DU

CERCLE DES HUIT POINTS

AU

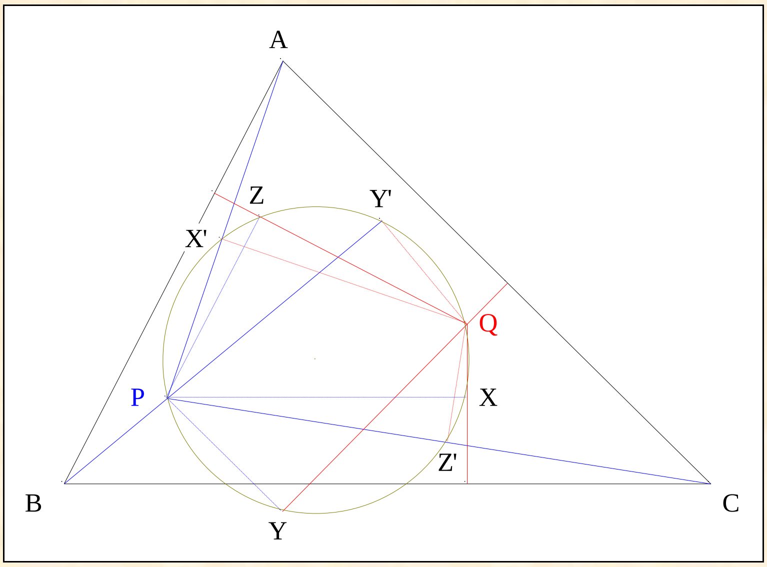
CERCLE DES SIX PIEDS

OU

THE THEOREM ON THE SIX PEDALS

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'article présente un résultat remarquable du germano-russe Darij Griberg initialisé par le Frère Gabriel-Marie plus connu sous le sigle de F. G.-M. par les amateur de la Géométrie du Triangle, puis généralisé par l'américain Paul Yiu de l'université de Floride. Une preuve a déjà été proposée sur le site de l'auteur lors de l'article "Le P-cercle de Hagge". Deux courtes biographies sont présentées ainsi que quatre applications et exercices.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

[1] St-Denis, Île de la Réunion, 10/022011.

Sommaire

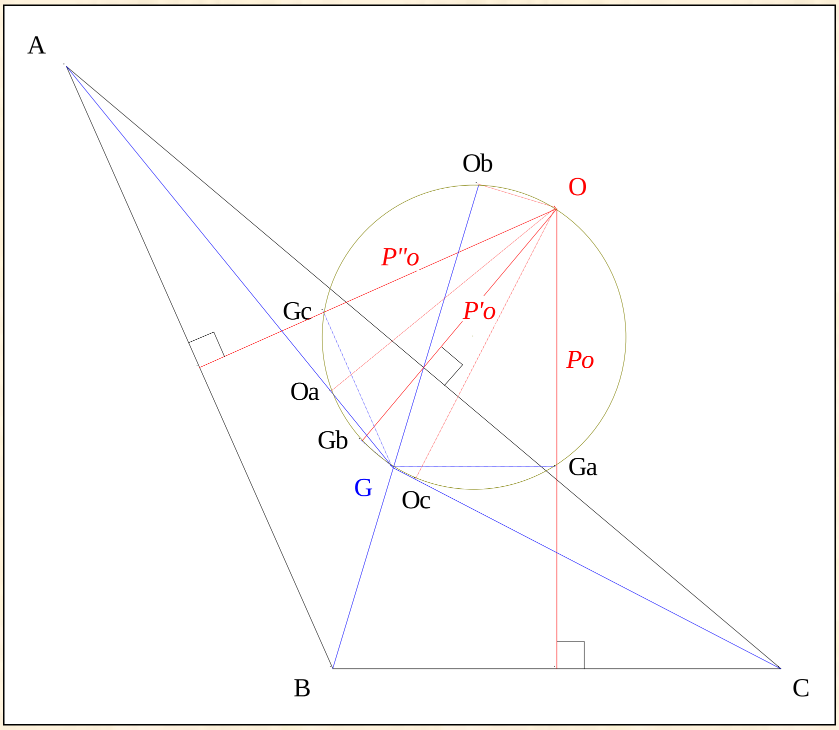
A. Le cercle "officiel" des huit points 2
1. Le cercle des huit points
2. Une courte biographie de Frère Gabriel-Marie
B. Le cercle des six pieds 4
1. Le cercle des six pieds
2. Le théorème des six pieds de Darij Grinberg
3. Une courte biographie de Darij Grinberg
C. Applications 8
1. Roumanie TST (2004)
2. O.M. de Russie
3. Avec le cercle de Fuhrmann
4. Avec le G-cercle de Hagge
5. Exercices de recherche
D. Annexe 15
1. Le théorème du pivot

A. LE CERCLE "OFFICIEL" DES HUIT POINTS

1. Le cercle des huit points

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
G le point médian de ABC,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
Po , *P'o*, *P"o* les perpendiculaires abaissées de O resp. sur (BC), (CA), (AB),

	Ga, Gb, Gc	les pieds des perpendiculaires abaissées de G resp. sur *Po* , *P'o*, *P"o*
et	Oa, Ob, Oc	les pieds des perpendiculaires abaissées de O resp. sur (AG), (BG), (CG).

