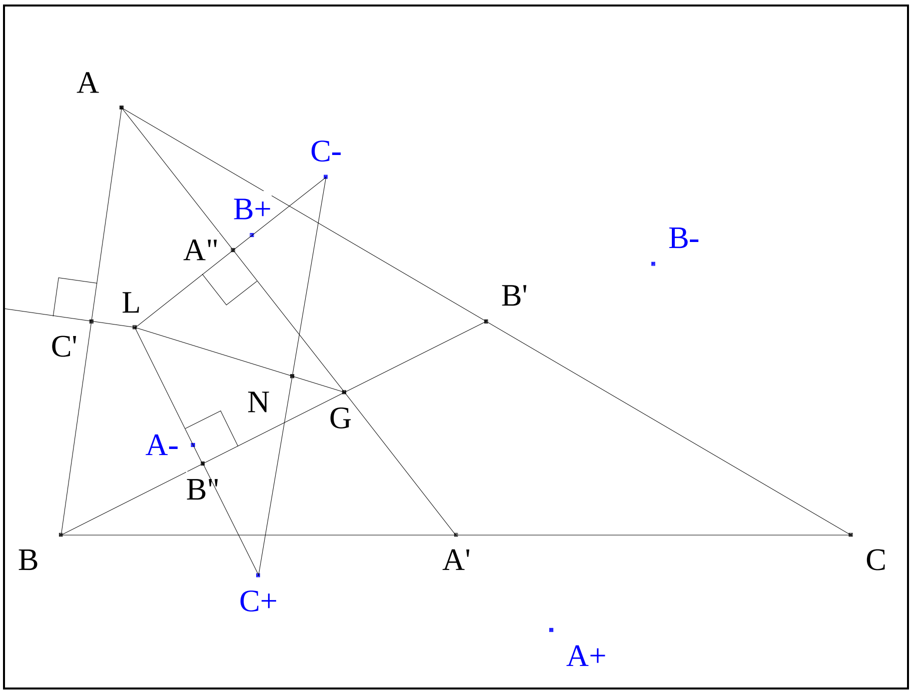
- Notons A", B", A*, B* les milieux resp. de [AG], [BG], [A'G], [B'G].

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué **(1)** au triangle GAB, (A"B") // (AB) ;
  (2) au triangle ABC, (AB) // (A'B') ;
  (3) au triangle GA'B', (A'B') // (A*B*) ;
  par transitivité de la relation //, (A"B") // (A*B*).

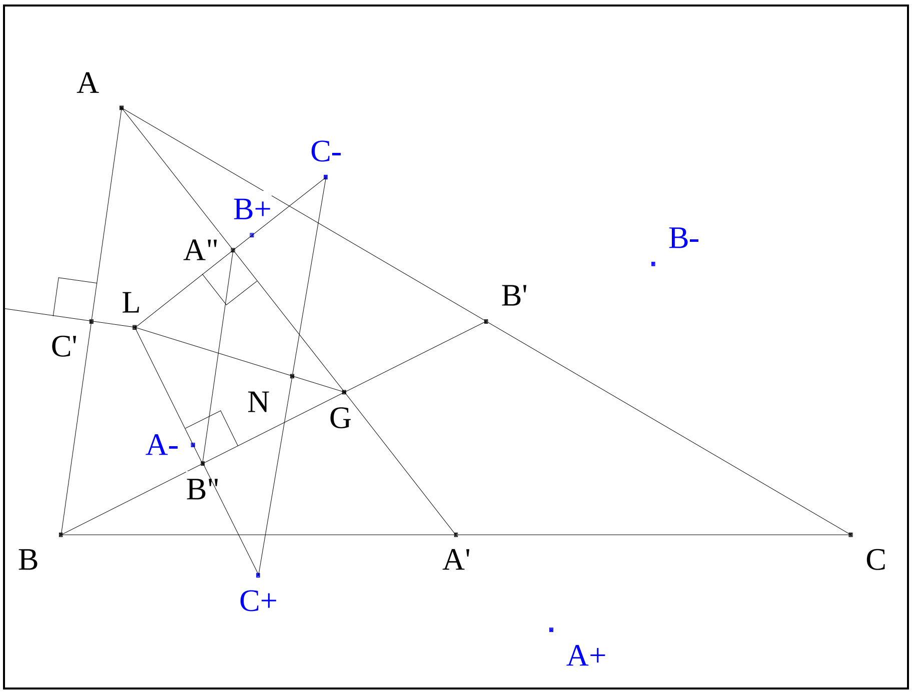
- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe 3)
  appliqué aux triangles homothétiques LA"B" et MA*B*, L, G et M sont alignés ;
  par construction, L, N et M sont alignés ;
  d'après l'axiome d'incidence Ia, L, N, G et M sont alignés.



