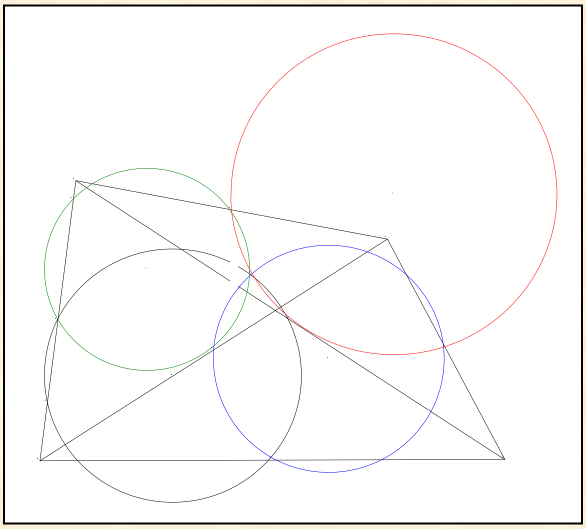
LE POINT D'EULER – PONCELET

D'UN

QUADRILATÈRE

†

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. Nous présentons le point d'Euler-Poncelet ainsi qu'une longue étude conduisant aux cercles de Bui et de l'auteur. Des applications, une annexe et une archive sont également présentées.
Les nombreuses figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

---

[1] St-Denis, Île de la Réunion, le 31/01/2011.

Sommaire

Commentaire : si une notation simple a été utilisée dans la partie A, une notation symétrique a été mise en œuvre dans le reste de l'article afin de dégager les 23 cercles passant par le point d'Euler-Poncelet. L'auteur rappelle qu'il n'a pas trouvé de solution élémentaire concernant le premier cercle de Brianchon-Poncelet et qu'une différence nette concernant le point d'Euler-Poncelet d'avec celui de Fontené n'a pu être précisée géométriquement mais seulement constatée visuellement. L'auteur a traité dans un autre article[2] le cas où le quadrilatère est cyclique.

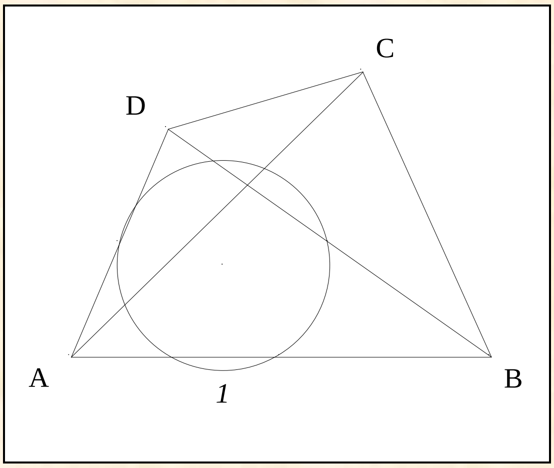
A. EULER ET PONCELET

I. LE POINT D'EULER D'UN QUADRILATÈRE

1. Le A-cercle d'Euler d'un quadrilatère

VISION

Figure :



Finition : ABCD un quadrilatère,
et *1* le cercle d'Euler-Bevan[3] du triangle ABD.

Définition : *1* est "le A-cercle d'Euler de ABCD".

2. Les quatre cercles d'Euler d'un quadrilatère

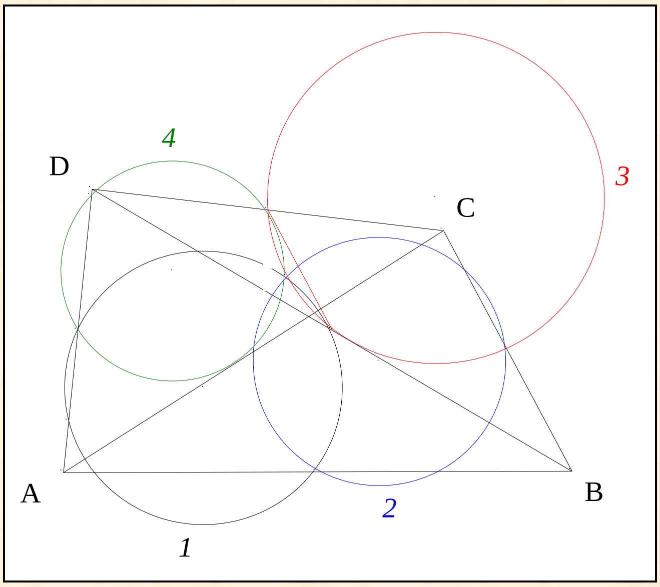
VISION

---

[2] Ayme J.-L., A propos de l'anticentre d'un quadrilatère, G.G.G. vol. **8** ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

[3] Ayme J.-L., les cercles de Morley, Euler,…, G.G.G. vol. 2 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

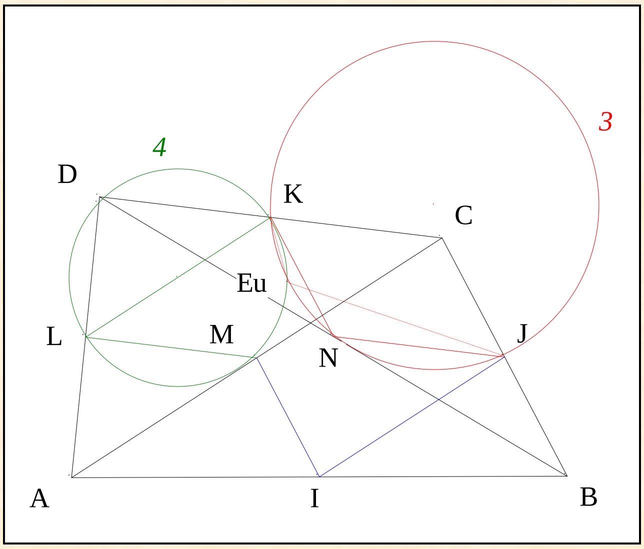
Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère
et *1, 2, 3, 4* les A, B, C, D-cercles d'Euler de ABCD.

Donné : *1, 2, 3* et *4* sont concourants.

VISUALISATION [4]



- Notons I, J, K, L, M, N les milieux resp. de [AB], [BC], [CD], [DA], [AC], [BD]
  et Eu le point d'intersection de *3* et *4* qui n'appartient pas à [CD].

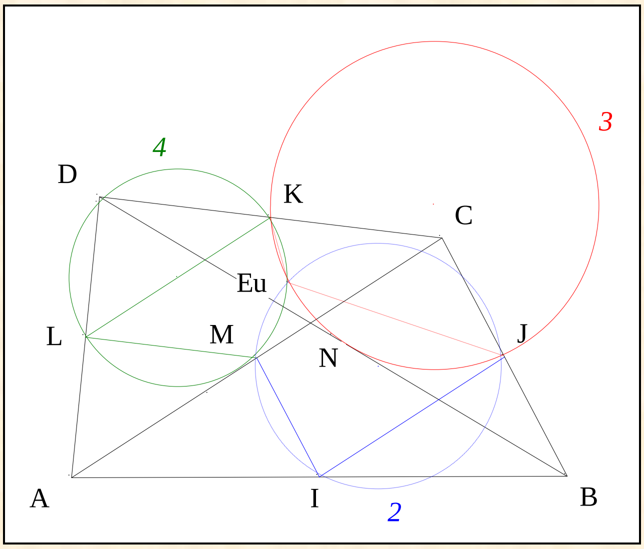
- **Scolies :** **(1)** (LM) // (JN)
  (2) (MI) // (NK).

- Une chasse angulaire à Π près :
  d'après le théorème "Angles à côtés parallèles", <LMI = <JNK ;
  d'après le théorème de l'angle inscrit, <JNK = <JEuK ;

---

[4] de l'auteur.

par transitivité de la relation //, <LMI = <JEuK.

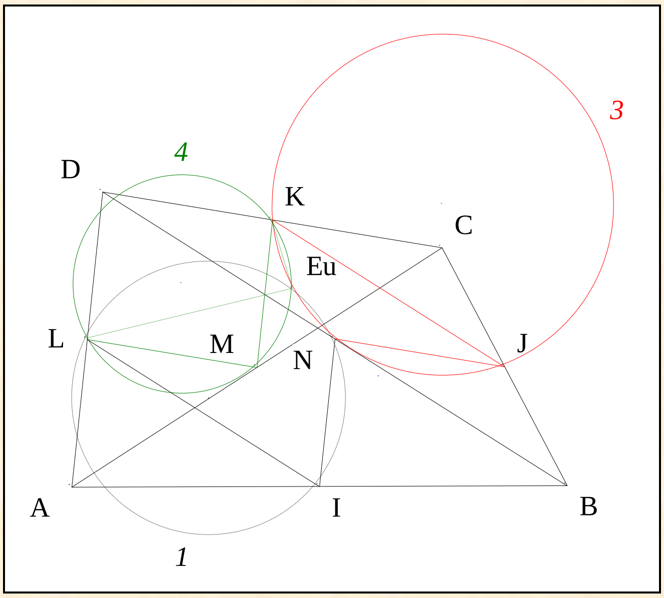


- D'après "Le parallélogramme de Varignon" (Cf. Annexe 1), (LK) // (IJ).

- Le cercle *4*, les points de base M et Eu, les moniennes brisées semblables naissantes (LMI) et (KEuJ), les parallèles (LK) et (IJ), conduisent au théorème des deux moniennes de Reim (Cf. Annexe 2) ;
  en conséquence, M, Eu, I et J sont cocycliques.

- **Scolie :** ce cercle est le B-cercle d'Euler de ABCD i.e. *2*.

- **Conclusion partielle :** *2*, *3* et *4* sont concourants en Eu.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que *1*, *3* et *4* sont concourants en Eu.

- **Conclusion :** *1*, *2*, *3* et *4* sont concourants en Eu.

Énoncé traditionnel : les cercles d'Euler des quatre triangles déterminés par les sommets d'un quadrilatère, sont concourants.

Note historique : l'auteur a associé le nom d'Euler au point de concours suite à un article[5] de la littérature géométrique qui indiquait qu'Euler avait approché ce point en considérant un quadrilatère cyclique.
En 1904, M. T. Lemoine[6] signale ce résultat et en 1912, Happach[7] précise que ce résultat devait être connu, sans doute, avant lui. En 1821, Jean-Victor Poncelet[8] publie en collaboration avec Charles Julien Brianchon, ce résultat qu'il avait envisagé durant sa captivité en Russie en considérant une conique et le concept de polaire. Signalons que dans son article, Poncelet (re)démontre dans le théorème IX, le cercle d'Euler et plus précisément le cercle des neuf points.
En 1929, Roger Arthur Johnson[9] en donne une solution angulaire.

Scolies : **(1)** sous le point de vue des cercles d'Euler, Eu est "le point d'Euler de ABCD".

(2) Eu existe si ABCD n'est pas orthocentrique i.e. que chaque sommet n'est pas l'orthocentre du triangle déterminé par les trois autres, sinon les quatre cercles d'Euler coïncident.

Une précision : d'après les recherches de l'historien James Sturgeon MacKay, le cercle dit d'Euler n'apparaît nulle part dans l'oeuvre de celui-ci. Mackay[10] dans un article de 1892, intitulé

History of the Nine Point Circle, attribue ce cercle à John Whitley[11]. Une autre source attribue ce cercle à l'ingénieur civil Benjamin Bevan[12] qui posait la question suivante :

Montrer que le centre O du cercle circonscrit à un triangle ABC est le milieu du segment joignant le centre I du cercle inscrit au centre du cercle circonscrit du triangle excentral et que le rayon de ce cercle est le double de celui circonscrivant ABC.

Une solution en a été donnée dans le même numéro de la revue citée à la page 143.
Pour l'histoire de ce cercle, le lecteur pourra se reporter aux *Proceedings*[13].

Une courte biographie de Leonhard Euler

5 Référence non retrouvée.
6 Lemoine M. T., Note de géométrie, *Nouv. Ann. Math.* **4**, 400-402, 1904.
7 Happach, *Zeitschrift für Math. und Nat. Unterricht* **43** (1912) 175.
8 Brianchon C. J., Poncelet J.-V., Recherche sur la détermination d'une hyperbole équilatère au moyen de quatre conditions données, *Annales de Mathématiques pures et Appliquées* (1821-1822) 223-25 ;
Annales Mathématiques de Montpellier vol. XI (01/01/1821) 504-516 ; théorème VII, p. 511.
9 Johnson R. A, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1960 (from 1929 original) 240-243.
10 MacKay J. S., *Plane Geometry* (1904).
11 Whitley J., *Gentleman's Mathematical Companion* (1808) 133.
12 Bevan B., *Mathematical Repository* de Leybourn I (1804) 18.
13 *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* vol. XI (1893) 19-57.

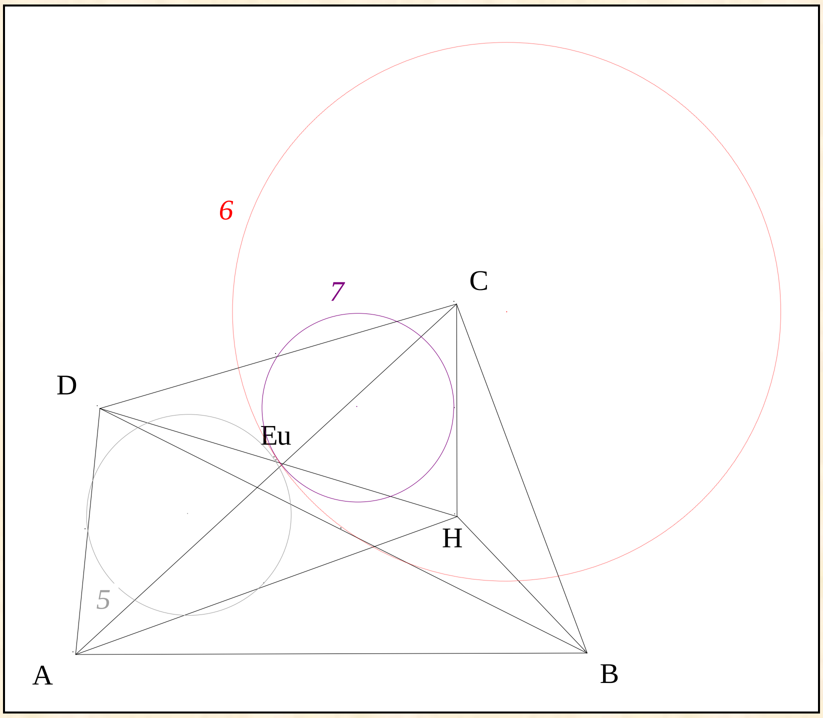
Le cyclope mathématique [14]

Léonhard Euler[15] est né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse).
L'année suivante, il quitte cette ville pour aller à Riehen où son père devient le pasteur calviniste du lieu.
Son père, Paul Euler qui avait étudié les mathématiques avec Jacques Bernoulli (1654-1705), commet pour ainsi dire, "l'erreur" de les enseigner à son fils et devient ainsi le premier maître de Léonhard.
Après des études de philosophie, Euler décide de se consacrer entièrement aux mathématiques. Élève de Jean Bernoulli (1667-1748), l'un des frères de Jacques, il se lie d'amitié avec ses fils Nicolas (1695-1726) et Daniel (1700-1782), puis quitte dans sa vingtième année, sa famille pour aller les rejoindre à St. Petersbourg pour occuper un poste d'assistant à l'Académie de cette ville où ils professaient les mathématiques depuis 1725.
Les premières années de son séjour en Russie sont difficiles, mais le départ inattendu de Daniel pour la Suisse en 1733, lui permet de devenir professeur à son tour et d'améliorer ainsi son quotidien.
La même année, il épouse une compatriote, la fille du peintre Gsell dont la famille s'était établie en Russie depuis de nombreuses années. Les enfants naissent les uns après les autres et à 33 ans, en pleine force de l'âge, il perd son oeil droit.
En 1741, il accepte l'invitation du roi de Prusse, Frédéric le Grand, pour aller travailler à l'Académie de Berlin. Il y demeure pendant 25 ans avant de retourner en 1766 en Russie où Catherine II lui offre une maison pour ses 13 enfants. Sa vue continue de baisser et il se voit contraint d'écrire sur une ardoise pour faire ses calculs.
En 1771, le feu détruit sa maison, mais il a le temps de sauver tous ses manuscrits.
A 69 ans, il devient veuf et l'année suivante, il se remarie avec la demi-soeur de sa femme.
Il meurt le 18 septembre 1783 à St Petersbourg (Russie) alors qu'il buvait du thé avec des amis laissant à la postérité une oeuvre constituée de 45 volumes et plus de 700 articles.

3. Des cercles passant par le point d'Euler

VISION

Figure :



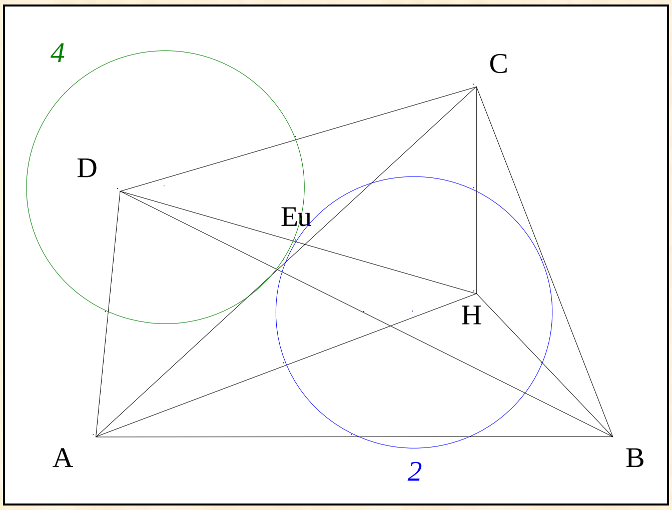
[14] Surnom donné par Frédéric le Grand qui, tout en faisant allusion à la perte de son oeil droit, soulignait son oeuvre cyclopéenne dans le domaine mathématique.

[15] University of St Andrews ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Euler.html.

Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
H l'orthocentre de ABC.
et *5, 6, 7* les cercles d'Euler des triangles HAD, HBD, HCD.

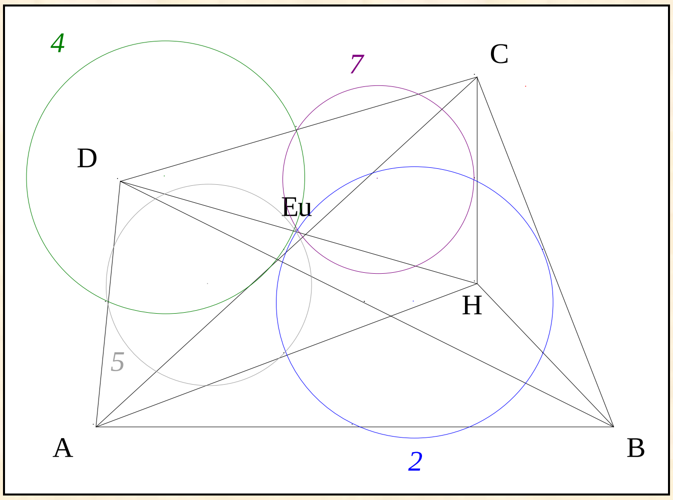
Donné : *5, 6* et *7* sont concourants en Eu.

VISUALISATION



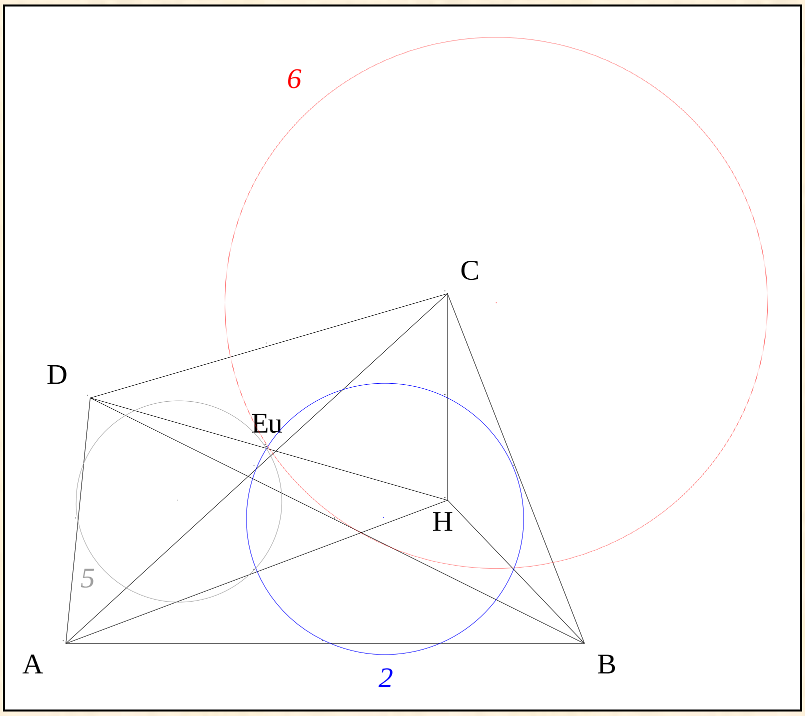
- **Scolie :** *2, 4* sont resp. les B, D-cercles d'Euler de ABCD.

- D'après A. I. 2. Les quatre cercle d'Euler d'un quadrilatère,
  appliqué à ABCD, *2* et *4* passent par Eu.



- D'après "Le théorème d'Hamilton" (Cf. Annexe 3), *2* est le cercle d'Euler du triangle HCA.

- D'après A. I. 2. Les quatre cercle d'Euler d'un quadrilatère,
  appliqué à HCDA, *2, 4 5* et *7* sont concourants en Eu.



- D'après "Le théorème d'Hamilton" (Cf. Annexe 3), *2* est le cercle d'Euler du triangle HAB.

- D'après A. I. 2. Les quatre cercle d'Euler d'un quadrilatère, appliqué à HDAB, *2*, *5* et *6* sont concourants en Eu.

- **Conclusion :** *5*, *6* et *7* sont concourants en Eu.

Scolie : Eu est le point d'Euler des quadrilatères HCDA, HDAB et HBCD.

Commentaire : cette situation met indirectement en œuvre le concept de "cercle des milieux d'un quadrilatère" qui sera envisagé dans la partie II.

II. LE POINT DE PONCELET D'UN QUADRILATÈRE

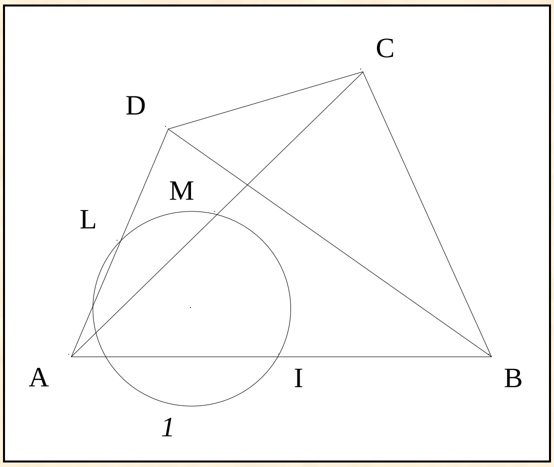
Commentaire : l'auteur a préféré parler du point de Poncelet indépendamment de celui d'Euler. Pour cela, il s'est inspiré d'une idée fractionnée sous forme d'exercices apparemment indépendants et distillée discrètement par Igor Federovitch Sharygin[16] dans son livre *Problemas de geometria*. Rappelons que Roger Arthur Johnson[17] avait déloppé cette idée sous forme de théorèmes enchaînés en 1929.
L'auteur n'a donc pas suivi la technique angulaire développée par Johnson.

1. Le A-cercle des milieux d'un quadrilatère

[16] Sharygin I. F. (?-2004), *Problemas de geometria*, Editions Mir, Moscou (1986).
[17] Johnson R. A, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1960 (from 1929 original) 240-243.

VISION

Figure :



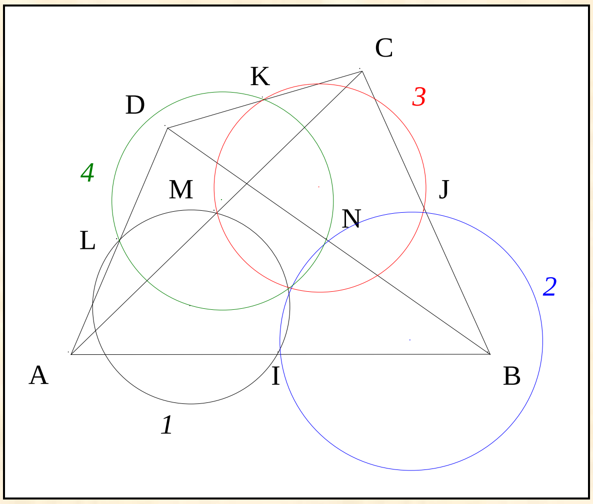
Finition : ABCD un quadrilatère,
I, M, L les milieux resp. de [AB], [AC], [AD]
et *1* le cercle passant par I, M, L.

Définition : *1* est "le A-cercle des milieux de ABCD".

2. Les quatre cercles des milieux d'un quadrilatère

VISION

Figure :

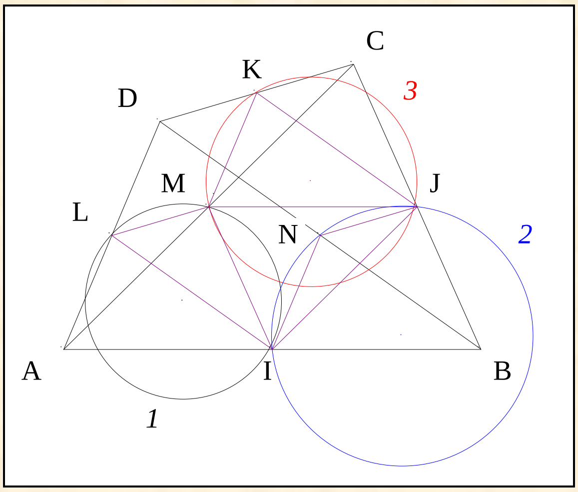


Traits : ABCD un quadrilatère,
I, J, K, L, M, N les milieux resp. de [AB], [BC], [CD], [DA], [AC], [BD]
et *1*, *2*, *3*, *4* les A, B, C, D-cercles des milieux de ABCD.

Donné : *1*, *2*, *3* et *4* sont concourants[18].

[18] Sharygin I. F., *Problemas de geometria*, Editions Mir, Moscou (1986), II. 210 p.112.

VISUALISATION



- Considérons le triangle IJM et les triangles adjacents par un côté NIJ, KMJ et LIM.

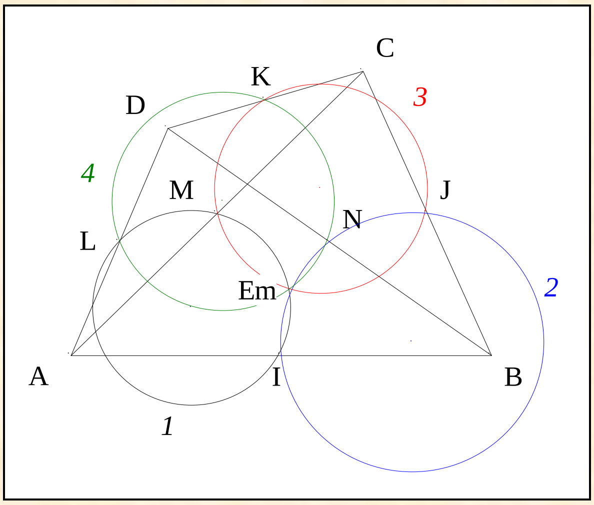
- **Scolies :** **(1)** (NI), (KM) et (AD) sont parallèles entre elles
  (2) (NJ), (LM) et (CD) sont parallèles entre elles
  (3) (JK), (IL) et (BD) sont parallèles entre elles.

- Une chasse angulaire à Π près :
  d'après le théorème "Angles à côtés parallèles", <INJ = <ADC , <JKM = <BDA , <MLI = <CDB.

- La somme des angles <INJ, <JKM et <MLI est égal à l'angle nul à Π près.

- **Conclusion partielle :** d'après Le théorème de Heis (Cf. Annexe 4), *1*, *2* et *3* sont concourants.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *2*, *3* et *4* sont concourants.

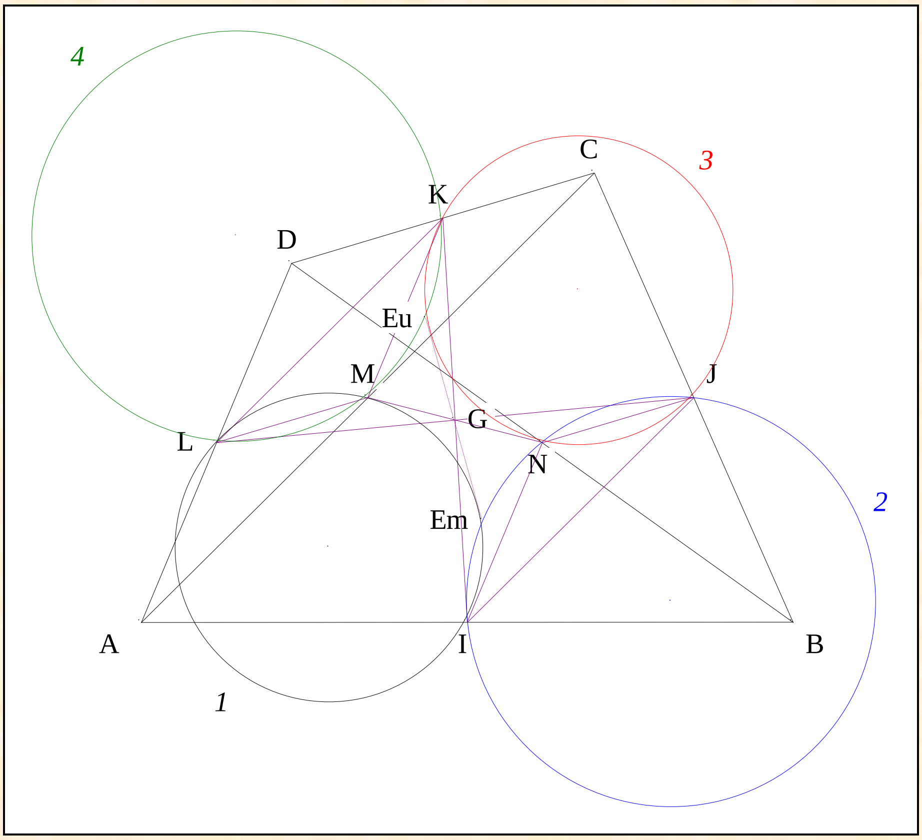


- **Conclusion :** *1*, *2*, *3* et *4* sont concourants.

- Notons Em ce point de concours.

Énoncé traditionnel : les cercles des milieux d'un quadrilatère sont concourants.

Scolies : **(1)** les points Em et Eu



- Notons G le point médian de ABCD,
  1, 2 les C, D-cercles des milieux de ABCD
  et *3, 4* les C, D-cercles d'Euler de ABCD.

- (IK) , (JL) et (MN) étant concourantes en G, *1* et *3* sont symétriques par rapport à G
  2 et *4* sont symétriques par rapport à G.

- **Conclusion :** Em est le symétrique de Eu par rapport à G.

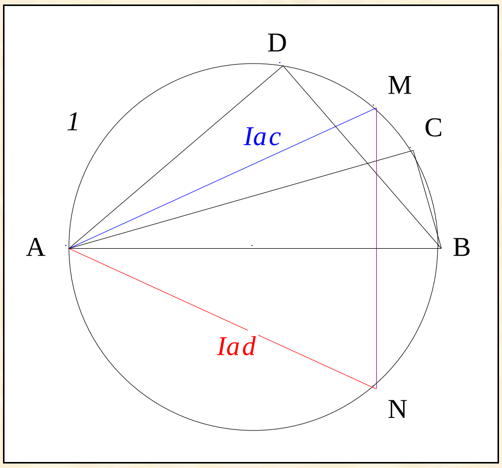
Note historique : ce résultat m'a été communiqué par le hollandais Chris van Tienhoven.

(2) Le quadrilatère EuMEmN est un parallélogramme.

3. Deux isogonales symétriques

VISION

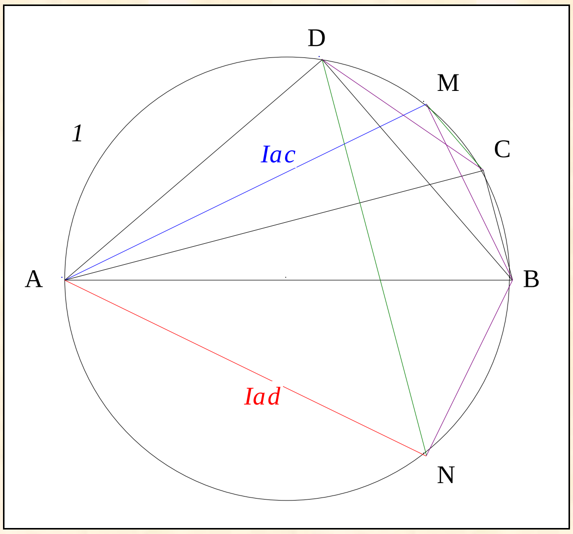
Figure :



Traits : *1* un cercle,
[AB] un diamètre de *1*,
C, D deux points de *1* comme indiqué sur la figure,
Iac l'isogonale de (AC) relativement au triangle ABD,
Iad l'isogonale de (AD) relativement au triangle ABC
et M, N les seconds points d'intersection resp. de *Iac*, *Iad* avec *1*.

Donné : (AB) est la médiatrice de [MN].

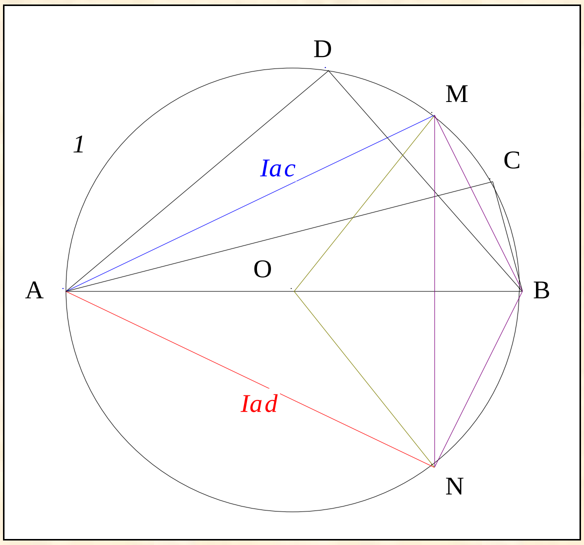
VISUALISATION



- **Scolie :** M et N sont distincts.

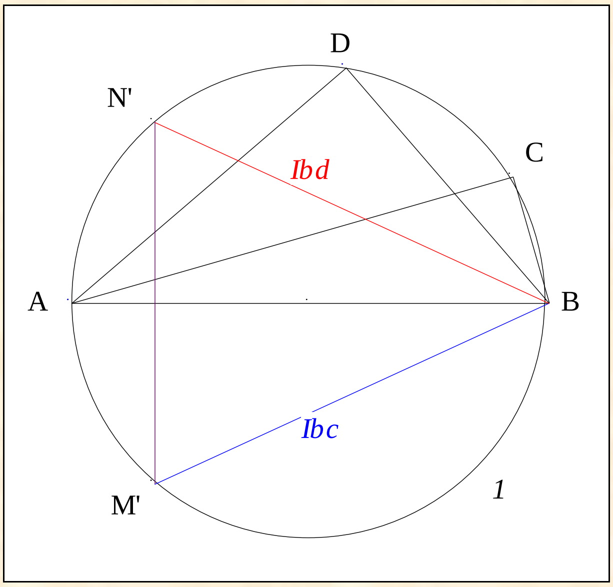
- *Iac* étant l'isogonale de (AC) relativement à ABD, (MC) // (BD)
  Iad étant l'isogonale de (AD) relativement à ABC, (ND) // (BC).

- Les quadrilatères cycliques BCMD et BCDN étant deux trapèzes isocèles, BM = CD et CD = BN ;
  par transitivité de la relation =, BM = BN.



- Notons O le centre de *1*.
- D'après le théorème de la médiatrice, (OB) est la médiatrice de [MN].
- **Conclusion :** (AB) est la médiatrice de [MN].

Scolies **(1)** à partir du point B

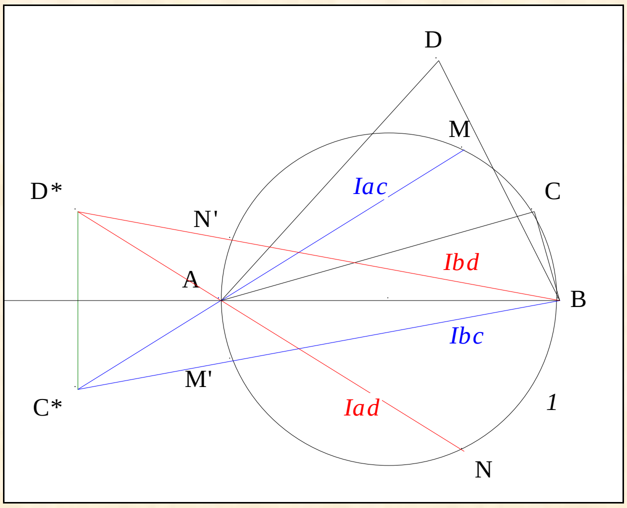


Traits : *1* un cercle,
[AB] un diamètre de *1*,
C, D deux points de *1* comme indiqué sur la figure,
Ibc l'isogonale de (BC) relativement au triangle BDA,
Ibd l'isogonale de (BD) relativement au triangle BCA
et M', N' les seconds points d'intersection resp. de *Ibc*, *Ibd* avec *1*.

Donné : (BA) est la médiatrice de [M'N'].

(2) D n'est pas sur *1*

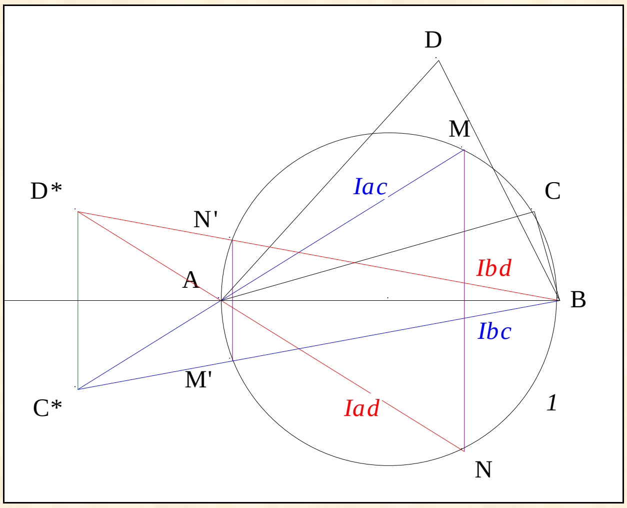
VISION



Traits : *1* un cercle,
[AB] un diamètre de *1*,
C, D deux points de *1* comme indiqué sur la figure,
Iac l'isogonale de (AC) relativement au triangle ABD,
Iad l'isogonale de (AD) relativement au triangle ABC,
M, N les seconds points d'intersection resp. de *Iac*, *Iad* avec *1*,
Ibc l'isogonale de (BC) relativement au triangle BDA,
Ibd l'isogonale de (BD) relativement au triangle BCA,
M', N' les seconds points d'intersection resp. de *Ibc*, *Ibd* avec *1*,
et C*, D* les points d'intersection resp. de *Iac* et *Ibc*, de *Iad* et *Ibd*.

Donné : (AB) est la médiatrice de [C*D*].

VISUALISATION



- C* est l'isogonal de C relativement à ABD.
- D* est l'isogonal de D relativement à BCA.
- D'après A. II. 3. Deux isogonales symétriques,

  * *Iac* et *Iad* sont symétriques par rapport à (AB)
  * *Ibc* et *Ibd* sont symétriques par rapport à (BA)

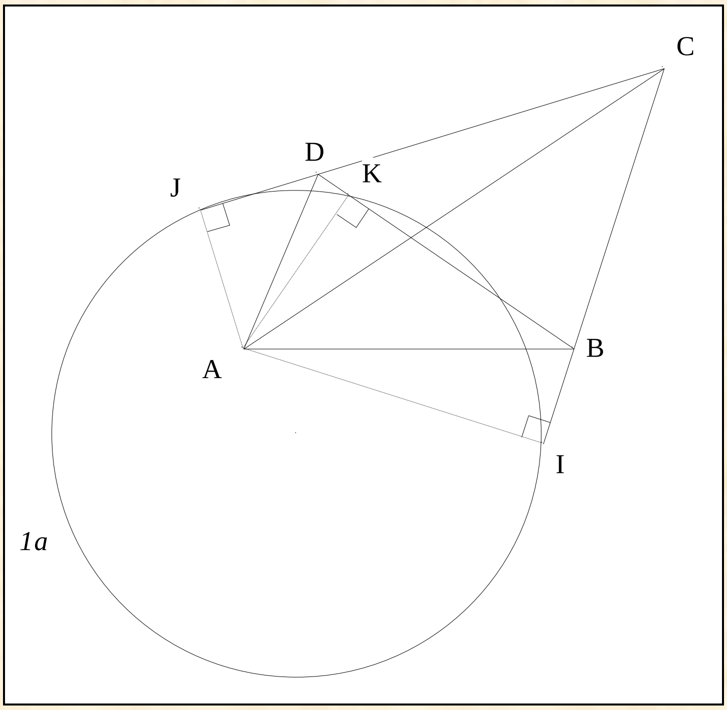
en conséquence, C* et D* sont symétriques par rapport à (AB).

- **Conclusion :** (AB) est la médiatrice de [C*D*].

4. Le A-cercle pédal d'un quadrilatère

VISION

Figure :



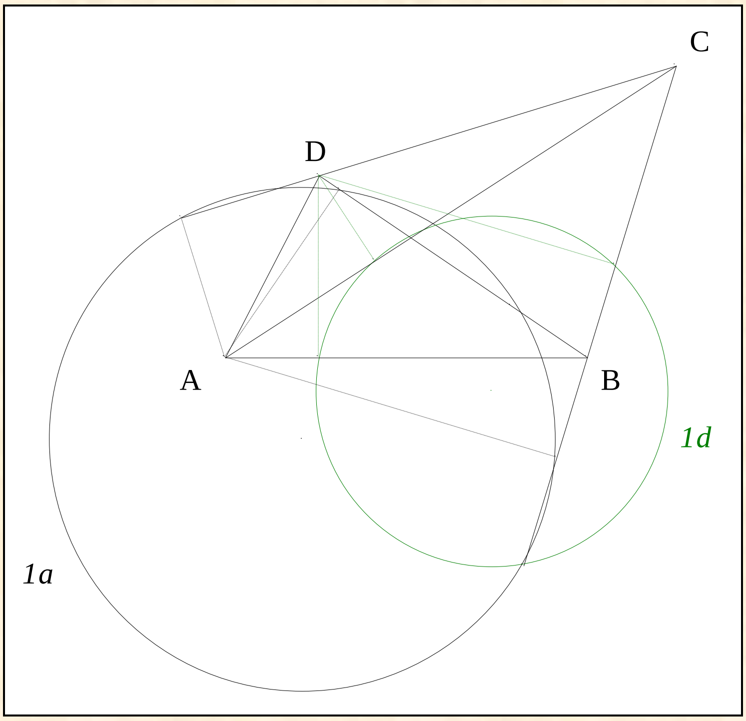
Finition : ABCD un quadrilatère,
I, J, K les pieds des perpendiculaires abaissées de A resp. sur (BC), (CD), (DB),
et *1a* le cercle passant par I, J, K.

Définition : *1a* est "le A-cercle pédal de ABCD".

5. Intersection de deux cercles pédaux d'un quadrilatère

VISION

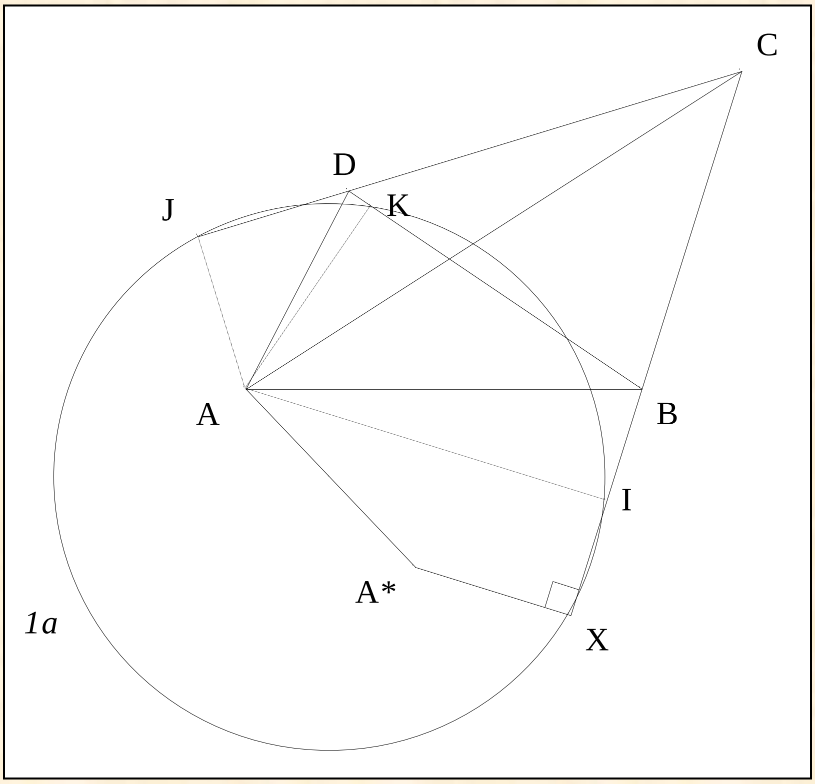
Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère,
et *1a*, *1d* les A, B-cercles pédaux de ABCD.

Donné : *1a* et *1d* se coupent sur (BC).

VISUALISATION



- Considérons le triangle BCD et le point A.

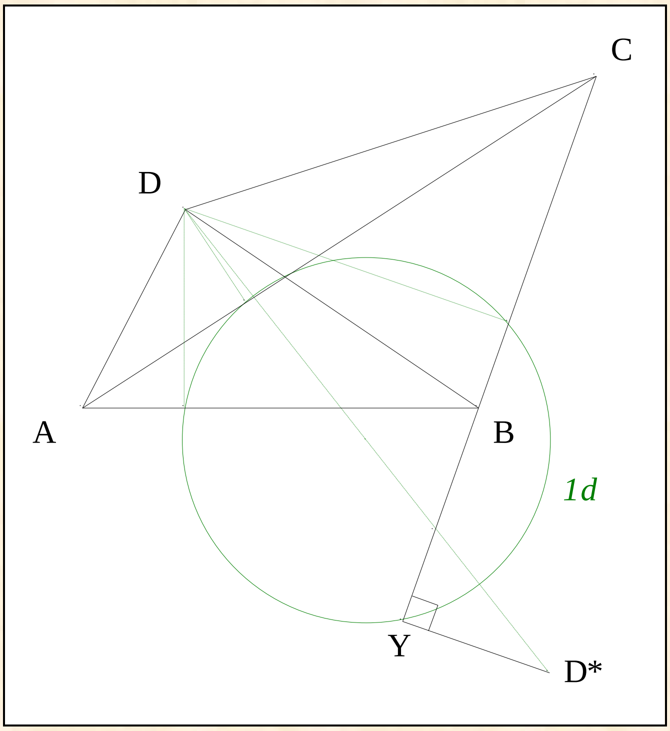
- D'après Mathieu "The isogonal theorem" (Cf. Annexe 5),
  les isogonales de (BA), (CA) et (DA) relativement à BCD concourent à l'isogonal de A.

- Notons A* l'isogonal de A.

- **Scolie :** **(1)** *1a* est le A-cercle de Mathieu relativement à BCD
  (2) A* est le symétrique de A par rapport au centre de *1a*.