Donné : Ga, Gb, Gc, Oa, Ob, Oc, O et G sont cocycliques.

VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle",
  Ga, Gb, Gc, Oa, Ob, Oc, O et G sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle.

Scolies : **(1)** [GO] est un diamètre de *1*.

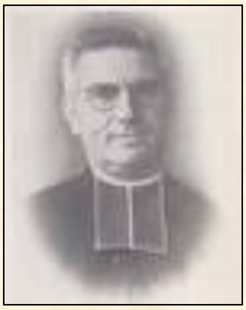
(2) *1* est "le cercle des huit points de ABC".

(3) En inter versant les rôles de G et O, nous obtenons 6 points supplémentaires sur *1* et le cercle des huit points devient le cercles des 14 points.

Énoncé traditionnel : G et O étant resp. le point médian et le centre du cercle circonscrit d'un triangle,
les projetés de G sur les médiatrices des côtés de ce triangle
et
les projetés de O sur les médianes de ce triangles,
sont sur le cercle de diamètre [OG].

Note historique : c'est en recherchant "le cercle des moments égaux"[2] que le Frère Gabriel-Marie a posé la définition "officielle" du "cercle des huit points".
"Officielle" car une extension officieuse a été signalé par F. G.-M. en considérant le cercle de diamètre [OH], H étant l'orthocentre de ABC qui, mutatis mutandis, passe par neuf autres points[3].

2. Une courte biographie de Frère Gabriel-Marie



Edmond Jean-Antoine Brunhes est né le 16 novembre 1834 à Aurillac (Auvergne, France).

---

2 F.G.M., Exercices de Géométrie, 6th ed., 1920, Rééditions Jacques Gabay (Gabay reprint), Paris, 1991, Théorème 1044 p. 1204.

3 F.G.M., Exercices de Géométrie, 6th ed., 1920, Rééditions Jacques Gabay (Gabay reprint), Paris, 1991, paragraphe 2413b, Théorème 1044 III p. 1205.

Élève de l'école supérieure d'Aurillac, il montre rapidement son aptitude pour les mathématiques. Devenu Frère des Écoles Chrétiennes sous le nom de Gabriel-Marie, il est connu aujourd'hui sous le sigle de F. G.-M. suite à son livre remarquable devenu depuis un classique que tous les amateur de la Géométrie du triangle connaissent.

Rappelons que la tradition voulait que lorsqu'un Frères des Écoles Chrétiennes écrivait un livre, son nom n'était pas mentionné, mais que l'on indiquât seulement les initiales du Supérieur en fonction.
C'est ainsi que les *Excercices de Géométrie descriptives* écrits par le Frère Gabriel-Marie, furent publiés pour la première fois en 1877 sous les initiales de F. I.-C. c'est-à-dire Frère Irdile, de son nom civil Jean-Pierre Cazeneuve, Supérieur de 1884 à 1884.
La troisième édition des *Exercices* a été publiée en 1893 sous les initiales de F. J. c'est-à-dire Frère Joseph, de son nom civil Jean-Marie Josserand, Supérieur de 1884 à 1897.
Par une heureuse coïncidence, la quatrième et la cinquième édition des *Exercices* ont été publiées en 1909 et 1920 sous les initiales du véritable auteur, F. G.-M. c'est-à-dire Frère Gabriel-Marie, de son nom civil Edmond Jean-Antoine Brunhes, Supérieur de 1897 à 1913.

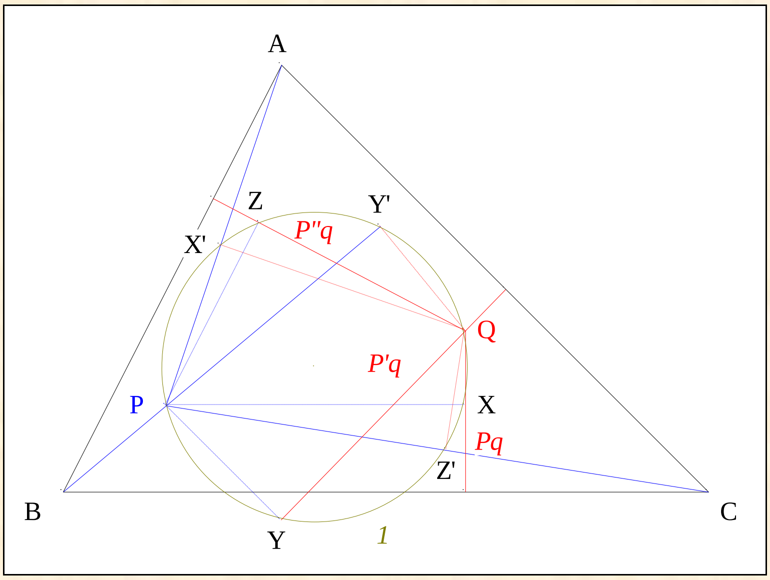
Ces précisions ont été aimablement communiquées par l'Association La Salle à Paris et par le Centre Scolaire Jean-Baptiste de La Salle à Lyon.