- **Conclusion partielle :** (LNG) est la L-médiane du triangle LC+C-.

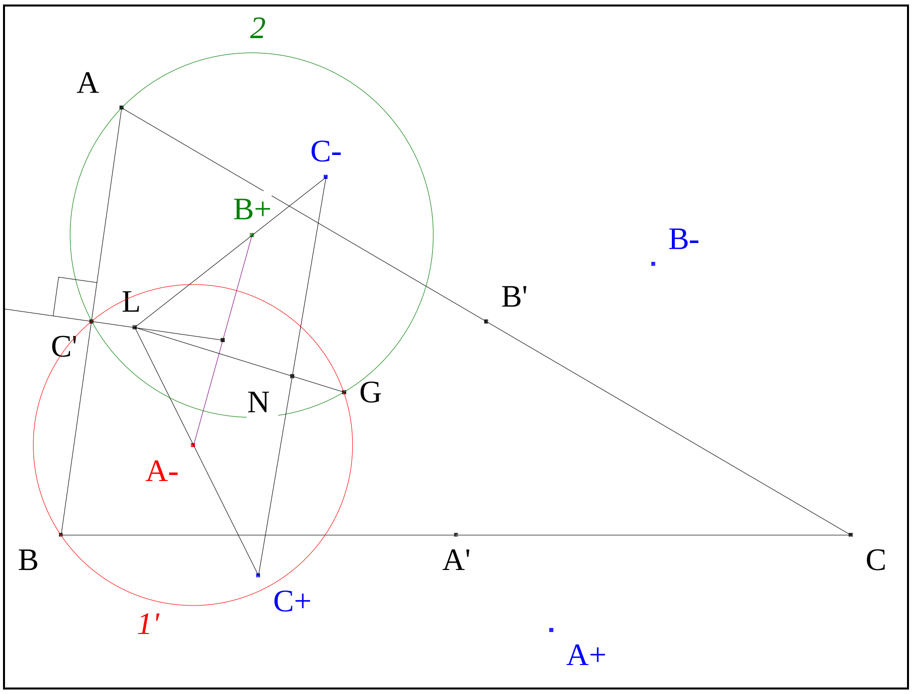


- Par hypothèses, **(1)** (B+C-) est la médiatrice de [GA]
  (2) (C+A-) est la médiatrice de [GB] ;
  en conséquence, L est le centre du cercle circonscrit du triangle GAB ;
  il s'en suit que (LC') est la médiatrice de [AB].