- Notons X le second point d'intersection de (BC) avec *1a*.

- **Conclusion partielle :** d'après "Le cercle de Mathieu" (Cf. Annexe 6), (A*X) $\perp$ (BC).



- Considérons le triangle ABC et le point D.

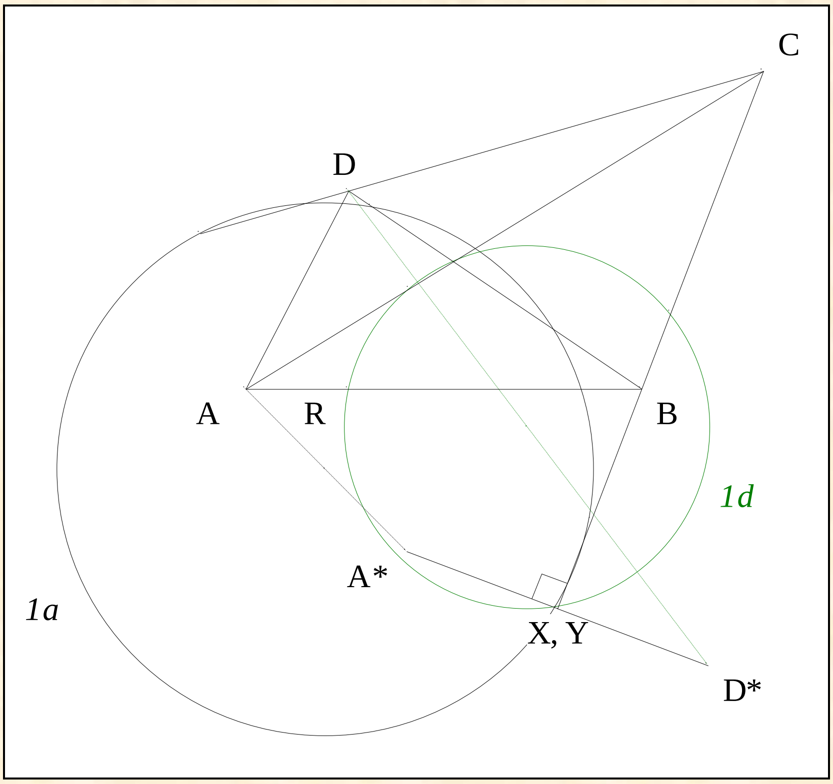
- D'après Mathieu "The isogonal theorem" (Cf. Annexe 5),
  les isogonales de (AD), (BD) et (CD) relativement à ABC concourent à l'isogonal de D.

- Notons D* l'isogonal de D.

- **Scolies :** **(1)** *1d* est le D-cercle de Mathieu relativement à ABC
  (2) D* est le symétrique de D par rapport au centre de *1d*.

- Notons Y le second point d'intersection de (BC) avec *1d*.

- **Conclusion partielle :** d'après "Le cercle de Mathieu" (Cf. Annexe 6), (D*Y) $\perp$ (BC).



- D'après A. II. 3. Deux isogonales symétriques, (BC) est la médiatrice de [A*D*] ;
  en conséquences, **(1)** X et Y sont confondus
  (2) *1a* et *1d* passent par le milieu de [A*D*].

- **Conclusion :** *1a* et *1d* se coupent sur (BC).

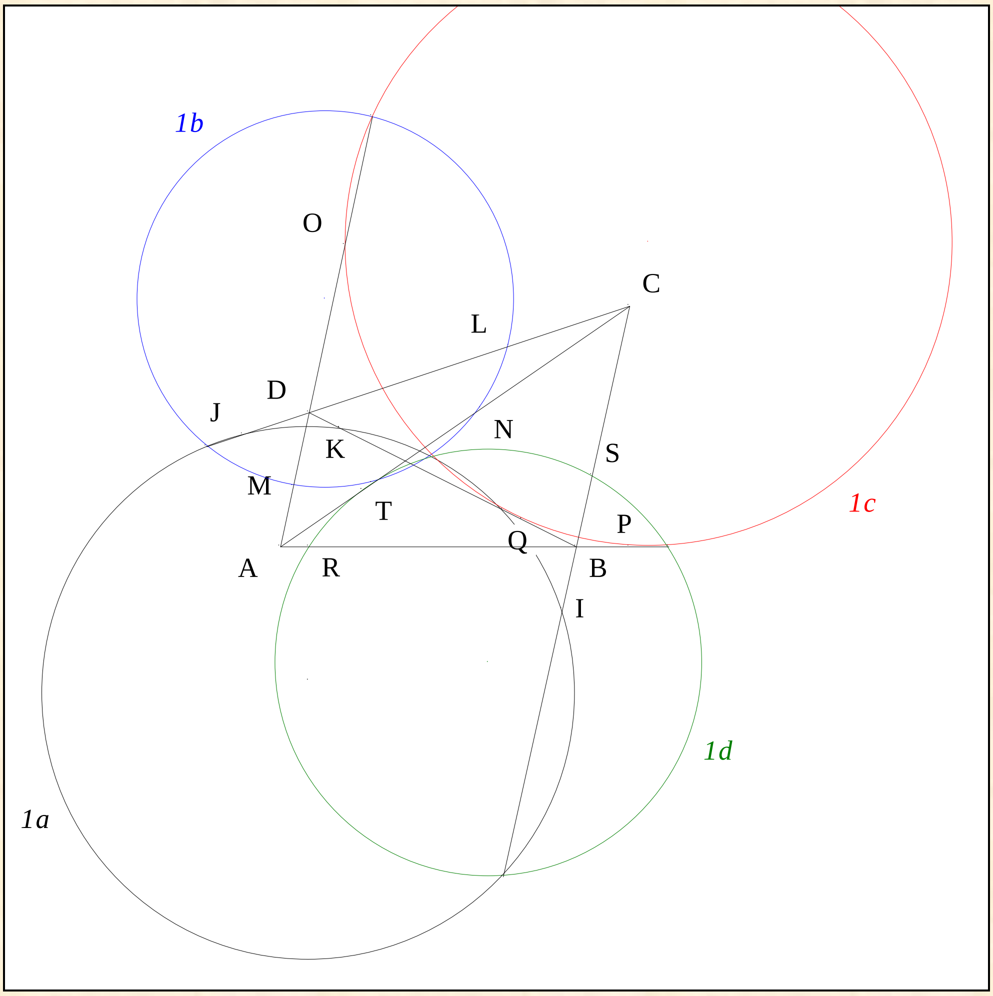
Énoncé traditionnel : les cercles pédaux de deux sommets d'un quadrilatère se coupent en un même point sur le "côté" joignant les deux autres sommets.

Scolie : (BCX) est la médiatrice de [A*D*].

6. Les quatre cercles pédaux d'un quadrilatère

VISION

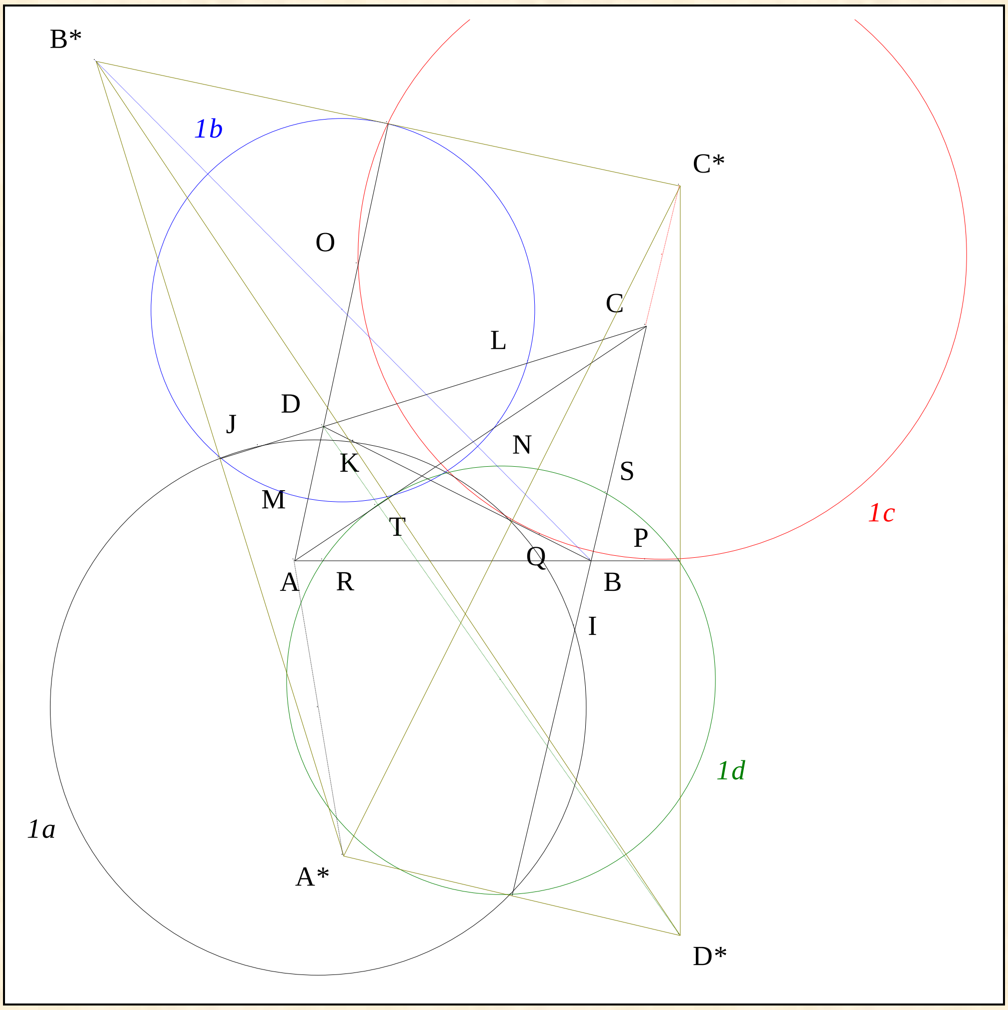
Figure :



Traits :	ABCD	un quadrilatère,
	I, J, K	les pieds des perpendiculaires abaissées de A resp. sur (BC), (CD), (DB),
	L, M, N	les pieds des perpendiculaires abaissées de B resp. sur (CD), (DA), (AC),
	O, P, Q	les pieds des perpendiculaires abaissées de C resp. sur (DA), (AB), (BD),
	R, S, T	les pieds des perpendiculaires abaissées de D resp. sur (AB), (BC), (CA),
et	*1a*, *1b* , *1c*, *1d*	les A, B, C, D-cercles pédaux de ABCD.

Donné : *1a*, *1b*, *1c* et *1d* sont concourants.

VISUALISATION



- Notons A* l'isogonal de A relativement au triangle BCD,
  B* l'isogonal de B relativement au triangle CDA,
  C* l'isogonal de C relativement au triangle DAB
  et D* l'isogonal de D relativement au triangle ABC.

- D'après A. II. 5. Intersection de deux cercles pédaux d'un quadrilatère, mutatis mutandis, nous montrerions que

  (1) *1a* et *1b* passent par le milieu de [A*B*]
  1b et *1c* passent par le milieu de [B*C*]
  1c et *1d* passent par le milieu de [C*D*]
  1d et *1a* passent par le milieu de [D*A*].

  (2) *1a* et *1c* passent par le milieu de [A*C*]
  1b et *1d* passent par le milieu de [B*D*].

- **Conclusion :** d'après A. II. 2. Les quatre cercles des milieux d'un quadrilatère appliqué A*B*C*D*, *1a*, *1b* , *1c* et *1d* sont concourants.

- Notons Po ce point de concours.

Énoncé traditionnel : les cercles pédaux de chaque sommet d'un quadrilatère relatif au triangle déterminé par les trois autres sommets, sont concourants.

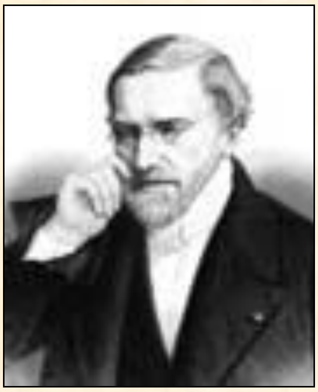
Scolies : **(1)** sous le point de vue des cercles pédaux, Po est "le point de Poncelet de ABCD".

(2) Des médiatrices

* (BC) est la médiatrice de [D*A*]
* (CD) est la médiatrice de [A*B*]
* (DA) est la médiatrice de [B*C*]
* (AB) est la médiatrice de [C*D*]
* (AC) est la médiatrice de [B*D*]
* (BD) est la médiatrice de [C*A*].

Note historique : ce résultat attribué dans la littérature géométrique à Jean-Victor Poncelet[19] a été angulairement traité en 1929 par Roger Arthur Johnson[20]. L'auteur précise qu'il n'a pas constaté la présence de cercles pédaux dans l'article de Brianchon-Poncelet.
Ce même résultat a été proposé en 1986 par Igor Federovitch Sharygin[21] dans son livre *Problemas de geometria* et rappelé en 1999 par E. M. Schröder[22] en utilisant une conique.

Une courte biographie de Jean-Victor Poncelet :



Le vrai créateur de la géométrie supérieure [23]

Jean Victor Poncelet[24] est né le 1 juillet 1788 à Metz (Lorraine, France).
Enfant illégitime de Claude Poncelet et de Anne-Marie Perrein, Jean-Victor est le fils d'un riche propriétaire terrien et avocat au parlement de Metz. Du fait de la nature de sa naissance, il est mis en nourrice au cours de sa première année dans la famille Olier à Saint-Avold, une ville proche de Metz. Après le mariage de son avec sa mère, Jean-Victor retrouve sa vraie famille mais reste auprès de sa chaleureuse famille d'accueil jusqu'en 1804.
Élève du Lycée de Metz en classe préparatoire, il entre en 1807 à l'École polytechnique où il suit les cours de géométrie de Carnot et de Monge qui lui permettent de redécouvrir les idées de Desargues. De santé fragile, il manque la plupart des cours de troisième année. Promu officier en 1810 à l'âge de 22 ans, il poursuit durant deux années ses études à l'École d'Application de Metz.
Promu lieutenant à la sortie, il rejoint l'armée de Napoléon et se voit confier la tache de fortifier la ville de Rammekens (Pays-Bas) sur l'île de Walcheren situer à l'estuaire de l'Escaut. En juin 1812, il rejoint la Grande Armée de Napoléon à Vitepsk (Lituanie) lors de la campagne de Russie. Le 18 août 1812, il est à Smolensk (Biélorussie) et commence à entreprendre la construction de ponts sur le Dniepr. Il passe ensuite cinq semaines dans la ville dévastée de Moscou avant la retraite décidée par Napoléon le 19 octobre. Durant cette retraite, il est

19 Brianchon C. J., Poncelet J.-V., Recherche sur la détermination d'une hyperbole équilatère au moyen de quatre conditions données, *Annales de Mathématiques pures et Appliquées* (1821-1822) 223-25 ;
Annales Mathématiques de Montpellier vol. XI (01/01/1821) 504-516 ; théorème IX, p. 512.
20 Johnson R. A, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1960 (from 1929 original) 240-243.
21 Sharygin I. F. (?-2004), *Problemas de geometria*, Editions Mir, Moscou (1986), problème II. 212 p. 112.
22 Schröder, E. M., Zwei 8-Kreise-Sätze für Vierecke, *Mitt. Math. Ges. Hamburg* **18**, 105-117, 1999.
23 Salmon G., *Coniques*.
24 University of St Andrews ; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Euler.html.

fait prisonnier par l'armée de Kutuzov, le 19 novembre 1812 près de la ville de Smolensk. Commence alors pour lui cinq mois d'une marche de 800 km durant le terrible hiver de 1812-1813 pour rejoindre à travers les steppes Saratov (Russie) sur la Volga où il est emprisonné. Durant les deux années de captivité où il sera "privé de toute espèce de livres et de secours, surtout distrait par les malheurs de sa patrie et les miens propres", il met au point ses idées sur les propriétés projectives des figures.
De retour à Metz en juin 1814, il travaille en tant qu'officier de génie. Entre 1817 et 1819, il écrit un mémoire sur *La théorie générale des polaires* réciproques donnant ainsi naissance à la géométrie supérieure i.e. à la géométrie des transformations. En 1821, il prouve que le triangle orthique et médian ont le même cercle circonscrit. L'année suivante, il publie le célèbre *Traité des propriétés projectives des figures* dans laquelle il introduit des éléments imaginaires, "la droite à l'infini", en s'appuyant sur le principe de continuité :

si, une figure se déduit d'une autre par un changement continu et
si, la seconde est aussi générale que la première
alors, toute propriété de la première figure est nécessairement aussi une propriété de la seconde.

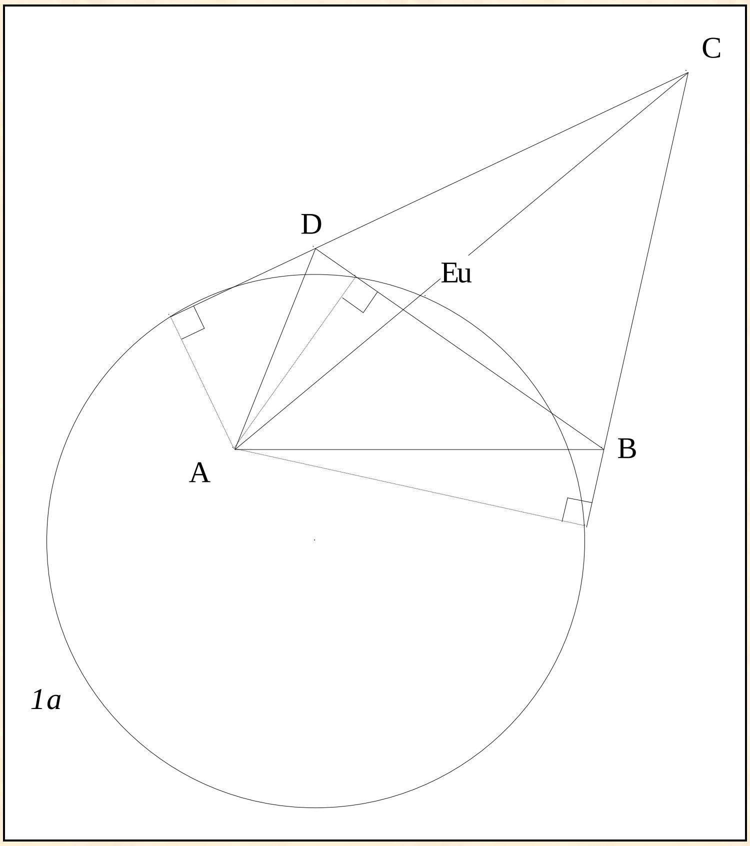
En 1825, il devient professeur à l'École d'application de Metz qu'il quitte en 1835 pour aller à Paris enseigner à la faculté des sciences. Nommé général, il prend le commandement de l'École polytechnique.
Il décède le 22 décembre 1867 à Paris (France).

III. LE POINT D'EULER – PONCELET D'UN QUADRILATÈRE

1. Un cercle pédal passant par le point d'Euler d'un quadrilatère

VISION

Figure :

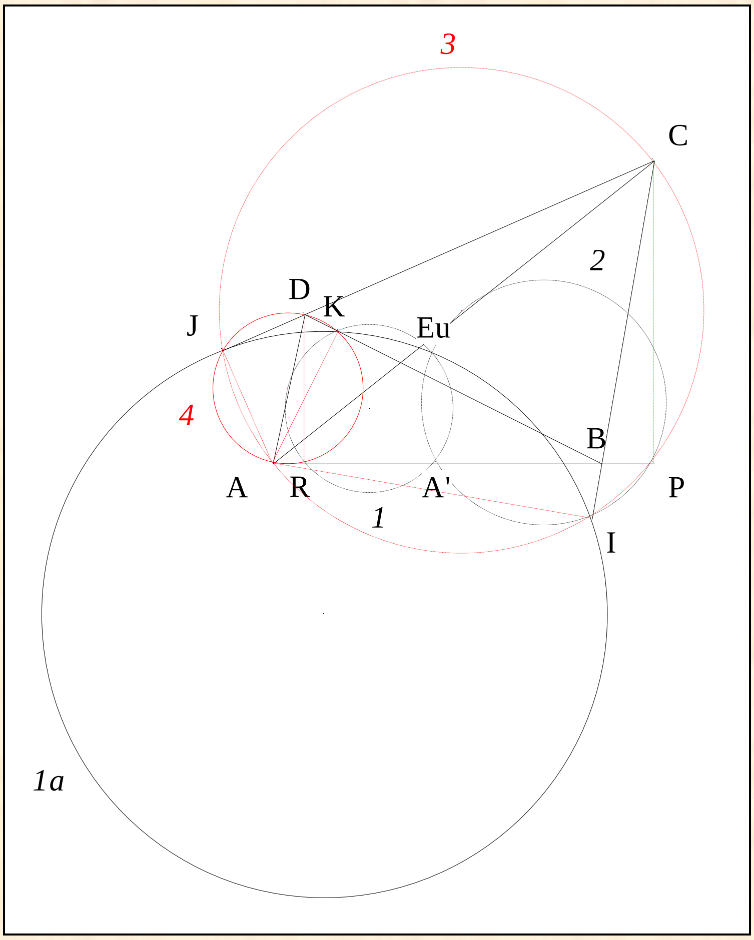


Traits : ABCD		un quadrilatère,
	Eu	le point d'Euler de ABCD
et	*1a*	le A-cercle pédal de ABCD.

Donné : *1a* passe par Eu.

VISUALISATION [25]

[25] de l'auteur.



- Notons I, J, K les pieds des perpendiculaires abaissées de A resp. sur (BC), (CD), (DB),
  P le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur (AB),
  R le pied de la perpendiculaire abaissée de D sur (AB),
  1, *2* les cercles d'Euler resp. des triangles ABD, ABC,
  A' le milieu de [AB]
  et *3*, *4* les cercles de diamètre resp. [AC], [AD].

- **Scolies :** **(1)** *1a* passe par I, J et K
  (2) *1* et *2* se coupent en A' et Eu.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", **(1)** I, J et P sont sur *3*
  (2) J, K et R sont sur *4*.

- D'après Lebesgue "Le théorème des cinq cercles" [26] (Cf. Annexe 7) appliqué à *4*, *1*, *2* et *3*,
  J, K, Eu et I sont cocycliques i.e. sur *1a*.

- **Conclusion :** *1a* passe par Eu.

Commentaire : ce résultat a été prouvé angulairement par Roger Arthur Johnson[27].

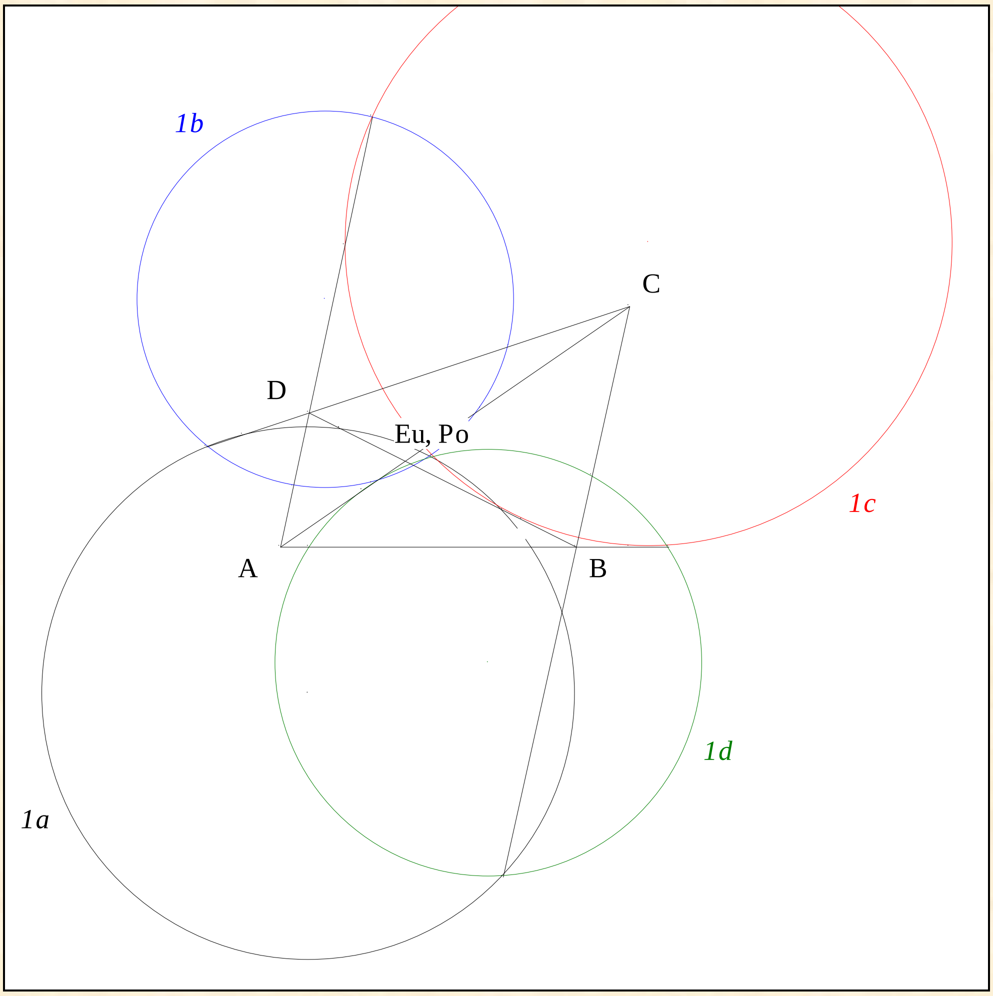
2. Point d'Euler et point de Poncelet d'un quadrilatère

[26] Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles, G.G.G. vol. 2, p. 6-8 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

[27] Johnson R. A, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1960 (from 1929 original) n° 397, p. 242.

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un quadrilatère,
	Eu	le point d'Euler de ABCD,
	1a, *1b* , *1c*, *1d*	les A, B, C, D-cercle pédaux de ABCD
et	Po	le point de Poncelet de ABCD.

Donné : Po et Eu sont confondus.

VISUALISATION

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *1b* passe par Eu
1c passe par Eu
1d passe par Eu.

- D'après A. II. 6. Les quatre cercles pédaux d'un quadrilatère, *1a*, *1b* , *1c* et *1d* sont concourants en Po.

- **Conclusion :** Po et Eu sont confondus.

Note historique : d'après Georges Fontené[28], ce résultat semble être très connu en 1905. Ce résultat de Jean-Victor Poncelet[29] que l'auteur n'a pas rencontré dans la référence citée, a été angulairement traité en 1929 par Roger Arthur Johnson[30] et (re)démontré en 1999 par E. M. Schröder[31] en utilisant une conique.

Scolie : Po est le point d'Euler-Poncelet de ABCD
ou plus brièvement
le point de Poncelet de ABCD.

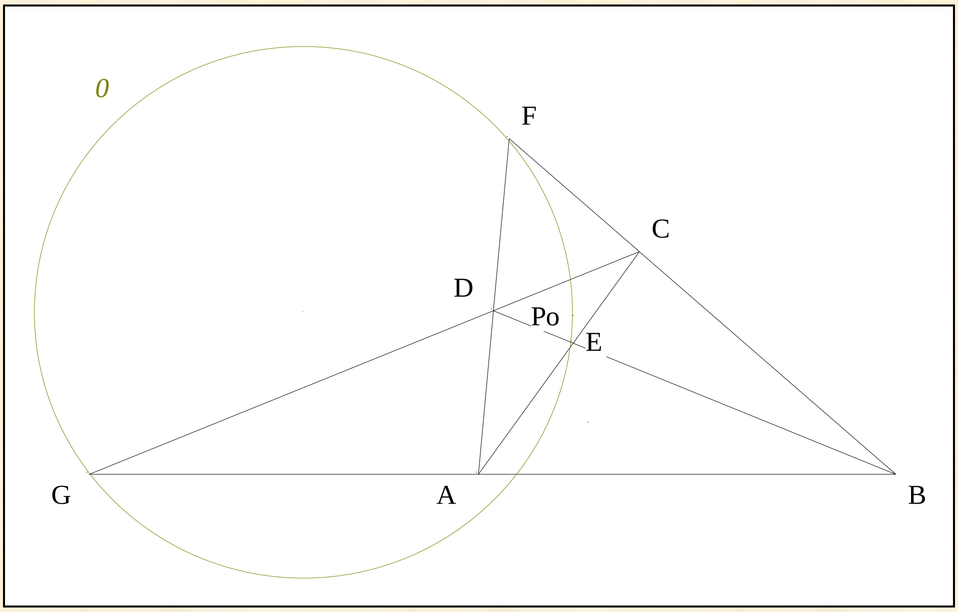
B. ÉTUDE D'UNE FIGURE

I. LE POINT DE DÉPART

1. Le premier cercle de Brianchon-Poncelet

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère,
Po le point d'Euler-Poncelet de ABCD,
E, F, G les points d'intersection de (AC) et (BD), de (AD) et (BC), de (AB) et (CD),

---

28 Fontené G., Extension du théorème de Feuerbach, *Nouvelles Annales* 5 (1905) 504-506.

29 Brianchon C. J., Poncelet J.-V., Recherche sur la détermination d'une hyperbole équilatère au moyen de quatre conditions données, *Annales de Mathématiques pures et Appliquées* (1821-1822) 233-25 ;
Annales Mathématiques de Montpellier vol. XI (01/01/1821) 504-516 ; théorèmes VII et IX, p. 511-512.

30 Johnson R. A, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1960 (from 1929 original) 240-243.

31 Schröder, E. M., "Zwei 8-Kreise-Sätze für Vierecke." *Mitt. Math. Ges. Hamburg* **18**, 105-117, 1999.

et *0* le cercle circonscrit du triangle XYZ.

Donné : *0* passe par Po.[32]

Commentaire : Jean-Pierre Ehrmann[33] a communiqué au site *Hyacinthos* l'article de Brianchon-Poncelet dans lequel une hyperbole équilatère et le concept de polaire permet de résoudre cette question.
N'ayant pu trouver une preuve élémentaire, l'auteur se lance dans une recherche…
Pour cela, une nouvelle notation de la figure est nécessaire.

Une courte biographie de Charles-Julien Brianchon

Charles Julien Brianchon est né à Sèvres, le 19 décembre 1783.
En 1804, il entre à l'École Polytechnique où il devient l'élève de Monge.
En 1806, alors qu'il est toujours élève, il publie dans le XII-ième cahier du *Journal de l'École*, le théorème qui aujourd'hui porte son nom, après avoir rétablit le théorème oublié de Pascal. Sorti premier de Polytechnique, il entre dans la carrière militaire en devenant lieutenant d'artillerie. Participant à la campagne du Portugal et d'Espagne sous Napoléon, il quitte l'armée pour cause de santé et occupe un poste d'enseignant. Après cinq années de galère, il trouve finalement un poste de professeur à l'École d'Artillerie de Vincennes. C'est entre 1816 et 1818 qu'il écrit un grand nombre d'articles. En 1817, il est promu capitaine d'artillerie.
Il décède à Versailles, le 29 avril 1864.

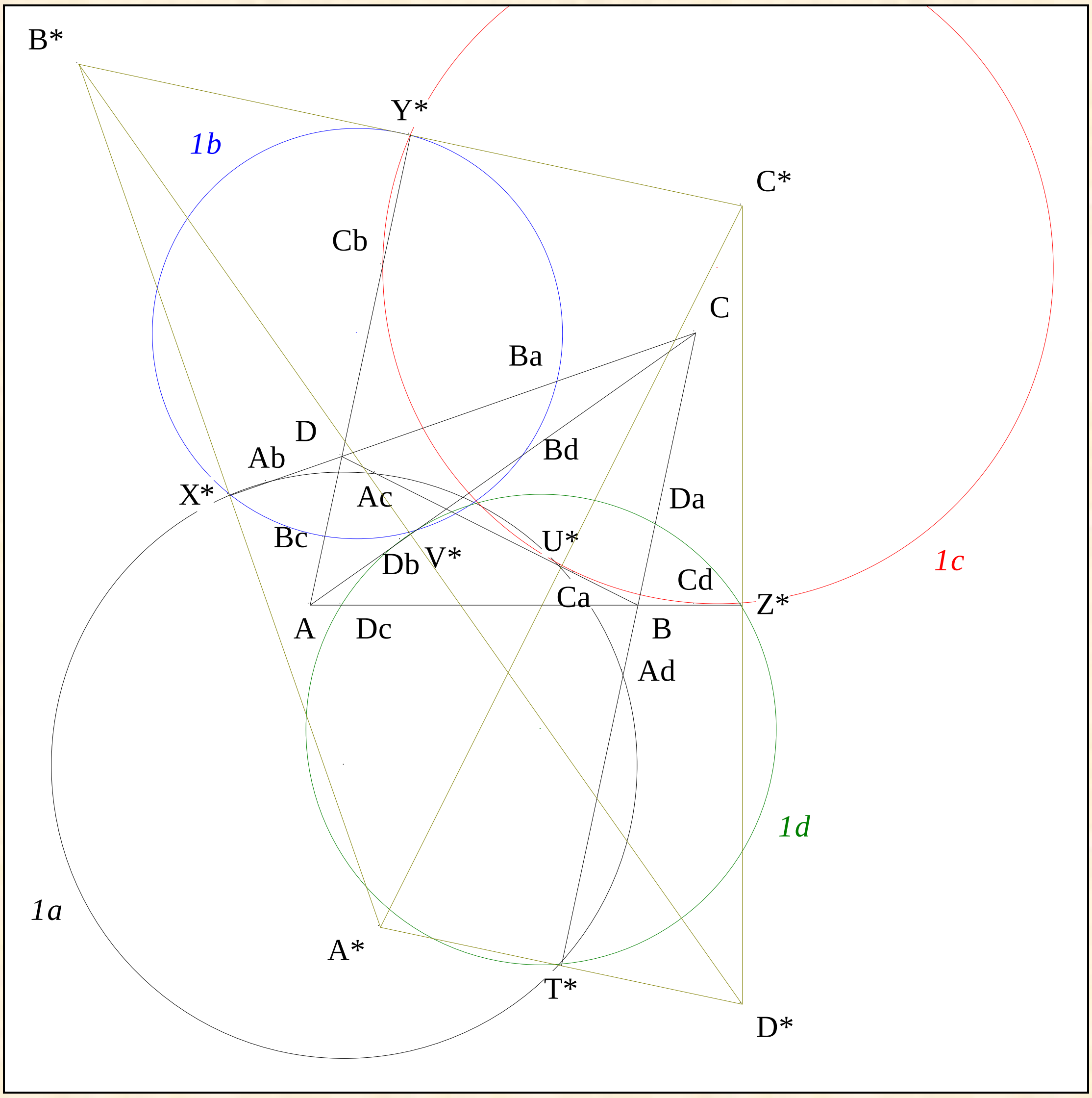
2. Une notation symétrique

VISION

Figure :

[32] Brianchon C. J., Poncelet J.-V., Recherche sur la détermination d'une hyperbole équilatère au moyen de quatre conditions données, *Annales de Mathématiques pures et Appliquées* (1821-1822) 233-25 ;
Annales Mathématiques de Montpellier vol. XI (01/01/1821) 504-516 ; théorème VI, p. 510.

[33] Ehrmann J.-P., Nine Circles Concur with nine points circle, Message *Hyacinthos* # 12500 du 26/03/2006 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/ ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/files/.



Traits :	ABCD	un quadrilatère,
	Ad, Ab, Ac	les pieds des perpendiculaires abaissées de A sur (BC), (CD), (DB),
	Ba, Bc, Bd	les pieds des perpendiculaires abaissées de B sur (CD), (DA), (AC),
	Cb, Cd, Ca	les pieds des perpendiculaires abaissées de C sur (DA), (AB), (BD),
	Dc, Da, Db	les pieds des perpendiculaires abaissées de D sur (AB), (BC), (CA),
	1a, *1b* , *1c*, *1d*	les A, B, C, D-cercles pédaux de ABCD,
	Po	le point d'Euler-Poncelet de ABCD,
	A*, B*, C*, D*	les symétriques de A, B, C, D par rapport aux centres de *1a*, *1b* , *1c*, *1d*
et	X*, Y*, Z*, T*, U*, V*	les seconds points d'intersection de *1a* et *1b* , de *1b* et *1c*, de *1c* et *1d*, de *1d* et *1a*, de *1a* et *1c*, de *1b* et *1d*.

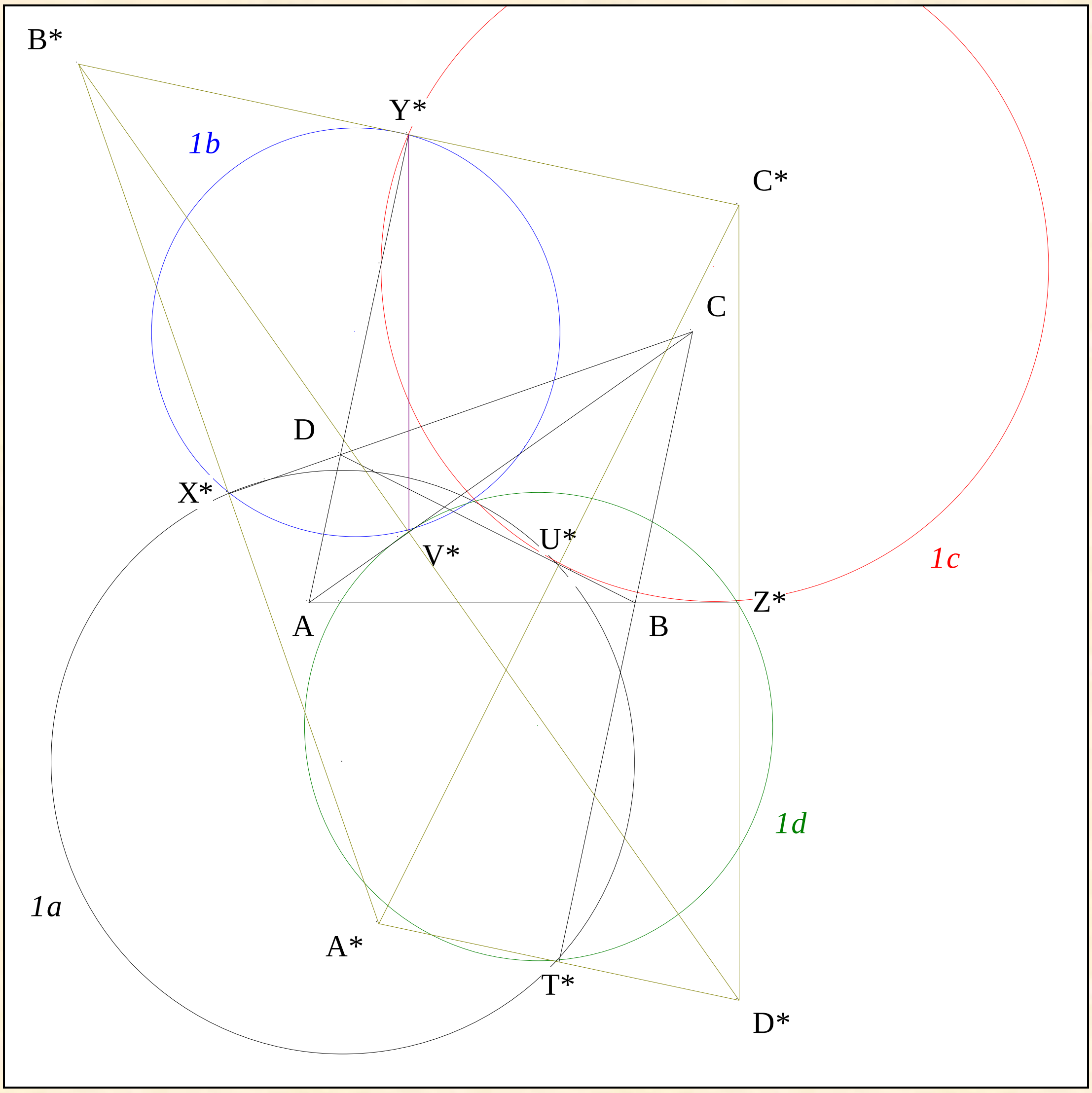
Donné : approfondir.

II. ALIGNEMENTS ET INTERSECTIONS

1. Premières perpendicularités

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

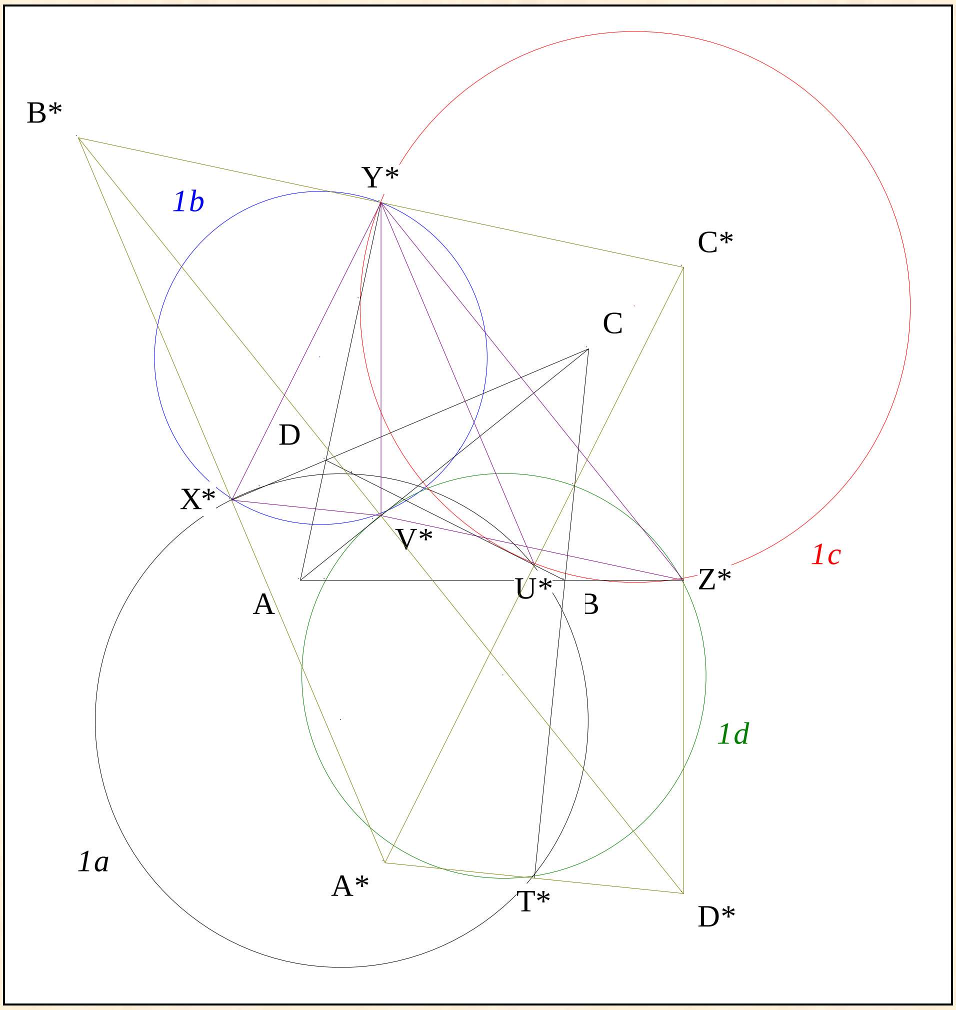
Donné : (AB) est perpendiculaire à (Y*V*).

VISUALISATION

- D'après A. II. 6. Les quatre cercles pédaux d'un quadrilatère, (AB) ⊥ (C*D*) ;
  d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle B*C*D*, (C*D*) // (Y*V*) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AB) ⊥ (Y*V*).

- **Conclusion :** (AB) est perpendiculaire à (Y*V*).

Scolie : autres perpendicularités



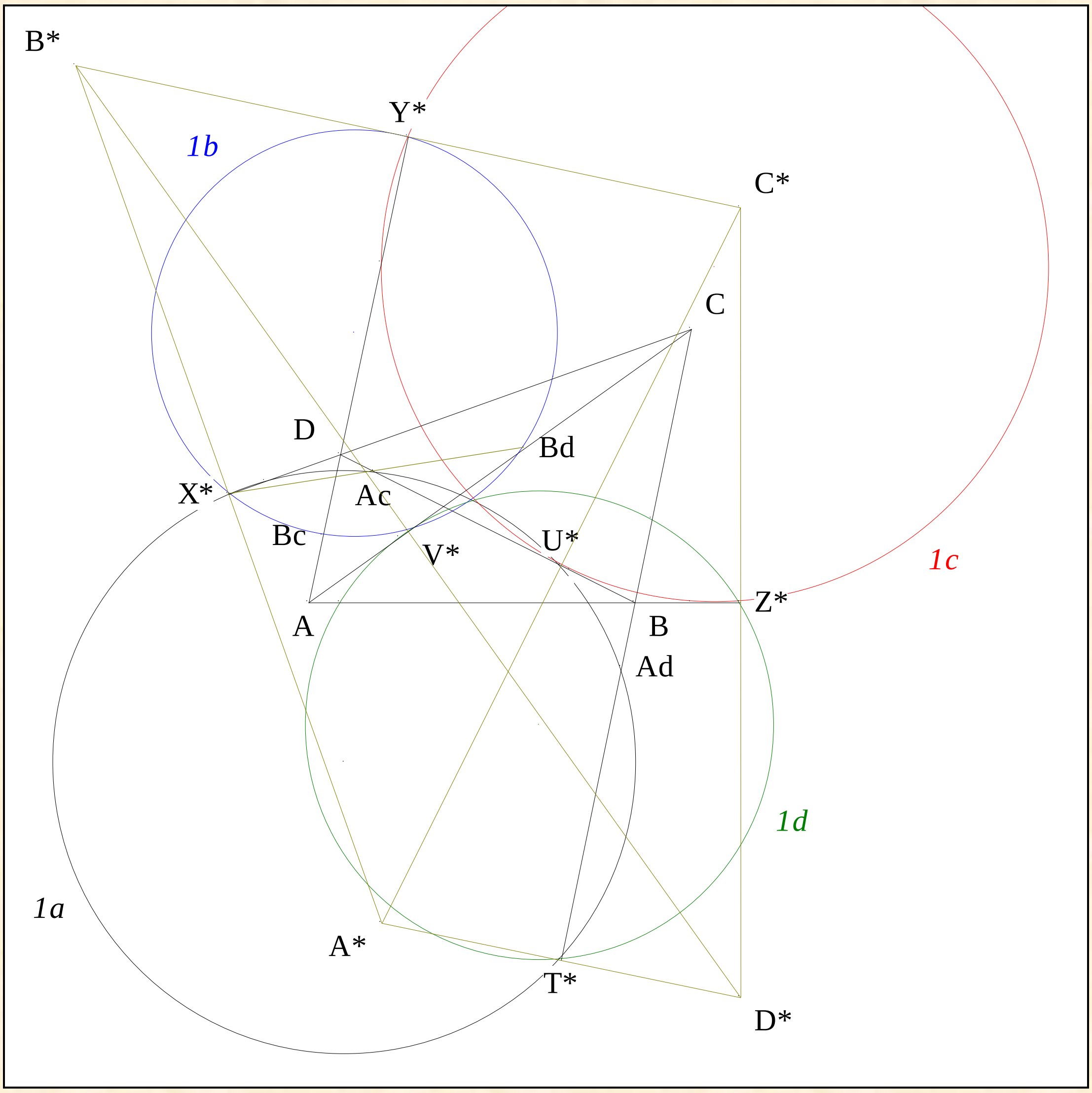
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que

(BC) ⊥ (X*V*)
(CD) ⊥ (Y*U*)
(DA) ⊥ (Z*V*)
(AC) ⊥ (Y*Z*)
(BD) ⊥ (X*Y*).