B. LE CERCLE DES SIX PIEDS

1. Le cercle des six pieds

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
P, Q deux points,
Pq , *P'q*, *P"q* les perpendiculaires abaissées de Q resp. sur (BC), (CA), (AB),
X, Y, Z les pieds des perpendiculaires abaissées de P resp. sur *Pq* , *P'q*, *P"q*
et X', Y', Z' les pieds des perpendiculaires abaissées de Q sur (AP), (BP), (CP).

Donné : X, Y, Z, X', Y', Z', P et Q sont cocycliques.

VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", X, Y, Z, X', Y', Z', P et Q sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle.

Scolies : **(1)** [PQ] est un diamètre de *1*.

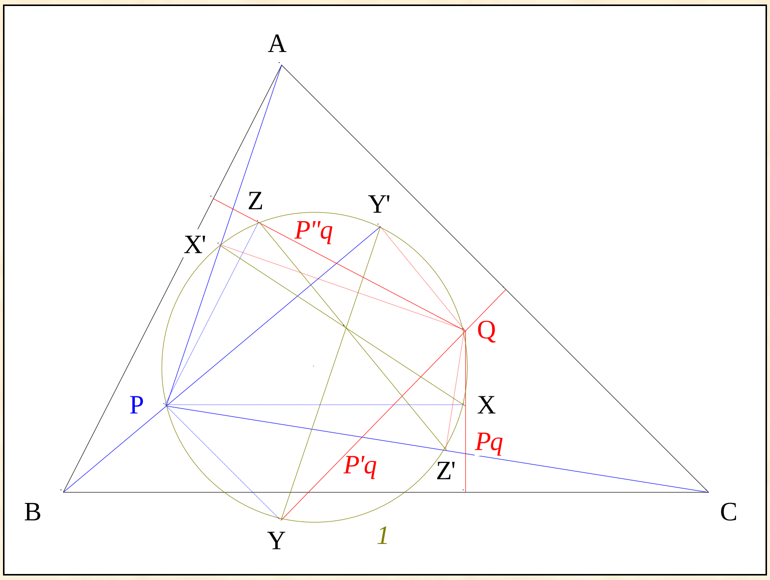
(2) *1* est "le cercle des six pieds relativement à P et Q de ABC".

Note historique : à ma connaissance, cette situation a été signalée par Paul Yiu[4] en 2000.

2. Le théorème des six pieds de Darij Grinberg

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

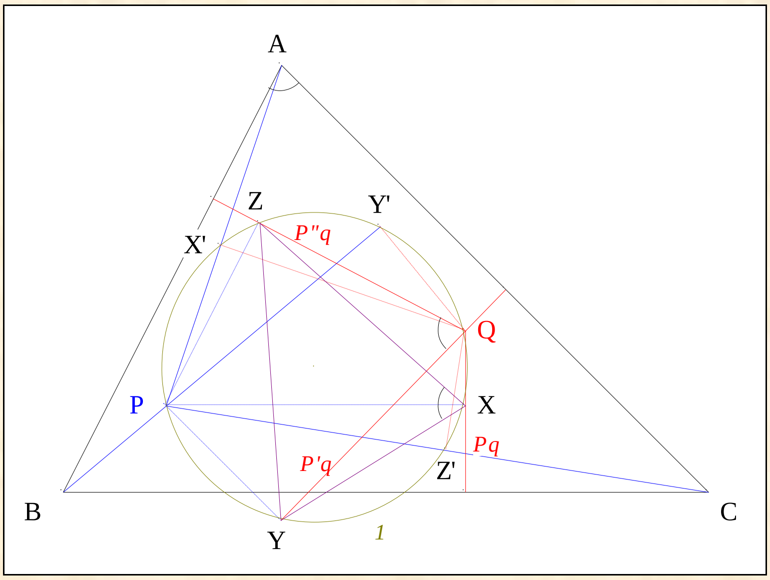
Donné : (XX'), (YY') et (ZZ') sont concourantes. [5]

VISUALISATION

---

[4] Yiu P., Is this eight-point circle theorem of Ramanujan neglected? , message *Hyacinthos* # 1295 du 28/08/2000 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

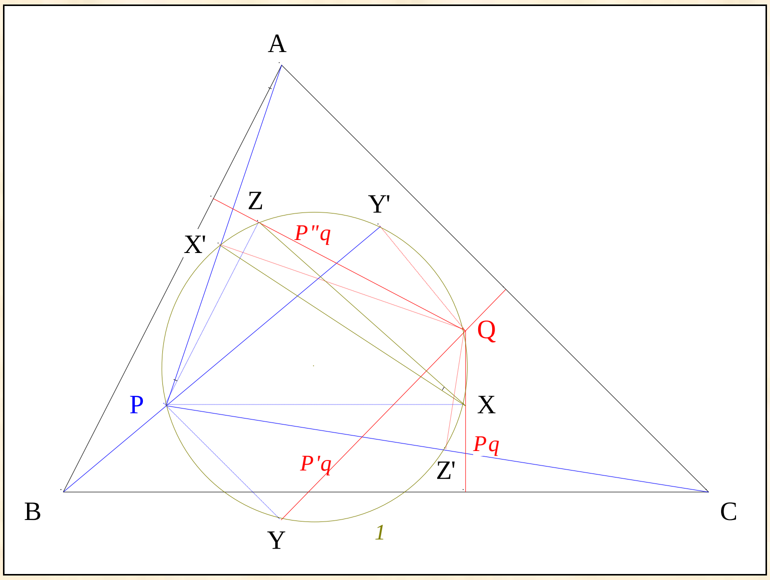
[5] Grinberg D., Unpublished note – Geometry : The Theorem on the Six Pedals ; http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/.