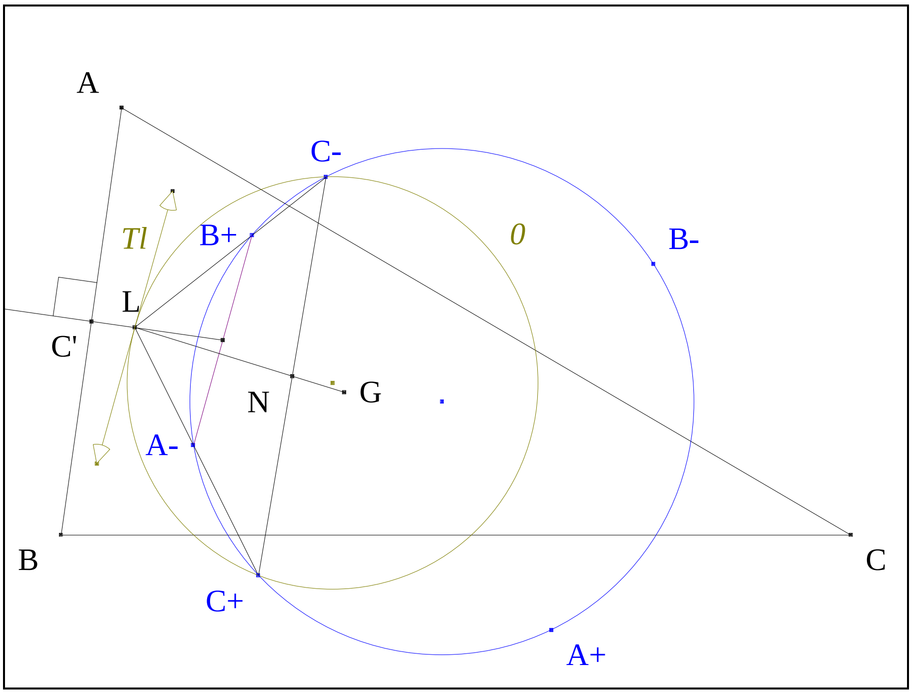
- Nous avons : (LC') ⊥ (AB) et (AB) // (A"B") ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (LC') ⊥ (A"B").

- D'après Vigarié "Isogonale et perpendiculaire" (Cf. Annexe 4),
  (LNG) étant la L-médiane de LC+C-, (LC') est la L-symédiane de LC+C-.



- Notons *1'*, *2* les cercles circonscrits de GC'B, GAC'.

- D'après "Deux cordes égales" (Cf. Annexe 2), (LC') passe par le milieu de [A-B+].



- Notons *0* le cercle circonscrit de LC+C-
  et Tl la tangente à *0* en L.

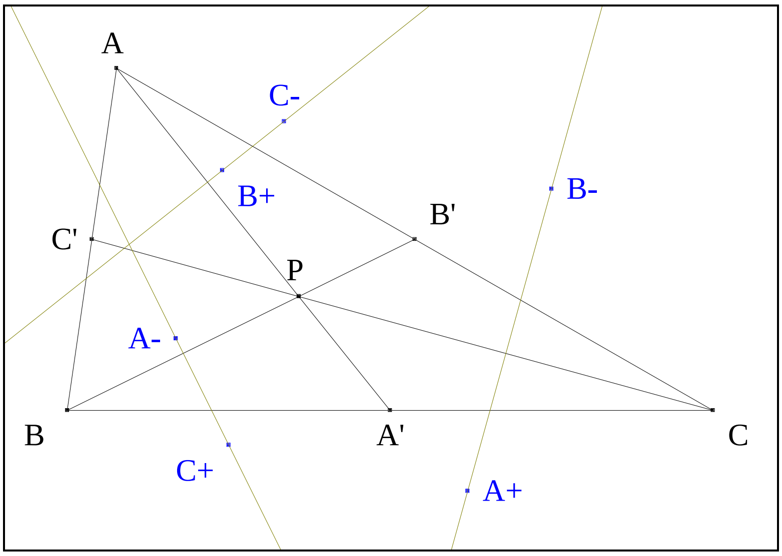
- D'après "Symédiane et antiparallèle" (Cf. Annexe), Tl // (A-B+).

- **Conclusion partielle :** le cercle *0*, les points de base C+ et C-, les moniennes naissantes (LC+A-) et (LC-B+), les parallèles Tl et (A-B+), conduisent au théorème **1"** de Reim ;
  en conséquence, les points A-, B+, C+ et C- sont cocycliques.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que les points B-, C+, A+ et A- sont cocycliques
  les points C-, A+, B+ et B- sont cocycliques.

- **Scolie :** ces trois cercles sont deux à deux sécants.

- Raisonnons par l'absurde en affirmant que ces trois cercles sont distincts deux à deux.



- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" (cf. Annexe 5),
  les cordes [A-C+], [A+B-] et [B+C-] sont concourantes, ce qui est contradictoire ;
  en conséquence, les trois cercles sont confondus.

- **Conclusion :** les points A+, A-, B+, B-, C+, C- sont cocycliques.

Scolies : **(1)** la figure de van Lamoen est connue, en anglais, sous "The Cevasix configuration" ; ce nom a été donné par Klark Kimberling.