2. Premiers alignements

VISION

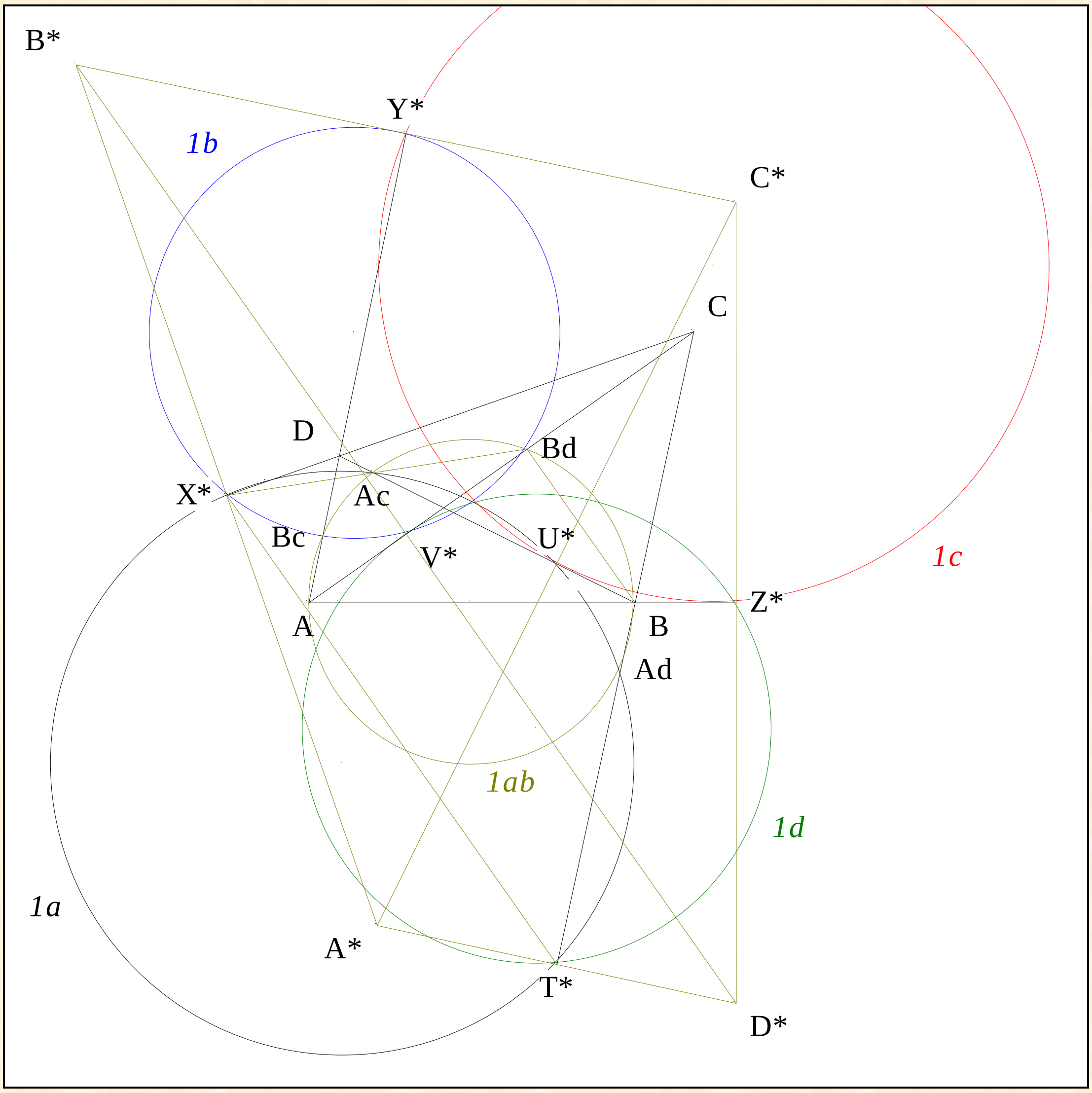
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : Ac, Bd et X* sont alignés.

VISUALISATION

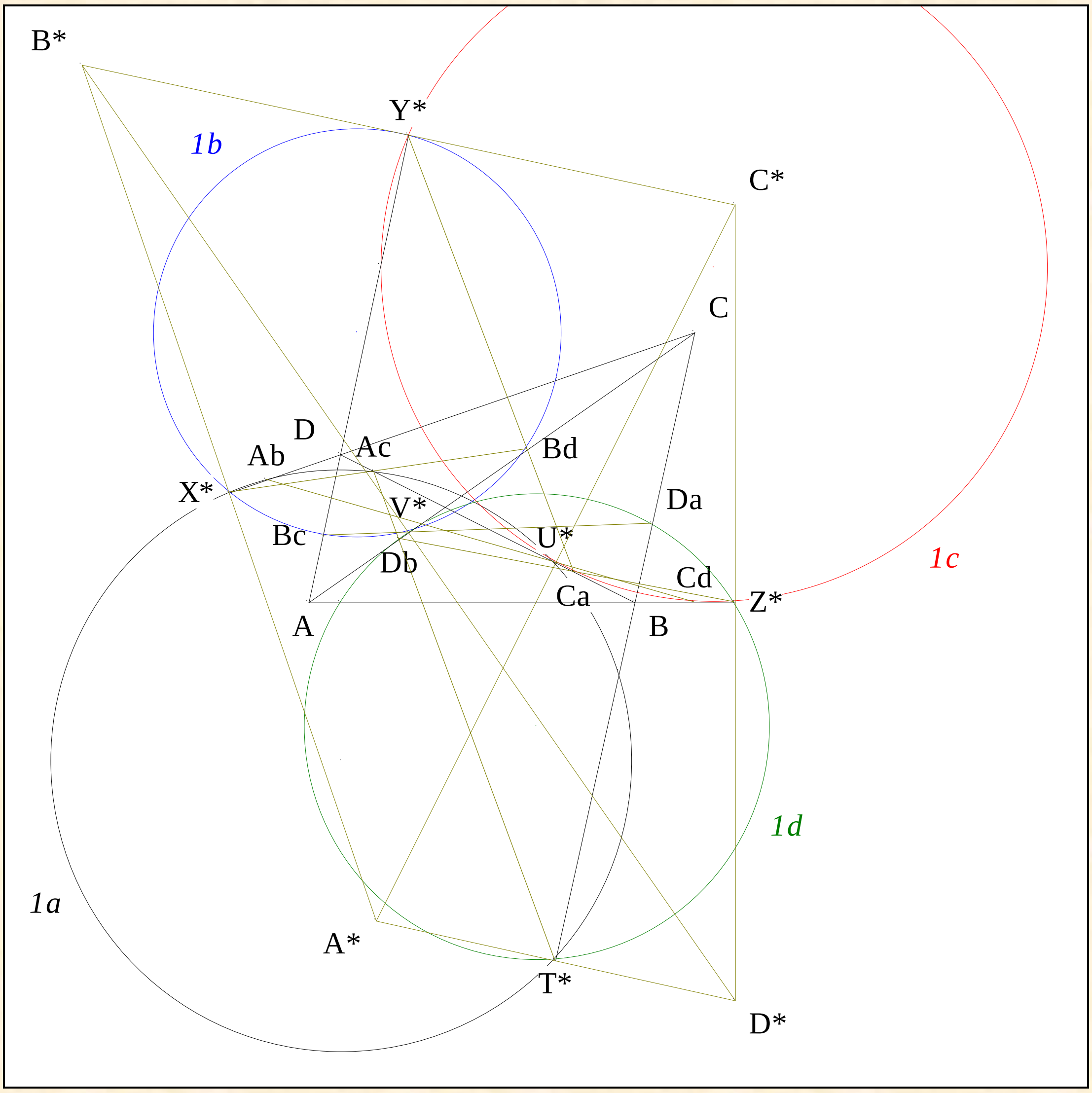


- Notons $\quad$ *1ab* $\quad$ le cercle de diamètre [AB] ; il passe par Bc, Ac, Bd et Ad.

- **Scolie :** $\quad$ (BBd) , (B*D*) et (X*T*) sont parallèles entre elles.

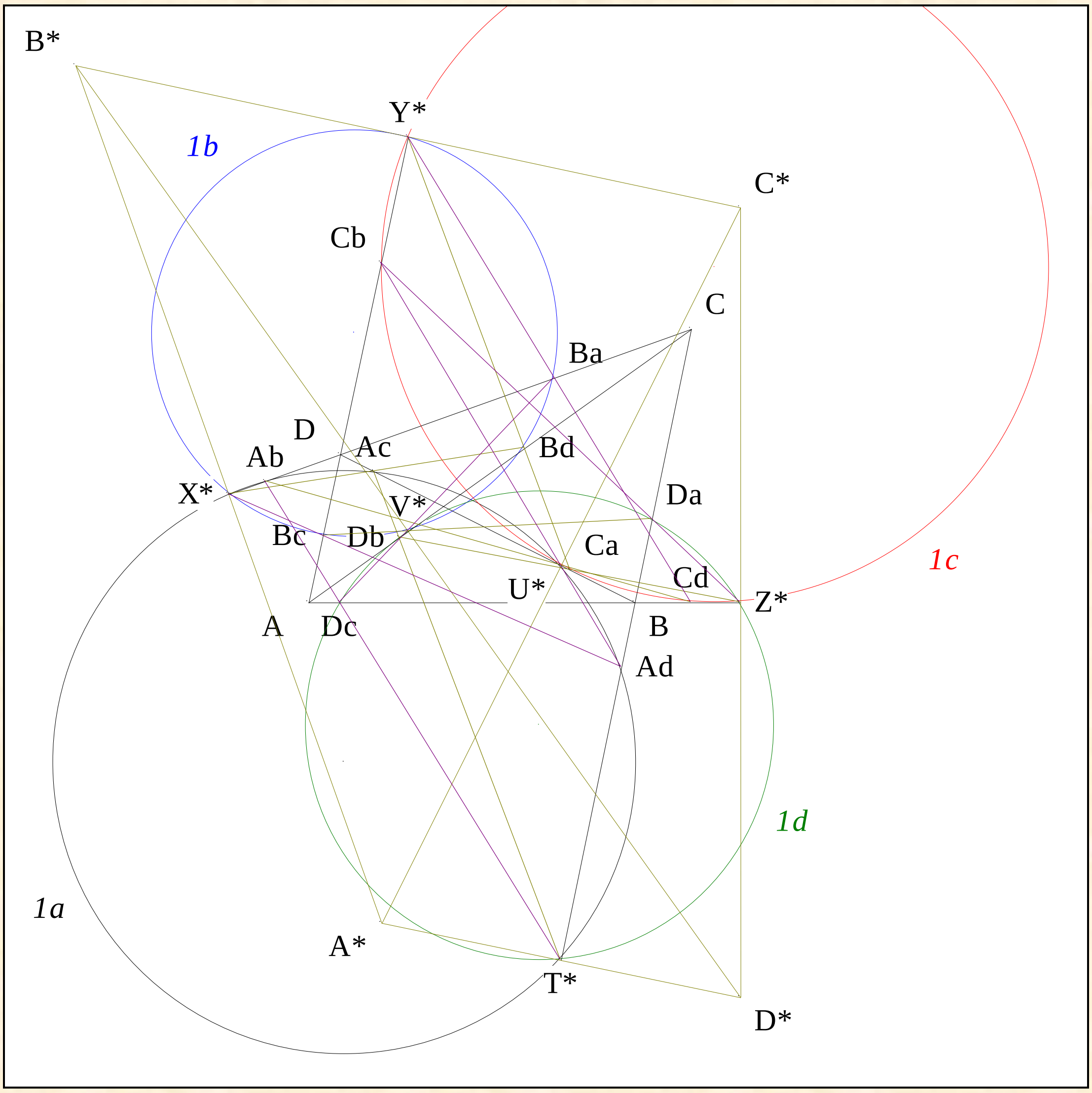
- **Conclusion :** les cercles *1ab* et *1a*, les points de base Ad et Ac, les parallèles (BBd) et (T*X*), conduisent au théorème **0'** de Reim ;
en conséquence, $\quad$ Bd, Ac et X* sont alignés.

Scolies : $\quad$ **(1)** $\quad$ autres alignements



- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que
  Bd, Ca et Y* sont alignés
  Ca, Db et Z* sont alignés
  Db, Ac et T* sont alignés
  Ab, Cd et U* sont alignés
  Bc, Da et V* sont alignés.

(2) Autres alignements

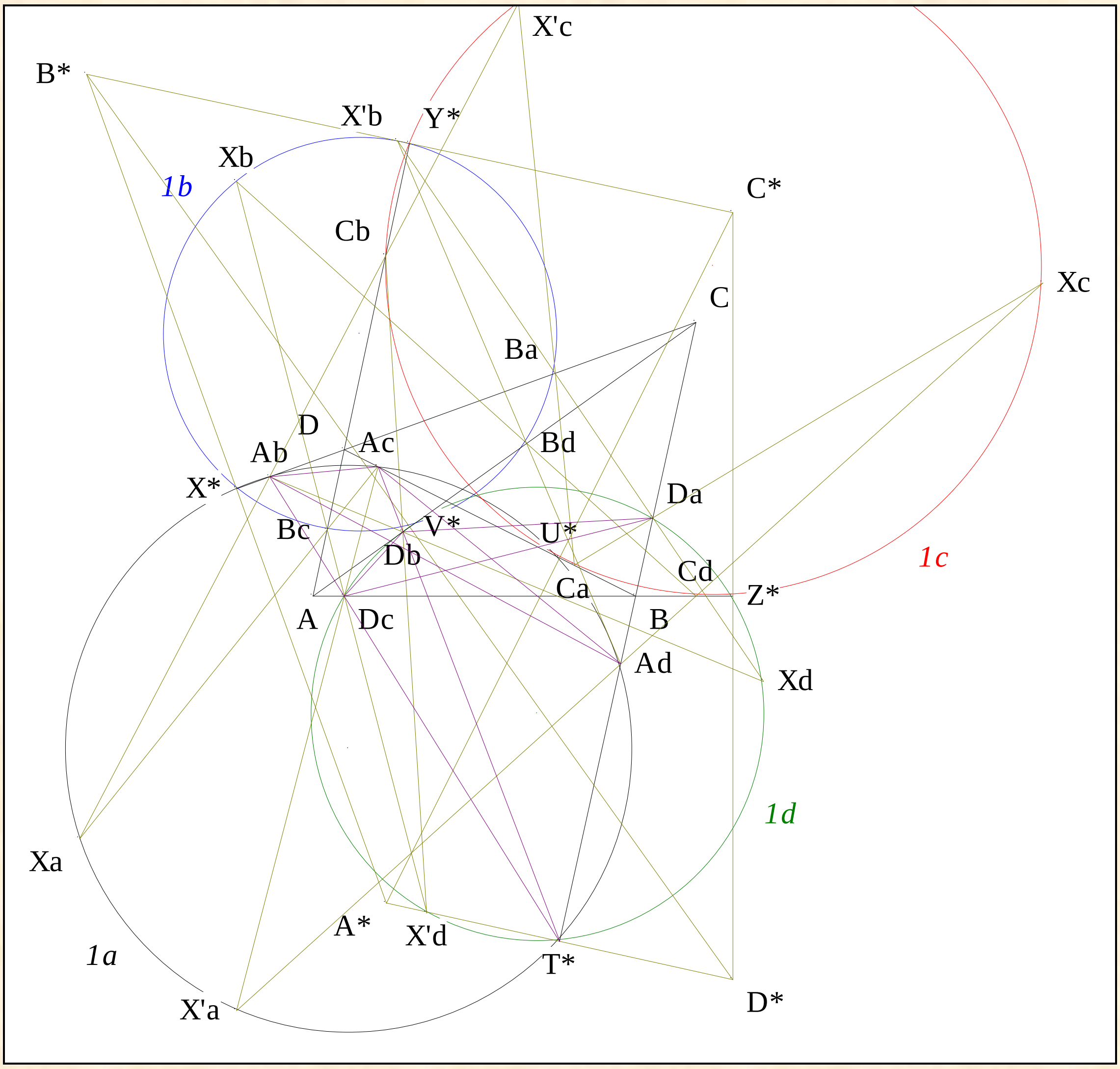


- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que
  Ad, Bc et X* sont alignés
  Ba, Cd et Y* sont alignés
  Cb, Da et Z* sont alignés
  Dc, Ab et T* sont alignés
  Ad, Cb et U* sont alignés
  Ba, Dc et V* sont alignés.

(3) Un rappel

- **Conclusion :** d'après A. II. 5. Intersection de deux cercles pédaux d'un quadrilatère,
  C, D et X* sont alignés
  D, A et Y* sont alignés
  A, B et Z* sont alignés
  B, C et T* sont alignés
  B, D et U* sont alignés
  A, C et V* sont lignés.

(4) Deux triangles en perspective

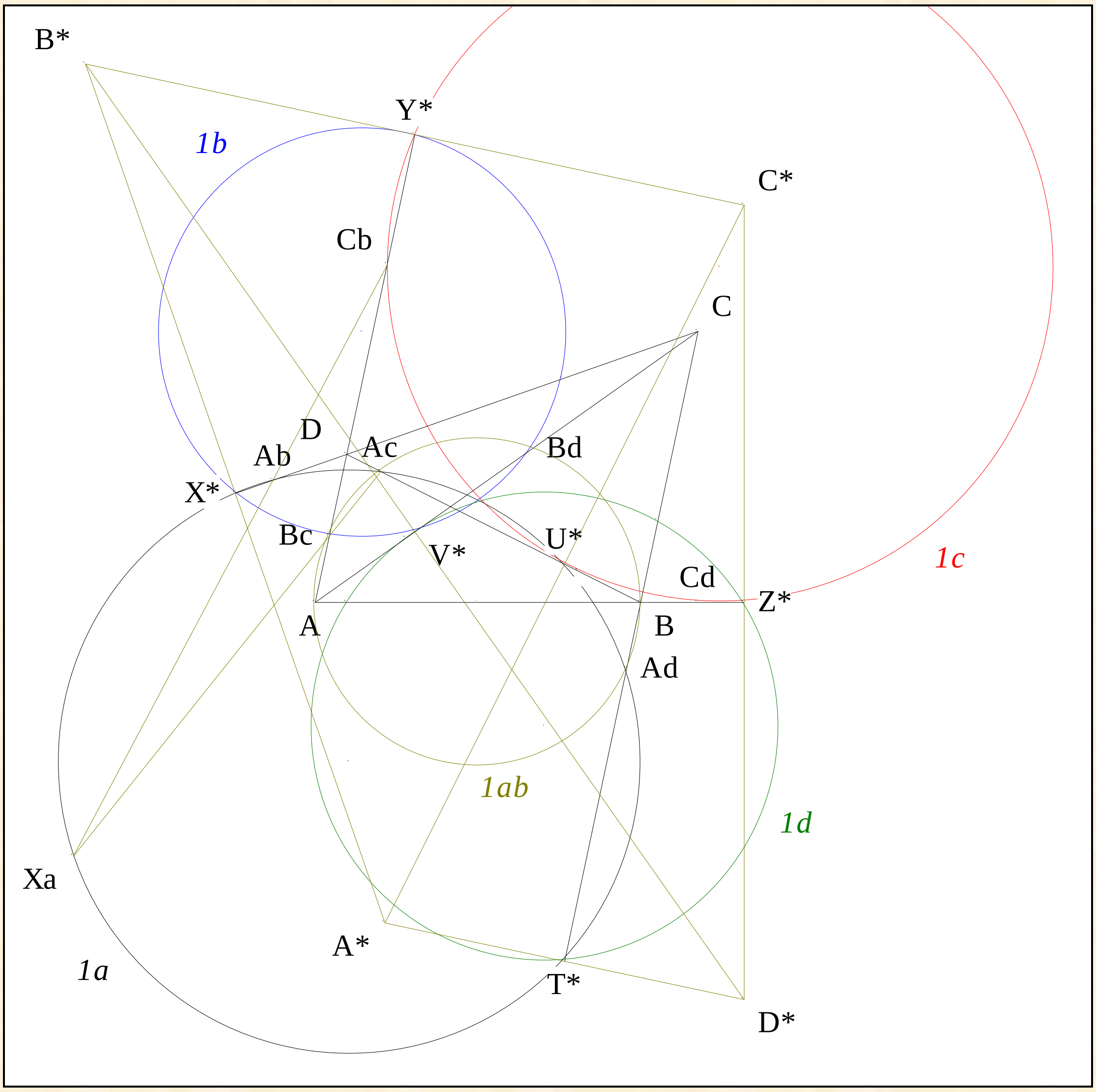


- **Conclusion :** les triangles BcBdBa et AdAcAb sont en perspective de centre X*
  les triangles CdCaCb et BaBdBc sont en perspective de centre Y*
  les triangles DaDbDc et CbCaCd sont en perspective de centre Z*
  les triangles AbAcAd et DcDbDa sont en perspective de centre T*
  les triangles AbAcAd et CdCaCb sont en perspective de centre U*
  les triangles BcBdBa et DaDbDc sont en perspective de centre V*.

3. Premières intersections sur un cercle pédal d'un quadrilatère

VISION

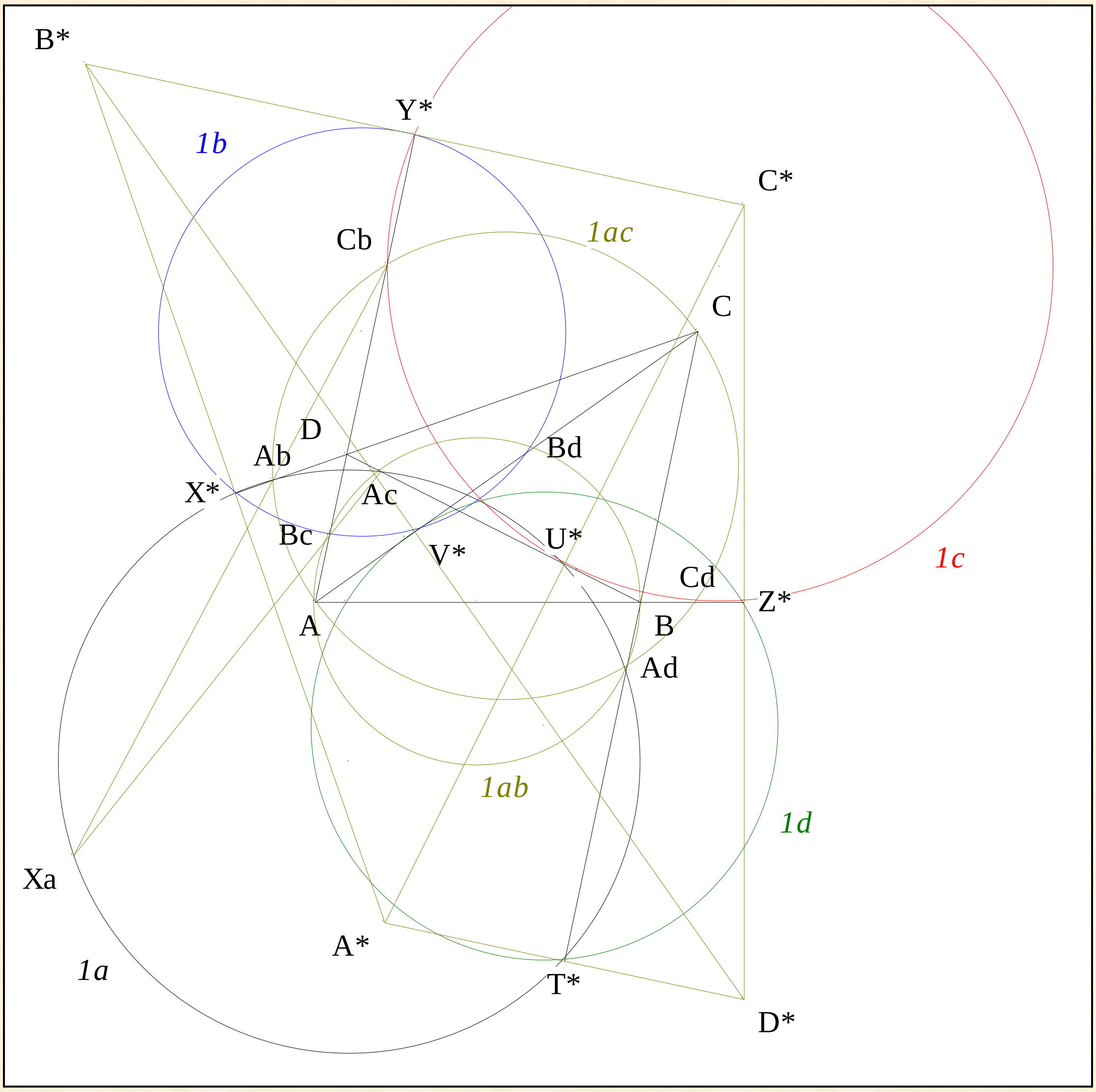
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
Xa le point d'intersection de (AcBc) et (AbCb).

Donné : Xa est sur *1a*.

VISUALISATION

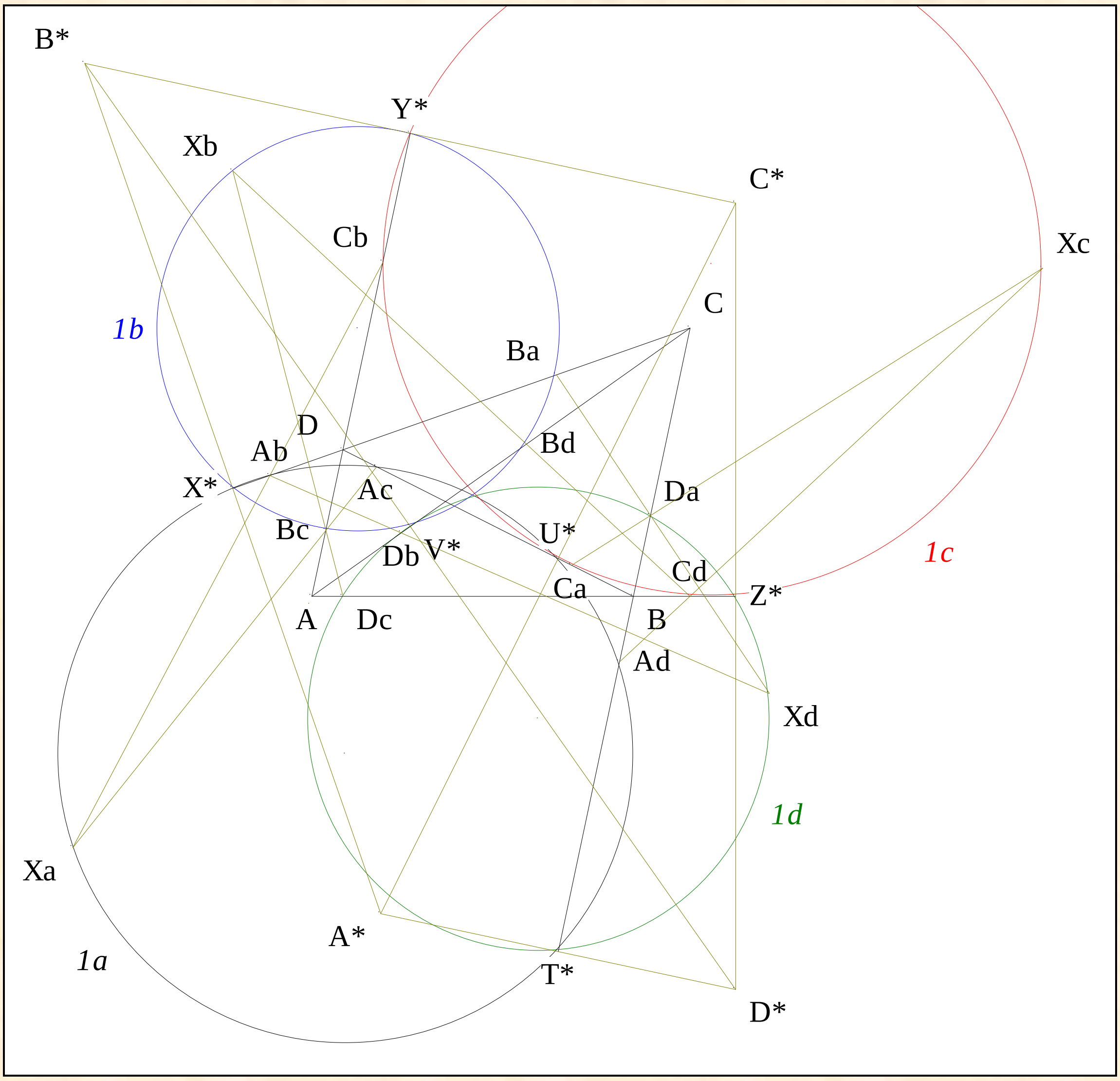


- Notons *1ac* le cercle de diamètre [AC] ; il passe par Ab, Cb, Cd et Ad ;

- D'après Miquel "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 8) appliqué à *1a*, *1ab* et *1ac* concourants en Ad, (AcBc) et (AbCb) se coupent sur *1a*.

- **Conclusion :** Xa est sur *1a*.

Scolie : autres intersections



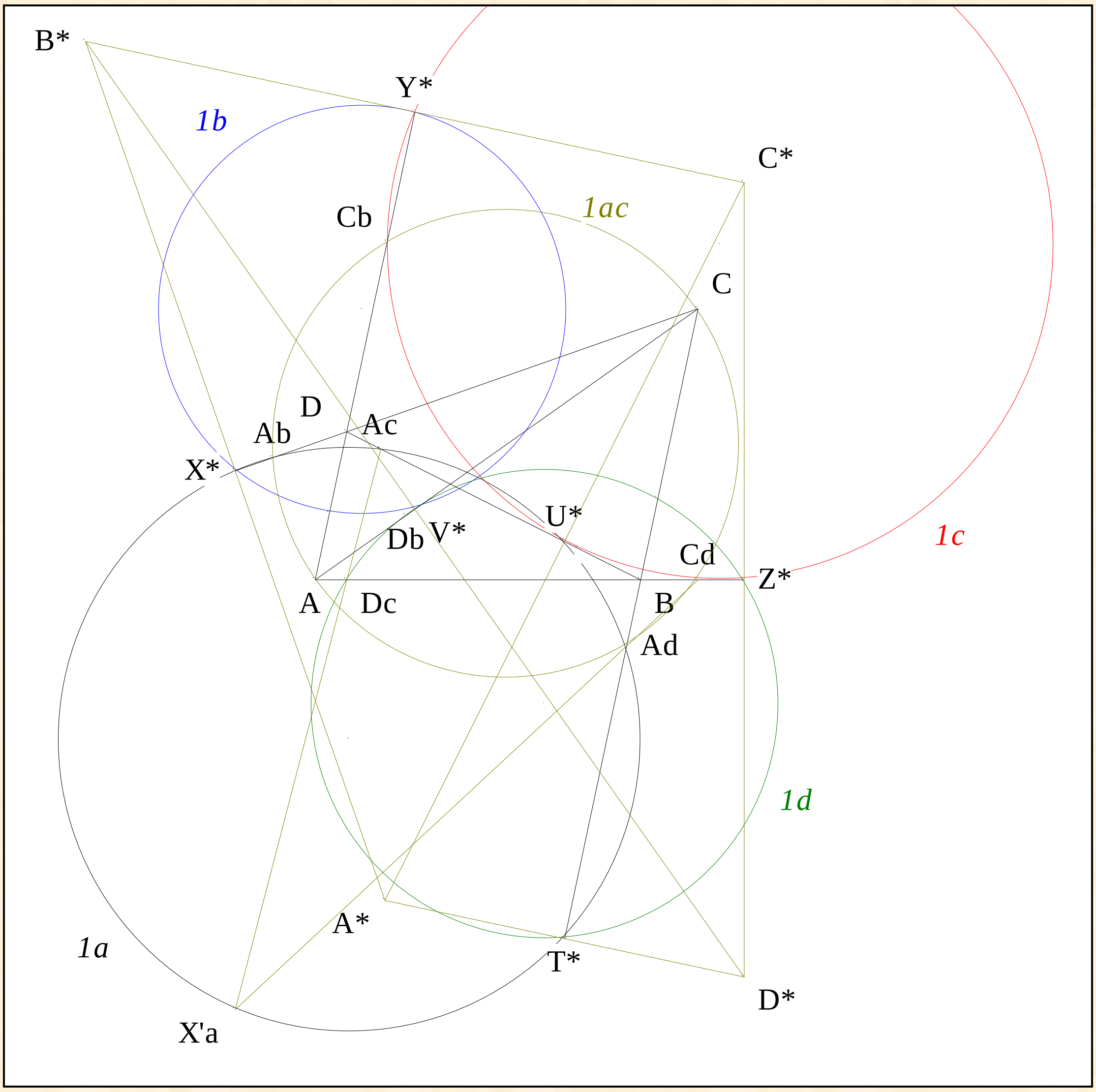
- Notons Xb le point d'intersection de (BdCd) et (BcDc)
  Xc le point d'intersection de (CaDa) et (CdAd)
  Xd le point d'intersection de (DbAb) et (DaBa).

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que Xb est sur *1b*
  Xc est sur *1c*
  Xd est sur *1d*.

4. Deuxièmes intersections sur un cercle pédal d'un quadrilatère

VISION

Figure :

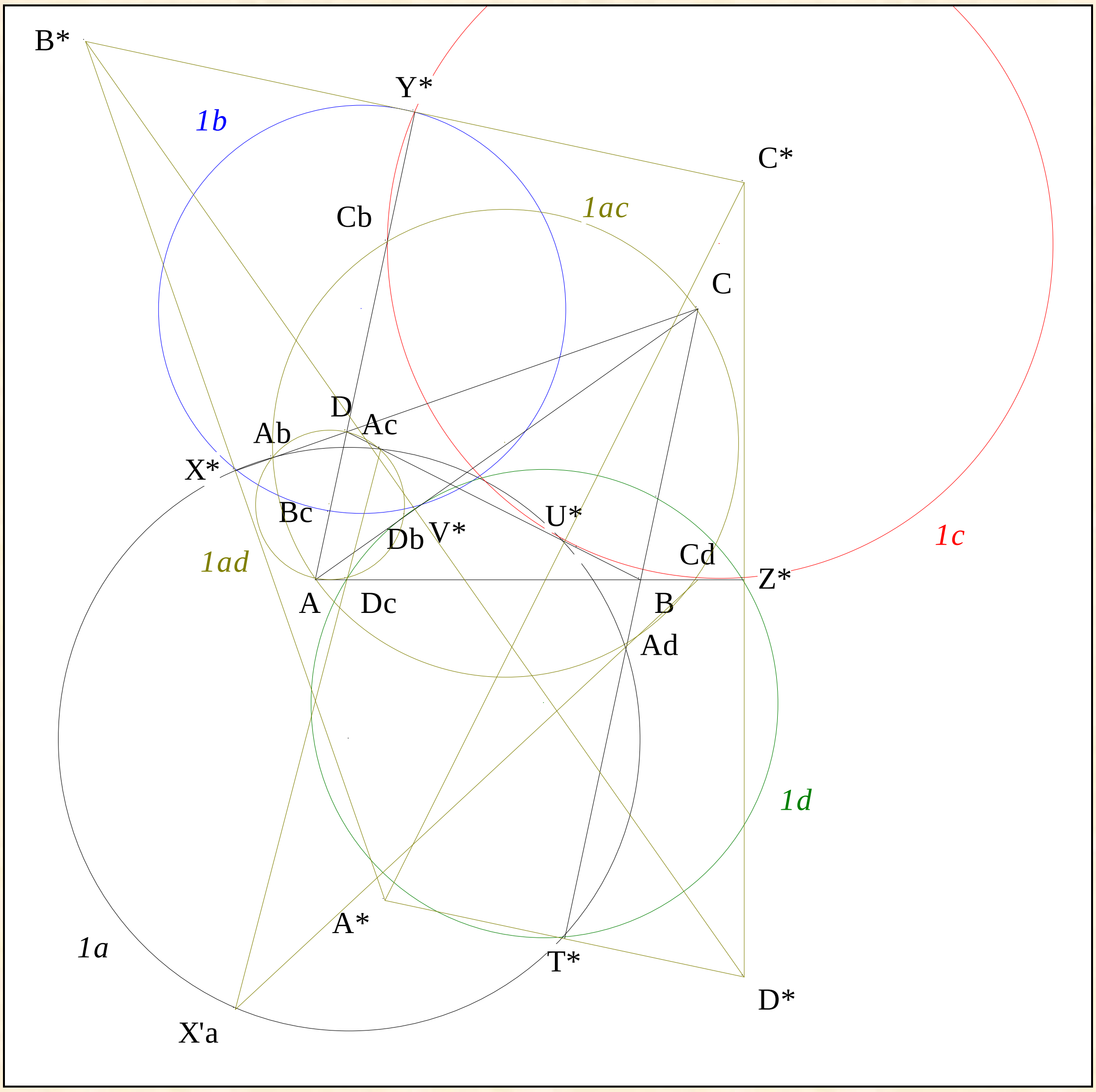


Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

X'a le point d'intersection de (AcDc) et (AdCd).

Donné : X'a est sur *1a*.

VISUALISATION

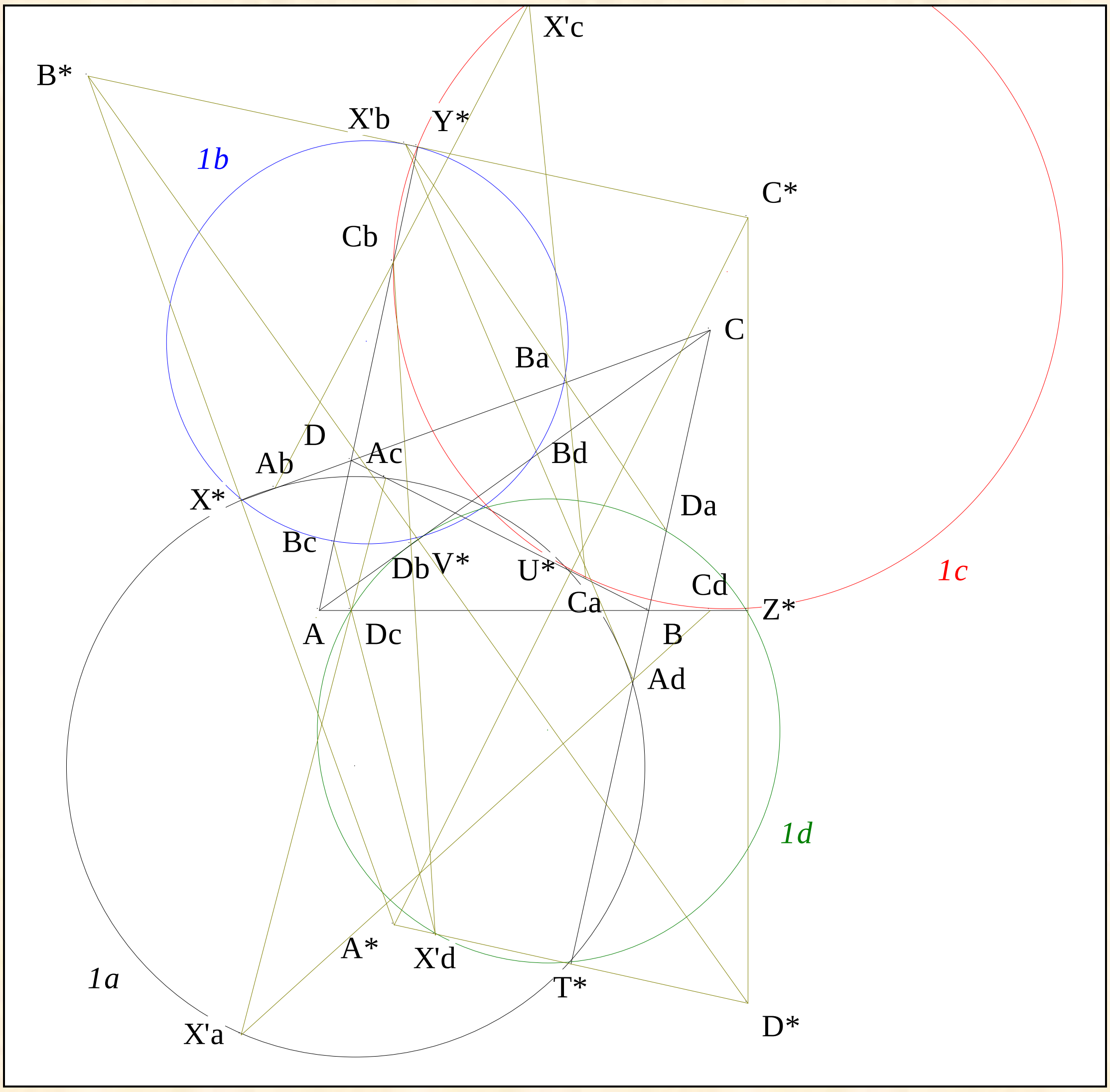


- Notons *1ad* le cercle de diamètre [AD] ; il passe par Ab, Ac, Db et Dc ;

- D'après Miquel "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 8) appliqué à *1a*, *1ac* et *1ad* concourants en Ab, (AcDc) et (AdCd) se coupent sur *1a*.

- **Conclusion :** X'a est sur *1a*.

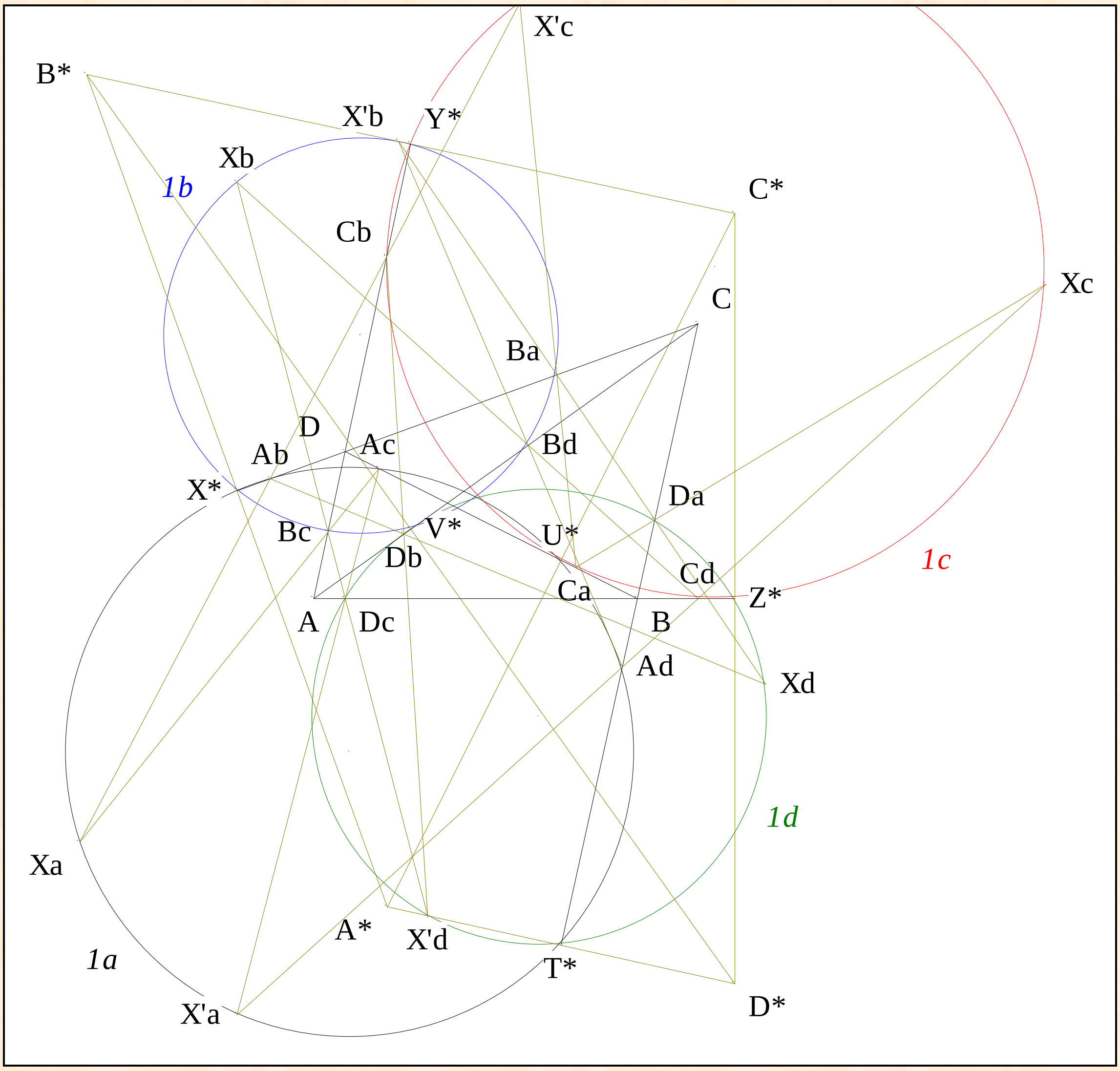
Scolies : **(1)** autres intersections



- Notons X'b le point d'intersection de (BdAd) et (BaDa)
  X'c le point d'intersection de (CaBa) et (CbAb)
  X'd le point d'intersection de (DbCb) et (DcBc).

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que X'b est sur *1b*
  X'c est sur *1c*
  X'd est sur *1d*.