- Une chasse angulaire à Π près :
  d'après le théorème de l'angle inscrit, <YXZ = <YQZ ;
  d'après le théorème "Angles à côtés perpendiculaires", <YQZ = <CAB ;
  par transitivité de la relation =, <YXZ = <CAB.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que <ZYX = <ABC
  <XZY = <BCA.

- **Conclusion partielle :** les triangles ABC et XYZ sont indirectement semblables.



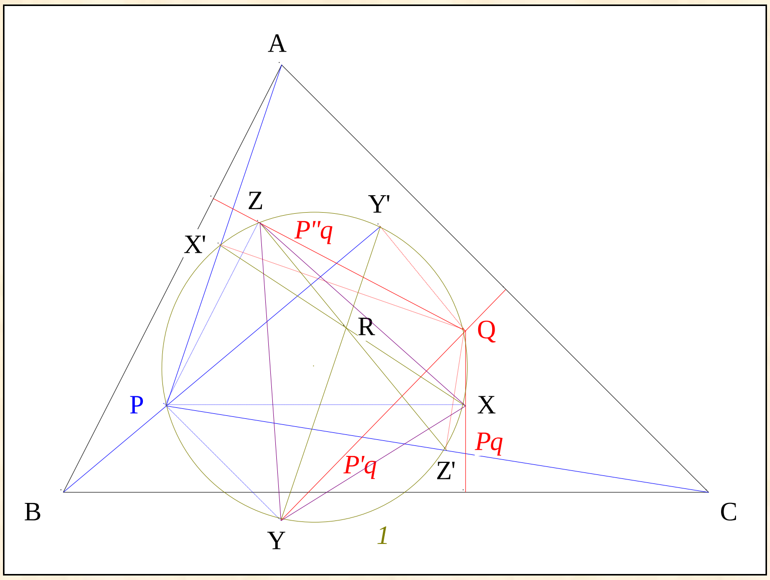
- Une nouvelle chasse angulaire à Π près :
  d'après le théorème de l'angle inscrit, <ZXX' = <ZPX' ;
  ou encore, <ZPX' = <ZPA ;
  par transitivité de la relation =, <ZXX' = <ZPA.

  Par hypothèse, (PZ) ⊥ (QZ)
  (QZ) ⊥ (AB) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (PZ) // (AB).

  D'après "Le théorème de la bande"
  appliqué à la bande de frontière (PZ) et (AB), <ZPA = <BAP ;

par transitivité de la relation =, <ZXX' = <BAP.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que <XYY' = <CBP
<YZZ' = <ACP.



- **Conclusion :** les céviennes (AP), (BP) et (CP) de ABC étant concourantes en P, leurs homologues (XX'), (YY') et (ZZ') de XYZ le sont aussi.

- Notons R ce point de concours.

Note historique : ce résultat a été prouvé par Darij Grinberg[6] en septembre 2003 en étudiant les deux triangles de Brocard. Sa démonstration a recours au théorème de Céva dans sa version trigonométrique.
Une autre approche a été menée par l'auteur[7] pour prouver ce résultat dans l'article intitulé "Le P-cercle de Hagge".

Commentaire : ce résultat est utile pour trouver de nouveaux centres du triangle.

3. Une courte biographie de Darij Grinberg

[6] Grinberg D., Another transformation: coordinates thought (sought) ; Message *Hyacinthos* # 8021 du 25/09/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

[7] Ayme J.-L., Le P-cercle de Hagge, G.G.G. vol. **5**, p. 17-19 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

Darij Grinberg[8] est né le 5 novembre 1988 à Moscou (Russie).
En 1996, ses parents s'installent en Allemagne à Münster, puis à Karlsruhe en 1999.

Rappelons ses succès au

*	Landeswettbewerb Mathematik Baden-Würtemberg		
*	Bundeswettbewerb Mathematik	premier prix :	au premier tour de 2001 à 2006
		premier prix :	au second tour en 2003
		troisième prix :	en 2000 et 2002
*	Deutsche Mathematik-Olympiade		
		premier prix :	41-ème olympiade (2002) Hambourg
		honorable :	42-ème olympiade (2003) Brème
		second prix :	43-ème olympiade (2004) Essen
		premier prix :	44-ème olympiade (2005) Saarbrüken
		premier prix :	45-ème olympiade (2006) München
*	IMO	Médaille d'argent :	45-ème IMO (2004)
		Médaille d'argent :	46-ème IMO (2005)
		Médaille d'or :	47-ème IMO (2006).