(2) Le cercle passant par A+, A-, B+, B-, C+, C-, est "le cercle de van Lamoen".

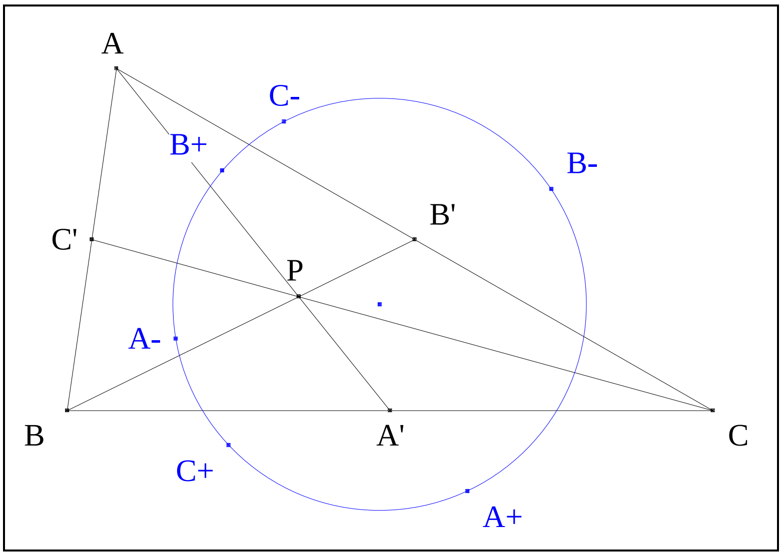
Note historique :
Floor van Lamoen de Goes (Pays-Bas) a trouvé ce résultat par ordinateur en 2000.
Les nombreuses solutions analytiques réelles et complexes, aux calculs longs, menés avec Mapple ou Mathematica, n'ont pas été retenues par les rédacteurs du *Montly* ; ceux-ci ont proposés en 2002, leur propre solution qui, après analyse, est partiellement basée sur celle communiquée par van Lamoen. Notons que l'argument démonstratif principal repose sur l'hexagone de Catalan.
La solution donnée par K. Y. Li en 2001 dans la revue *Mathematical Excalibur*[2] de Hong-Kong, a recours aux aires et aux rapports de Thalès.
Darij Grinberg[3] dans son article intitulé "The Lamoen circle" affirme que "Der Beweis des Satzes von Lamoen ist ziemlich schwierig". Sa démonstration trigonométrique légèrement différente de celle présentée dans *Excalibur*, utilise la notion d'angle et la loi des cosinus. En 2003, dans un message *Hyacinthos*[4], il affirme avoir redécouvert sans le savoir, ce résultat en août 2002, à l'aide d'un logiciel de Géométrie.
En 2005, Deoclecio Gouveia Mota Jr.[5] a proposé une preuve basée sur les transformations. En lui répondant, Nikolaos Dergiades[6] précise que cette preuve permet de situer le centre du cercle de Lamoen.

Commentaire :

---

2 Li K. Y., Conclyclic problems, *Mathematical Excalibur* 6 (2001) Number 1, 1-2 ;
available at http://www.math.ust.hk/mathematical_excalibur/
3 Grinberg D., The Lamoen circle, http://de.geocities.com/darij_grinberg./
4 Grinberg D., A proof of the Lamoen Circle Theorem, Message *Hyacinthos* # 6557 du 17/02/2003.
5 Gouveia Mota Jr. D., Lamoen Circle – Synthetic proof, Message *Hyacinthos* # 11095 du 14/03/2005.
6 Dergiades N., Lamoen Circle – Synthetic proof, Message *Hyacinthos* # 11097 du 14/03/2005.

une première réciproque a été envisagée en 2003 par Alexei Myakishev et de Peter Y. Woo[7]. La seconde ci-après a été présentée en 2004 par Minh Ha Nguyen[8].