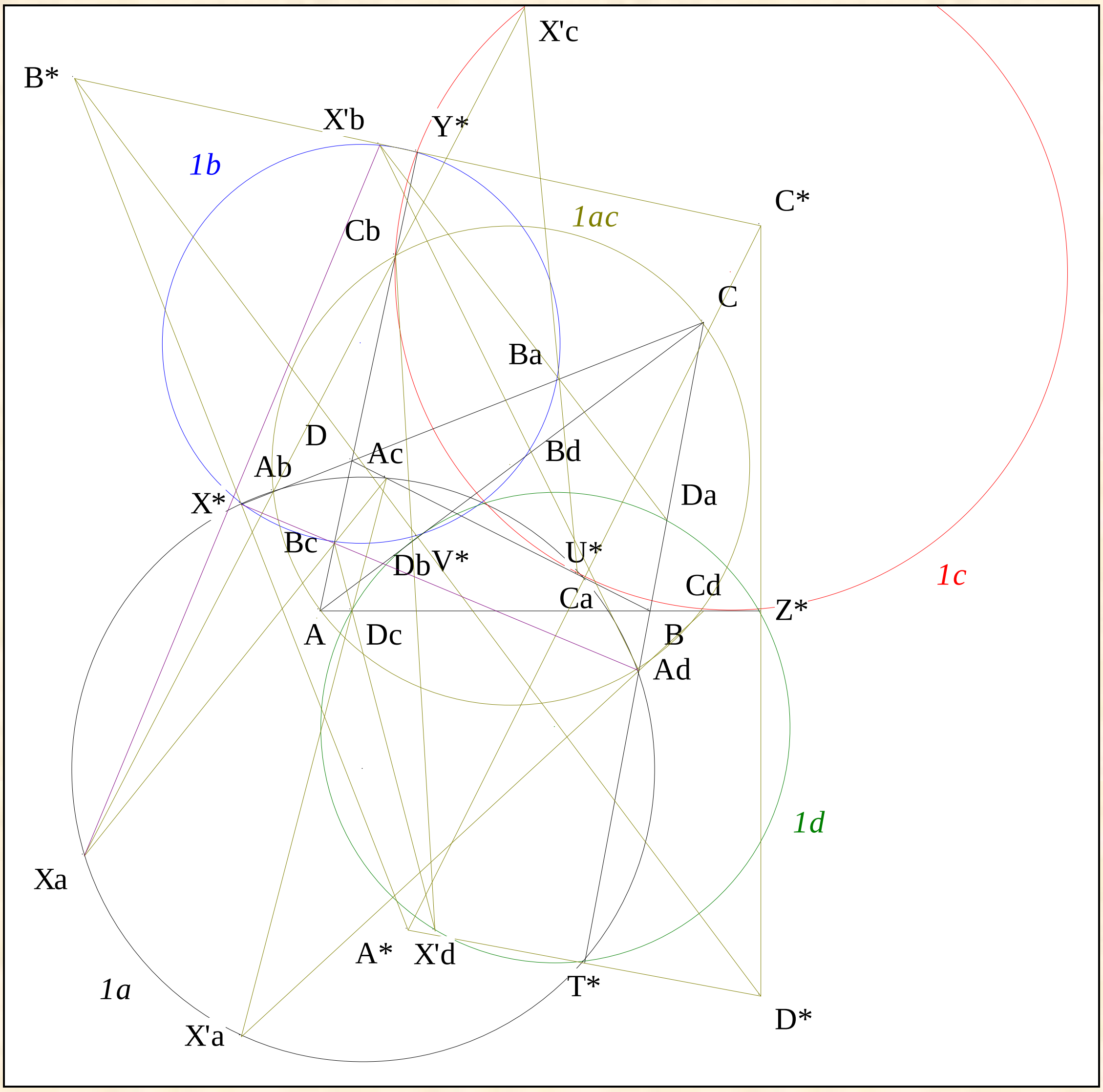
(2) Figure récapitulative des intersections



5. Premières médiatrices

VISION

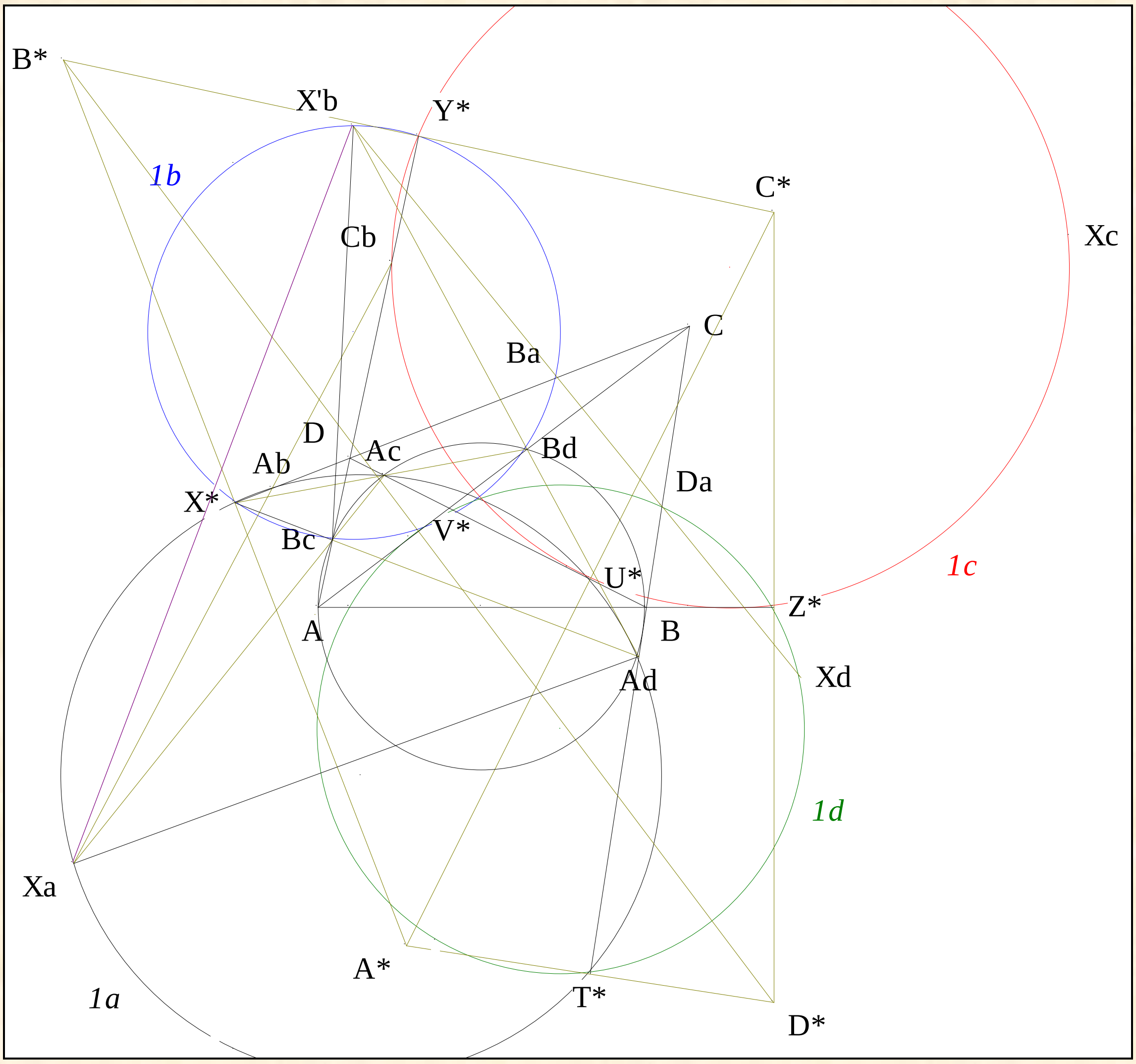
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : (X*BcAd) est la médiatrice de [XaX'b].

VISUALISATION



- **Commentaire :** nous allons montrer que les triangles XaBcAd et B*BcAd sont égaux.

- Une première chasse angulaire à 2 Π près :
  d'après B. II. 3. Premières intersections, <AdXaBc = <AdXaAc ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <AdXaAc = <AdX*Ac ;
  d'après B. II. 2. Des alignements, <AdX*Ac = <BcX*Bd ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <BcX*Bd = <BcX'bBd ;
  d'après B. II. 4. Deuxièmes intersections, <BcX'bBd = <BcX'dAd ;
  par transitivité de la relation =, <AdXaBc = <BcX'dAd.

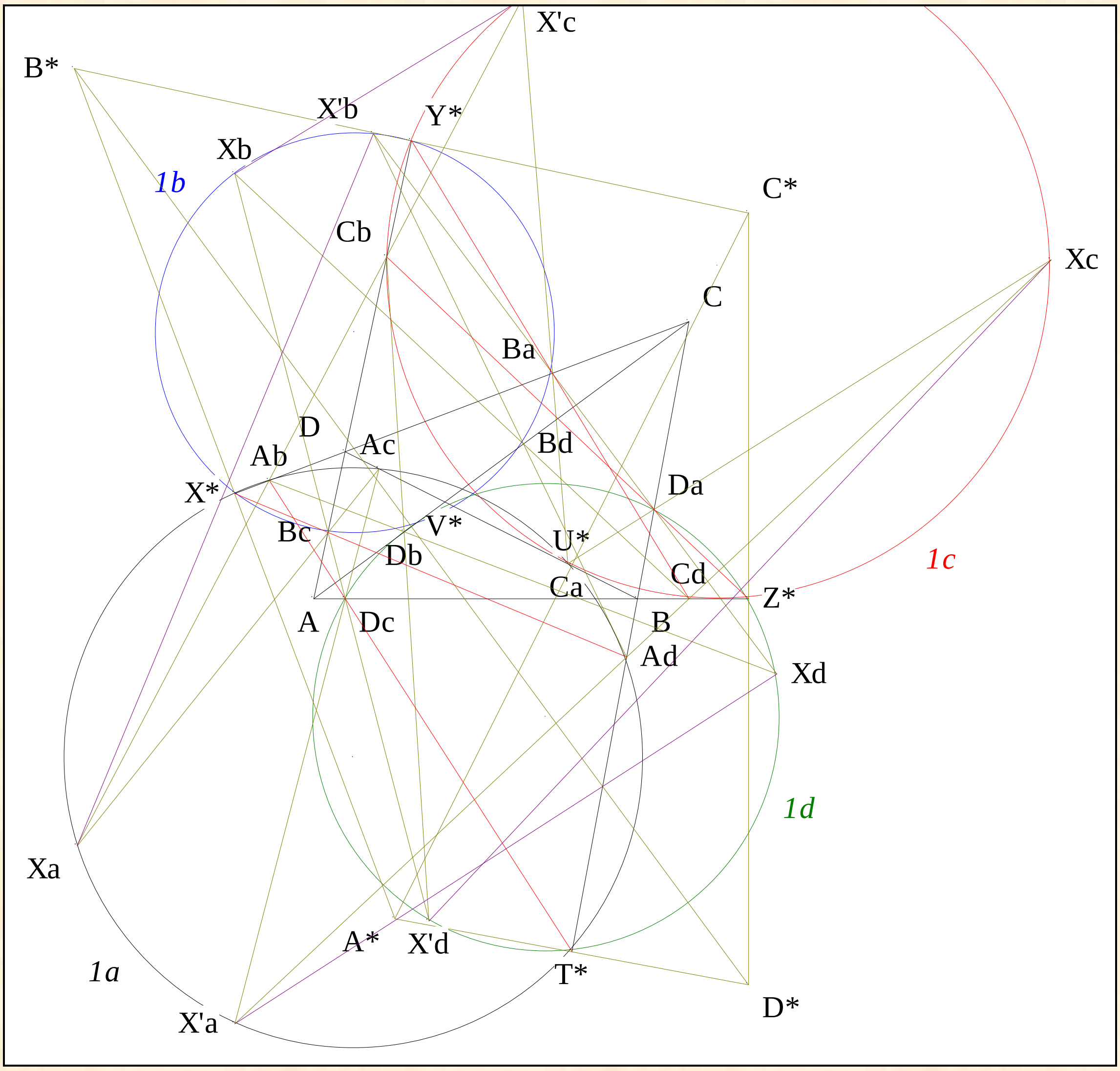
- Une seconde chasse angulaire à 2 Π près :
  d'après B. II. 2. Des alignements, <BcAdXa = <X*AdXa ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <X*AdXa = <X*AcXa
  d'après B. II. 3. Premières intersections, <X*AcXa = <X*AcBc
  le quadrilatère BcAcBdAd étant cyclique, <X*AcBc = <BdAdBc ;
  d'après B. II. 3. Premières intersections, <BdAdBc = <X'dAdBc
  d'après B. II. 2. Des alignements, <X'dAdBc = <X'dAdX*
  par transitivité de la relation =, <BcAdXa = <X'dAdX*.

- En conséquence, <XaBcAd = <AdBcX'b.

- D'après le théorème "angle-côté-angle", les triangles XaBcAd et B*BcAd sont égaux ;
  nous avons : BcXa = BcX'b
  AdXa = AdX'b.

- **Conclusion :** d'après le théorème de la médiatrice, (X*BcAd) est la médiatrice de [XaX'b].

Scolie : autres médiatrices

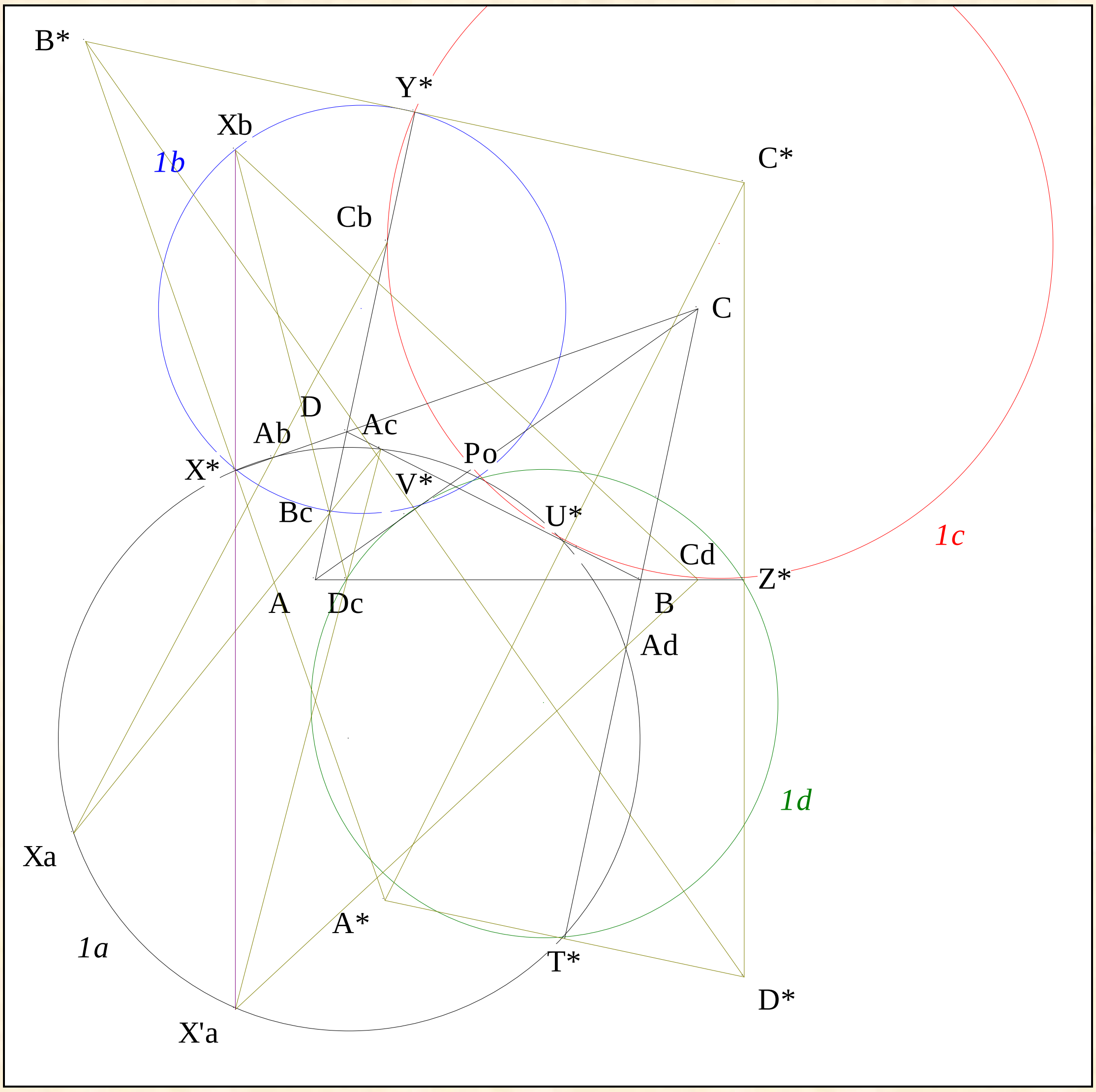


- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (Y*CdBa) est la médiatrice de [XbX'c]
(Z*DaCb) est la médiatrice de [XcX'd]
(T*AbDc) est la médiatrice de [XdX'a].

6. Deuxièmes alignements et deuxièmes médiatrices

VISION

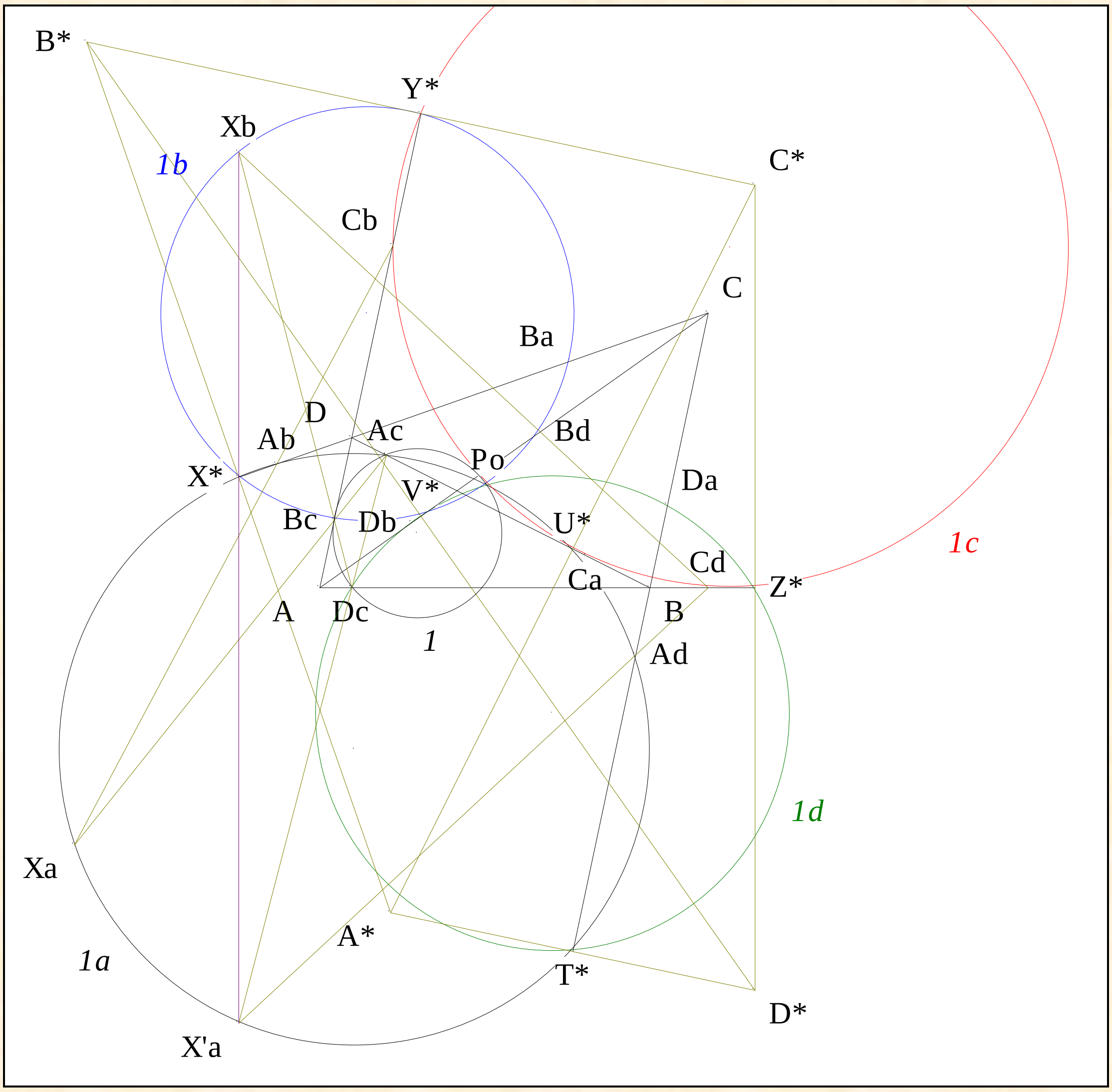
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : X'a, Xb et X* sont alignés.

VISUALISATION



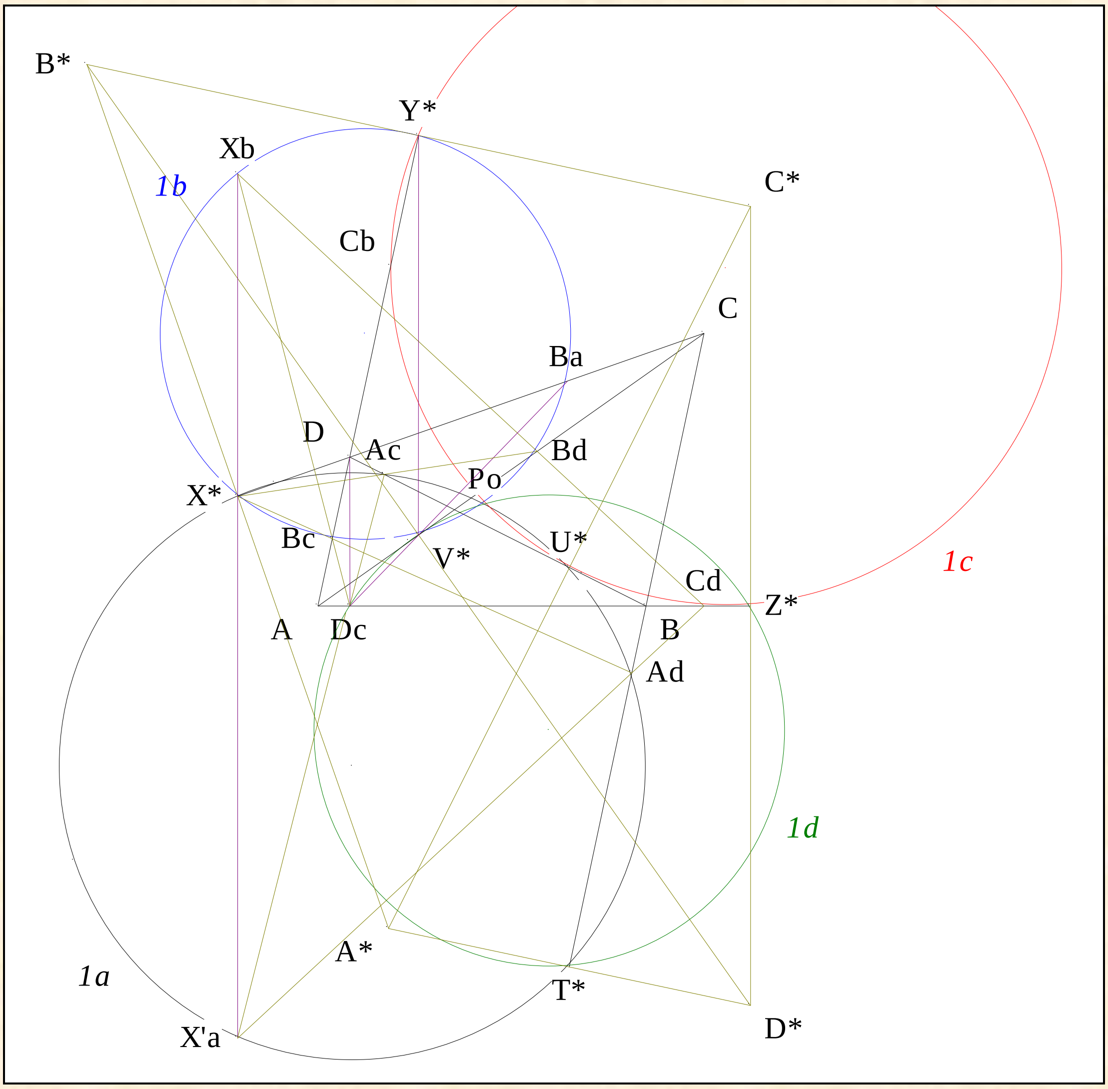
- Notons 1 le A-cercle d'Euler de ABCD ; il passe par Ac, Bc, Dc et Po.

- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 8)
  appliqué à *1a*, *1b* et *1* concourants en Po, X'a, Xb et X* sont alignés.

Scolies : **(1)** autres deuxièmes alignements

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que X'b, Xc et Y* sont alignés
  X'c, Xd et Z* sont alignés
  X'd, Xa et T* sont alignés.

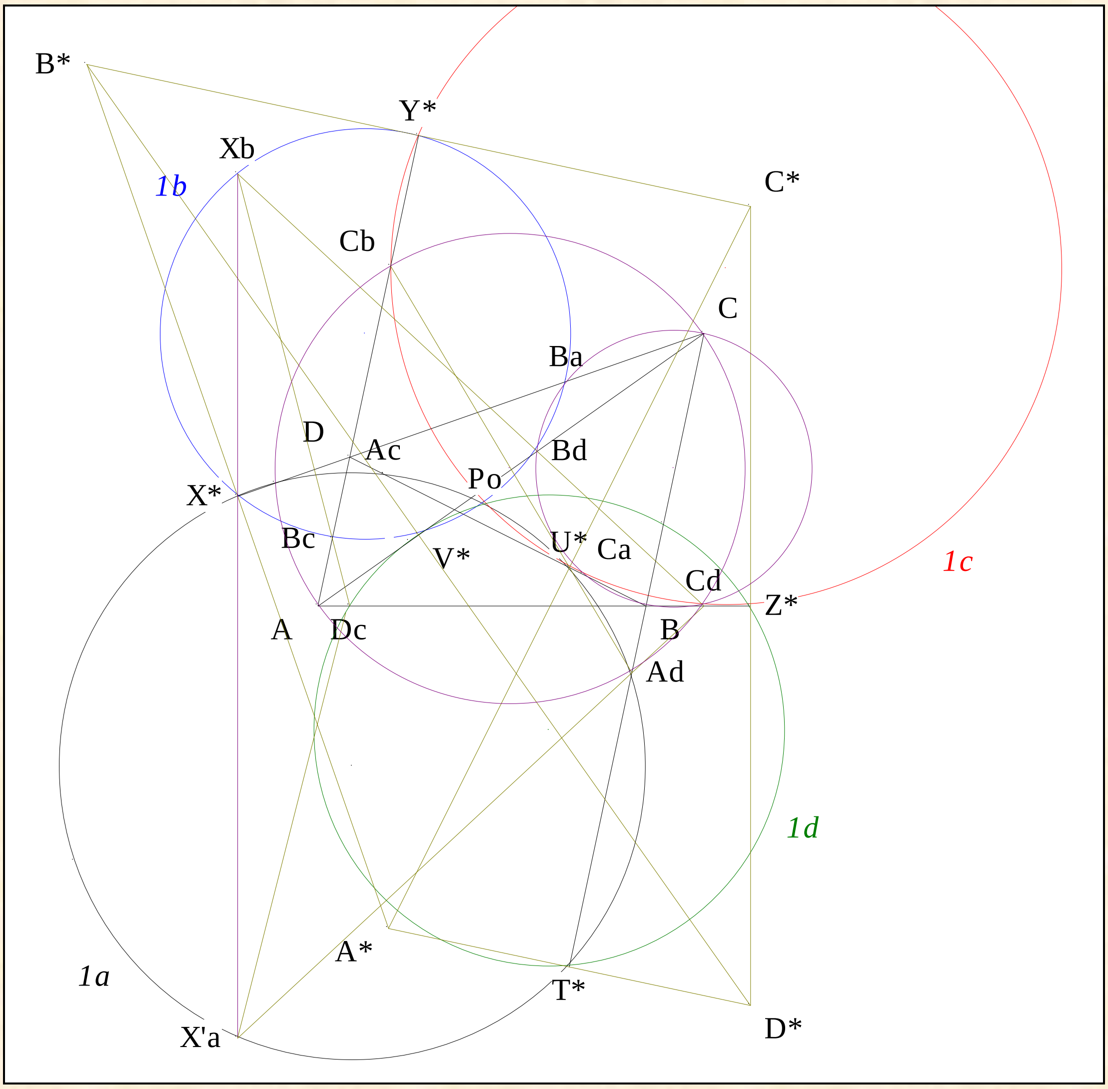
(2) (AB) est la médiatrice de [X'aX*]



- Nous allons montrer que les triangles X'aCdDc et XbCdDc sont égaux.

- Une chasse angulaire à 2. Π près :

d'après B. II. 4. Deuxième intersection sur un cercle pédal,	<CdX'aDc = <AdX'aAc ;
d'après "Le théorème de l'angle inscrit",	<AdX'aAc = <AdX*Ac ;
d'après B. II. 2. Premiers alignements,	<AdX*Ac = <BcX*Ac ;
	<BcX*Ac = <BcX*Bd ;
d'après "Le théorème de l'angle inscrit",	<BcX*Bd = <BcXbBd ;
d'après B. II. 3. Première intersection sur un cercle pédal,	<BcXbBd = <DcXbCd ;
par transitivité de la relation =,	<CdX'aDc = <DcXbCd.



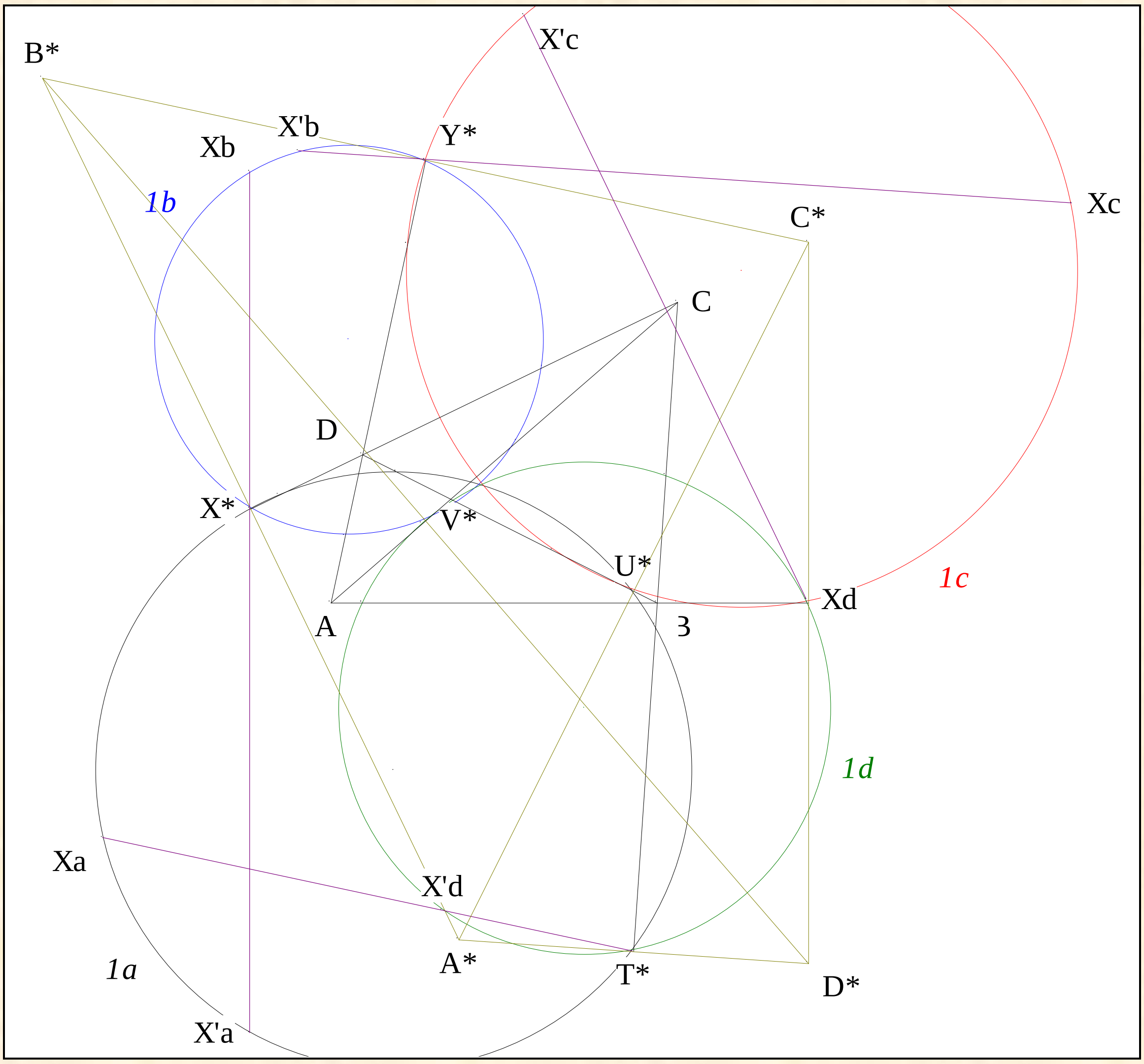
- Une chasse angulaire à 2.Π près :
  d'après B. II. 4. Deuxième intersection sur un cercle pédal, <DcCdX'a = <ACdAd ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <ACdAd = <ACAd ;
  par hypothèses, <ACAd = <BdCB ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <BdCB = <BdCbB ;
  d'après B. II. 3. Première intersection sur un cercle pédal, <BdCbB = <XbCdDc ;
  par transitivité de la relation =, <DcCdX'a = <XbCdDc.

- En conséquence, <X'aDcCd = <XbCdDc.

- D'après "Le théorème angle-côté-angle", les triangles X'aCdDc et XbCdDc sont égaux ;
  en conséquence, DcX'a = DcXb
  CdX'a = CdXb.

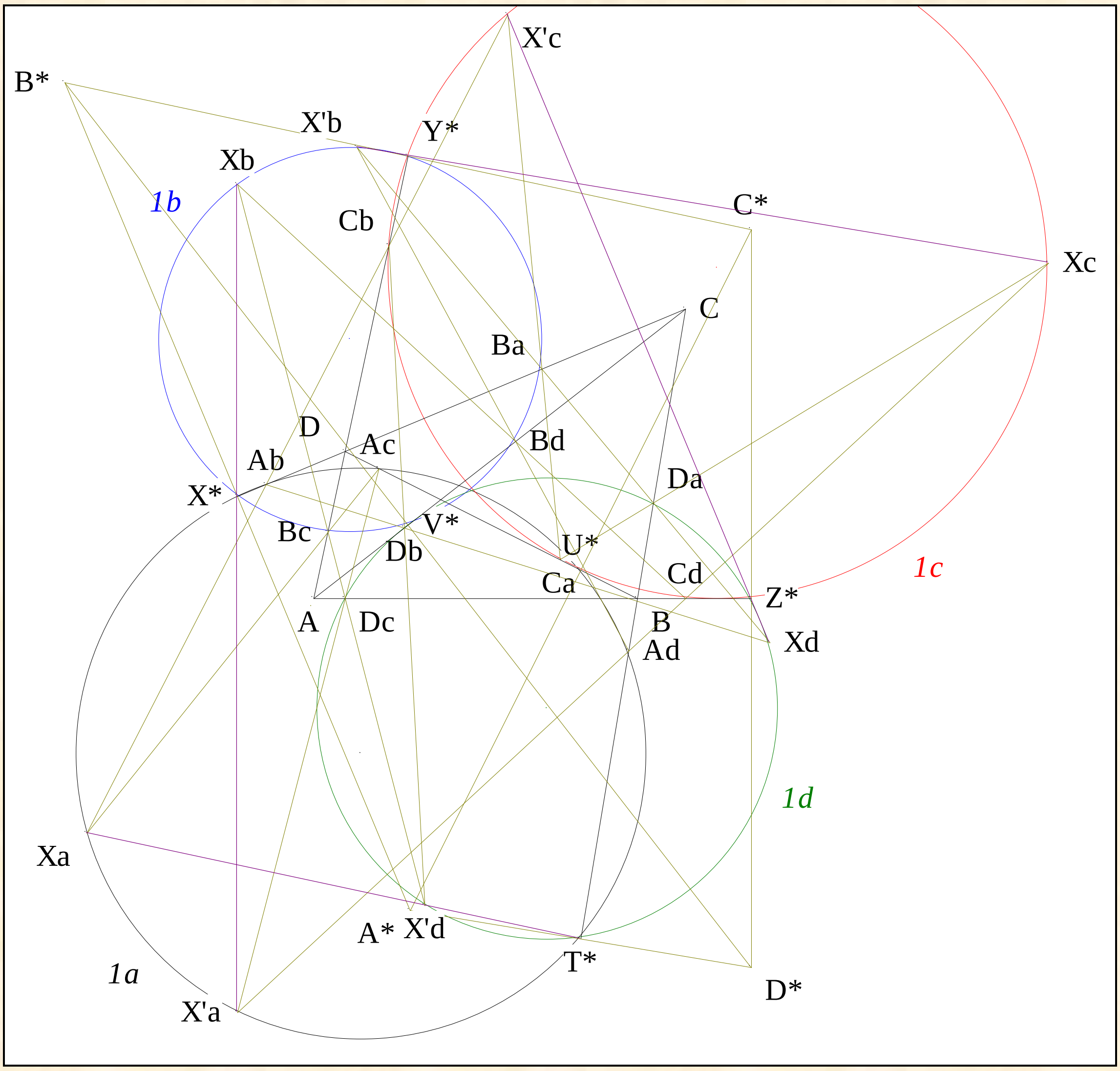
- **Conclusion :** d'après "Le théorème de la médiatrice", (AB) est la médiatrice de [X'aXb].

(3) Autres deuxièmes médiatrices



- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (BC) est la médiatrice de [X'bXc]
(CD) est la médiatrice de [X'cXd]
(DA) est la médiatrice de [X'dXa].

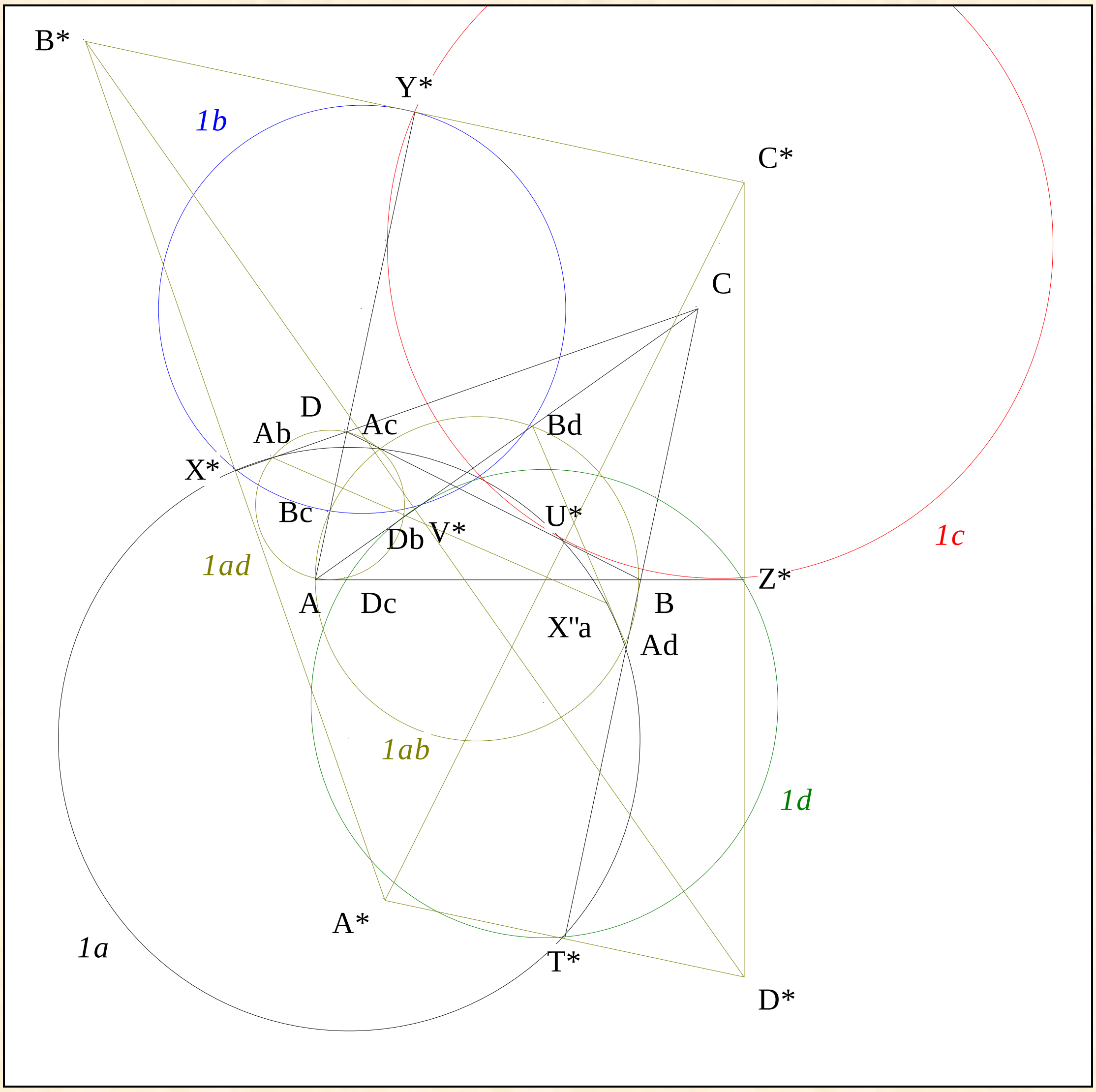
(4) Figure récapitulative des secondes médiatrices



7. Troisièmes intersections sur un cercle pédal d'un quadrilatère

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
X"a le point d'intersection de (AbDb) et (AdBd).

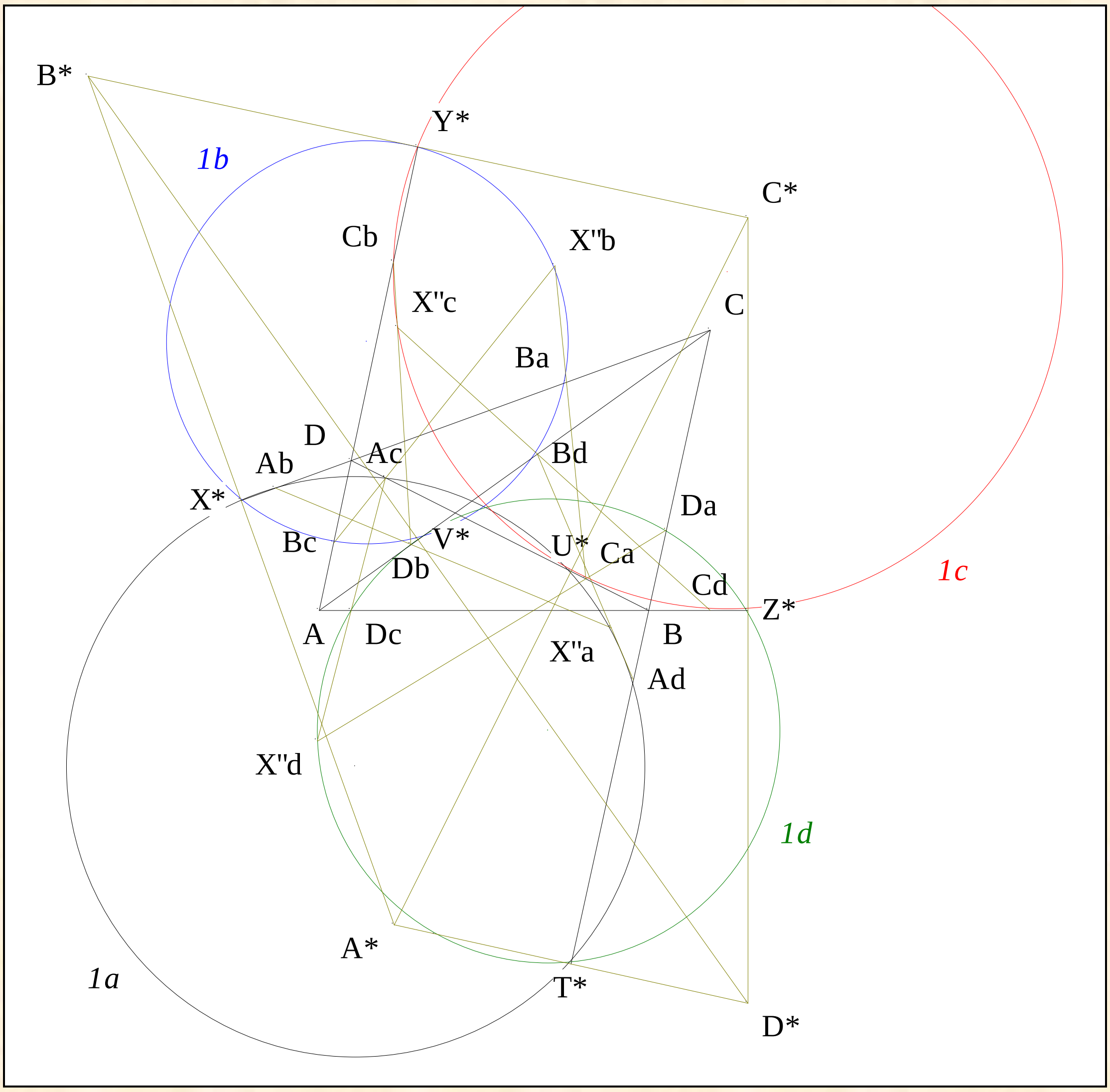
Donné : X"a est sur *1a*.

VISUALISATION

- D'après Miquel "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 8) appliqué à *1a*, *1ab* et *1ad* concourants en Ac, (AbDb) et (AdBd) se coupent sur *1a*.

- **Conclusion :** X"a est sur *1a*.

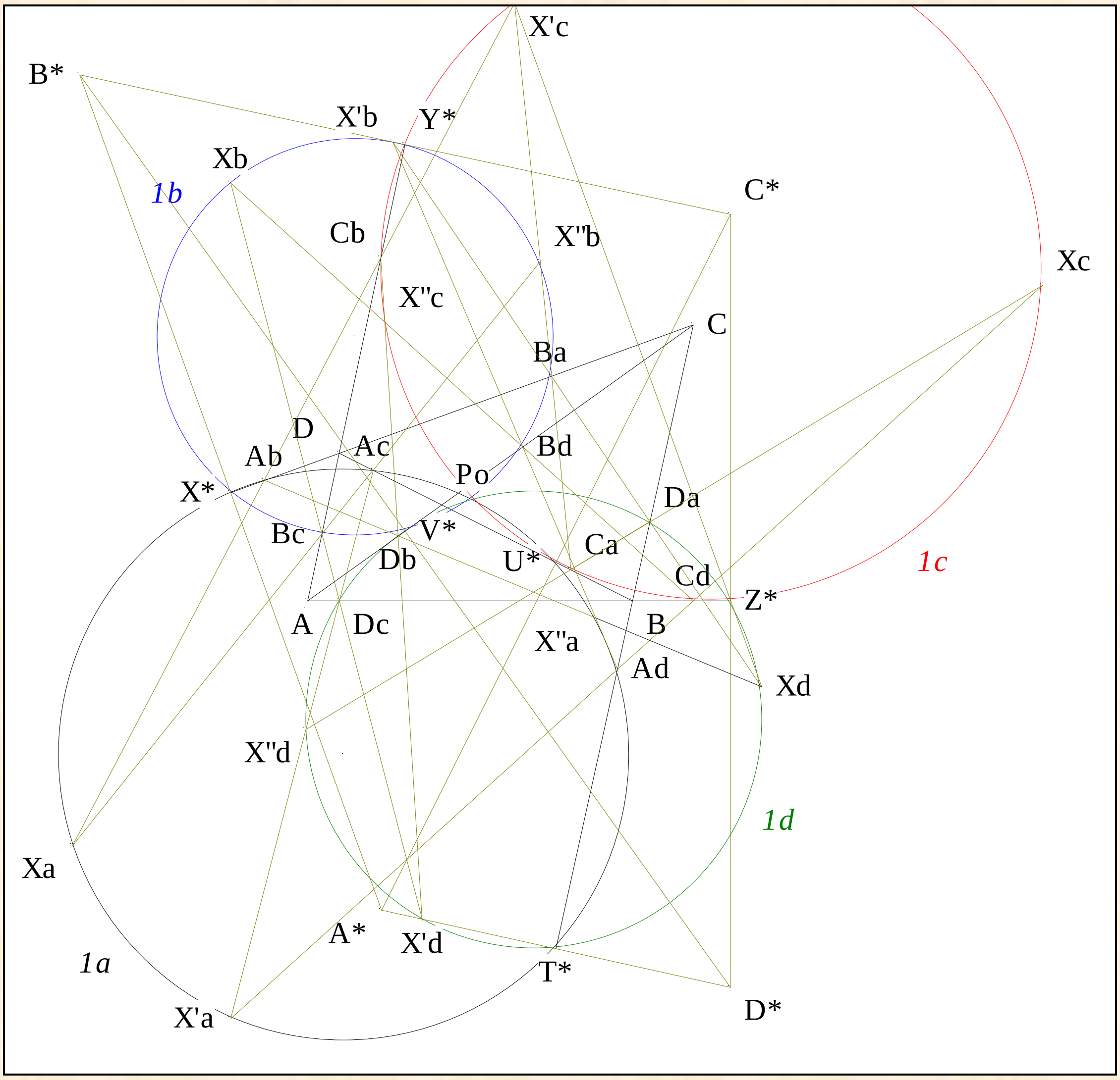
Scolies : **(1)** autres intersections



- Notons X"b le point d'intersection de (BcAc) et (BaCa)
  X"c le point d'intersection de (CdBd) et (CbDb)
  X"d le point d'intersection de (DaCa) et (DcAc).

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que X"b est sur *1b*
  X"c est sur *1c*
  X"d est sur *1d*.