En octobre 2006, il commence ses études de mathématiques à l'université Ludwig Maximilian de Munich.

Rappelons que son enthousiasme pour la Géométrie du Triangle lui a permis de trouver 6 centres répertoriés dans Encyclopedia of Triangle Centers plus connu sous le sigle ETC[9].

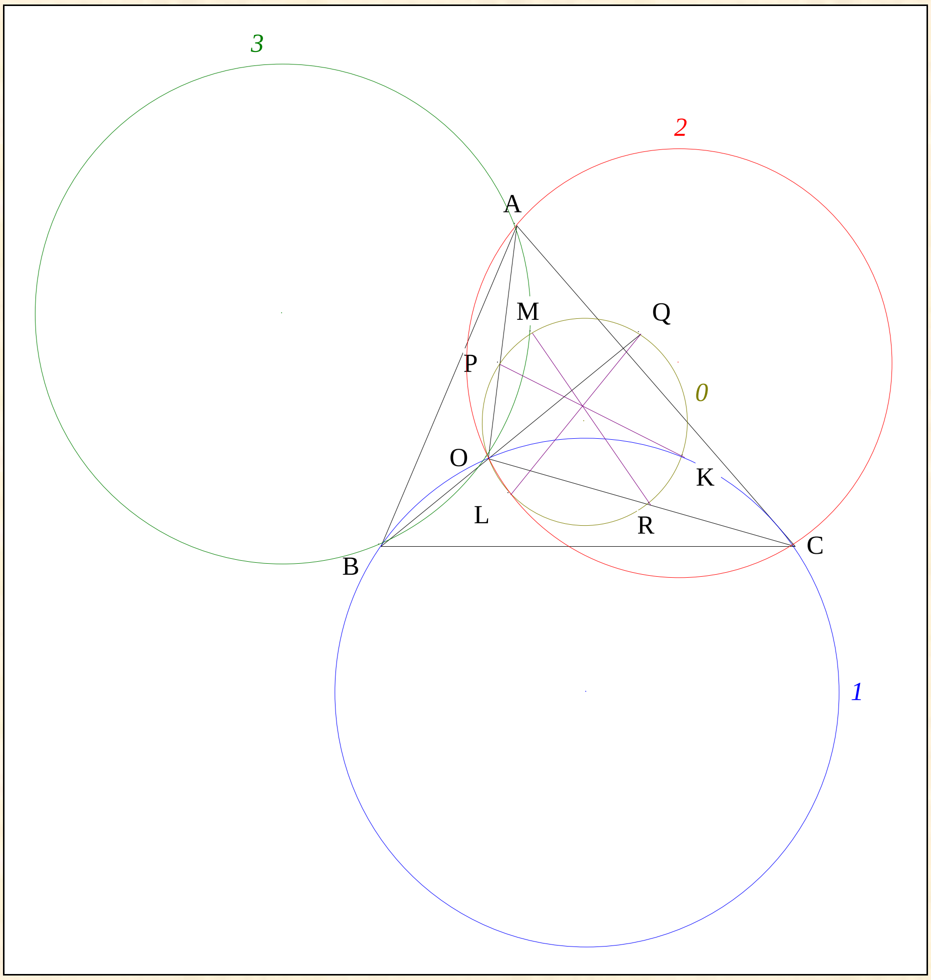
C. APPLICATIONS

1. Roumanie TST (2004) [10]

VISION

Figure :

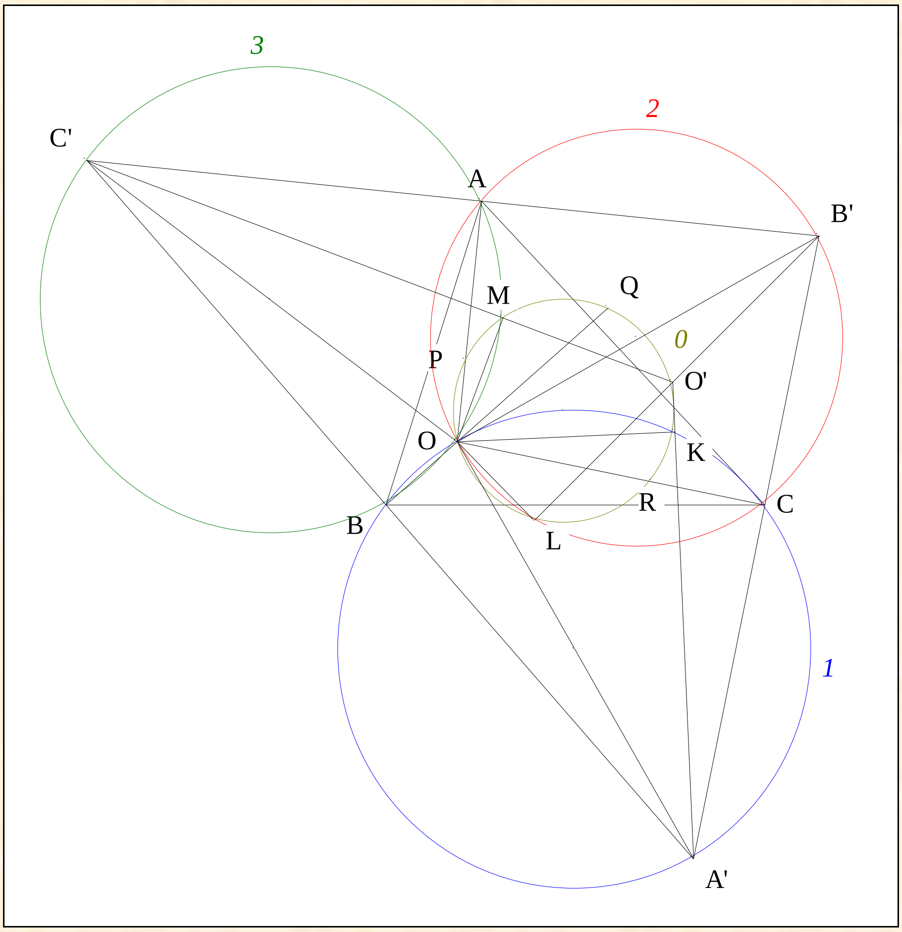
8 Grinberg D., http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/.
9 Kimberling C., ETC ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.
10 Roumanie TST (2004) Day 4 Problem 14 ;
Lots of circles, *Mathlinks* du 24/05/2004 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=19487.