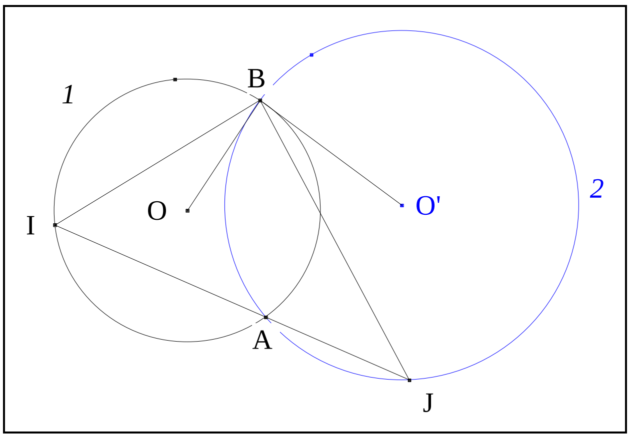


Traits :		ABC	un triangle,
		P	un point,
		A'B'C'	le triangle P-cévien de ABC
	et	A+, A-, B+, B-, C+, C-	les centres des cercles circonscrits des triangles PCB', PC'B, PAC', PA'C, PBA', PB'A.

Donné : P est le point médian ou bien l'orthocentre de ABC
si, et seulement si,
les points A+, A-, B+, B-, C+, C- sont cocycliques.

ANNEXE

1. Un triangle de Möbius[9]



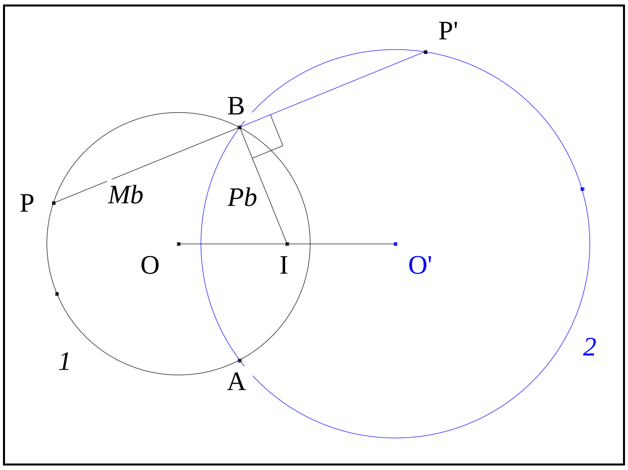
Traits : *1, 2* deux cercles sécants,

7 Myakishev A., Woo P. Y., On the Circumcenters of Cevasix Configuration, *Forum Geometricorum* vol. 3 (2003) 57-63.
8 Nguyen M. H., Another Proof of van Lamoen's Theorem and its converse, *Forum Geometricorum* vol. 5 (2005) 127-132.
9 Baltzer R. dans son livre *Statik* attribue ce résultat à Möbius.

O, O' les centres resp. de *1*, *2*,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
et (IBJ) une monienne brisée.

Donné : (IAJ) est une monienne *si, et seulement si,* <IBJ = <OBO'.

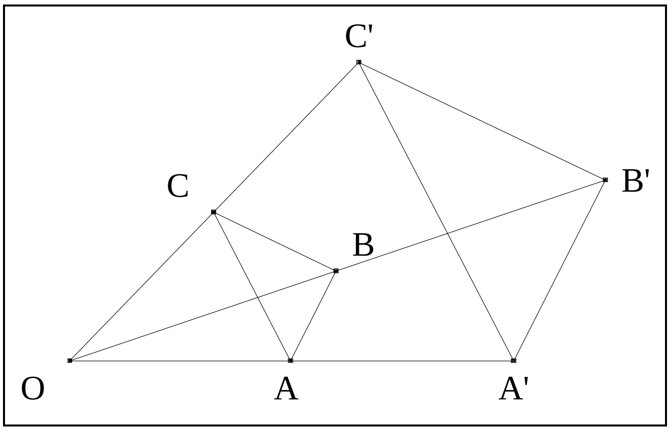
2. Deux cordes égales



Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
O, O' les centres resp. de *1*, *2*,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
I le milieu du segment [OO'],
*M*b une monienne passant par B
P, P' les seconds points d'intersection de *M*b resp. avec *1* et *2*,
et *P*b la perpendiculaire à *M*b en B

Donné : *P*b passe par I *si, et seulement si,* B le milieu du segment [PP'].