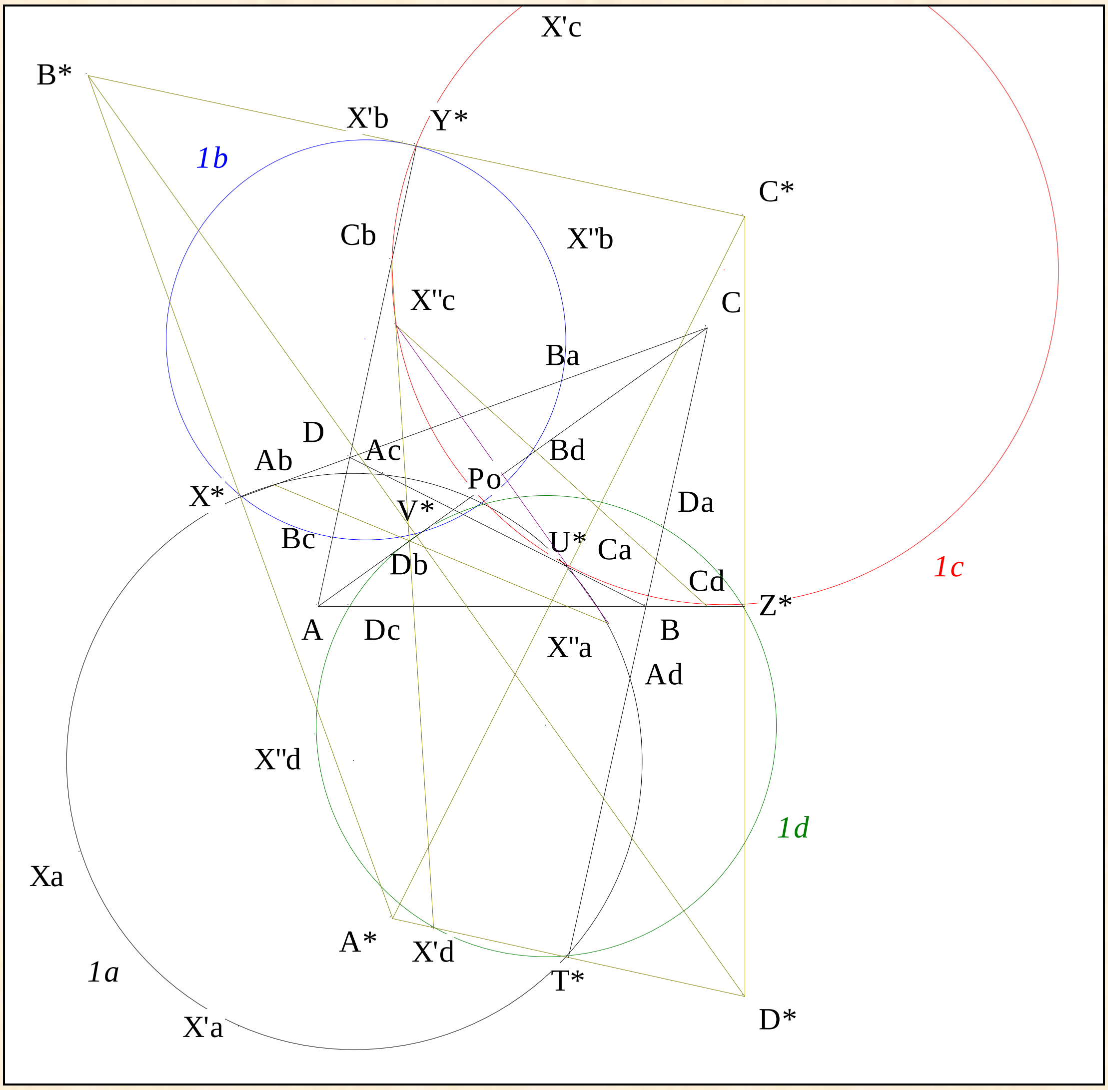
(2) Figure récapitulative



8. Troisièmes alignements et troisièmes médiatrices

VISION

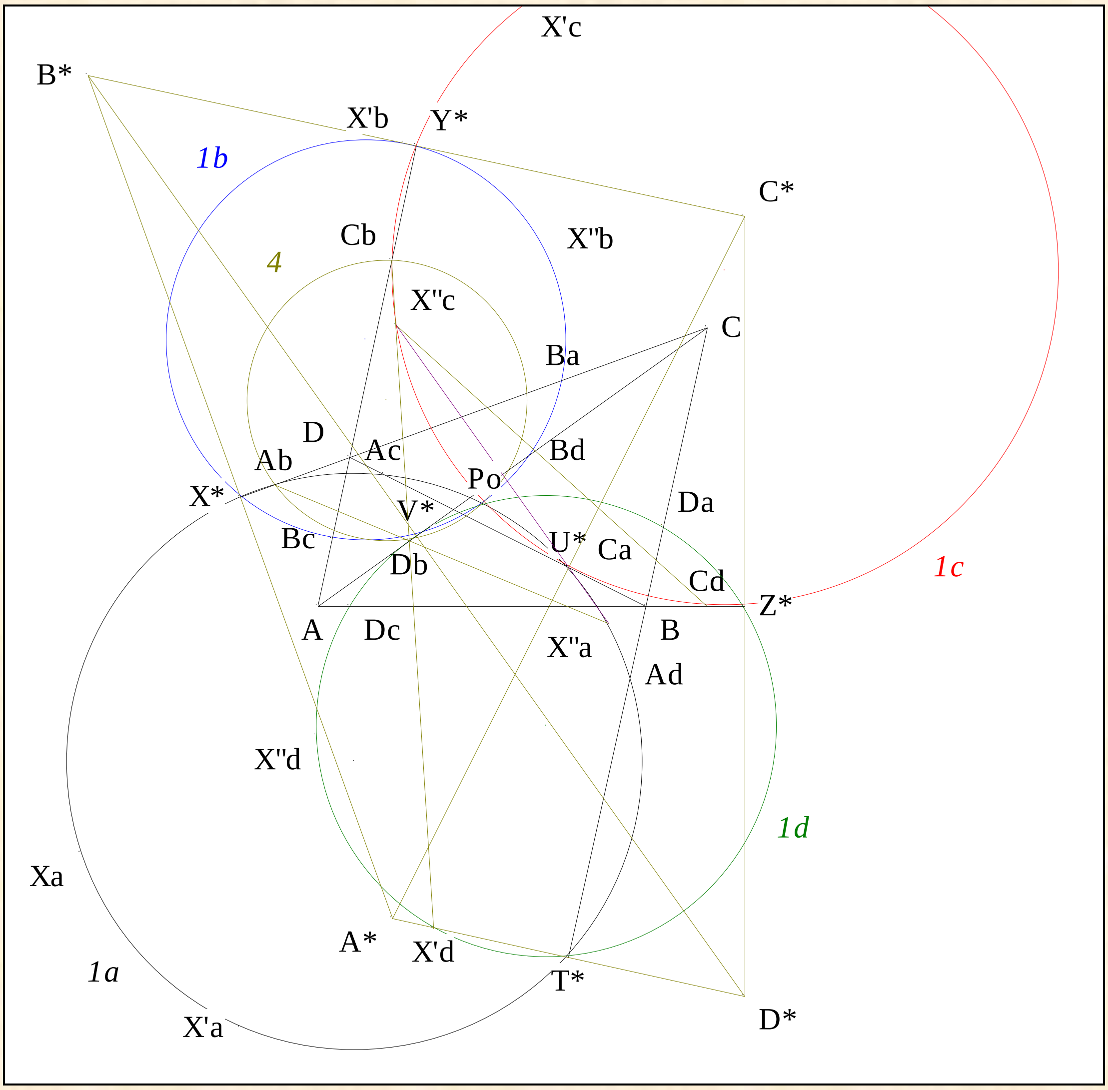
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

Donné : X"a, X"c et U* sont alignés.

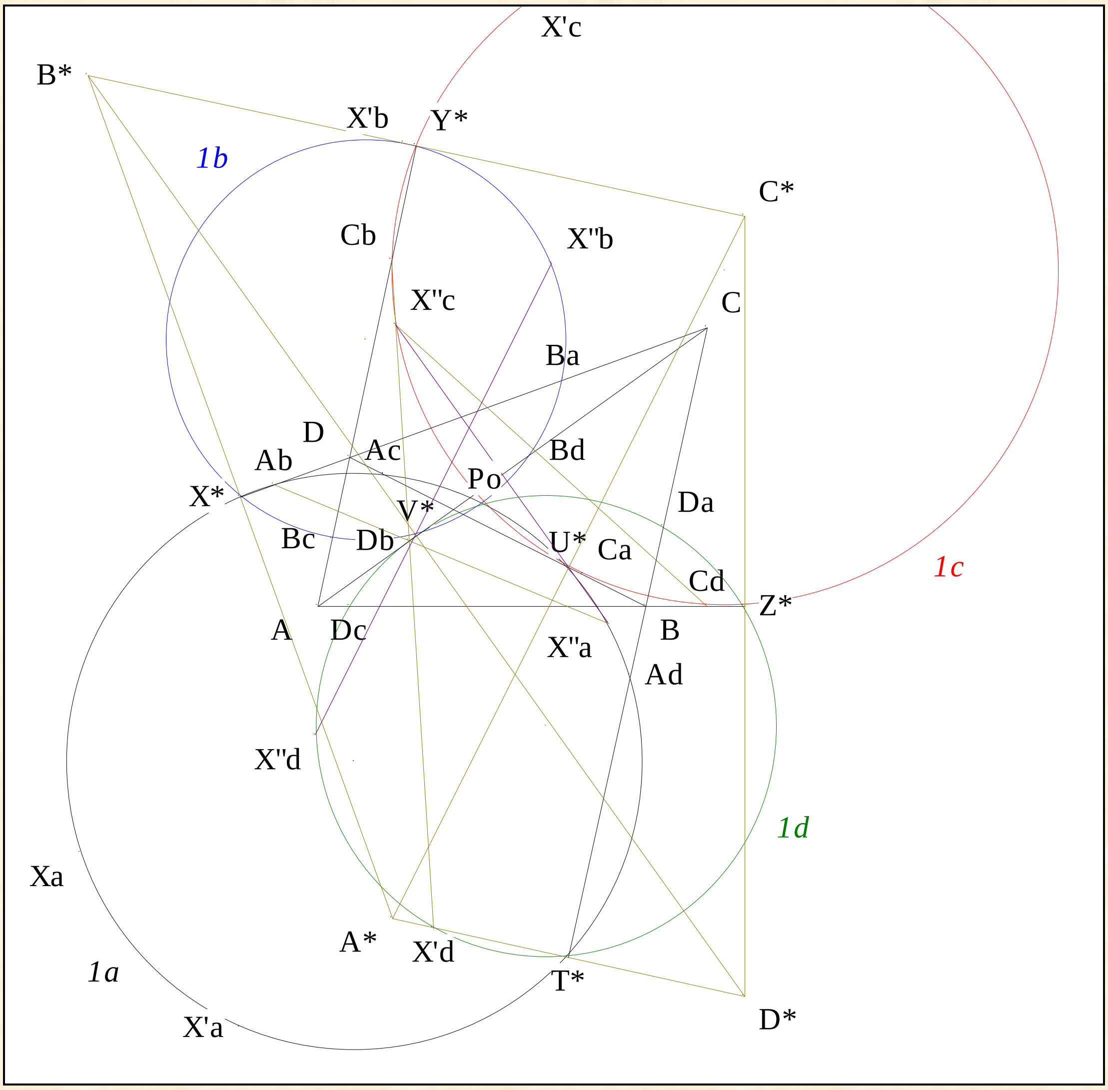
VISUALISATION



- Notons 4 le D-cercle d'Euler de ABCD ; il passe par Db, Ab, Cb et Po.

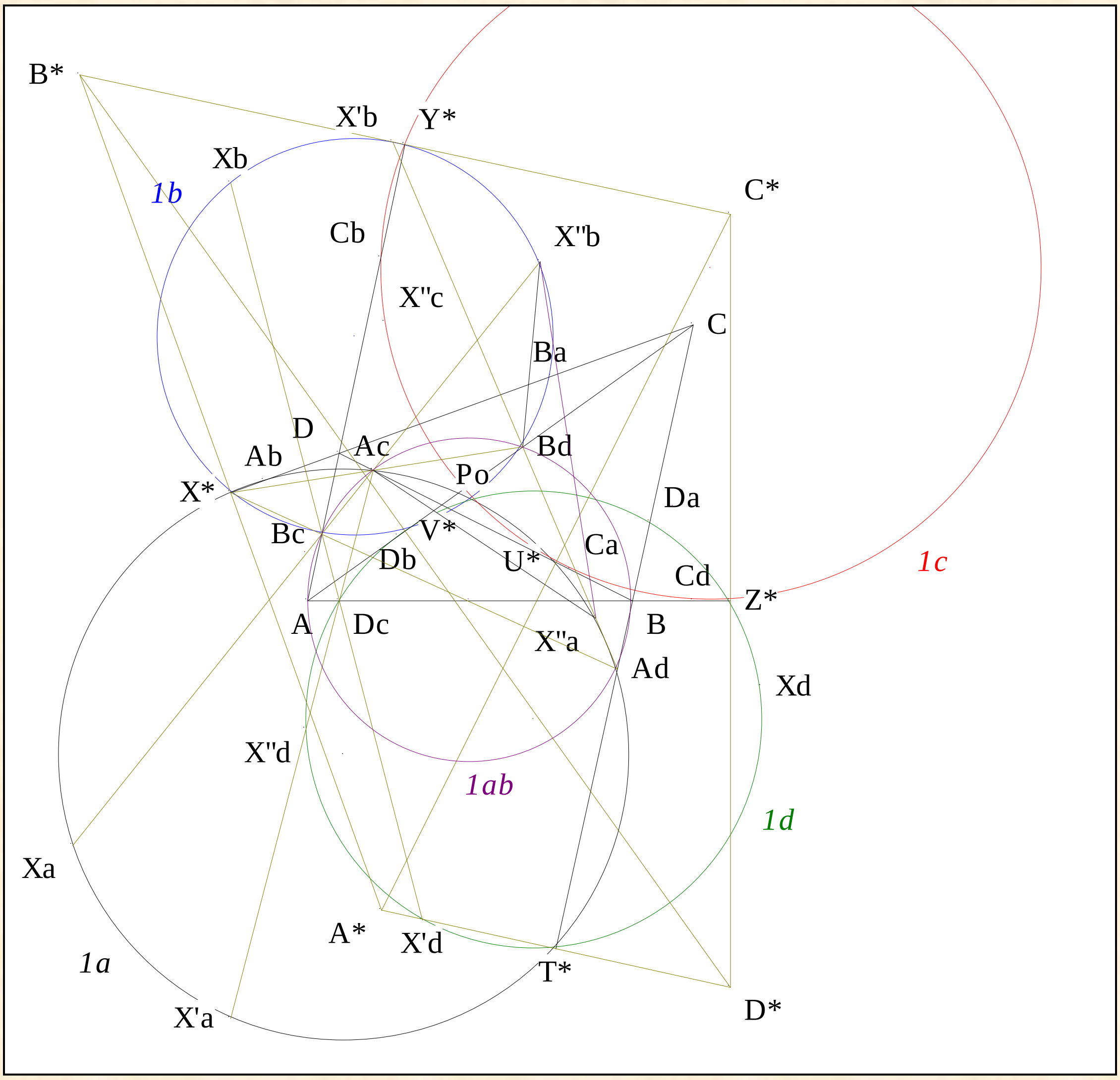
- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 8) appliqué à *1a*, *1c* et *4* concourants en Po, X"a, X"c et U* sont alignés.

Scolies : **(1)** autre troisième alignement



- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que X"b, X"d et V* sont alignés.

(2) (X*AcBd) est la médiatrice de [X"aX"b]



- Nous allons montrer que les triangles X"aAcBd et X"bAcBd sont égaux.

- Une première chasse angulaire à 2 Π près :
  le quadrilatère XaAcX"aAd étant cyclique, <BdX"aAc = <AdXaAc ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <AdXaAc = <AdX*Ac ;
  d'après B. II. 2. Premiers alignements, <AdX*Ac = <BcX*Bd ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <BcX*Bd = <BcX"bBd ;
  d'après B. II. 7. Troisièmes intersections, <BcX"bBd = <AcX"bBd ;
  par transitivité de la relation =, <BdX"aAc = <AcX"dBd.

- Une seconde chasse angulaire à 2 Π près :
  d'après B. II. 7. Troisièmes intersections, <AcBdX"a = <AcBdAd ;
  le quadrilatère AcBdAdBc étant cyclique, <AcBdAd = <AcBcX* ;
  d'après B. II. 7. Troisièmes intersections, <AcBcX* = <X"bBcX* ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <X"bBcX* = <X"bBdX* ;
  d'après B. II. 2. Premiers alignements, <X"bBdX* = <X"bBdAc ;
  par transitivité de la relation =, <AcBdX"a = <X"bBdAc.

- En conséquence, <X"aAcBd = <BdAcX"b.

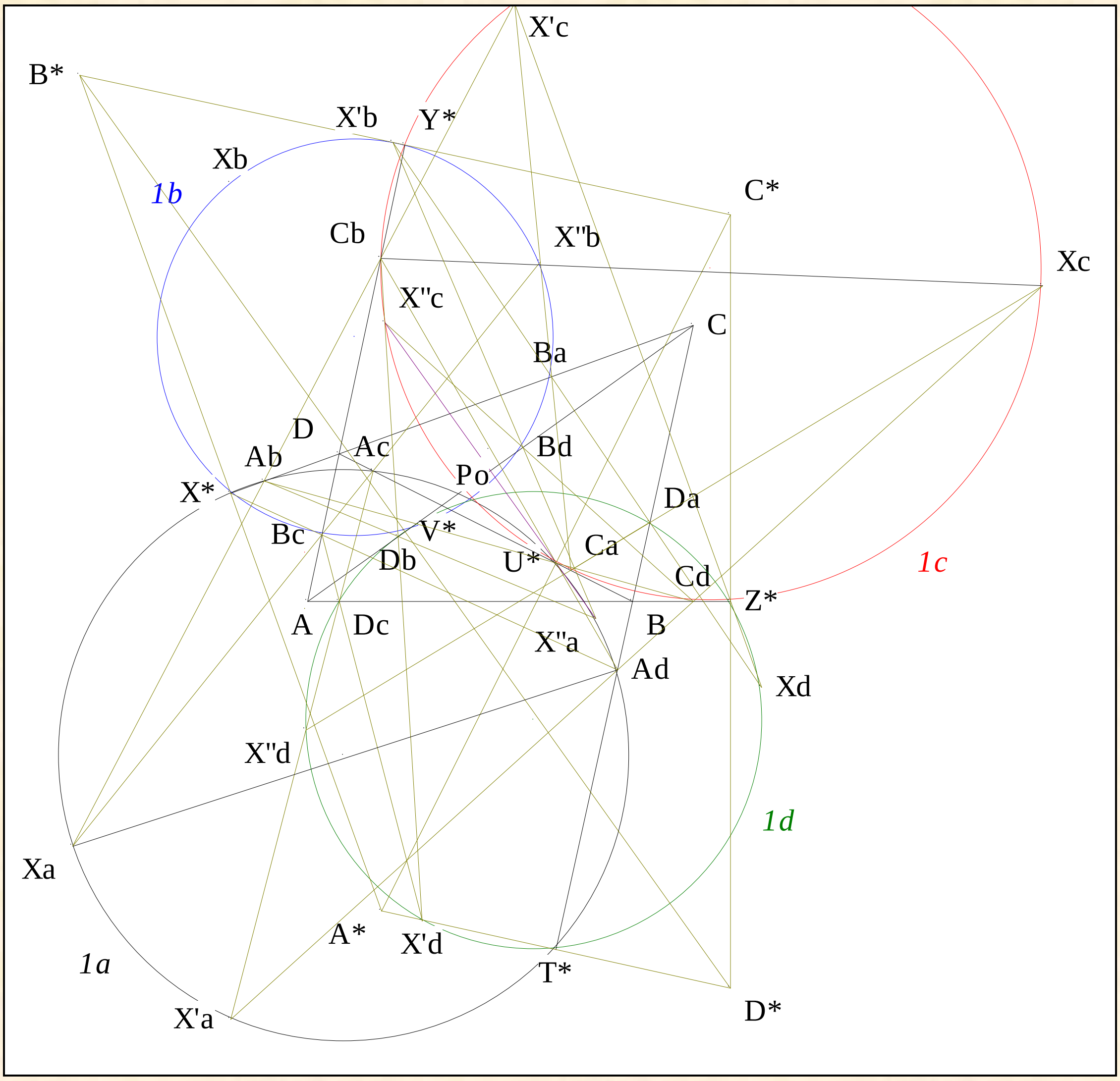
- D'après "Le théorème angle-côté-angle", les triangles X"aAcBd et X"bAcBd sont égaux ;
  nous avons : BdX"a = BdX"b
  AcX"a = AcX"b.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème de la médiatrice", (X*AcBd) est la médiatrice de [X"aX"b].

(3) Autres troisièmes médiatrices

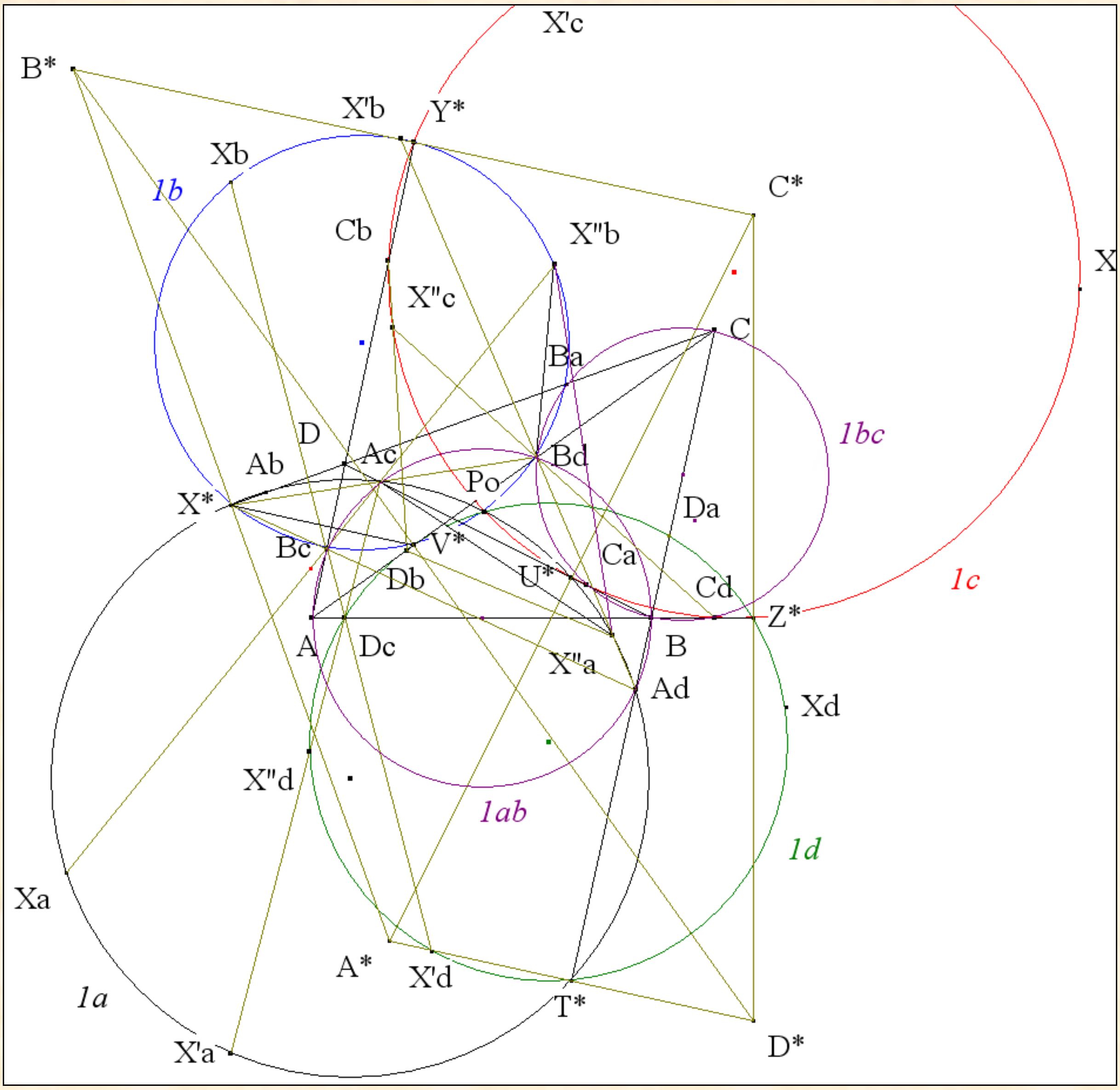
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que
  (Y*BdCa) est la médiatrice de [X"bX"c]
  (Z*CaDb) est la médiatrice de [X"cX"d]
  (T*DbAc) est la médiatrice de [X"dX"a].

(4) (AC) est la médiatrice de [X"aX"c]



- **Commentaire :** nous allons montrer que les triangles X"aDbBd et X"cDbBd sont égaux.

- Une première chasse angulaire à 2 Π près :
  le quadrilatère AbX"aAdXa étant cyclique <BdX"aDb = <AdXaAb ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <AdXaAb = <AdX*Ab ;
  le quadrilatère AdXaAbU* étant cyclique <AdX*Ab = <AdU*Cd ;
  le quadrilatère CbU*CdXc étant cyclique <AdU*Cd = <CbXcCd ;
  le quadrilatère CdXcCbX"c étant cyclique, <CbXcCd = <DbX"cCd ;
  par transitivité de la relation =, <BdX"aDb = <DbX"cCd.



- Une seconde chasse angulaire à 2 Π près :
  d'après B. II. 7. Troisièmes intersections, <DbBdX"a = <ABdAd
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <ABdAd = <ABAd ;
  d'après "Le théorème des angles opposés", <ABAd = <CdBC ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <CdBC = <CdBdC ;
  d'après "Le théorème des angles opposés", <CdBdC = <X"cBdDb ;
  par transitivité de la relation =, <DbBdX"a = <X"cBdDb.

- En conséquence, <X"aDbBd = <BdDbX"b.

- D'après "Le théorème angle-côté-angle", les triangles X"aDbBd et X"cDbBd sont égaux ;
  nous avons : BdX"a = BdX"c
  AcX"a = AcX"c.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème de la médiatrice", (AC) est la médiatrice de [X"aX"c].

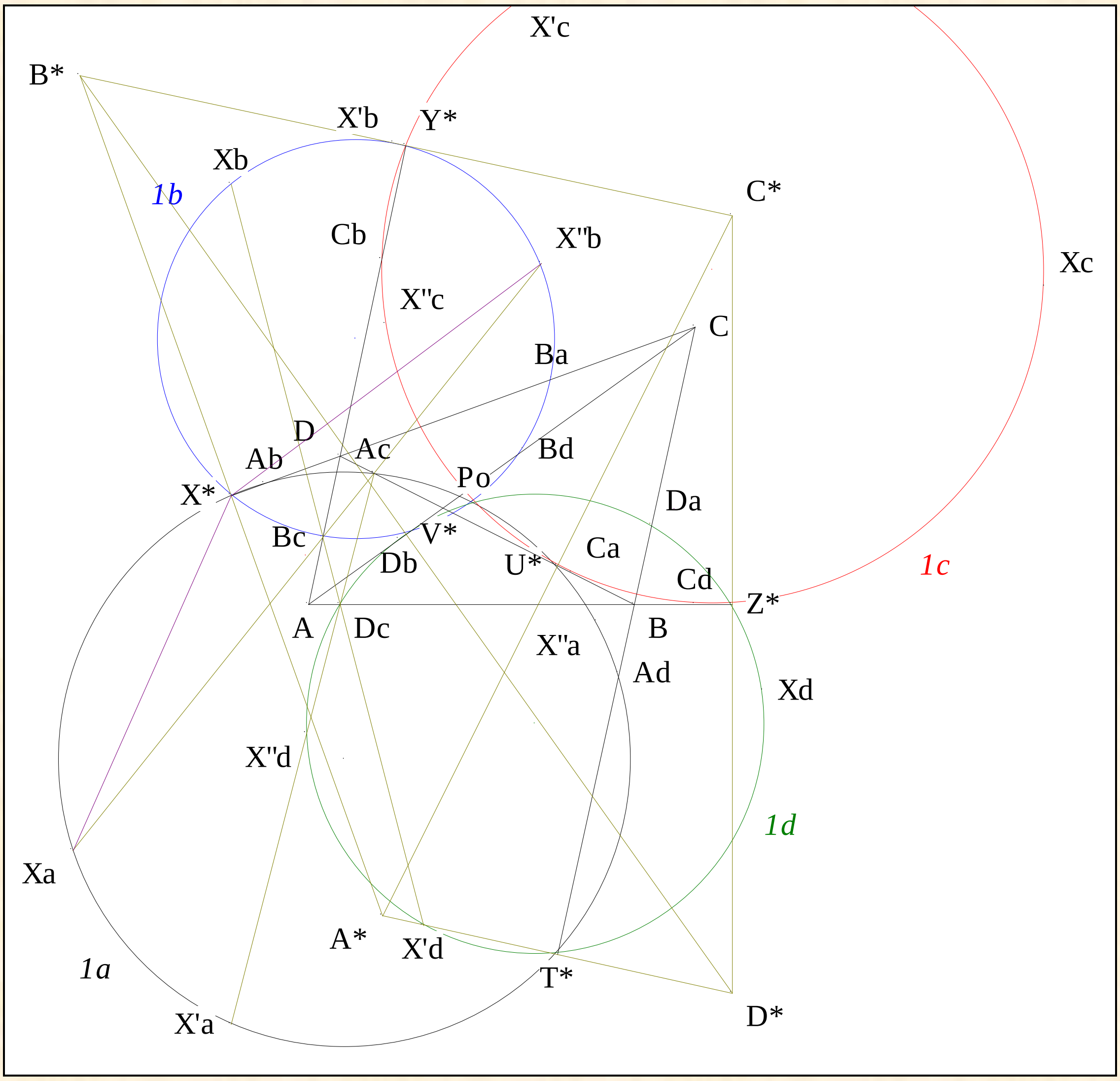
(5) Autre troisième médiatrice

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (BD) est la médiatrice de [X"bX"d].

9. Segments égaux

VISION

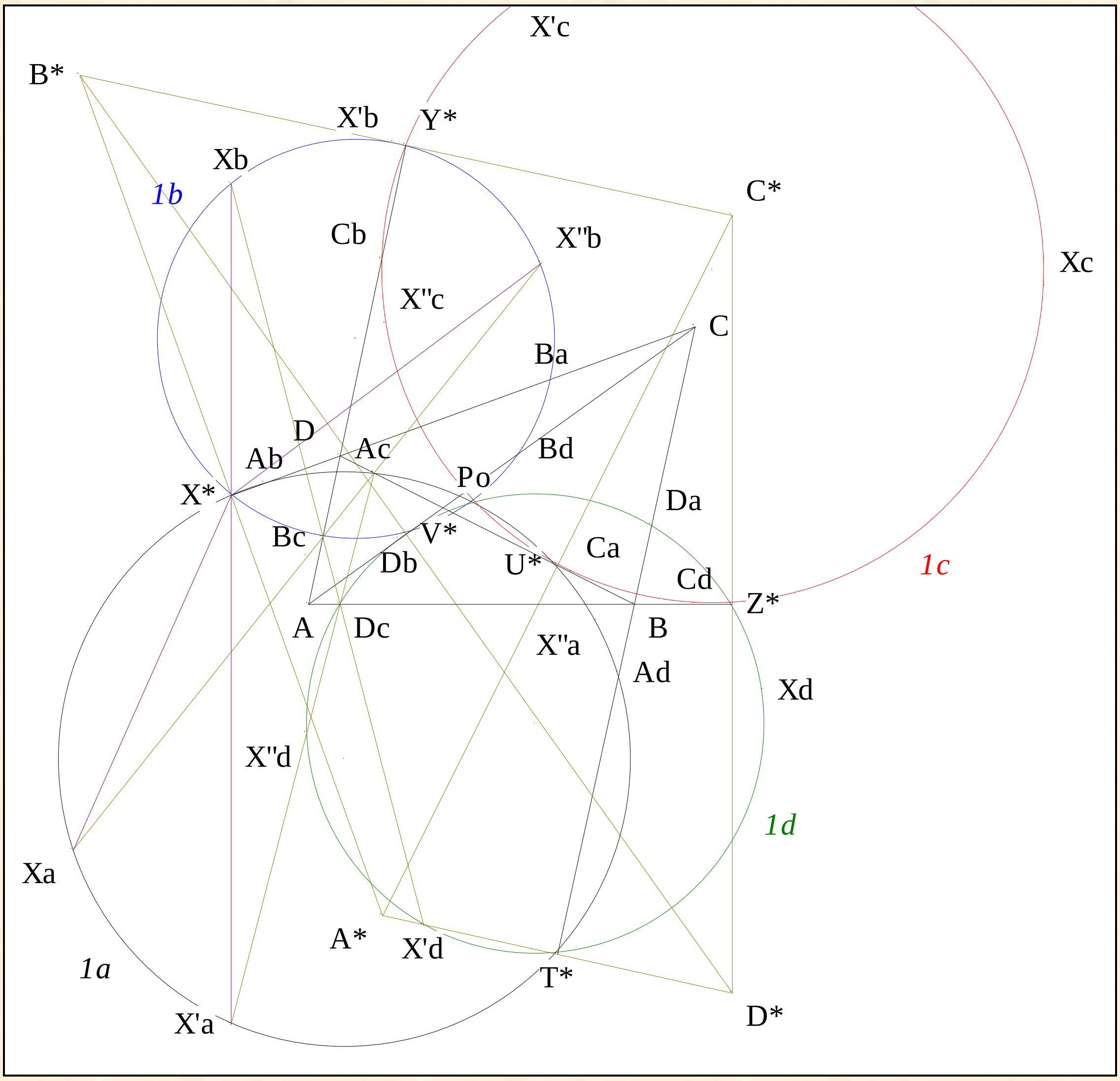
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : X*Xa = X*X''b.

VISUALISATION



- D'après B. II. 6. Deuxièmes médiatrices, (ADcB) est la médiatrice de [X'aX*Xb] ;
  en conséquence, le triangle DcX'aXb est Dc-isocèle.

- Une chasse angulaire à 2. Π près :
  d'après B. II. 7. Troisièmes intersections, <X"bXaX* = <AcXaX* ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <AcXaX* = <AcX'aX* ;
  d'après B. II. 3. Premières intersections, <AcX'aX* = <DcX'aX* ;
  le triangle DcX'aXb étant Dc-isocèle, <DcX'aX* = <X'aXbDc ;
  d'après B. II. 6. Deuxièmes médiatrices, <X'aXbDc = <X*XbDc ;
  d'après B. II. 3. Premières intersections, <X*XbDc = <X*XbBc ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <X*XbBc = <X*X"bBc ;
  d'après B. II. 7. Troisièmes intersections, <X*X"bBc = <X*X"bXa ;
  par transitivité de la relation =, <X"bXaX* = <X*X"bXa ;

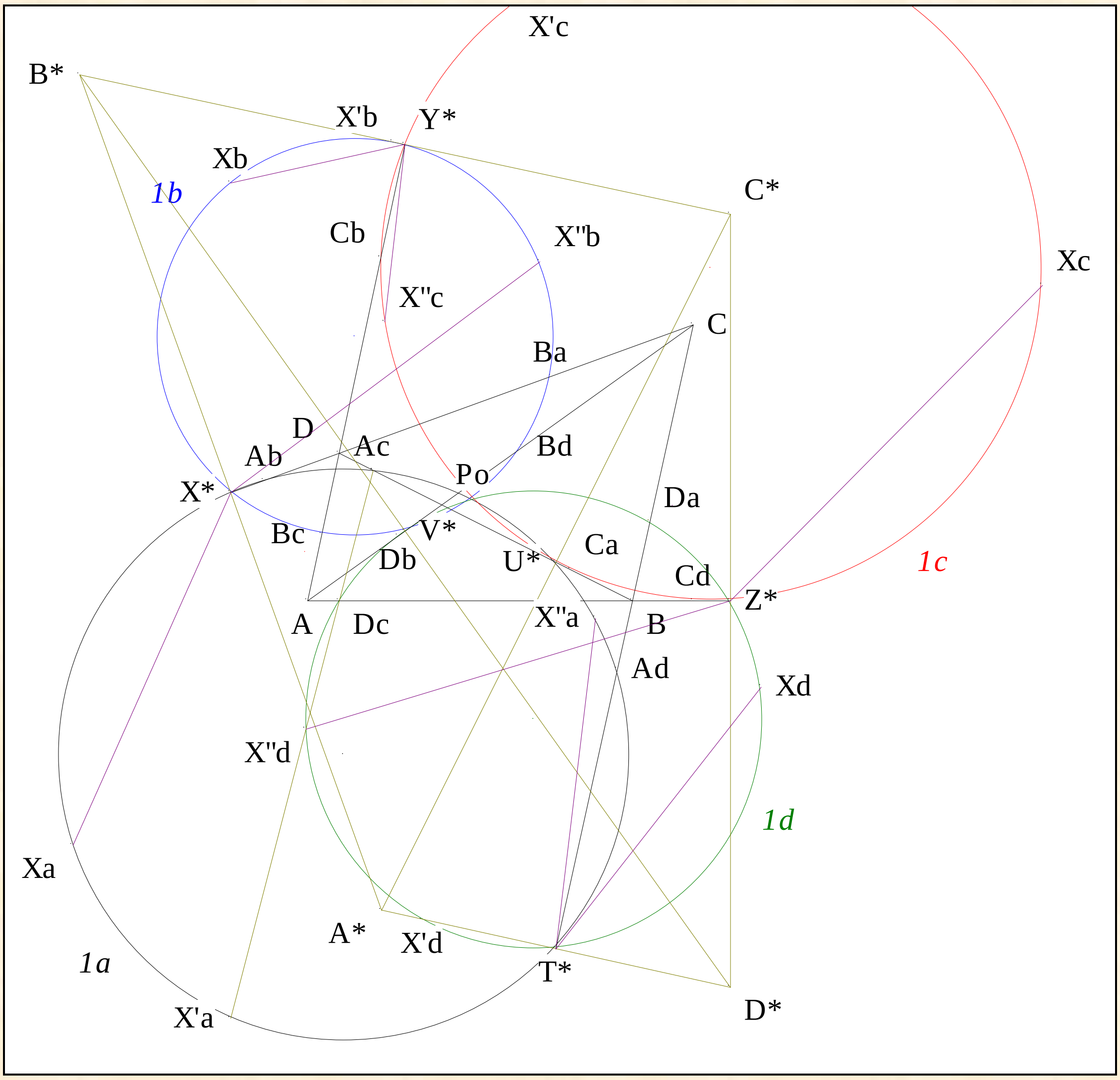
  en conséquence, le triangle X*XaX"b est X*-isocèle.

- **Conclusion :** X*Xa = X*X"b

Scolies : **(1)** des segments égaux

- **Conclusion :** d'après B. II. 8. Troisièmes médiatrices, X*Xa = X*X"b = X*X"a

(2) Autres segments égaux

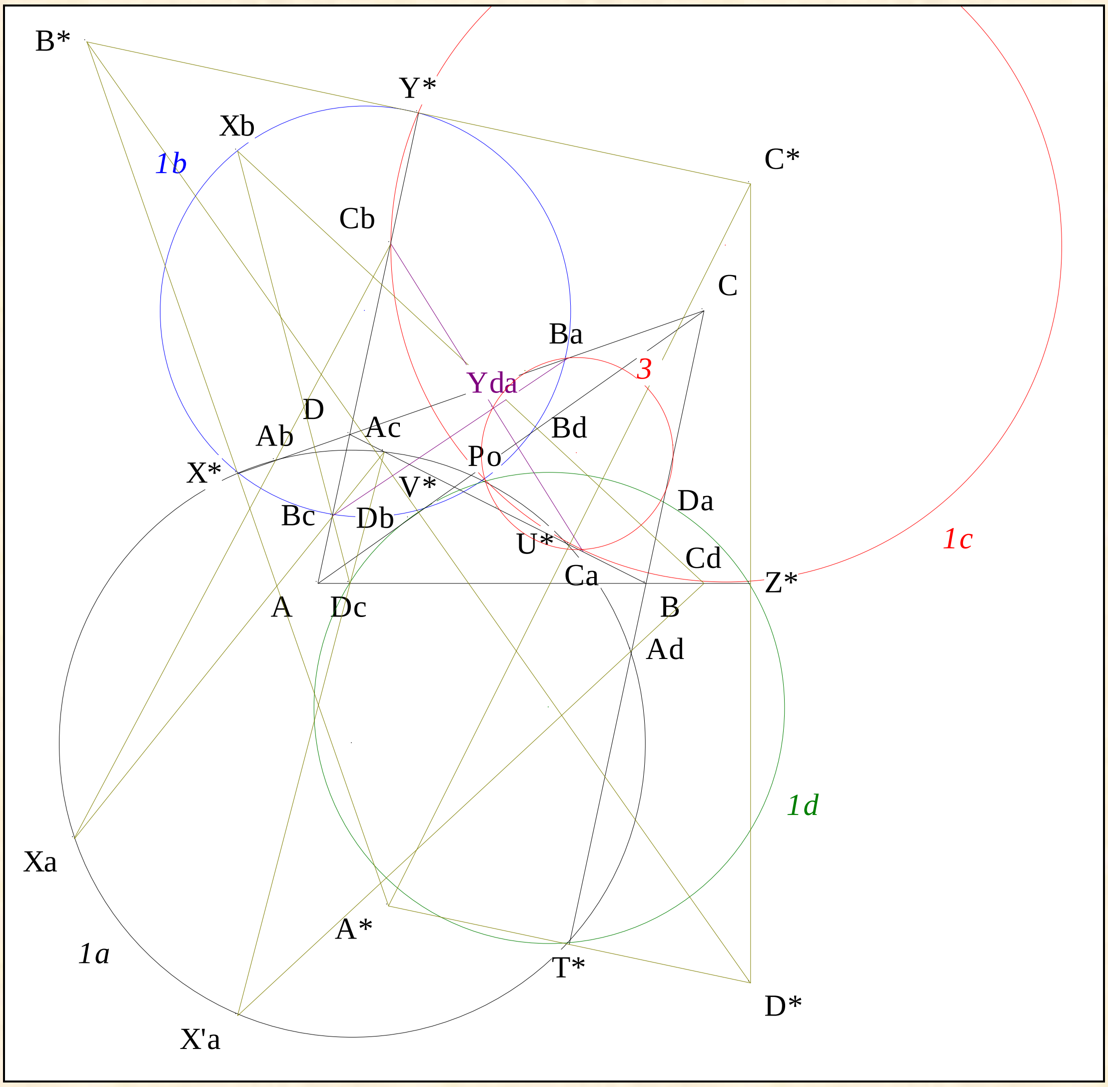


- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que Y*Xb = Y*X"c = Y*X"b
  Z*Xc = Z*X"d = Z*X"c
  T*Xd = T*X"a = Z*X"d.

10. Intersection sur un cercle d'Euler d'un quadrilatère

VISION

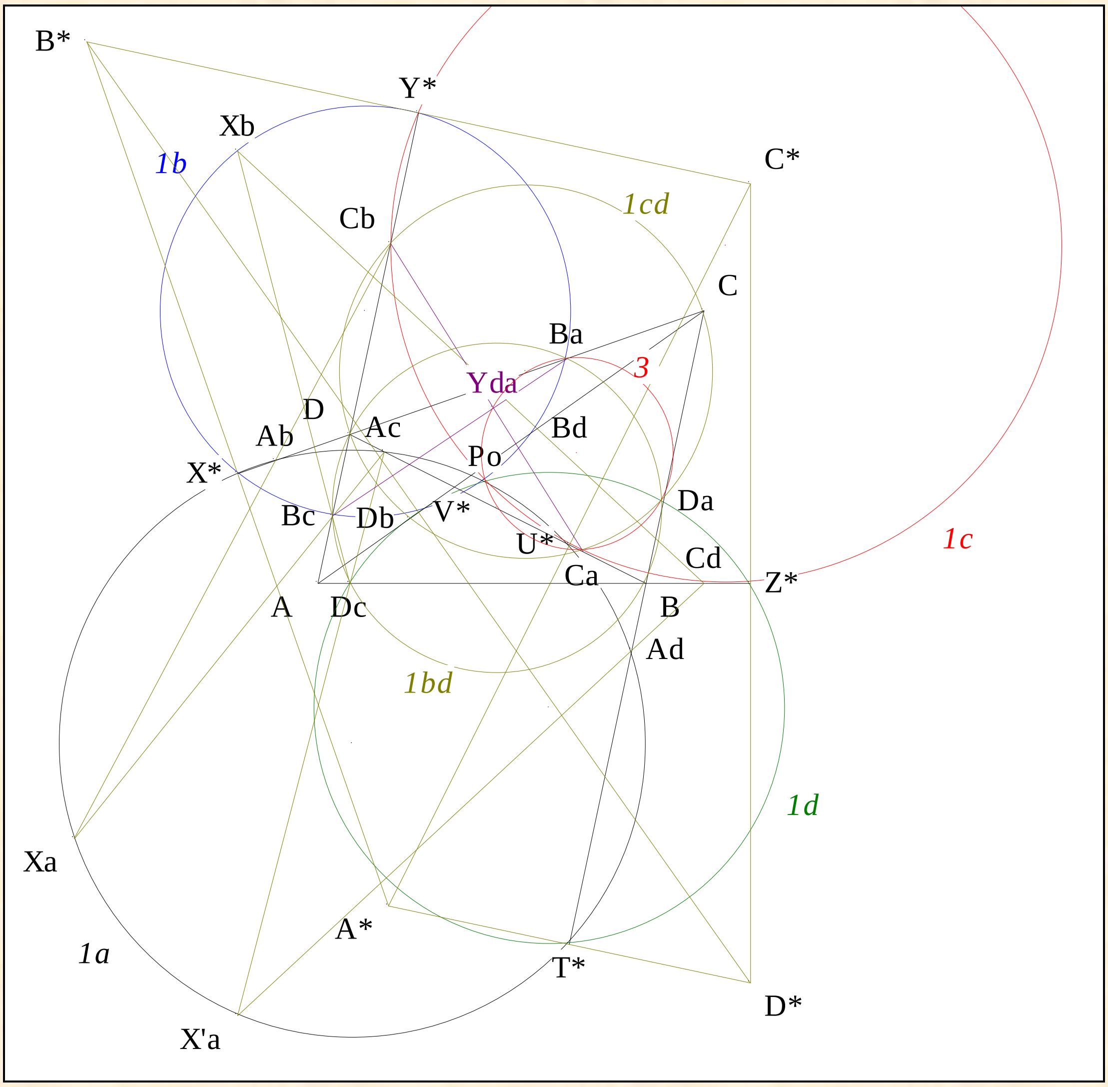
Figure :



Traits :		aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
	Yda	le point d'intersection de (BaBc) et (CbCa),
et	*3*	le C-cercle d'Euler de ABCD.

Donné : Yda est sur *3*.