Traits : ABC un triangle,
O un point,
0 un cercle passant par O,
P, Q, R les seconds points d'intersection de *0* resp. avec (OA, (OB), (OC),
1, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles OBC, OCA, OAB
et K, L, M les seconds points d'intersection de *0* resp. avec *1*, *2*, *3*.

Donné : (PK), (QL) et (RM) sont concourantes.

VISUALISATION



- Notons O' le point diamétralement opposé à O sur *0*,
  et A', B', C' les seconds points d'intersection de (O'K), (O'L), (O'M) resp. avec *1*, *2*, *3*.

- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 1)
  appliqué à

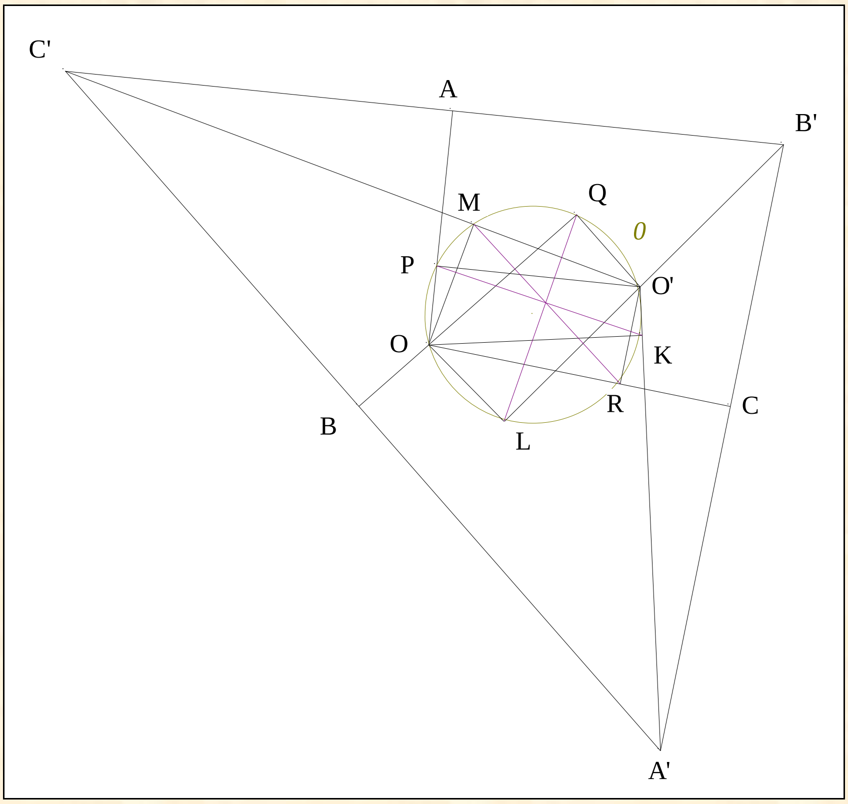
(1)	*0*, *1* et *2* concourants en O,	A', C et B' sont alignés
(2)	*0*, *2* et *3* concourants en O,	B', A et C' sont alignés
(3)	*0*, *3* et *1* concourants en O,	C', B et A' sont alignés.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (OK) ⊥ (O'A')
  (OL) ⊥ (O'B')
  (OM) ⊥ (O'C') ;

  en conséquences,

(1)	O et A' sont deux points diamétralement opposés sur *1*
(2)	O et B" sont deux points diamétralement opposés sur *2*
(3)	O et C" sont deux points diamétralement opposés sur *3*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (OA) ⊥ (B'C')
  (OB) ⊥ (C'A')
  (OC) ⊥ (A'B').



- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (O'P) ⊥ (OA)
  (O'Q) ⊥ (OB)
  (O'R) ⊥ (OC).