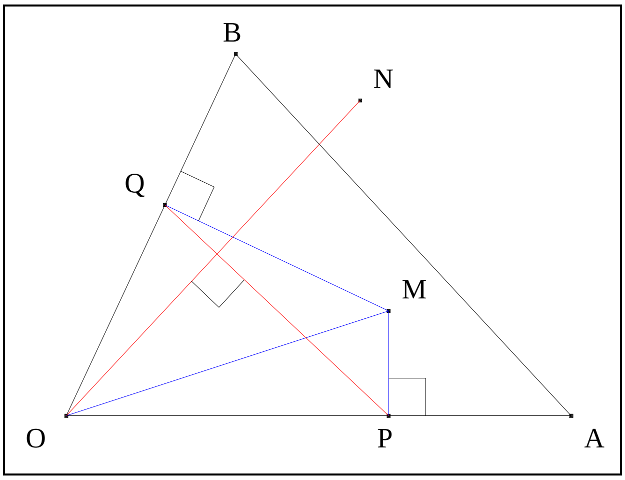
3. Le théorème faible de Desargues



Traits : ABC un triangle,
et A'B'C' un triangle tel que **(1)** (AA') et (BB') soient concourantes en O
(2) (AB) soit parallèle à (A'B')
(3) (BC) soit parallèle à (B'C')

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à (A'C').

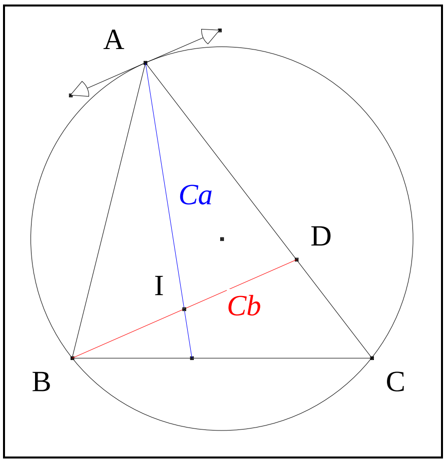
4. Isogonale et perpendiculaire[10]



Traits : OAB un triangle,
M un point,
P, Q les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur (OA) et (OB),
et N un point.

Donné : la droite (ON) est l'isogonale de la droite (OM) par rapport aux droites (OA) et (OB)
si, et seulement si,
la droite (ON) est perpendiculaire à la droite (PQ).

5. Symédiane et antiparallèle



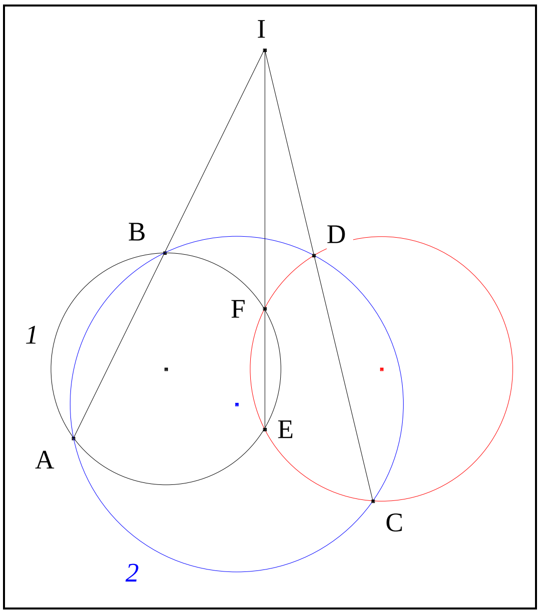
Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
*C*a une A-cévienne de ABC,
Ta la tangente à *0* en A,
*C*b la B-cévienne de ABCB, parallèle à Ta
et D, I les points d'intersection de *C*b resp. avec (AC) et *C*a.

---

10 Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-.

Donné : *C*a est la A-symédiane de ABC *si, et seulement si,* I est le milieu de [BD].

6. Le théorème des trois cordes[11]



Traits :	*1, 2*	deux cercles sécants,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	C, D	deux points de *2*,
	E, F	deux points de *1*
et	I	le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

Donné : les points C, D, E et F sont cocycliques
si, et seulement si,
les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes en I.

[11] Monge, d'après Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, I (1822) 40.