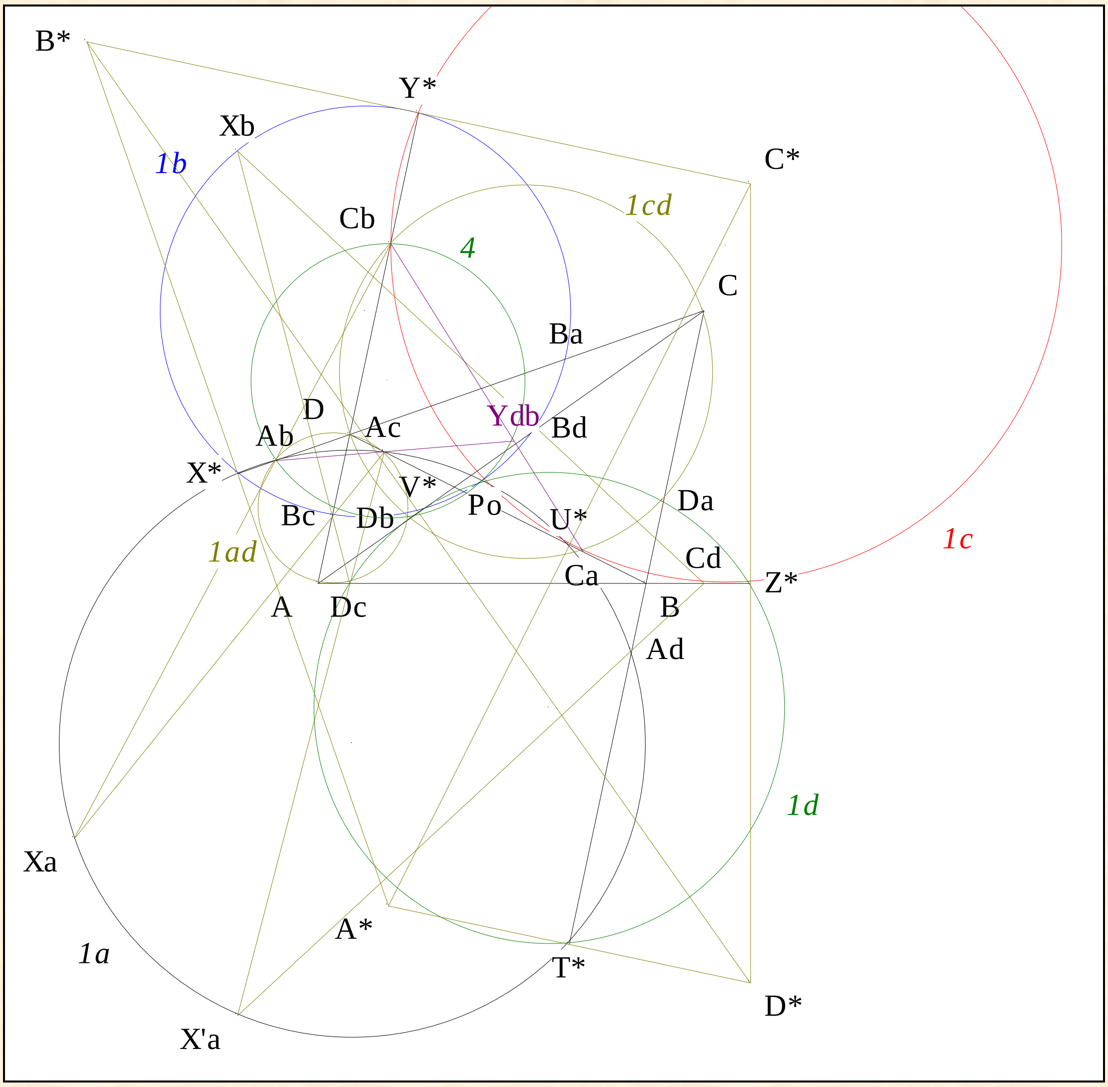
VISUALISATION



- Notons *1bd*, *1cd* les cercles de diamètres resp. [BD], [CD].

- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 8) appliqué au triangle BcCbYa avec D sur (BcCb), Ca sur (BcYa) et Ba sur (YaBc) et aux cercles *1bd*, *1cd* et *3* concourants en Da, Yda est sur *3*.

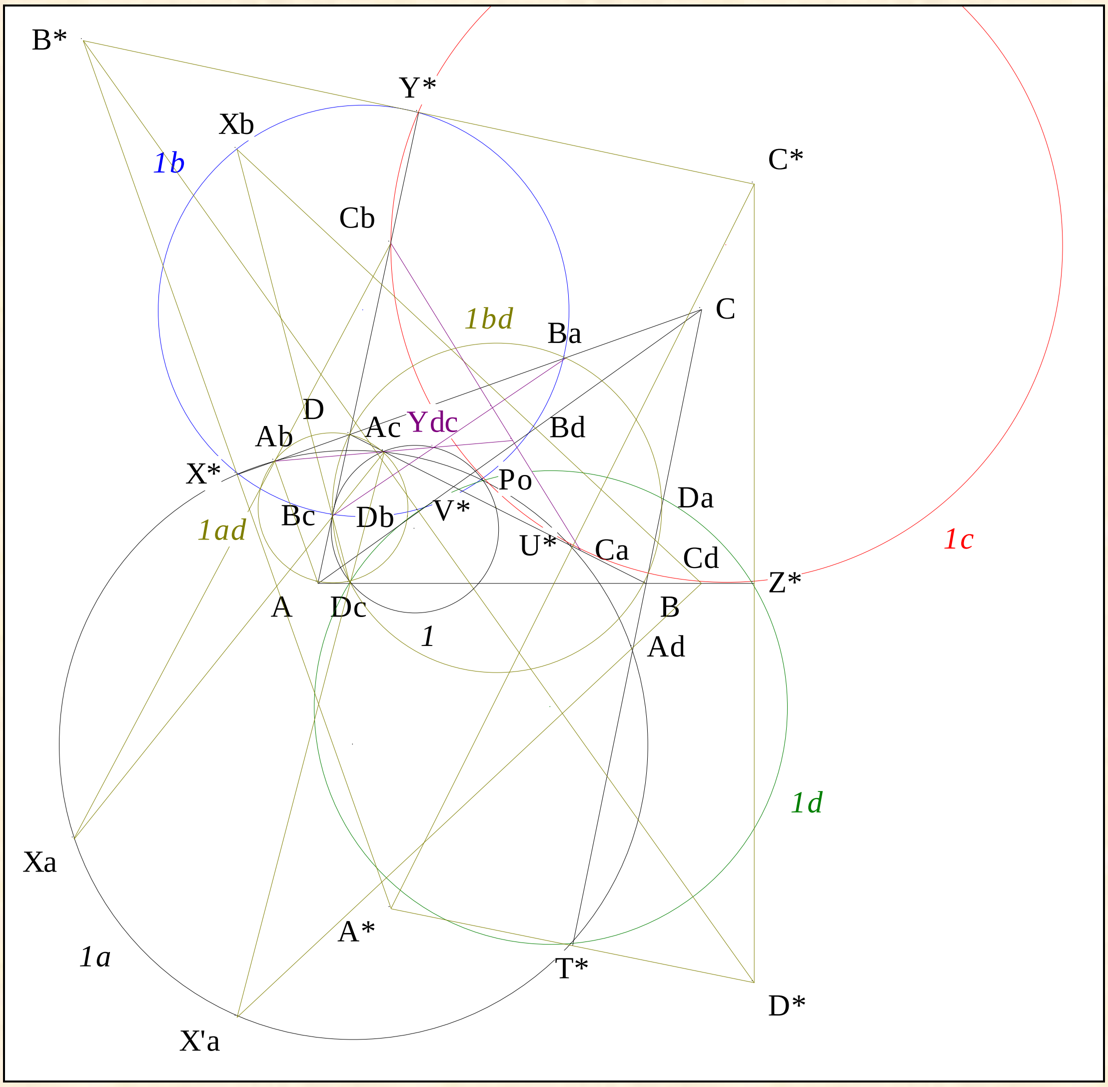
Scolies : **(1)** une deuxième intersection



- Notons Ydb le point d'intersection de (CbCa) et (AcAb),
  1cd, *1ad* les cercles de diamètres resp. [CD], [AD]
  et *4* le D-cercle d'Euler de ABCD.

- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 8)
  appliqué au triangle CaAcYb avec D sur (CaAc), Ca sur (AcYb) et Ba sur (YbCa)
  et aux cercles *1cd*, *1ad* et *4* concourants en Db,
  Ydb est sur *4*.

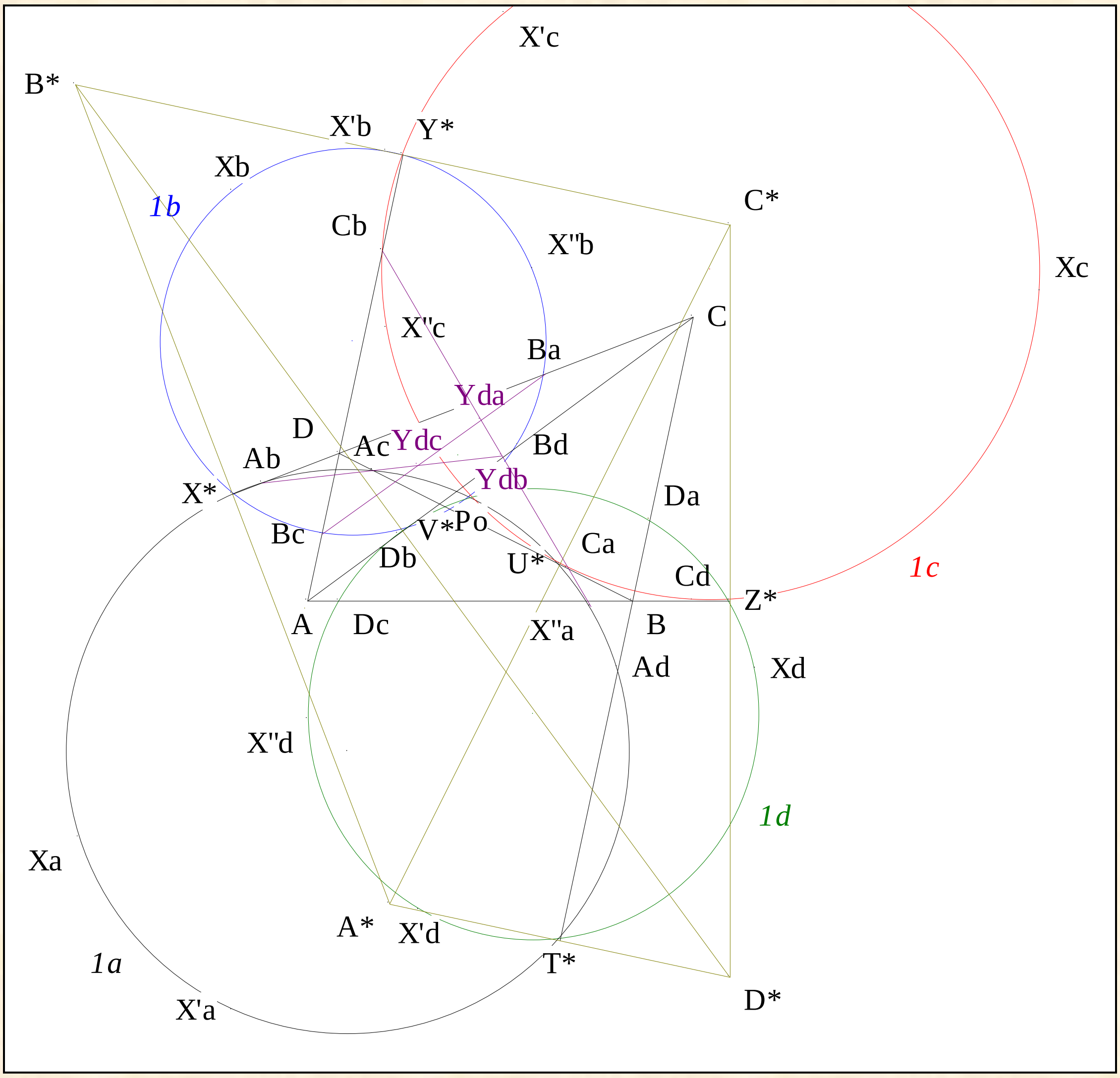
(2) Une troisième intersection



- Notons Ydc le point d'intersection de (AcAb) et (BaBc),
  1ad, *1bd* les cercles de diamètres resp. [AD], [BD]
  et *1* le A-cercle d'Euler de ABCD.

- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 8)
  appliqué au triangle AbBaYc avec D sur (AbBa), Bc sur (BaYc) et Ac sur (YcAb)
  et aux cercles *1ad*, *1bd* et *1* concourants en Dc,
  Ydc est sur *1*.

(3) Le D-triangle de Quang Tuan Bui



- **Définition :** YdaYdbYdc est le D-triangle de Bui relativement à ABCD". [34]

(4) Les trois autres triangles de Bui

- Notons Yab le point d'intersection de (CbCd) et (DcDb),
  Yac le point d'intersection de (DcDb) et (BdBc),
  et Yad le point d'intersection de (BdBc) et (CbCd).

- Par définition, YabYacYad est le A-triangle de Bui relativement à ABCD.

- Notons Ybc le point d'intersection de (DcDa) et (AdAc),
  Ybd le point d'intersection de (AdAc) et (CaCd),
  et Yba le point d'intersection de (CaCd) et (DbDa).

- Par définition, YbcYbdYba est le B-triangle de Bui relativement à ABCD.

- Notons Ycd le point d'intersection de (AdAb) et (BaBd),
  Yca le point d'intersection de (BaBc) et (DbDa),
  et Yab le point d'intersection de (DbDa) et (AdAb).

- Par définition, YcdYcaYab est le C-triangle de Bui relativement à ABCD.

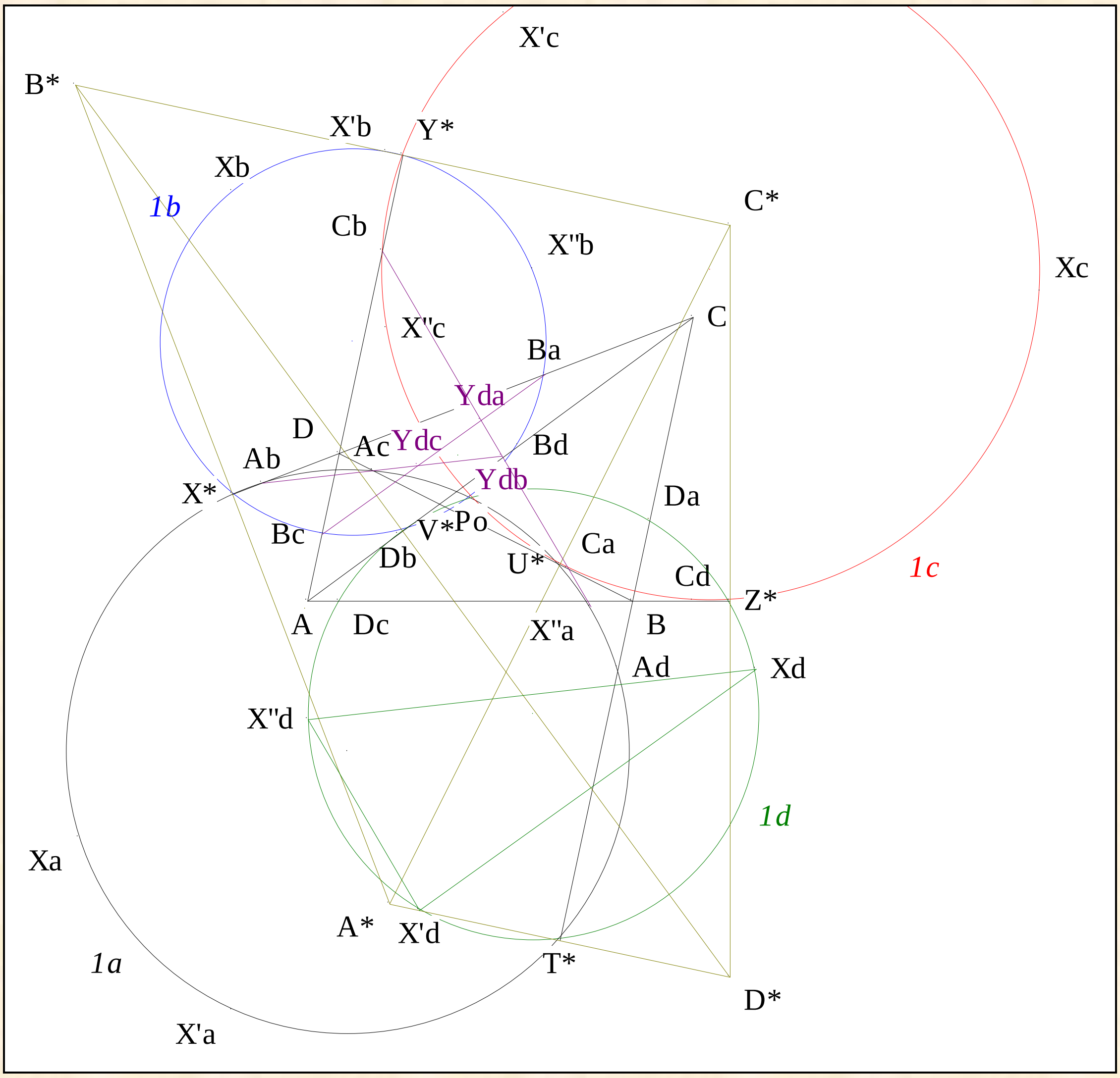
---

[34] Bui Quang tuan, Nine Circles Concur with nine points circle, Message *Hyacinthos* # 12403, 12498 du 16 et 26/03/2006 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

11. Le D-triangle de Bui et le triangle X'dX'dXd

VISION

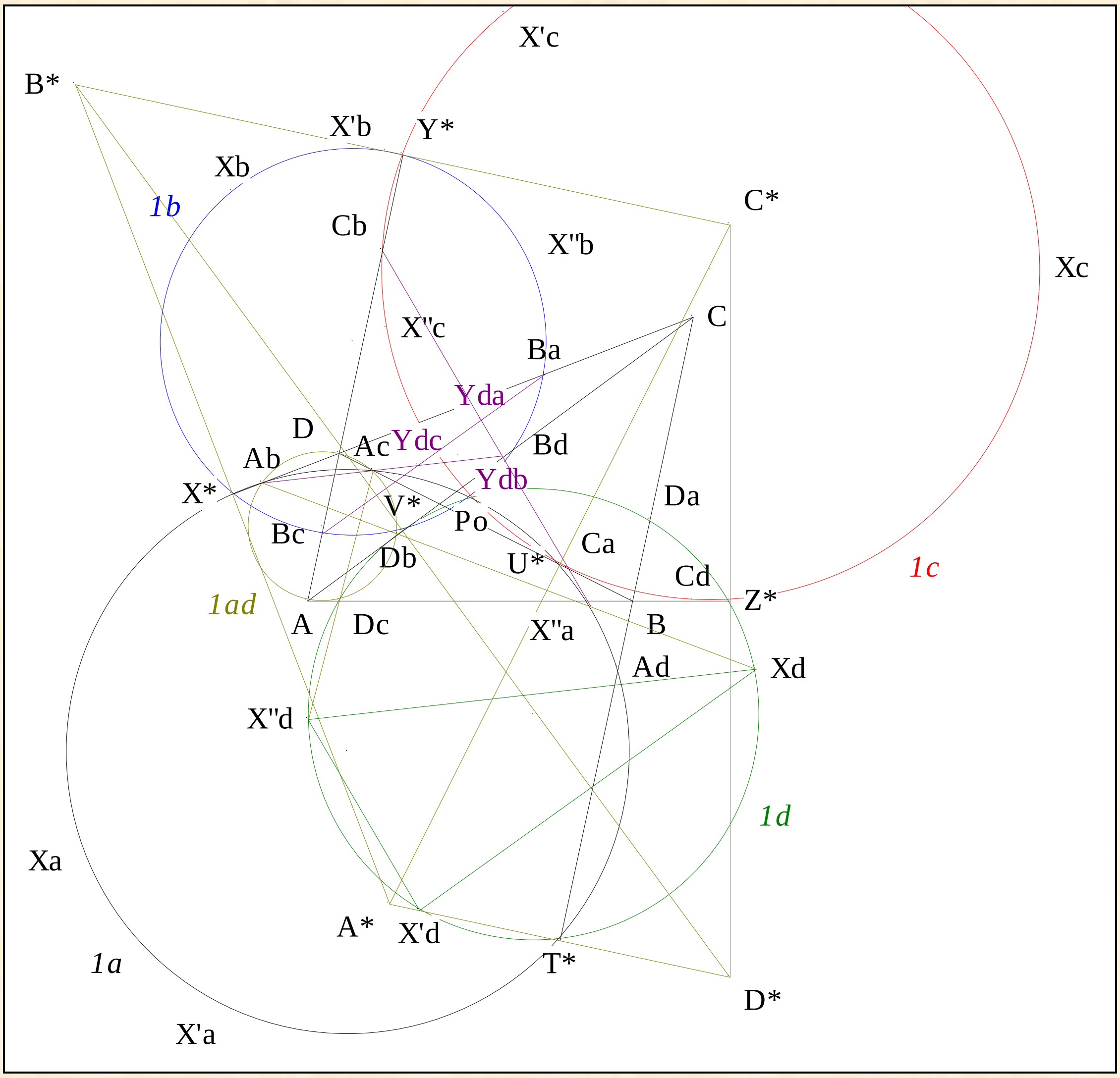
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : YdaYdbYdc est homothétique à X'dX"dXd.

VISUALISATION



- Notons *1ad* le cercle de diamètre [AD] ; il passe par Ab, Ac, Db et Dc.

- D'après B. II. 3. Première intersection sur un cercle pédal, Ab, Db et Xd sont alignés ;
  d'après B. II. 7. Troisième intersection sur un cercle pédal, Ac, Dc et X"d sont alignés.

- Les cercles *1ad* et *1d*, les points de base Db et Dc, les moniennes (AbDbXd) et (AcDcX"d), connduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AbAc) // (XdX"d) i.e. (YdbYdc) // (XdX"d).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (YdcYda) // (XdX'd)
  (YdaYdb) // (X'dX"d).

- **Conclusion :** YdaYdbYdc est homothétique à X'dX"dXd.

Commentaire : nous préciserons le centre de cette homothétie dans la partie suivante.

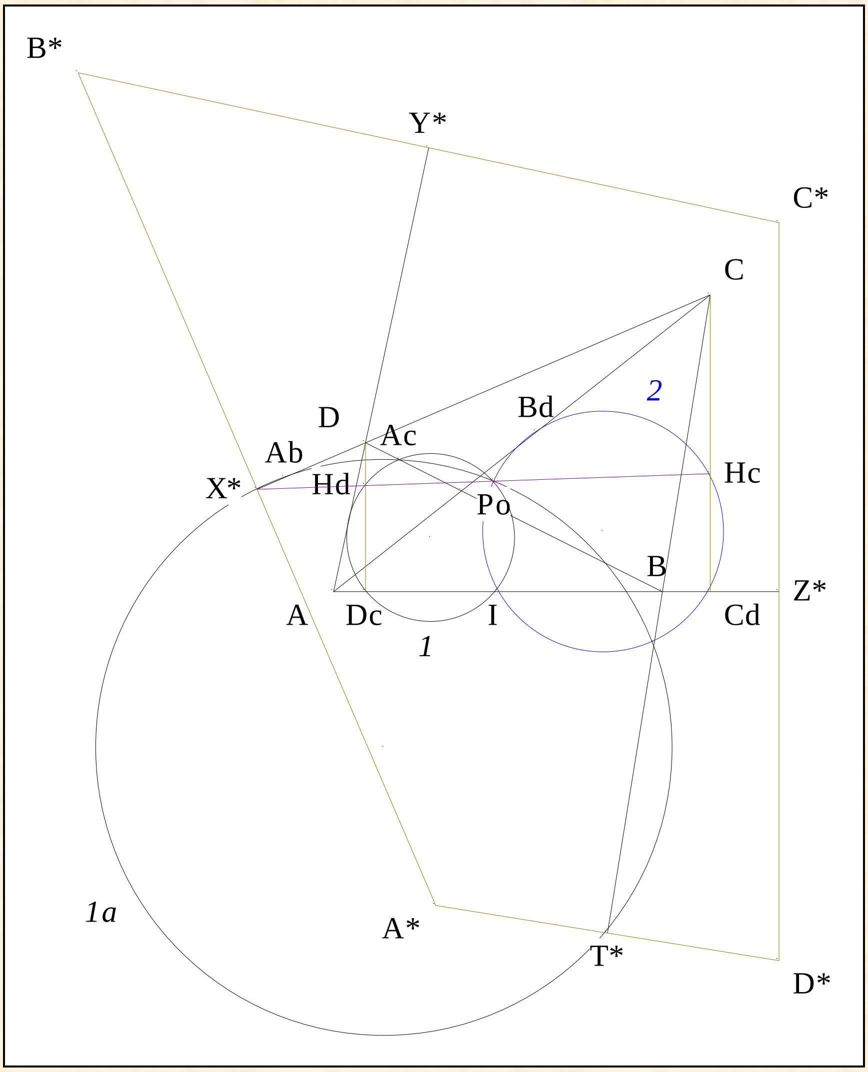
Scolie : mutatis mutandis, nous montrerions que YabYacYad est homothétique à X'aX"aXa
YbcYbdYba est homothétique à X'bX"bXb
YcdYcaYab est homothétique à X'cX"cXc.

III. LES POINTS DE PONCELET ET DE FONTENÉ

1. Un alignement

VISION

Figure :

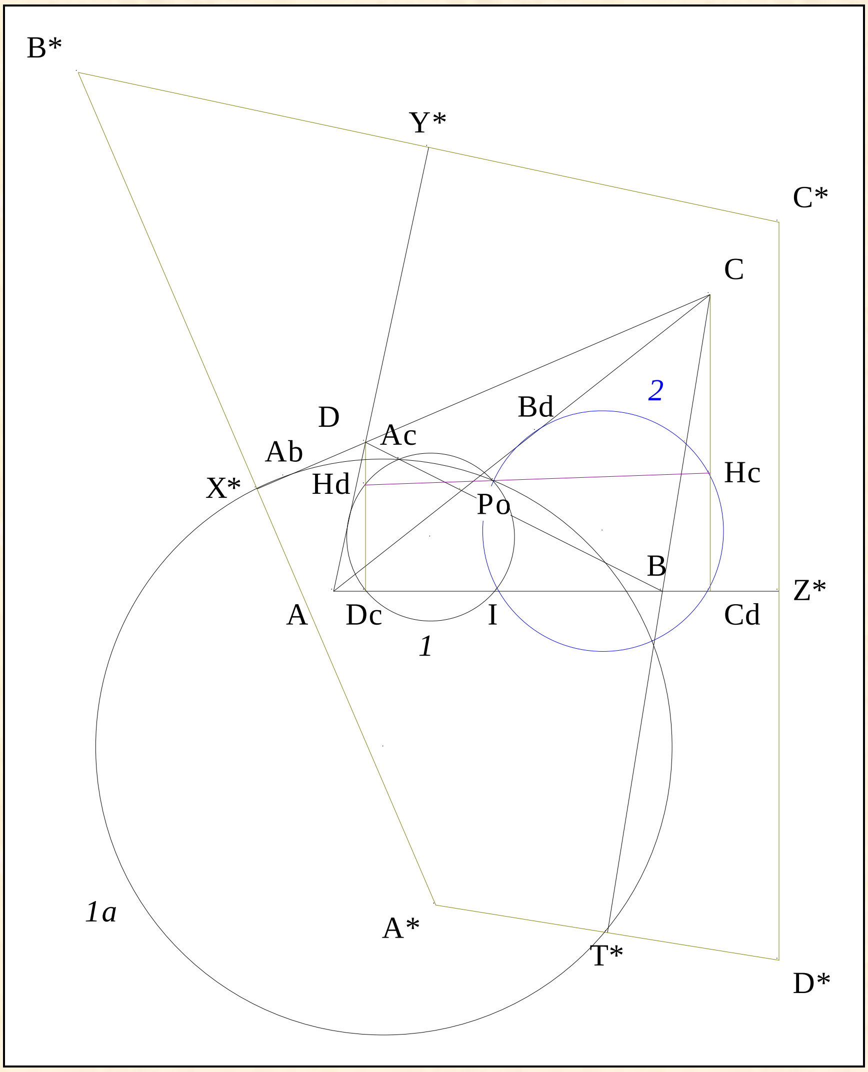


Traits :		aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
	I	le milieu de [AB]
et	Hd, Hc	les C, D-points d'Euler de ABD, ABC

Donné : X*, Hd, Hc et Po sont alignés. [35]

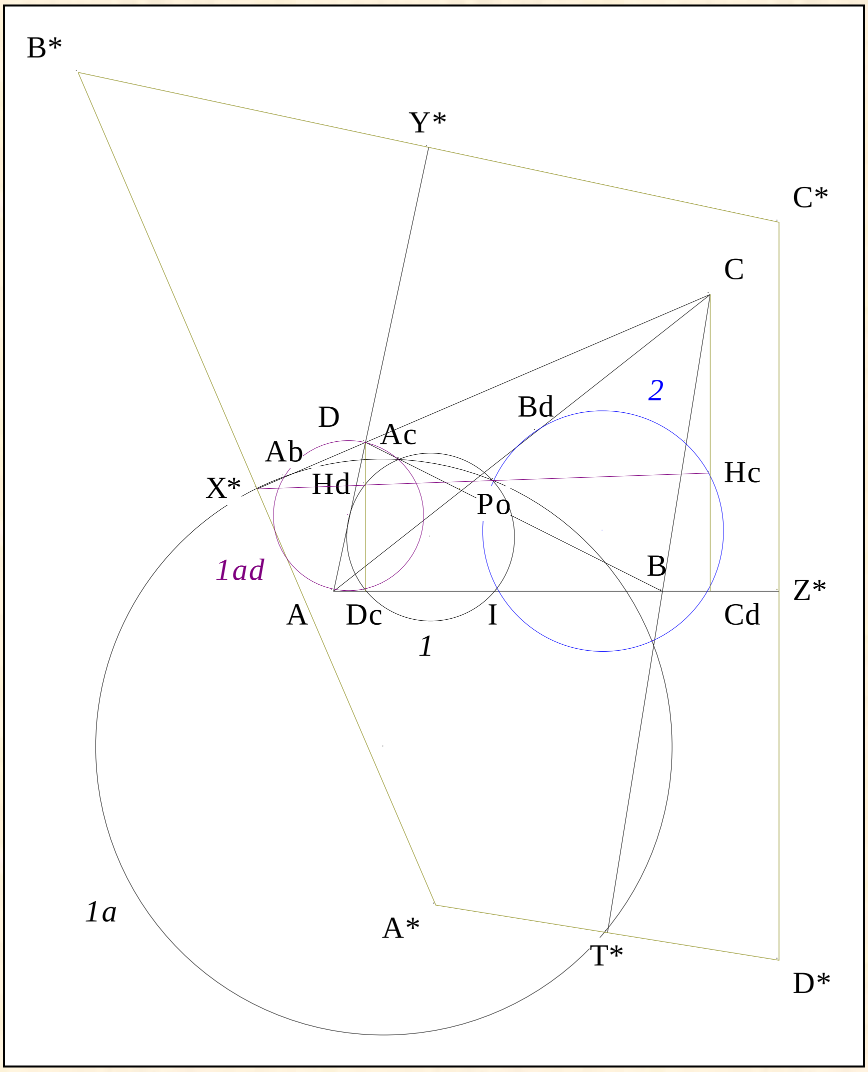
VISUALISATION

[35] Résultat de l'auteur.



- Les cercles *1* et *2*, les points de base I et Po, la moniennes (DcICd), les parallèles (DcHd) et (CdHc), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, Hd, Po et Hc sont alignés.

- **Scolie :** (HdHc) passe par le point de Poncelet de ABCD.

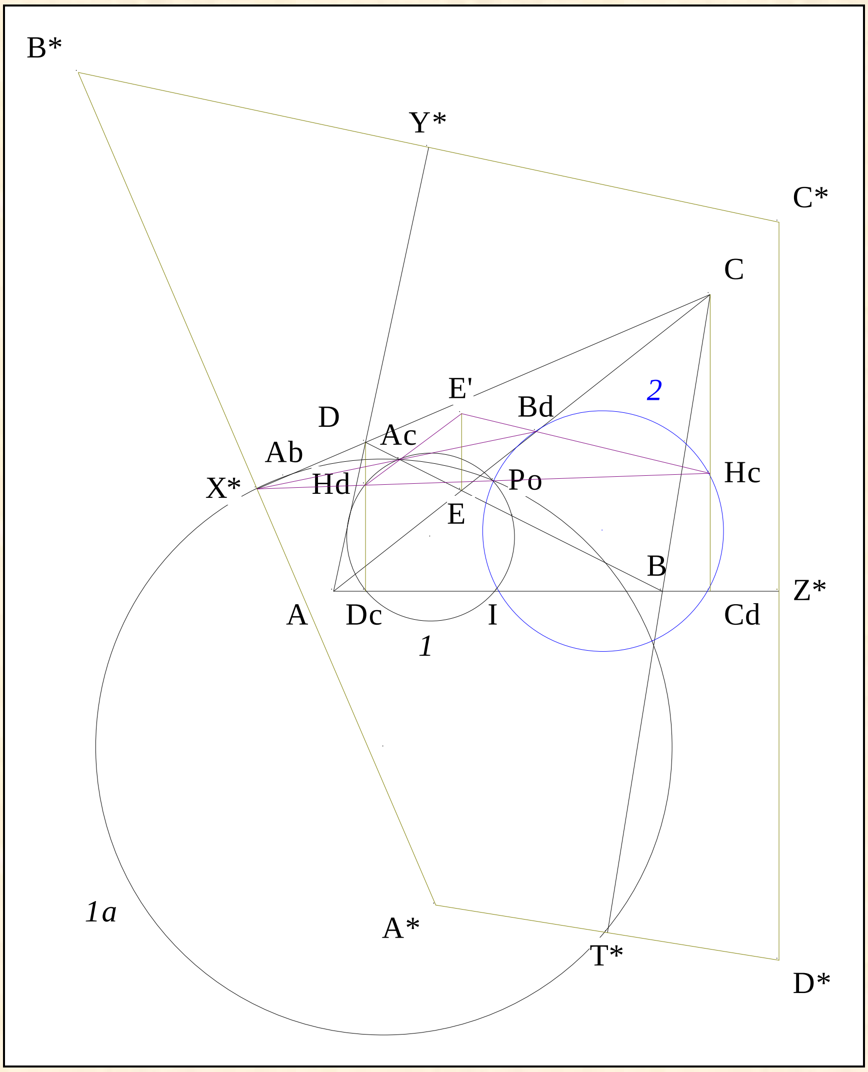


- Notons *1ad* le cercle de diamètre [AD].

- D'après Miquel "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 8)
  appliqué au triangle X*AcHd avec Ab sur (X*Ac), Dc sur (AcHd)
  et aux cercles *1a*, *1ad* et *1* concourants en Ac,
  X*, Hd et Po sont alignés.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, X*, Hd, Hc et Po sont alignés.

Scolie : deux parallèles



- Nous savons que * Ac, Bd et X* sont alignés
  * (DHd) // (CHc).

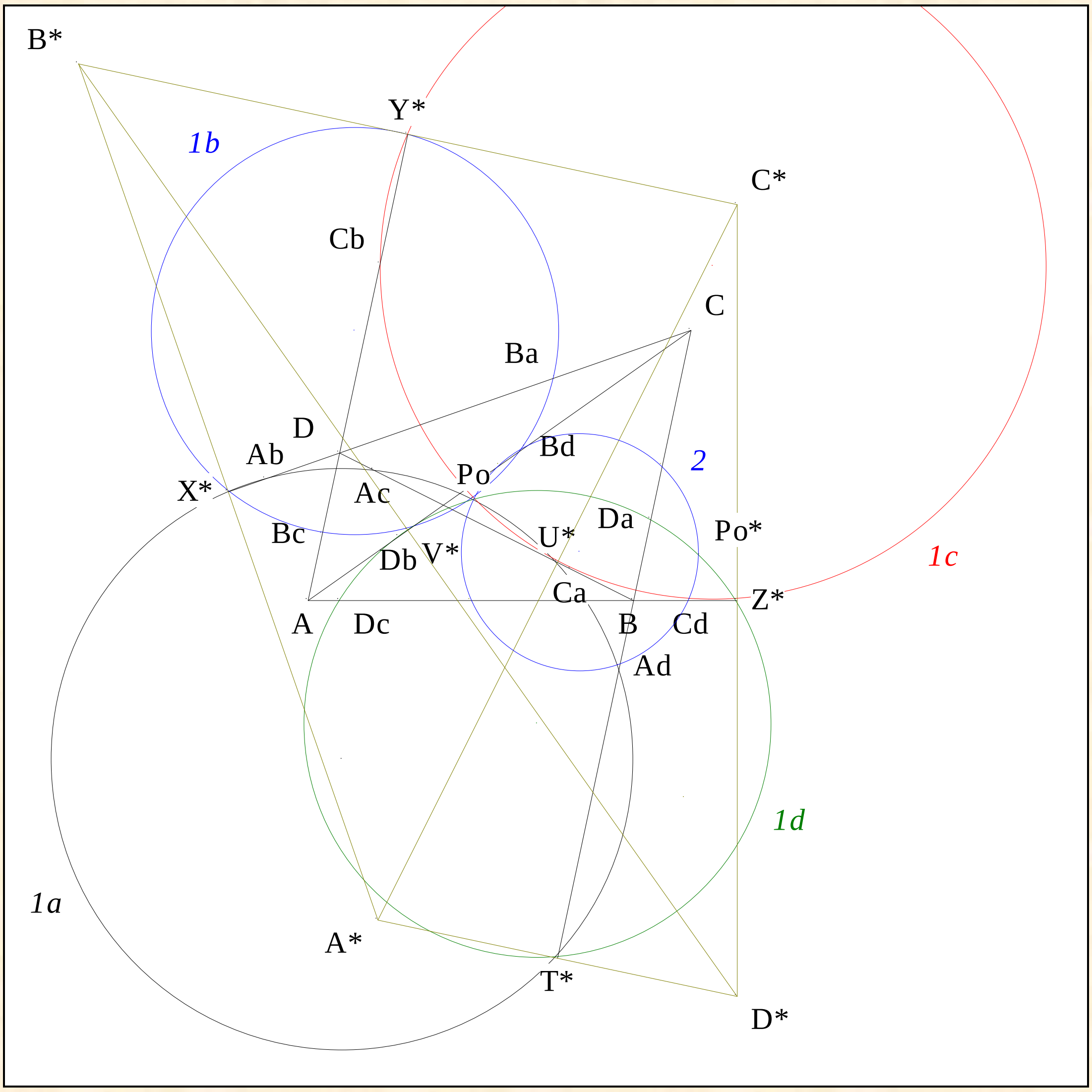
- Notons E le point d'intersection de (AC) et (BD),
  et E' le point d'intersection de (AcHd) et (HcBd).

- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 9),
  les triangles CBdHc et DAcHd étant en perspective de centre X*, (EE') // (CHc).

2. Avec l'isogonal D* de D relativement à ABC

VISION

Figure :



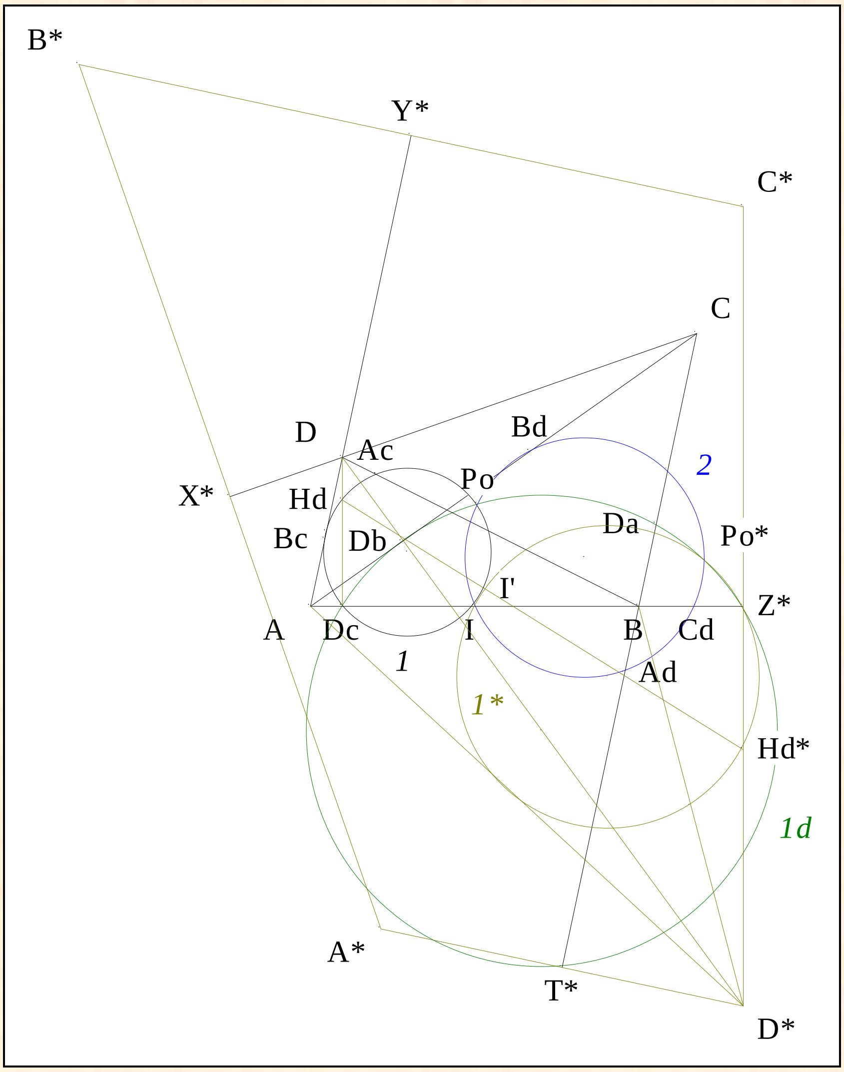
Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

	2	le cercle d'Euler de ABC
et	Po*	le second point d'intersection de *2* avec *1d*.

Donné : Po* est le point de Poncelet de ABCD*.

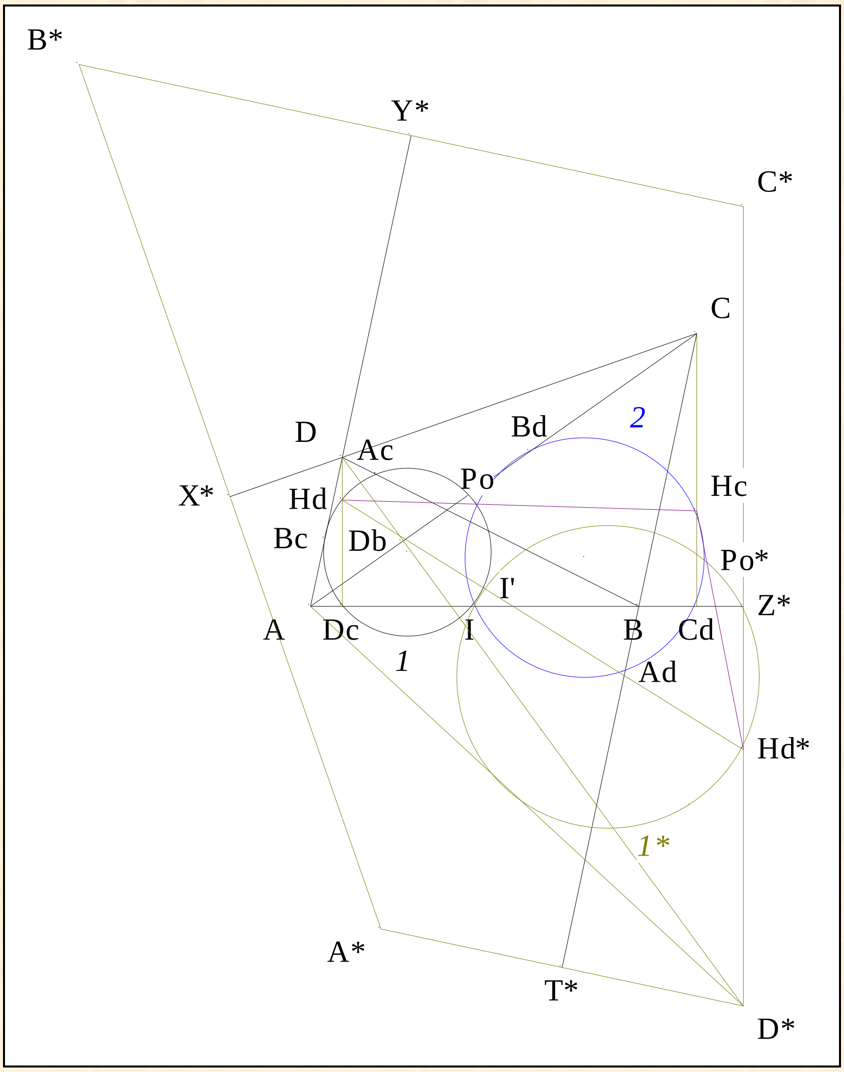
VISUALISATION

- D'après Mathieu "The pedal circle theorem" (Cf. Annexe 6),
  (1) *1d* est le D-cercle pédal de ABCD*
  (2) le centre de *1d* est le milieu de [DD*].



- Notons *1** le cercle d'Euler de D*AB,
  Hd* le D*-point d'Euler de D*AB
  et I' le second point d'intersection de *1** et *1*.

- Les cercles *1* et *1**, les points de base I et I', la moniennes (DcIZ*), les parallèles (DcHd) et (Z*Hd*), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, Hd, I' et Hd* sont alignés.



- Nous savons que Hd, Po et Hc sont alignés.

- D'après Miquel "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 8) appliqué aux cercles *1**, *1* et *2* concourants en I, (Hd*Hc) passe par le second point d'intersection de *1** et *2*, i.e. le point de Poncelet de ABCD*.

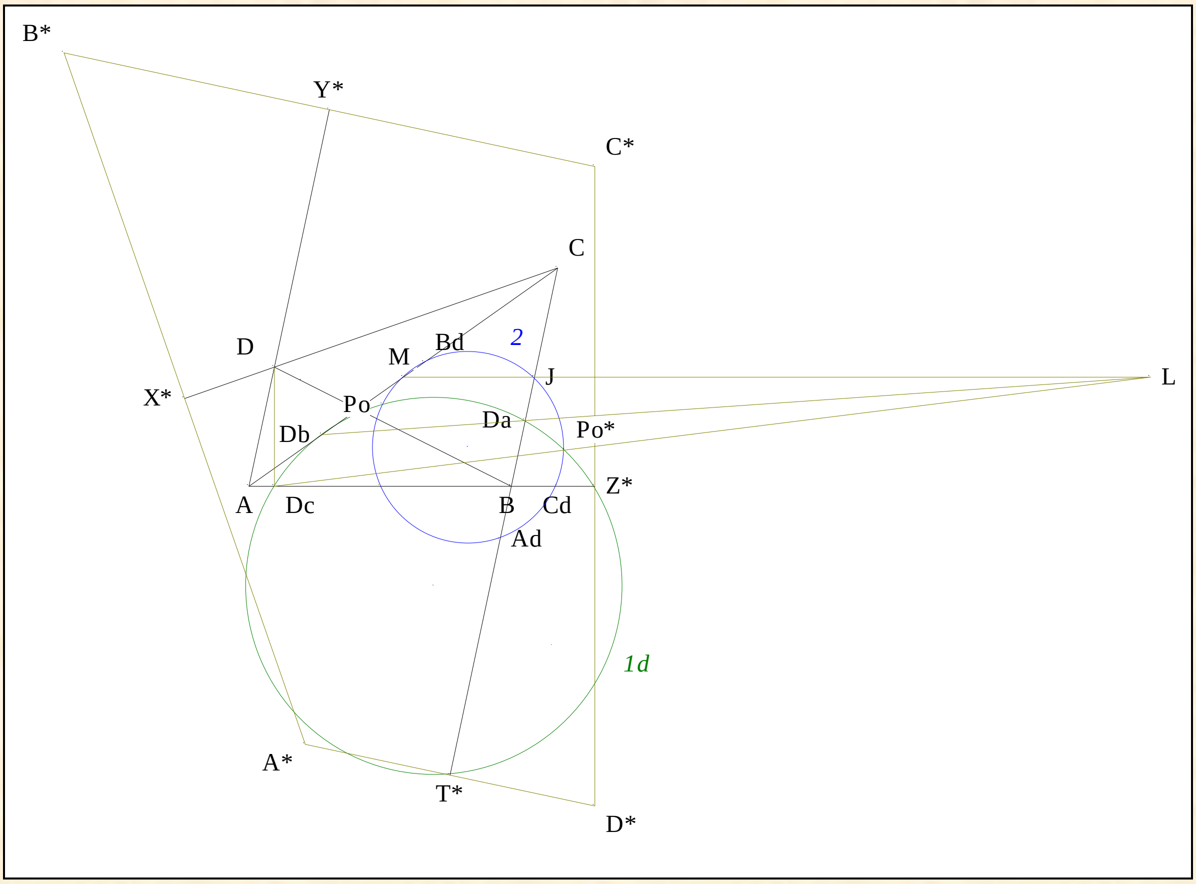
- La figure étant en position générale, ce point est Po*.