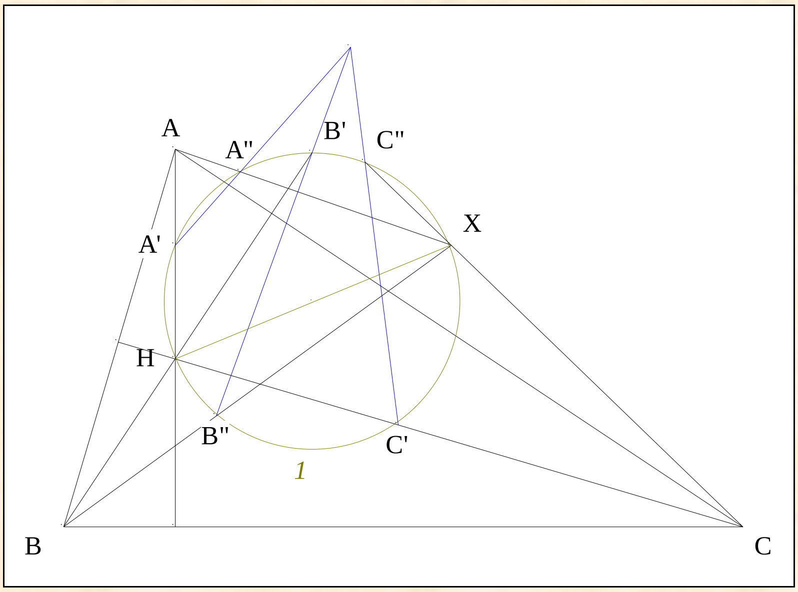
- **Conclusion : B. 2.** Le théorème des six pieds, (PK), (QL) et (RM) sont concourantes.

2. O.M. de Russie[11]

VISION

Figure :

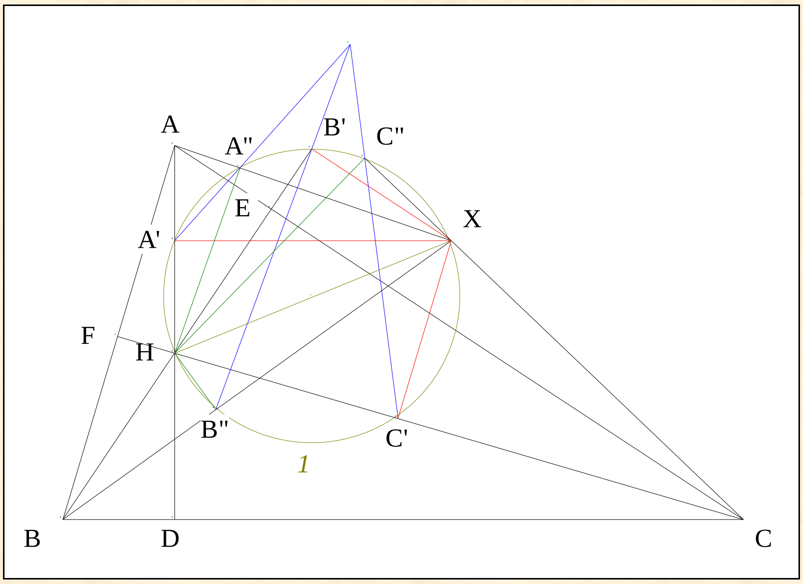
[11] Three lines meet at same point, *Mathlinks* du 19/03/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=80025.



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
X un point,
1 le cercle de diamètre [HX],
A', B', C' les seconds points resp. d'intersection de (AH), (BH), (CH) avec *1*
et A", B", C" les seconds points d'intersection resp. de (AX), (BX), (CX) avec *1*.

Donné : (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes.

VISUALISATION



- Notons DEF le triangle orthique de ABC.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle",
  A' est le pied de la perpendiculaire abaissée de X sur (HD)
  B' est le pied de la perpendiculaire abaissée de X sur (HE)
  C' est le pied de la perpendiculaire abaissée de X sur (HF).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle",

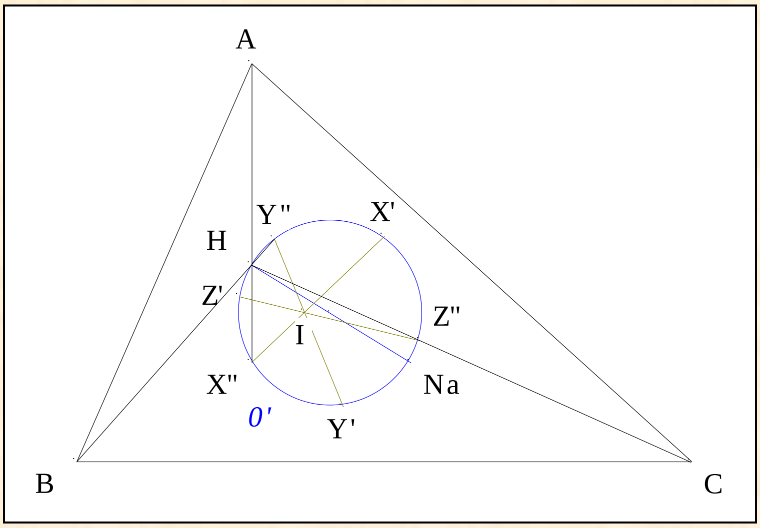
A" est le pied de la perpendiculaire abaissée de H sur (XA)
B" est le pied de la perpendiculaire abaissée de H sur (XB)
C" est le pied de la perpendiculaire abaissée de H sur (XC).