- **Conclusion :** Po* est le point de Poncelet de ABCD*.

3. Le point de Fontené

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
O le centre du cercle circonscrit de ABC,
J, M les milieux resp. de [BC], [AC]
et L le point d'intersection (JM) et (DaDb).

Donné : Po* est le point de Fontené de O et D relativement au triangle ABC.

VISUALISATION

- D'après "Le premier théorème de Fontené"[36], (DcL) passe par l'un des points d'intersection de *1d* et *2* i.e. par Po ou Po*.

- **Attention :** l'auteur n'a pas trouvé une preuve simple permettant de montrer que (DcL) passe par Po*.

- **Conclusion :** Po* est le point de Fontené de O et D relativement au triangle ABC.

Énoncé traditionnel : le point de Fontené de O et D du triangle ABC
est
le point de Poncelet du quadrilatère ABCD* ;

le point de Poncelet du quadrilatère ABCD
est
le point de Fontené de O et D* du triangle ABC.

---

36 Ayme J.-L., Les trois théorèmes de Fontené, G.G.G. vol. 5 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

Scolie : ce résultat permet d'apporter une réponse à une question posée par Éric Danneels [37].

C. CERCLES PASSANT

PAR

LE POINT DE PONCELET D'UN QUADRILATÈRE

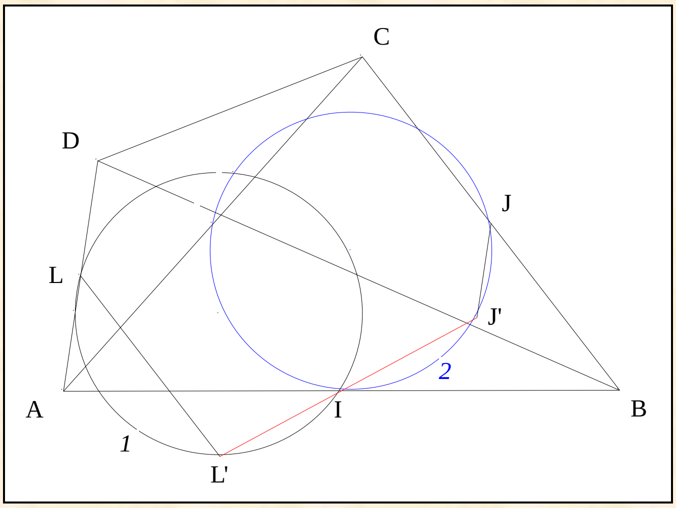
I. LES AUTRES CERCLES DE BRIANCHON - PONCELET

Commentaire : ce paragraphe est une suite du B. II. 1. Le premier cercle de Brianchon-Poncelet.

1. Un lemme

VISION

Figure :



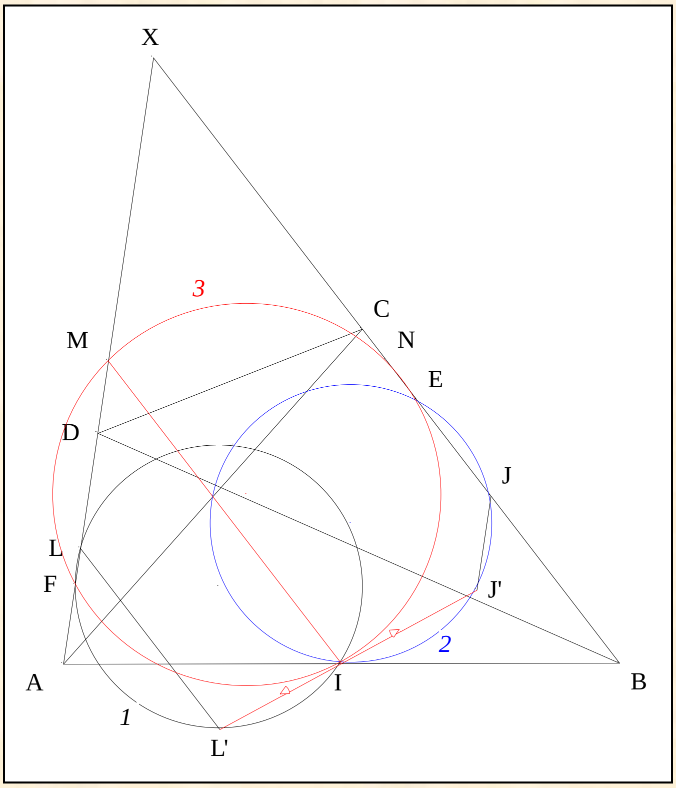
Traits : ABCD un quadrilatère,
1, *2* les cercles d'Euler resp. des triangles ABD, ABC,
I, J, L les milieux resp. de [AB], [BC], [DA],
L' le second point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par L avec *1*
et J' le second point d'intersection de la parallèle à (AD) passant par J avec *2*.

Donné : (J'L') passe par I. [38]

---

[37] Danneels E., how to proof Fontene theorems?, Message *Hyacinthos* # 8794 du 08/12/2003 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.
Ayme J.-L., Nice Collinear points, *Mathlinks* du 15/08/2009 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=295577.

VISUALISATION



- Notons X le point d'intersection de (AD) et (BC),
  M, N les milieux resp. de [XA], [XB],
  3 le cercle d'Euler du triangle XAB ; il passe par M, N et I ;
  et E, F les pieds des A, B-hauteurs de ABC, ABD.

- **Scolies :** **(1)** *1* passe par I, L et F
  (2) *2* passe par I, J et E

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué à XAB, (MI) // (XCB) ;
  par hypothèse, (XCB) // (LL') ;
  par transitivité de la relation //, (MI) // (LL').

- Les cercles *3* et *1*, les points de base F et I, la monienne (MFL), (les parallèles (MI) et (LL'),
  conduisent au théorème **3'** de Reim ; en conséquence, (IL') est tangente à *3* en I.

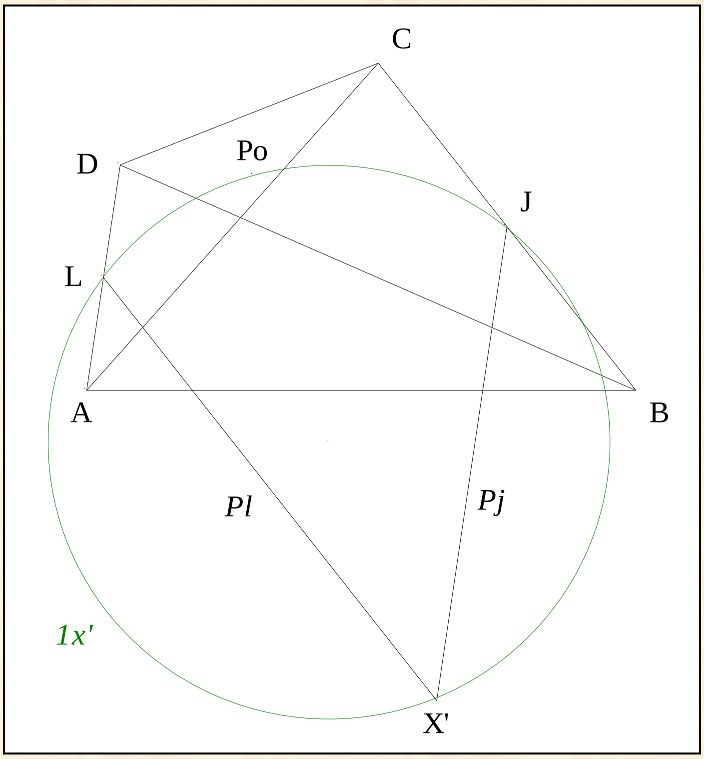
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (IJ') est tangente à *3* en I ;
  en conséquence, (IJ') et (IL') sont confondues.

- **Conclusion :** (J'L') passe par I.

Note historique : cette preuve s'inspire de celle de Vladimir Zajic plus connu sous le pseudonyme "Yetti" sur le site *Mathlinks*.

2. Les trois autres cercles de Brianchon-Poncelet

VISION

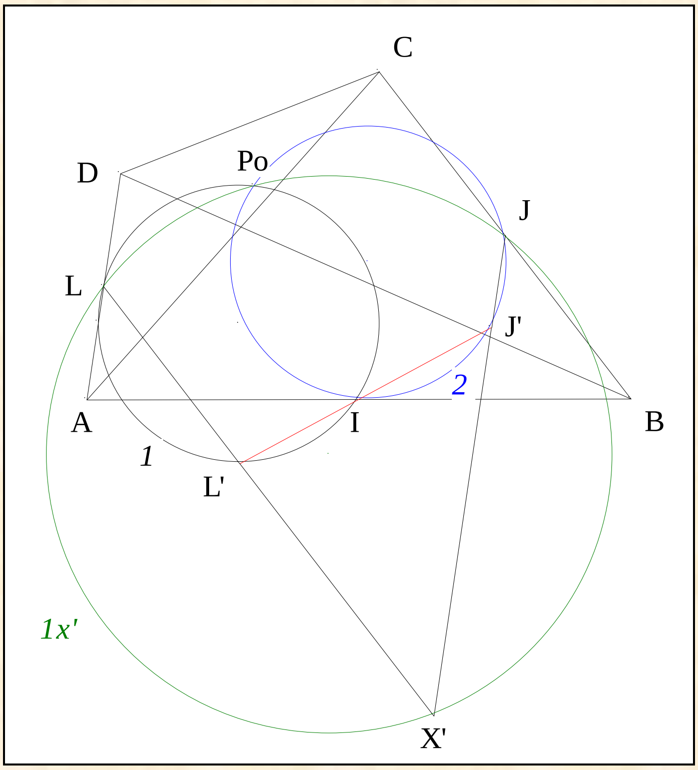


Traits :	ABCD	un quadrilatère,
	Po	le point d'Euler-Poncelet de ABCD,
	J, L	les milieux resp. de [BC], [AD],
	Pj	la parallèle à (AD) passant par J,
	Pl	la parallèle à (BC) passant par L
	X'	le point d'intersection de *Pj* et *Pl*,
et	*1x'*	le cercle passant par X', J et L.

Donné : *1x'* passe par Po. [39]

VISUALISATION

[39] Brianchon C. J., Poncelet J.-V., Recherche sur la détermination d'une hyperbole équilatère au moyen de quatre conditions données, *Annales Mathématiques* de Montpellier vol. XI (01/01/1821) 504-516 ; théorème VII, p. 511.



- Notons *1*, *2* les cercles d'Euler resp. des triangles ABD, ABC,
  I le milieu de [AB],
  L' le second point d'intersection de *Pl* avec *1*,
  J' le second point d'intersection de *Pj* avec *2*.

- D'après C. I. 1. Un lemme, (J'L') passe par I.

- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 10)
  appliqué au triangle X'J'L' avec J sur (X'J'), I sur (J'L') et L sur (L'X'), *1*, *2* et *1x* sont concourants.

- D'après A. I. 2. Les quatre cercles d'Euler d'un quadrilatère, Po est le point de concours.

- **Conclusion :** *1x'* passe par Po.

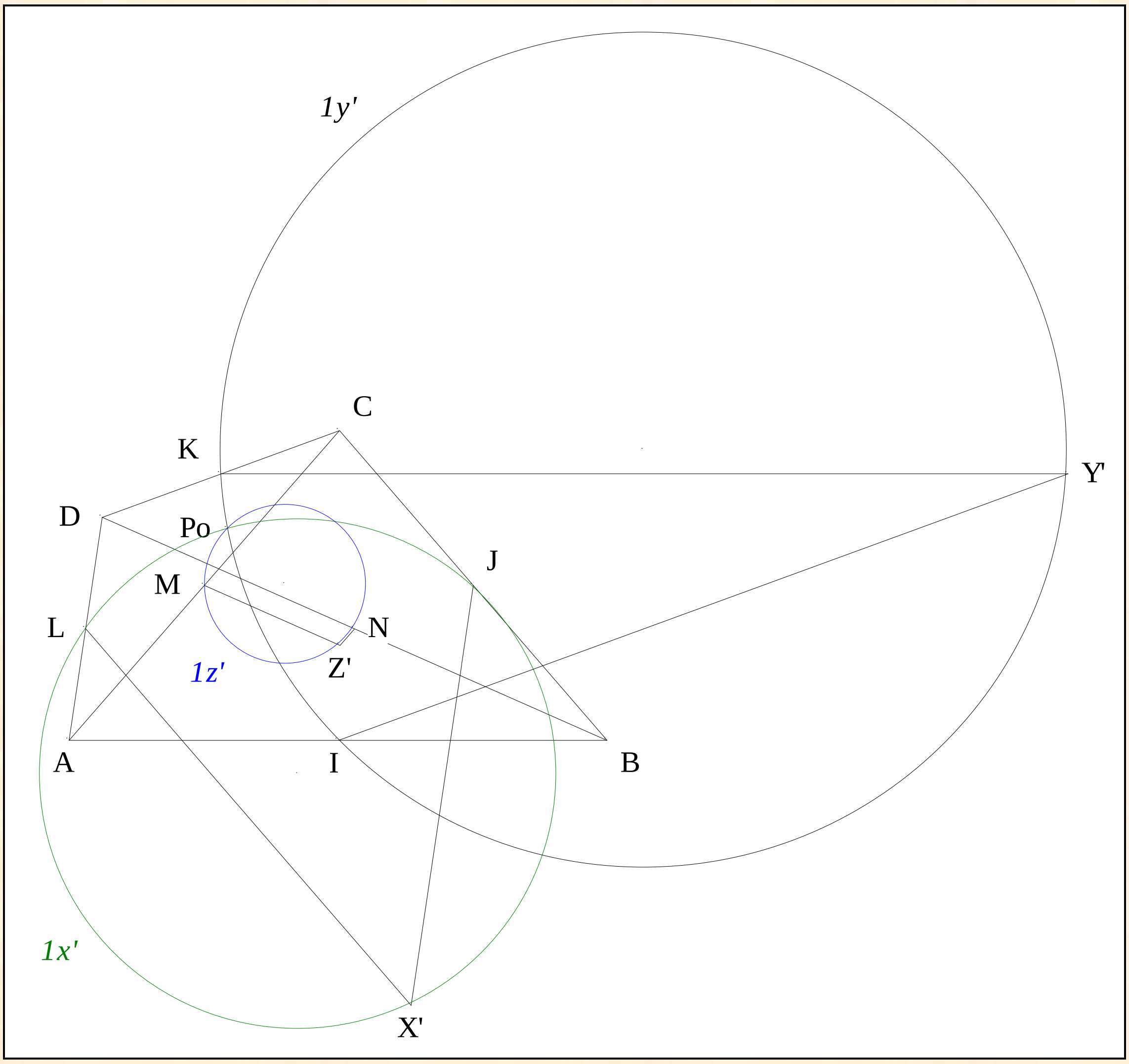
Note historique : ce résultat est le théorème III de l'article de Brianchon-Poncelet[40] prouvé à l'aide d'une hyperbole équilatère ; il réapparaît dans la preuve du théorème VII.

diagonales et les côtés opposés du quadrilatère (Théor. VI) ; et il en sera de même encore de chacune des trois circonférences qui, passant par les points milieux de deux côtés opposés ou des deux diagonales de ce quadrilatère, renfermerait aussi le point où se coupent les deux parallèles menées par chacun d'eux (Théor. III) au côté ou à la diagonale qui renferme l'autre.

Scolies : **(1)** *1*x' est "le X'-cercle de Brianchon-Poncelet de ABCD".

[40] Brianchon C. J., Poncelet J.-V., Recherche sur la détermination d'une hyperbole équilatère au moyen de quatre conditions données, *Annales Mathématiques* de Montpellier vol. XI (01/01/1821) 504-516 ; théorème VII, p. 506, 511.

(2) Les deux derniers cercles de Brianchon-Poncelet



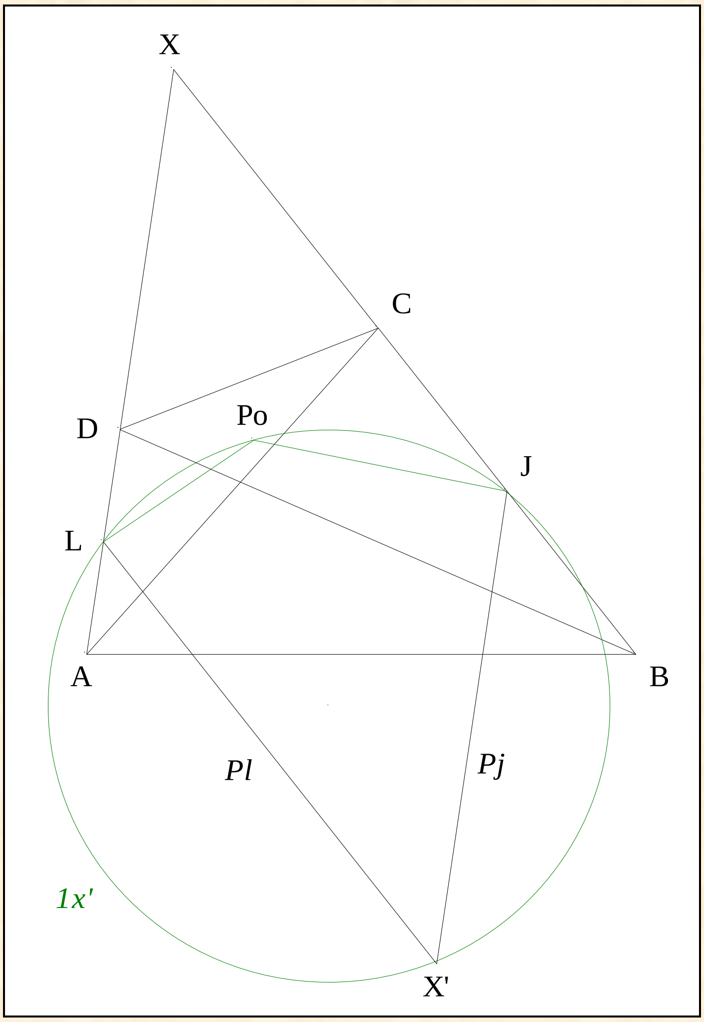
- Notons K, M, N les milieux resp. de [CD], [AC], [BD]
  Y' le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par K et de la parallèle à (CD) passant par I,
  Z' le point d'intersection de la parallèle à (BD) passant par M et de la parallèle à (AC) passant par N,
  1y' le cercle passant par Y', I, K
  et *1z'* le cercle passant par Z', M, N.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que *1y'* et *1z'* passent par Po.

(3) *1y'* et *1z'* sont resp. "les Y', Z'-cercles de Brianchon-Poncelet de ABCD".

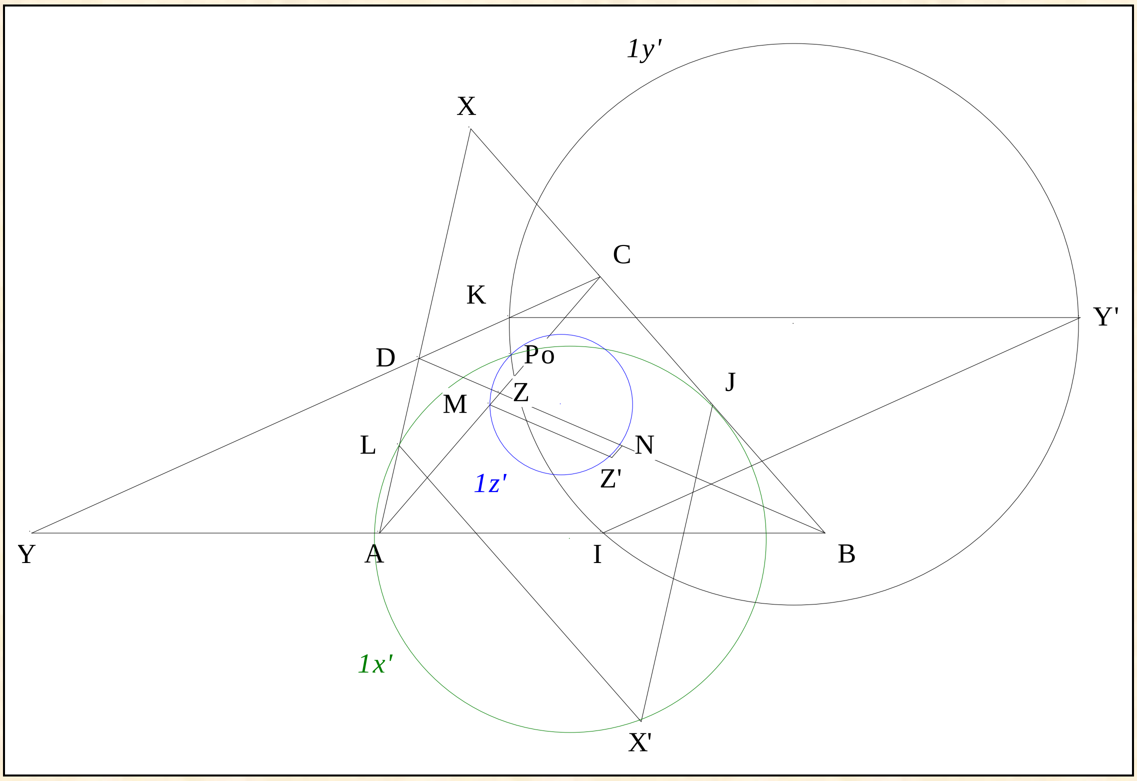
(4) Le théorème VIII ou un résultat angulaire [41]

[41] Brianchon C. J., Poncelet J.-V., Recherche sur la détermination d'une hyperbole équilatère au moyen de quatre conditions données, *Annales Mathématiques* de Montpellier vol. XI (01/01/1821) 504-516 ; théorème VIII, p. 512.



- Notons X le point d'intersection de (AD) et (BC).

- **Conclusion :** <LPoJ et <LXJ sont égaux ou supplémentaires.



- Notons X, Y, Z les points d'intersection de (AD) et (BC), de (AB) et (CD), de (AC) et (BD).

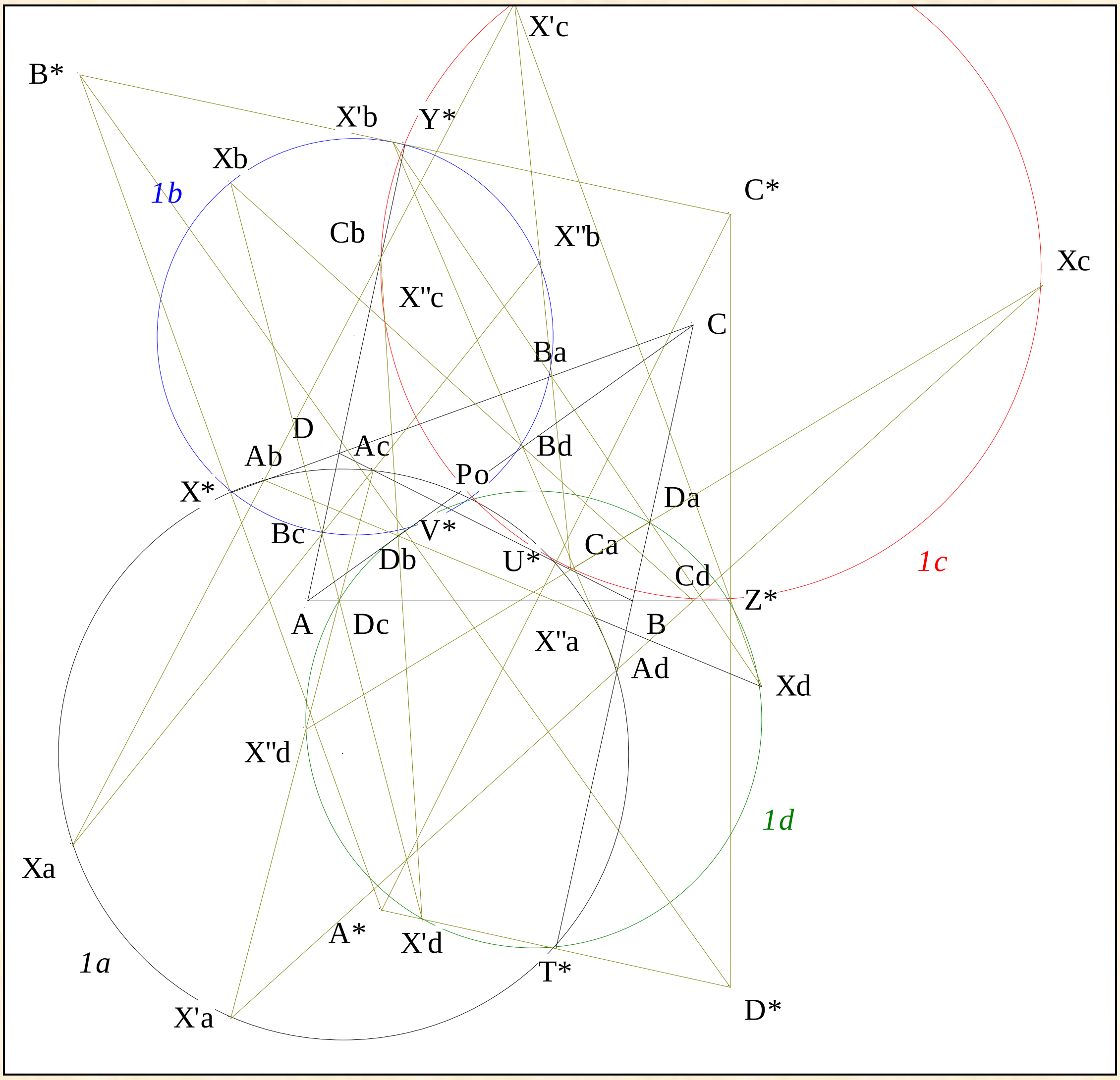
- Mutatis mutandis, nous montrerions que <IPoK et <IYK sont égaux ou supplémentaires
  <MPoN et <MZN sont égaux ou supplémentaires.

II. LES CERCLES DE QUANG TUAN BUI

1. Rappels [42]

---

[42] Voir B. II. 7. Troisième intersections sur un cercle pédal, scolie 2.

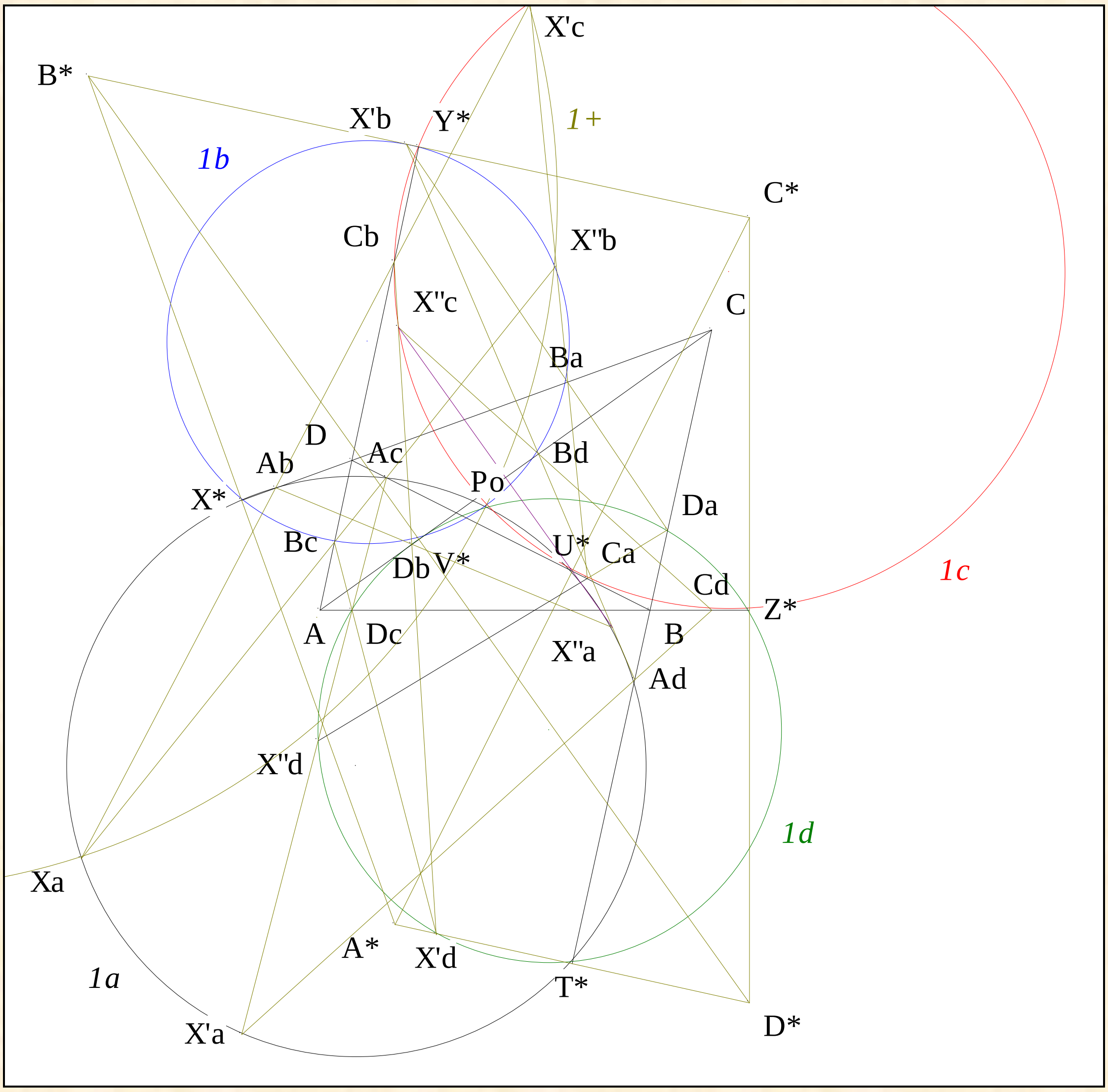


Attention : l'auteur reprend les hypothèses et les notations de la partie B.

2. Les quatre premiers cercles de Bui

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
et *1+* le cercle circonscrit au triangle XaX"bX'c

Donné : *1+* passe par Po. [43]

VISUALISATION

- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 10)
  appliqué au triangle AcX"bCa avec Xa sur (AcX"b), X'c sur (X"bCa), U* sur (CaAc),
  1a, *1+* et *1c* sont concourants.

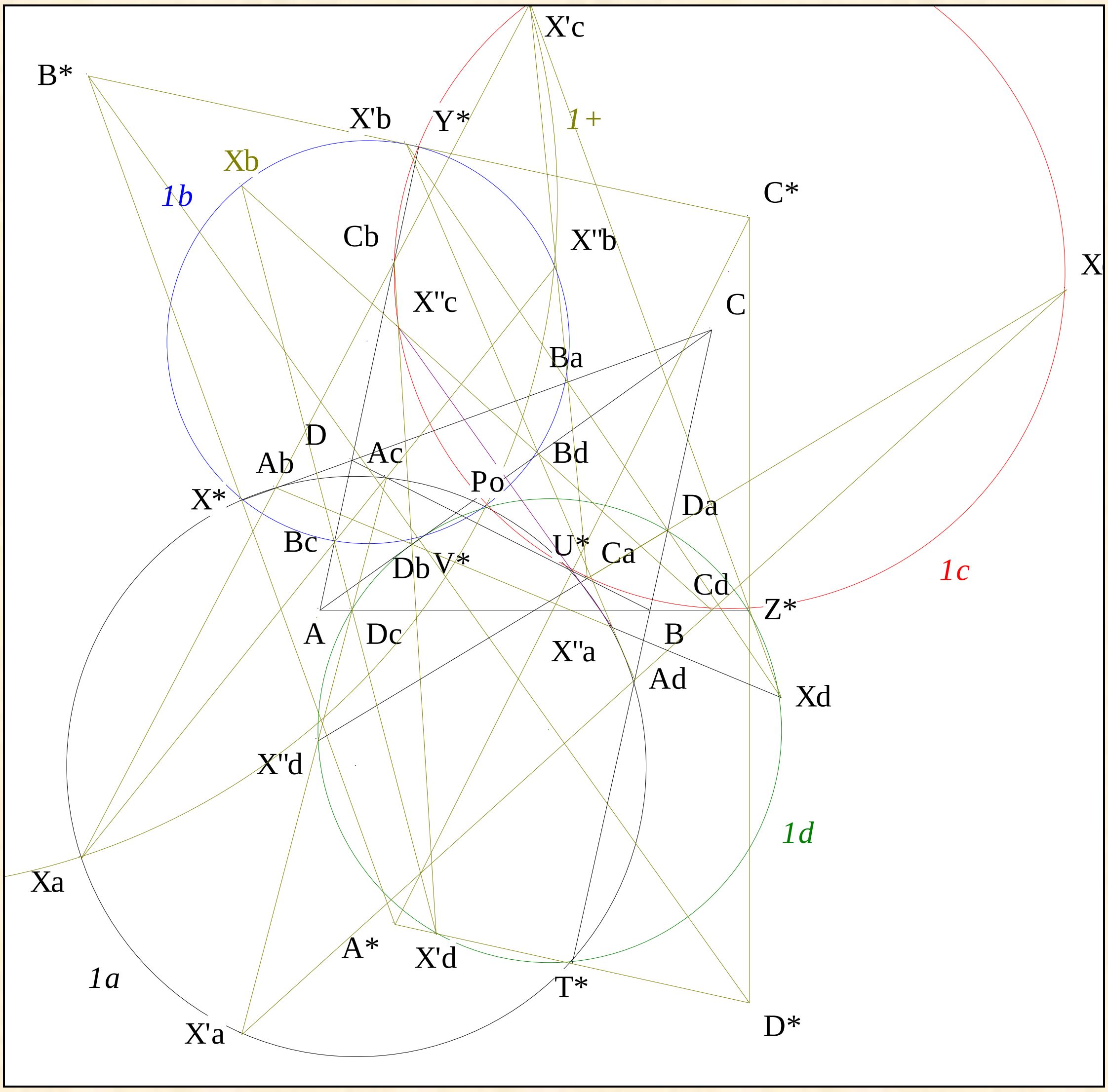
- D'après A. II. 6. les quatre cercles pédaux d'un quadrilatère, *1a* et *1c* passent par Po.

- **Conclusion :** *1+* passe par Po.

Scolies : **(1)** les trois autres premiers cercles de Bui

---

[43] Bui Q. T., Nine Circles Concur with nine points circle, Message *Hyacinthos* # 12403 du 16/03/2006 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.



- Notons *2+*, *3+*, *4+* les cercles circonscrit aux triangles XbX''cX'd, XcX''dX'a, XdX''aX'b.
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que *2+*, *3+*, *4+* passent par Po.

Note historique : dans son premier message (# 12403) de 2006 au groupe *Hyacinthos* Quang Tuan Bui[44] donne sans preuve les cercles *1+* et *3+*.
Dans son dernier message, Bui[45] ajoute sans preuve les cercles *2+* et *4+*.

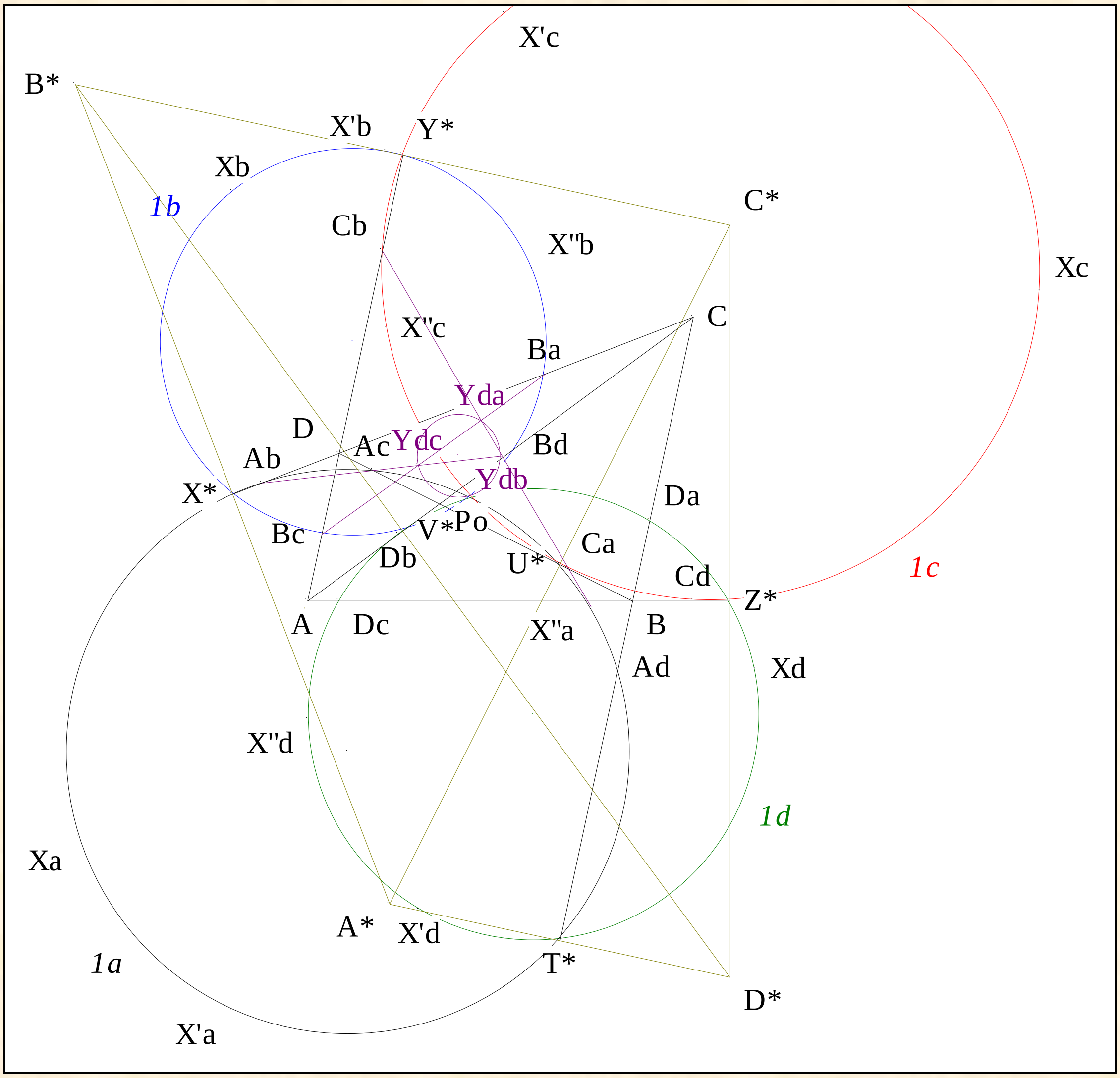
3. Les quatre seconds cercles de Bui

VISION

Figure :

[44] Bui Quang tuan, Nine Circles Concur with nine points circle, Message *Hyacinthos* # 12403, 12498 du 16 et 26/03/2006 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

[45] Bui Quang tuan, Nine Circles Concur with nine points circle, Message *Hyacinthos* # 12524 du 29/03/2006 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

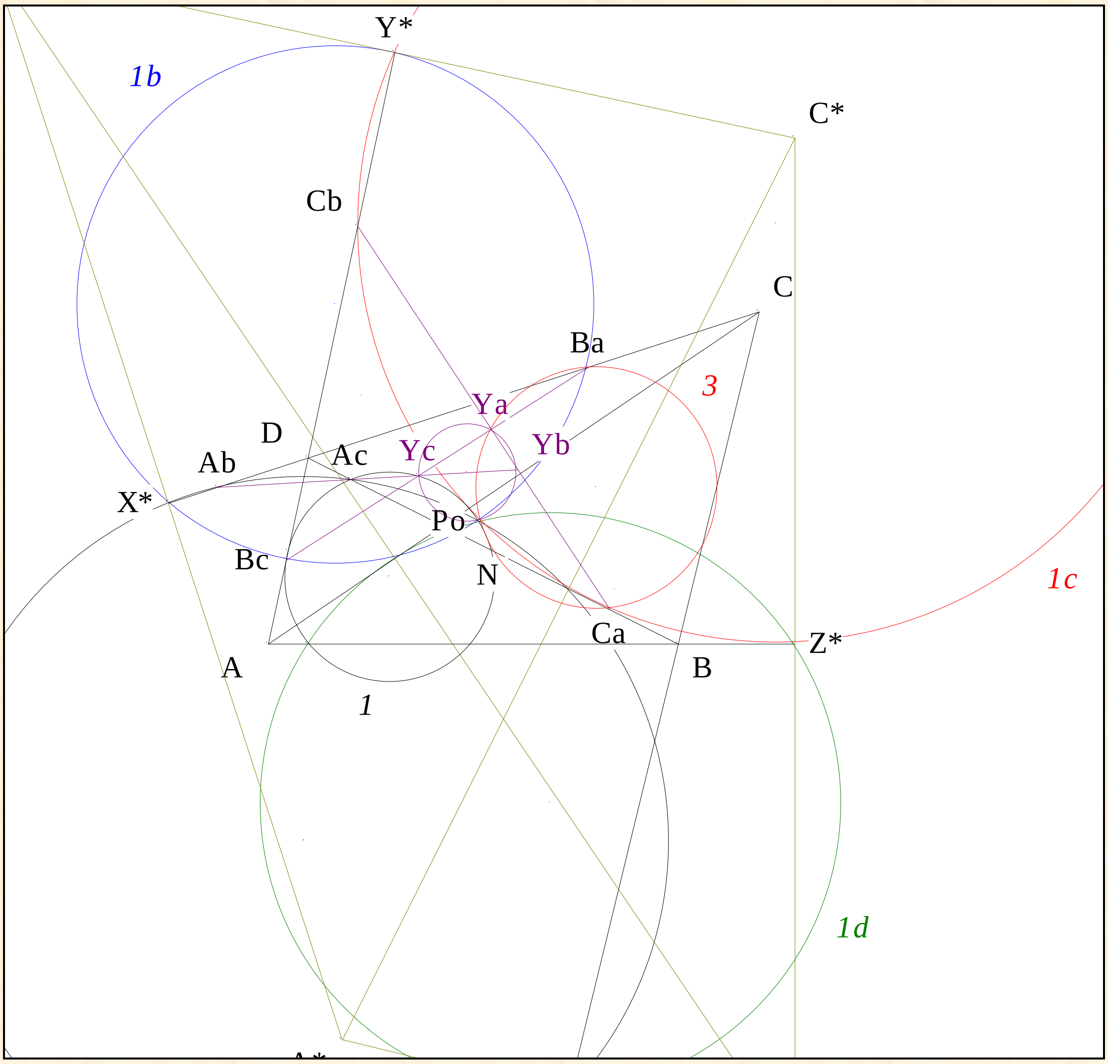


Traits :	ABCD	un quadrilatère,
	Po	le point d'Euler-Poncelet de ABCD,
	YdaYdbYdc	le D-triangle de Bui relativement à ABCD
et	*1#d*	le cercle circonscrit à YdaYdbYdc.

Donné : *1#d* passe par Po. [46]

VISUALISATION

[46] Bui Q. T., Nine Circles Concur with nine points circle, Message *Hyacinthos* # 12524 du 29/03/2006 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.



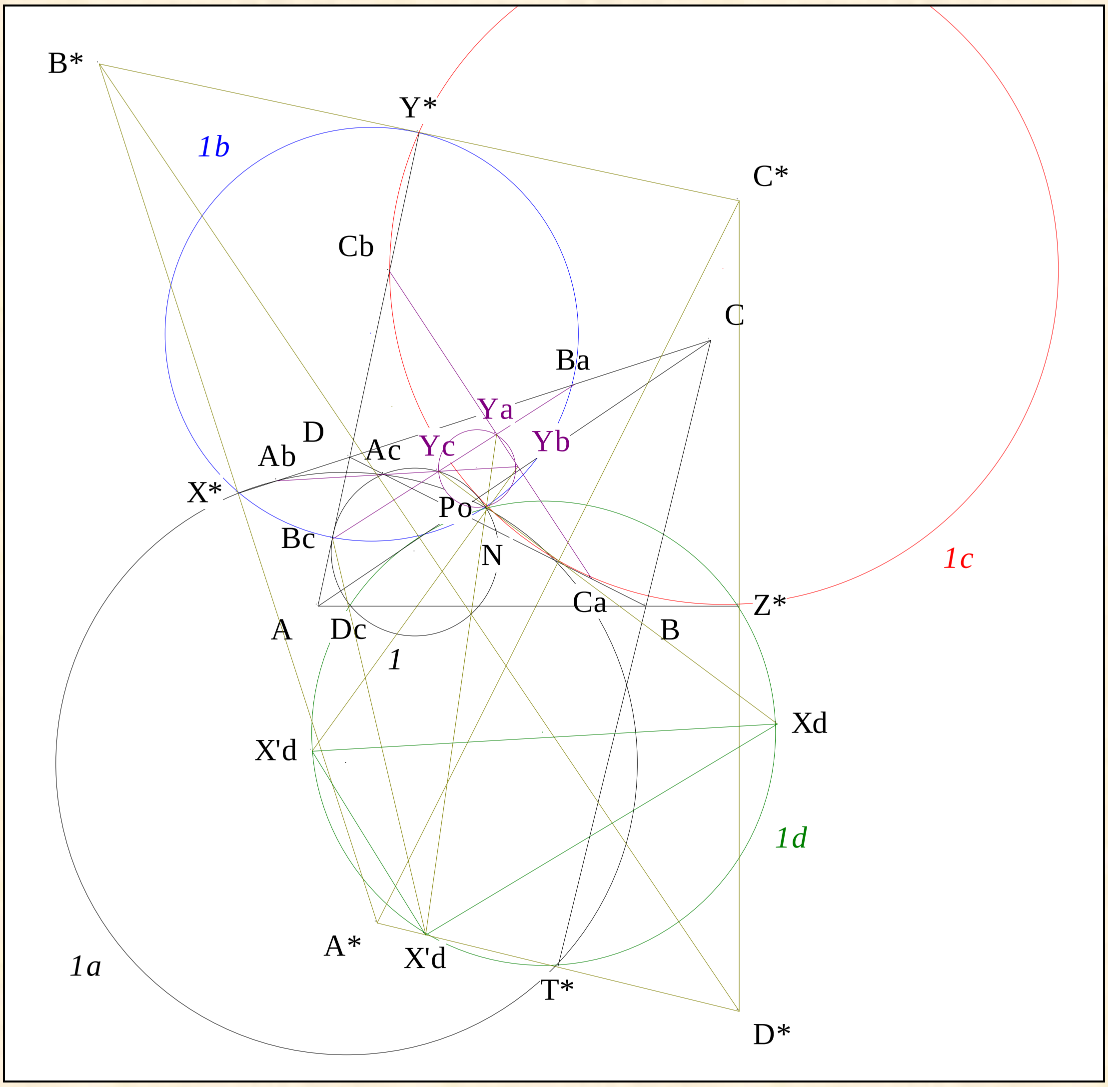
- Notons *1*, *3* les A, C-cercle d'Euler de ABCD
  et N le milieu de [BD].

- **Scolie :** *1* et *3* passe par N.

- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 10)
  appliqué au triangle AcYbCa avec Yc sur (AcYb), Ya sur (YbYa) et N sur (CaAc),
  1, *3* et *1#d* sont concourants.

- **Conclusion :** *1#d* passe par Po.

Scolies : **(1)** centre homothétie



- D'après Miquel "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 8)
  appliqué au triangle X'dBcYa avec Dc sur (X'dBc), Yc sur (BcYa)
  et aux cercles *1d*, *1* et *1#d* concourants en Po, Ya, Po et X'd sont alignés.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que Yb, Po et X"d sont alignés
  Yc, Po et Xd sont alignés.