- **Conclusion :** d'après **B. 2.** Le théorème des six pieds, (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes.

3. Avec le cercle de Fuhrmann

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	I	le centre de ABC,
	Na	le point de Nagel [12] de ABC,
	X'Y'Z'	le triangle de Fuhrmann de ABC,
	0'	le cercle de Fuhrmann de ABC.
et	X", Y", Z"	les seconds points d'intersection resp. de (AH), (BH), (CH) avec *0'*.

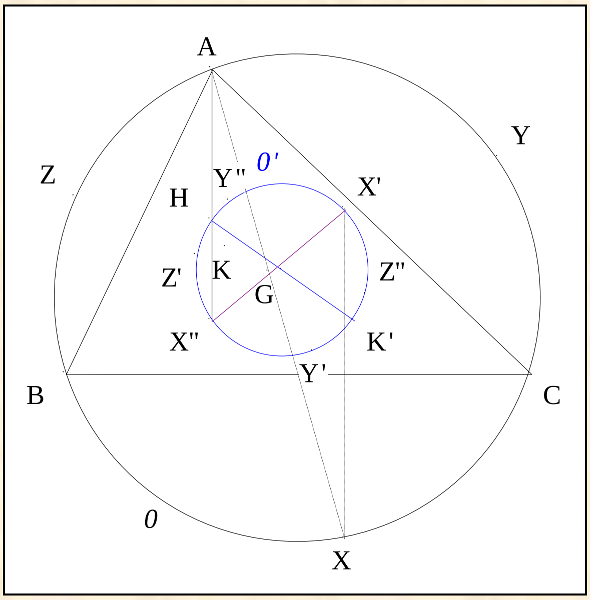
Donné : [X'X"], [Y'Y"] et [Z'Z"] concourent en I. [13]

4. Avec le G-cercle de Hagge

VISION

Figure :

[12] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian Heinrich von Nagel, G.G.G. vol. 3, p. 8 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
[13] Ayme J.-L., Le cercle de Fuhrmann, G.G.G. vol. **5**, p. 14-15 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	G	le point médian de ABC
	0	le cercle circonscrit de ABC
	XYZ	le triangle circummédian de ABC,
	X', Y', Z'	les symétriques de X, Y, Z resp. par rapport à (BC), (CA), (AB),
	0'	le cercle circonscrit au triangle X'Y'Z',
	K	le point de Lemoine de ABC,
	K'	le point anticomplémentaire de K relativement à ABC
et	X", Y", Z"	les seconds points d'intersection resp. de (AH), (BH), (CH) avec *0'*.

Donné : (X'X") passe par G. [14]

5. Exercices de recherche [15]

- Notons I, G, O, H, N, K, Sp le centre, le point médian, le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre, le centre du cercle d'Euler le point de Lemoine et le point de Spieker de ABC.

- Ils sont resp. répertoriés sous X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_{10} chez E.T.C..[16]

- Montrer que

P	Q	R
I	O	Sp
G	H	K
H	O	N
K	O	G

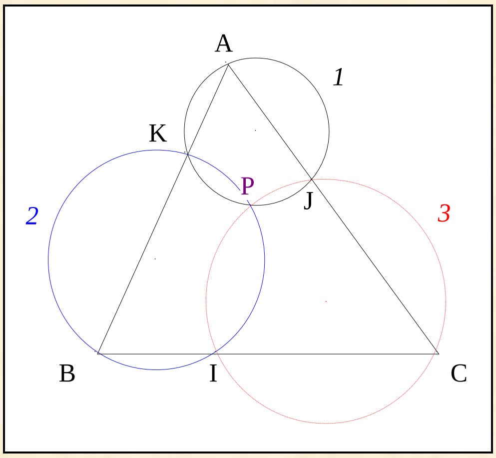
14 Ayme J.-L., The G-Hagge' s circle, *Mathlinks* du 21/07/2008.
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1511789919&t=216118 ;
Ayme J.-L., Le P-cercle de Hagge, G.G.G. vol. **5**, p. 24-33 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

15 Grinberg D., Another transformation: coordinates thought (sought) ; Message *Hyacinthos* # 8034 du 26/09/2003 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

16 Kimberling C., ETC ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

D. ANNEXE

1. Le théorème du pivot [17]



Traits :	*1*, *2*, *3*	trois cercles sécants deux à deux,
	K, P	les points d'intersection de *1* et *2*,
	I	l'un des points d'intersection de *2* et *3*,
	J	l'un des points d'intersection de *3* et *1*,
	A	un point de *1*,
	B	le second point d'intersection de la monienne (AK) avec *2*
et	C	le second point d'intersection de la monienne (BI) avec *3*.

Donné : (CJA) est une monienne de *3* et *1* *si, et seulement si,* *3* passe par P.

[17] Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. 1, 3 (1838) 485-487.