- Nous savons que les triangles YaYbYc et X'dX"dXd sont homothétiques.

- **Conclusion :** Po est le centre d'homothétie de YaYbYc et X'dX"dXd.

(2) Deux cercles tangents

- **Conclusion :** les cercles *1#d*, le point de base Po, les moniennes (YbPoX"d) et (YcPoXd), les parallèles (YbYc) et (X"dXd), conduisent au théorème **7"** de Reim ; en conséquence, *1d* est tangent à 1#*d* en Po.

(3) Les autres seconds cercles de Bui

- Notons *1#a*, *1#b*, *1#c* les cercles circonscrits de YabYacYad, YbcYbdYba, YcdYcaYab.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que *1a* est tangent à 1#*a* en Po
  1b est tangent à 1#*b* en Po
  1c est tangent à 1#*c* en Po.

4. Commentaire

* les quatre cercles d'Euler
* les quatre cercles pédaux
* les quatre cercles de Brianchon-Poncelet
* les quatre premiers cercles de Bui
* les quatre seconds cercles de Bui d'un quadrilatère

passe par le point d'Euler-Poncelet de ce quadrilatère.

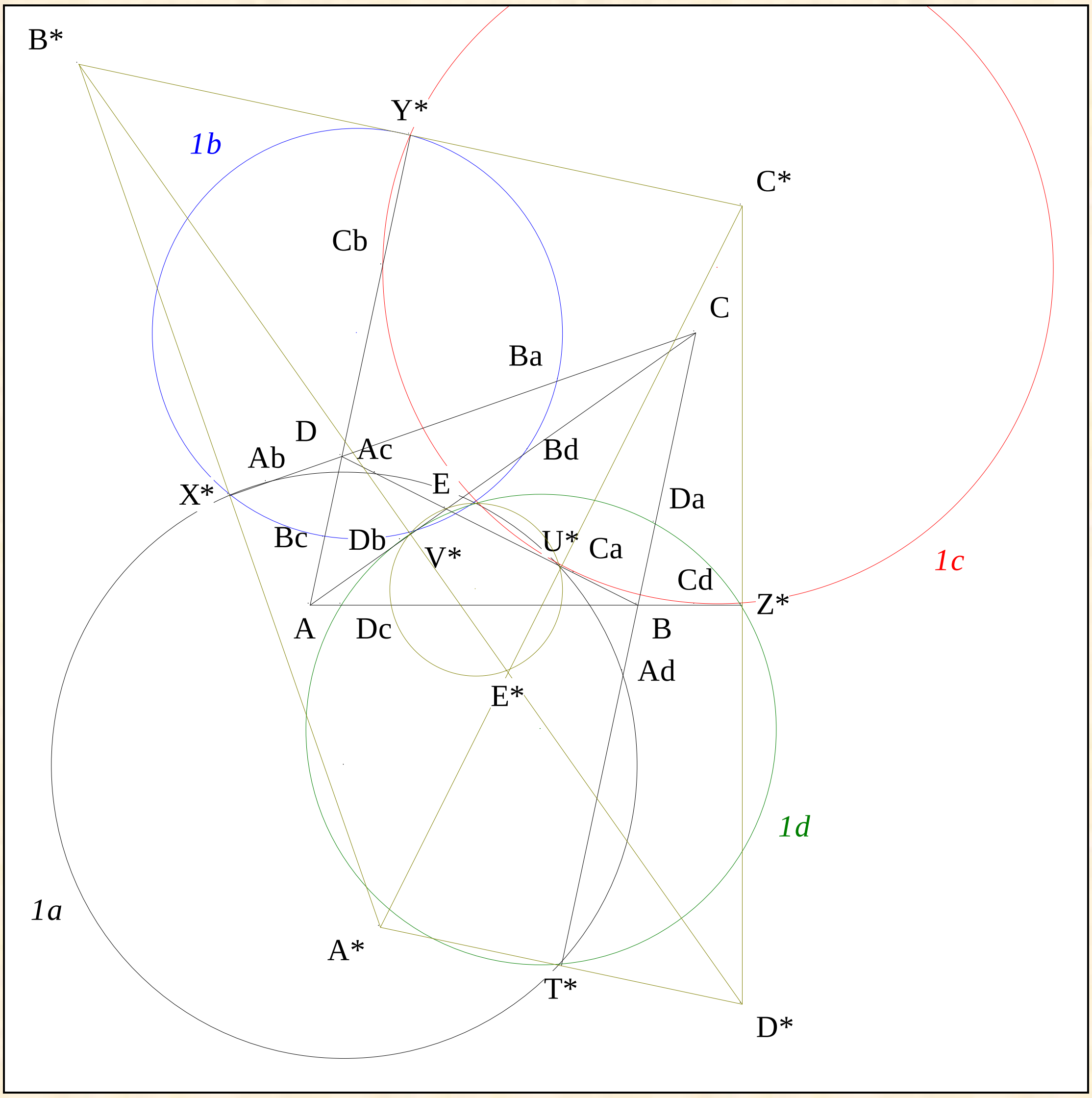
Rappelons que nous n'avons pas prouvé synthétiquement que le premier cercle de Brianchon-Poncelet d'un quadrilatère passe par le point d'Euler-Poncelet de ce quadrilatère.

III. LES CERCLES DE L'AUTEUR

1. Le E-cercle d'Ayme

VISION

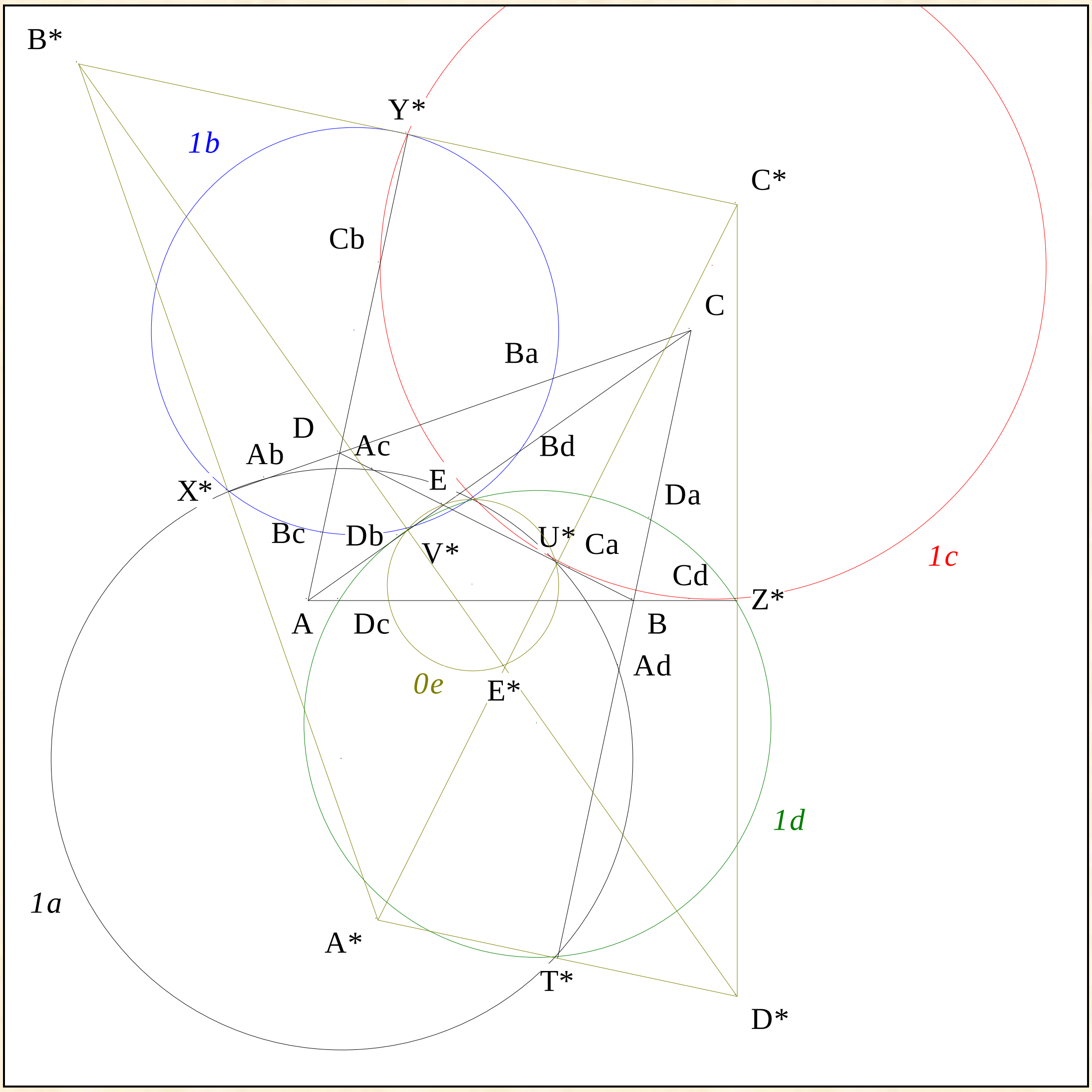
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
et E, E* les points d'intersection de (AC) et (BD), de (A*C*) et (B*D*).

Donné : E*, U*, V* et E sont cocycliques.

VISUALISATION



- D'après B. 5. Intersection de deux cercles pédaux d'un quadrilatère, (BD) est la médiatrice de [A*C*]
(AC) est la médiatrice de [B*D*]

- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle",
E*, U*, V* et E sont cocycliques.

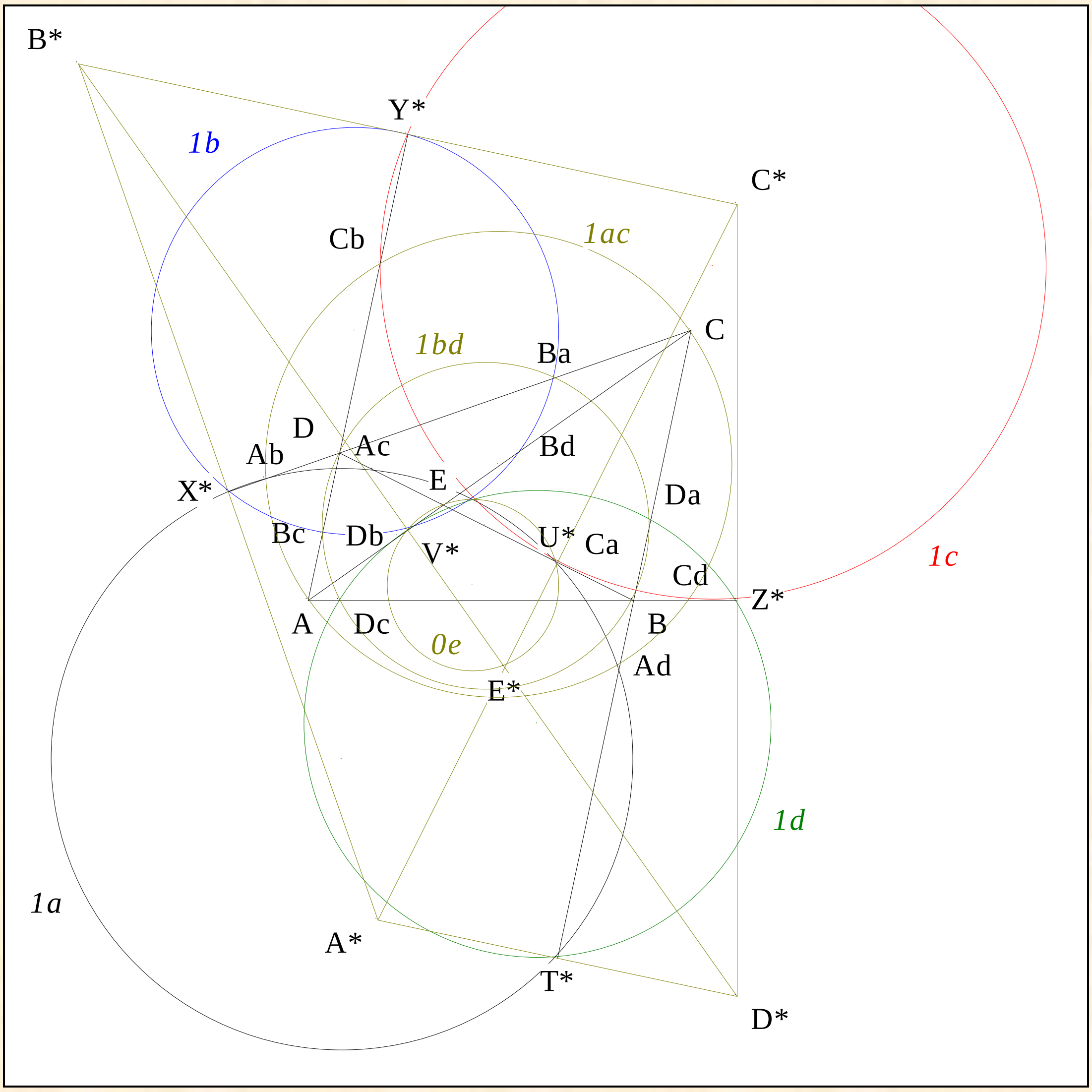
- Notons *0e* ce cercle de diamètre [EE*].

Scolie : *0e* est "le E-cercle d'Ayme de ABCD".

2. Le faiceau de Bodenmiller

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

F, G le point d'intersection resp. de (AD) et (BC), de (AB) et (CD),

et *1ac*, *1bd*, *1fg* les cercles resp. de diamètre [AC], [BD], [FG].

Donné [47]**:** *1fg* appartient au faisceau, noté *F*, déterminé par

* *1ac* et *1bd*

et * la droite de Steiner du delta, triangle FAB et ménélienne (CDG).

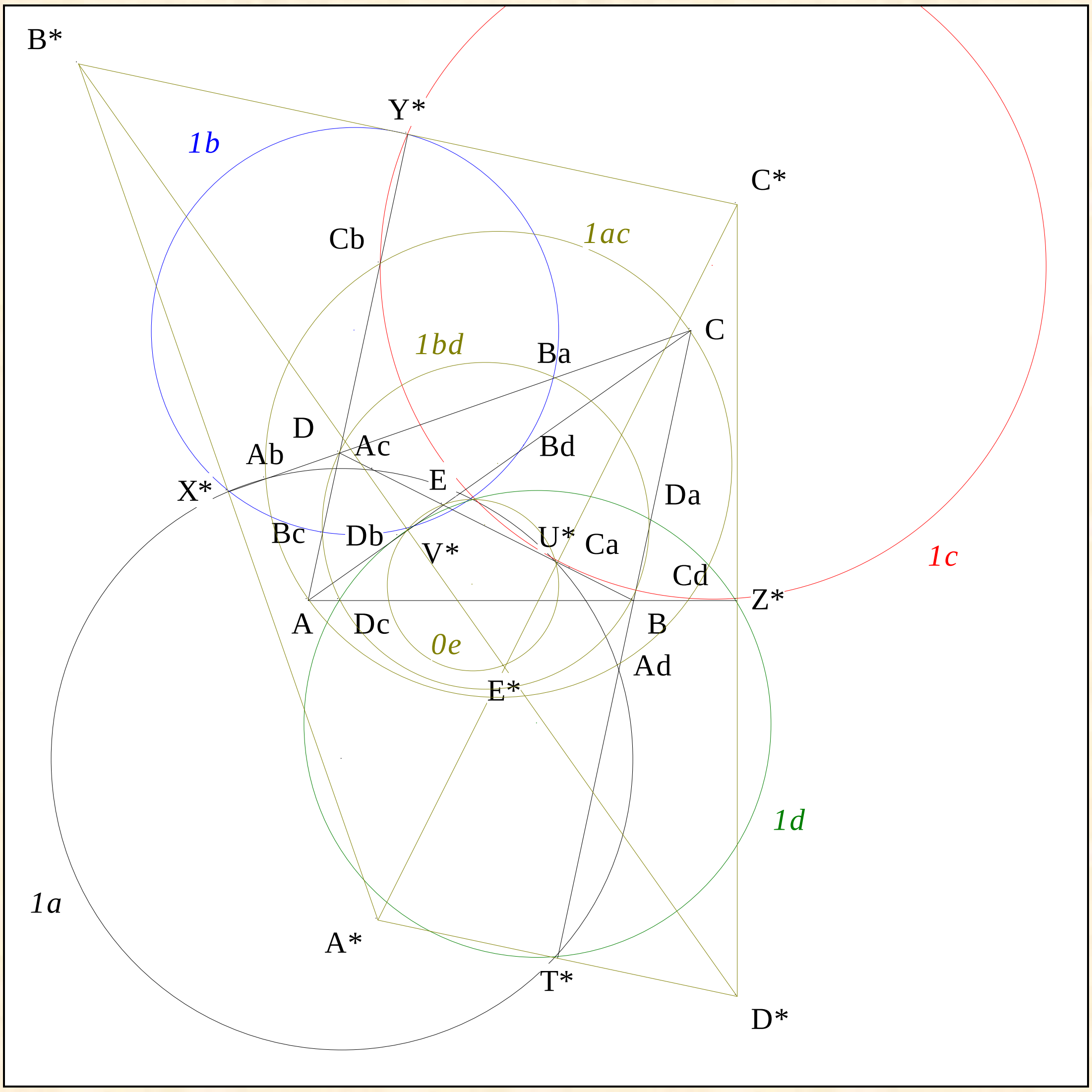
Scolie : *F* est "le faisceau de Bodenmiller de ABCD".

3. Le E-cercle d'Ayme appartient à *F*

VISION

Figure :

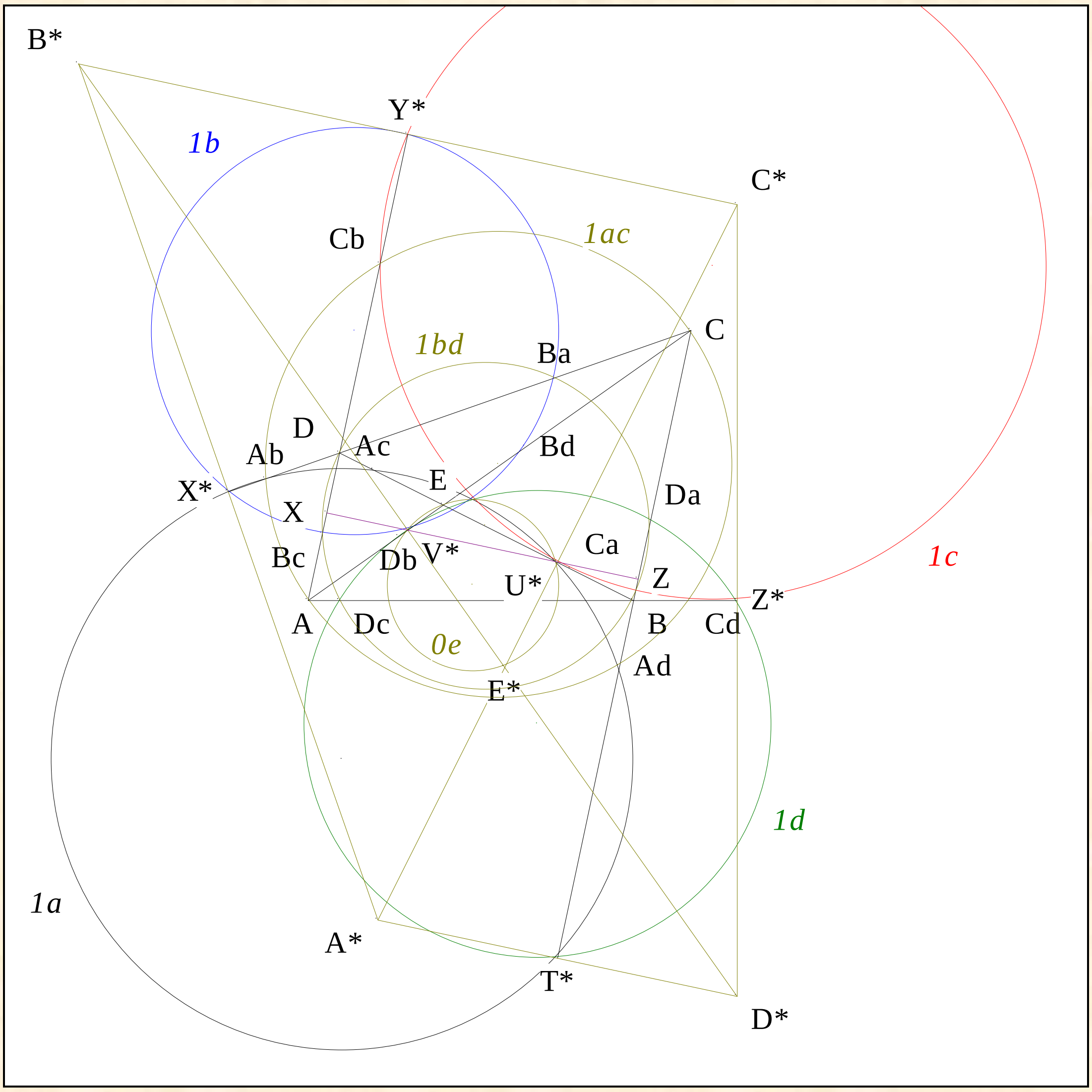
[47] Résultat de Bodenmiller.



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : *0e* appartient à *F*.

VISUALISATION



- Notons X, Z les pieds des perpendiculaires abaissées de V* resp. sur (AD), (BC).
  P_{1ac} (V*) la puissance de V* relativement à *1ac*
  et P_{1bd} (V*) la puissance de V* relativement à *1bd*.

- Par définition : $P_{1ac}(V^*) = \overline{V^*A}\,.\,\overline{V^*C}$

  $P_{1bd}(V^*) = \overline{V^*Bc}\,.\,\overline{V^*Da}$.

- Par définition des lignes trigonométriques, V*A = V*X / sin <CACb
  V*Bc = V*X / sin <DaBcD
  V*C = V*Z / sin <ACAd
  V*Da = V*Z / sin <BcDaB.

- Calculons le rapport des puissance de V* relativement à *1ac* et *1bd*

  i.e. $P_{1ac}(V^*) / P_{1bd}(V^*) \quad = \dfrac{\overline{V^*A}}{\overline{V^*Bc}} \cdot \dfrac{\overline{V^*C}}{\overline{V^*Da}}$;

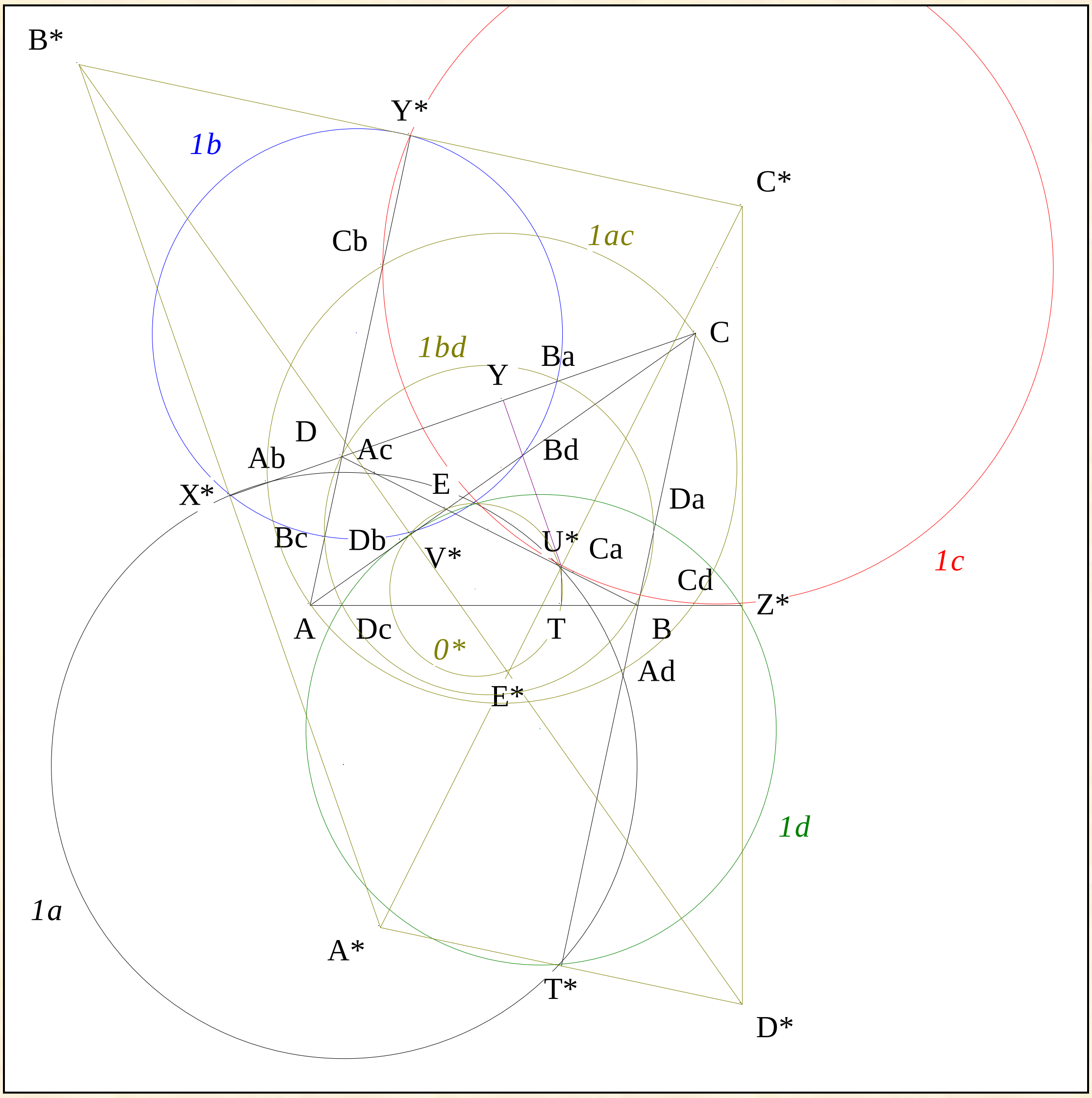
  par substitution, $\dfrac{\overline{V^*A}}{\overline{V^*Bc}} \cdot \dfrac{\overline{V^*C}}{\overline{V^*Da}} = \dfrac{\sin\angle DaBcD}{\sin\angle CACb} \cdot \dfrac{\sin\angle BcDaB}{\sin\angle ACAd}$;

  d'après "Le théorème des angles inscrits", $\dfrac{\sin\angle DaBcD}{\sin\angle CACb} \cdot \dfrac{\sin\angle BcDaB}{\sin\angle ACAd} = \dfrac{\sin\angle CBD}{\sin\angle CAD} \cdot \dfrac{\sin\angle ADB}{\sin\angle ACB}$;

notons Ra, Rb, Rc, Rd les rayons des cercles circonscrits des triangles BCD, CDA, DAB, ABC ;

d'après "La loi des sinus", $\frac{\sin\angle CBD}{\sin\angle CAD} \cdot \frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle ACB} = \frac{Rb}{Ra} \cdot \frac{Rd}{Rc}$;

par transitivité de la relation =, P_{1ac} (V*) / P_{1bd} (V*) $= \frac{Rb}{Ra} \cdot \frac{Rd}{Rc}$.



- Notons Y, T les pieds des perpendiculaires abaissées de U* resp. sur (AB), (CD).
  P_{1ac} (U*) la puissance de U* relativement à *1ac*
  et P_{1bd} (U*) la puissance de U* relativement à *1bd*.

- Par définition : P_{1ac} (U*) = $\overline{U*Cd} \, . \, \overline{U*Ab}$
  P_{1bd} (U*) = $\overline{U*B} \, . \, \overline{U*D}$.

- Par définition des lignes trigonométriques, U*Cd = U*Y / sin <AbCdA
  U*B = U*Y / sin <DBDc
  U*Ab = U*T / sin <CdAbC
  U*D = U*T / sin <BDBa.

- Calculons le rapport des puissance de U* relativement à *1ac* et *1bd*

i.e. P_{1ac} (U*) / P_{1bd} (U*) $= \dfrac{\overline{U*Cd}}{\overline{U*B}} \cdot \dfrac{\overline{U*Ab}}{\overline{U*D}}$;

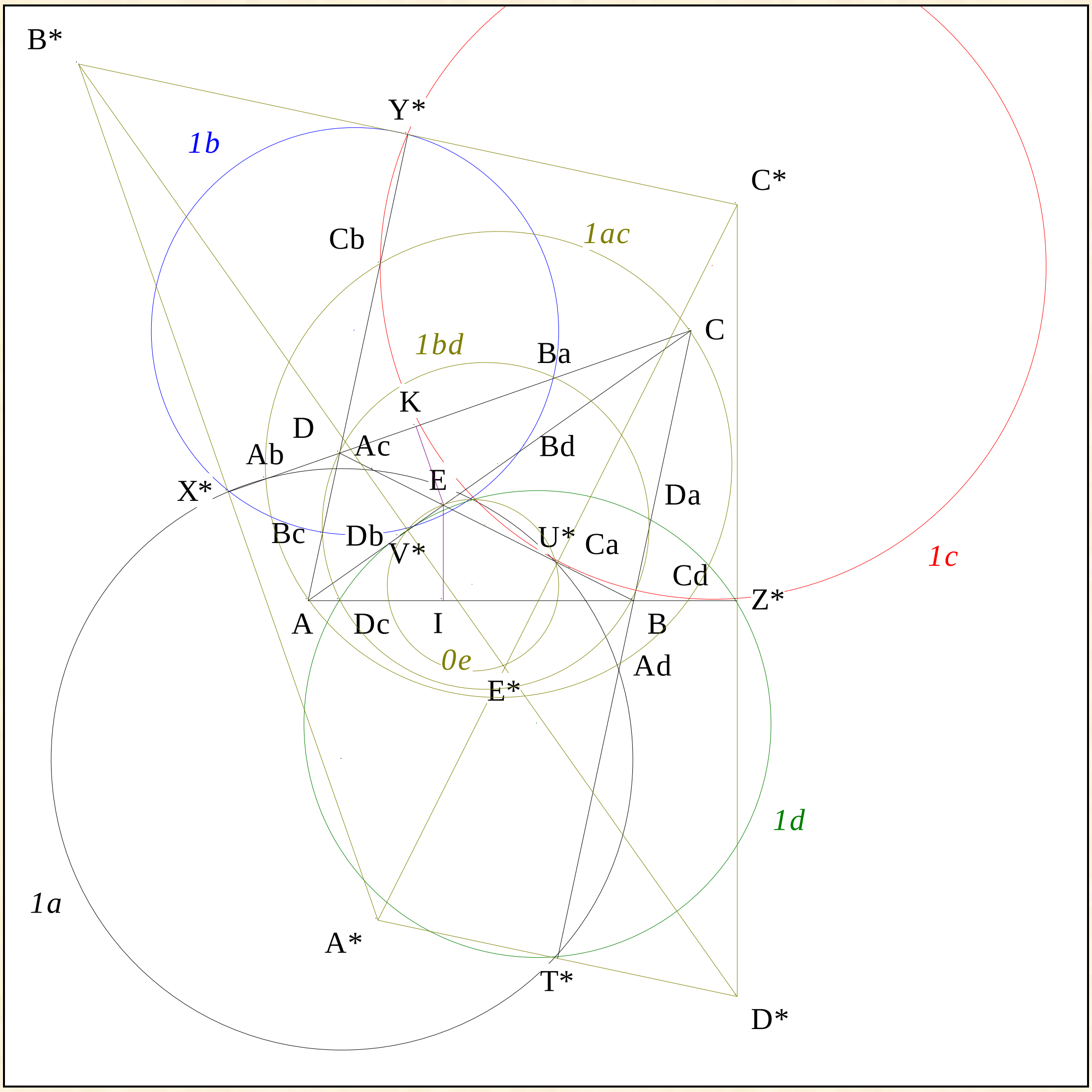
par substitution, $\dfrac{\overline{U*Cd}}{\overline{U*B}} \cdot \dfrac{\overline{U*Ab}}{\overline{U*D}} = \dfrac{\sin\angle DBDc}{\sin\angle AbCdA} \cdot \dfrac{\sin\angle BDBa}{\sin\angle CdAbC}$;

d'après "Le théorème des angles inscrits", $\dfrac{\sin\angle DBDc}{\sin\angle AbCdA} \cdot \dfrac{\sin\angle BDBa}{\sin\angle CdAbC} = \dfrac{\sin\angle DBA}{\sin\angle DCA} \cdot \dfrac{\sin\angle BDC}{\sin\angle BAC}$;

d'après "La loi des sinus", $\dfrac{\sin\angle DBA}{\sin\angle DCA} \cdot \dfrac{\sin\angle BDC}{\sin\angle BAC} = \dfrac{Rd}{Rc} \cdot \dfrac{Rb}{Ra}$;

$\dfrac{Rd}{Rc} \cdot \dfrac{Rb}{Ra} = \dfrac{Rb}{Rc} \cdot \dfrac{Rd}{Ra}$;

par transitivité de la relation =, P_{1ac} (U*) / P_{1bd} (U*) $= \dfrac{Rb}{Rc} \cdot \dfrac{Rd}{Ra}$.



- Notons I, K les pieds des perpendiculaires abaissées de E resp. sur (AB), (CD),
  P_{1ac} (E) la puissance de E relativement à *1ac*
  et P_{bd} (E) la puissance de E relativement à *1bd*.

- Par définition : P_{1ac} (E) = $\overline{EA}\,.\,\overline{EC}$

  P_{1bd} (E) = $\overline{EB}\,.\,\overline{ED}$.

- Calculons le rapport des puissance de E relativement à *1** et *2**

  i.e. P_{1ac} (E) / P_{1bd} (E) $= \dfrac{\overline{EA}}{\overline{EB}} . \dfrac{\overline{EC}}{\overline{ED}}$.

- Par définition des lignes trigonométriques,
  EA = EI / sin <BAC
  EB = EI / sin <DBA
  EC = EL / sin <DCA
  ED = EL / sin <BDC.

- Par substitution, $\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EB}} . \dfrac{\overline{EC}}{\overline{ED}} = \dfrac{\sin\angle DBA}{\sin\angle BAC} . \dfrac{\sin\angle BDC}{\sin\angle DCA}$;

  d'après "La loi des sinus", $\dfrac{\sin\angle DBA}{\sin\angle BAC} . \dfrac{\sin\angle BDC}{\sin\angle DCA} = \dfrac{Rd}{Rc} . \dfrac{Rb}{Ra}$;

  $\dfrac{Rd}{Rc} . \dfrac{Rb}{Ra} = \dfrac{Rb}{Rc} . \dfrac{Rd}{Ra}$;

  par transitivité de la relation =, P_{1ac} (E) / P_{1bd} (E) $= \dfrac{Rb}{Rc} . \dfrac{Rd}{Ra}$.

- Nous avons : P_{1ac} (U*) / P_{1bd} (U*) = P_{1ac} (V*) / P_{1bd} (V*) = P_{1ac} (E) / P_{1bd} (E) $\left(= \dfrac{Rb}{Ra} . \dfrac{Rd}{Rc}\right)$.

- **Conclusion :** le cercle passant par U*, V* et E i.e. *0** appartient à *F*.

Scolie : une formule[48]

dans tout quadrilatère ABCD, $\dfrac{\sin < BAC}{\sin < CAD} . \dfrac{\sin < CBD}{\sin < DBA} . \dfrac{\sin < DCA}{\sin < ACB} . \dfrac{\sin < ADB}{\sin < BDC} = 1$.

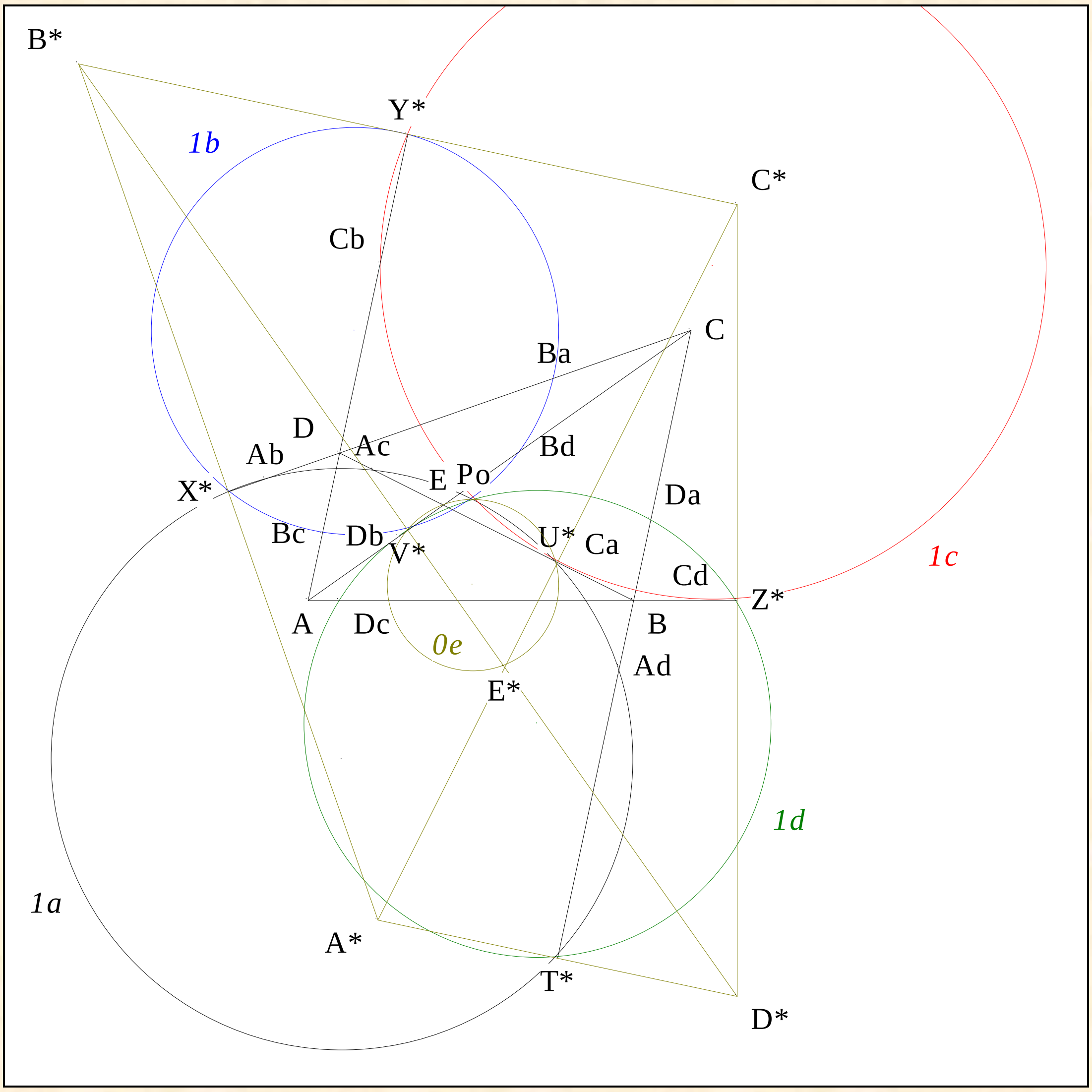
4. Le E-cercle d'Ayme passe par Po

VISION

Figure :

---

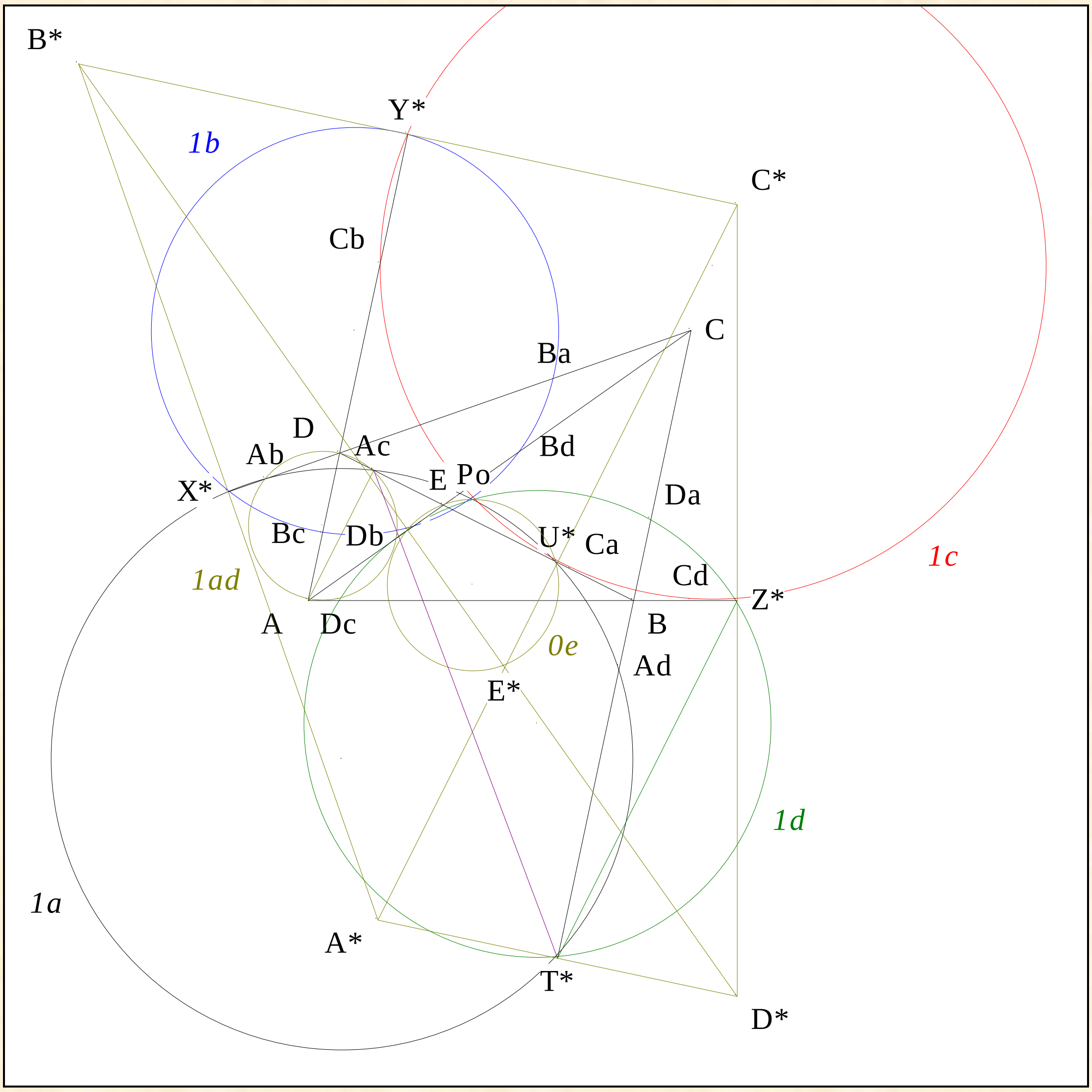
48 Ayme J.-L., a conjecture : true or not true, *Mathlinks* du 10/08/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=294412.



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : *0e* passe par Po.

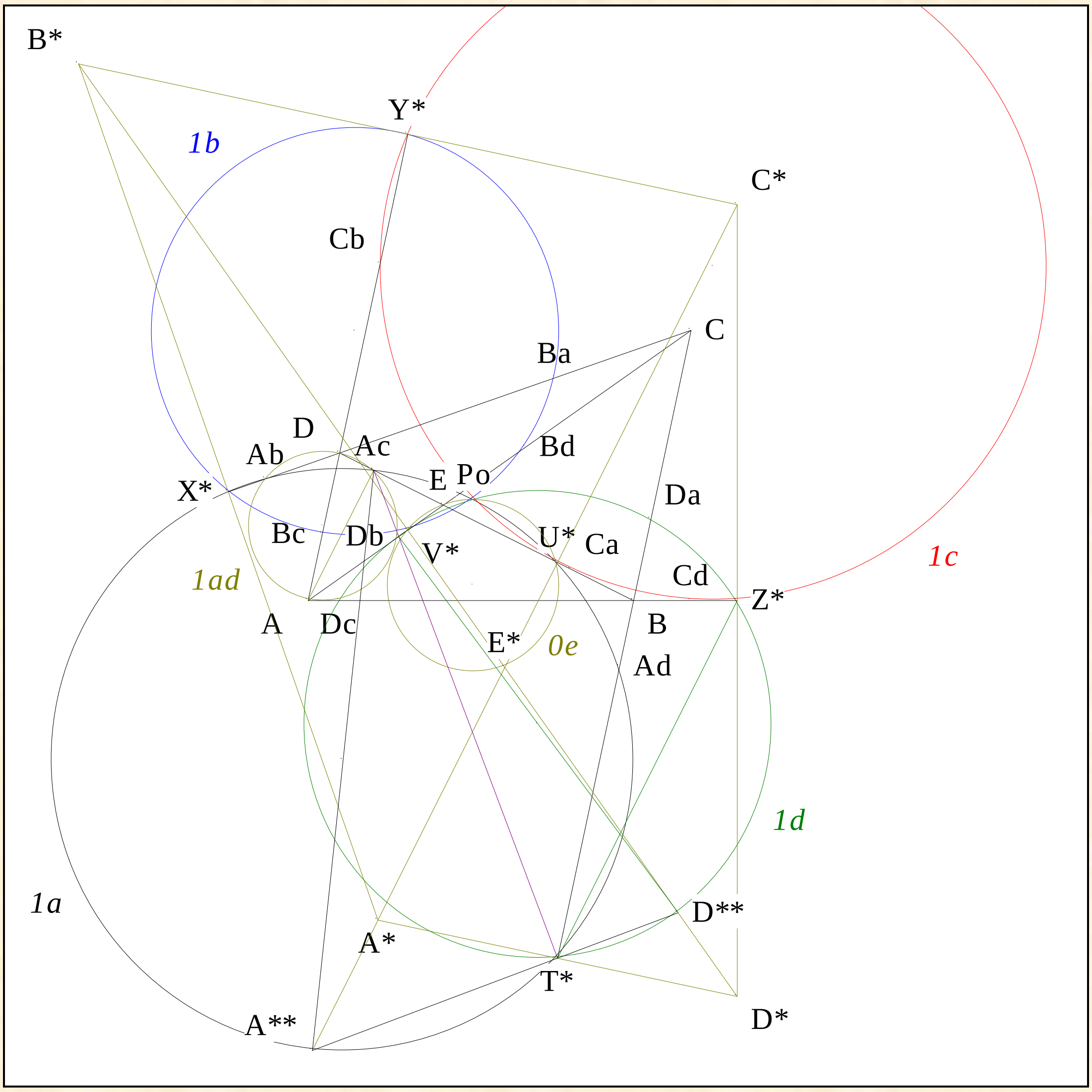
VISUALISATION



- Notons *1ad* le cercle de diamètre [AD] ; il passe par Ab, Ac, Db et Dc.

- Par hypothèse, (AAc) ⊥ (CD) ;
  D'après B. II. 1. Premières perpendicularités, (CD) ⊥ (Z*T*) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AAc) // (Z*T*).

- Les cercles *1ad* et *1d*, les points de base Dc et Db, le monienne (ADcZ*), les parallèles (AAc) et (Z*T*), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, Ac, Db et T* sont alignés.



- Notons A** le second point d'intersection de (A*C*) avec *1a*
  et D** le second point d'intersection de (V*D*) avec *1d*.

- **Scolies :** **(1)** [A**Ca] est un diamètre de *1a*
  (2) [D**Ac] est un diamètre de *1d*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (A**T*) ⊥ (T*Ac) ;
  (T*Ac) ⊥ (T*D**) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (A**T*) // (T*D**) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (A**T*) = (T*D**) ;
  en conséquence, A**, T* et D** sont alignés.

- D'après Miquel" Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 10) appliqué au triangle E*A**D**
  avec U* sur (E*A**), T* sur (A**D**) et V* sur (D**E*), *1a*, *1d* et *0e* sont concourants.

- **Conclusion :** *0e* passe par Po.

Scolies : **(1)** le triangle EPoE* est rectangle en Po

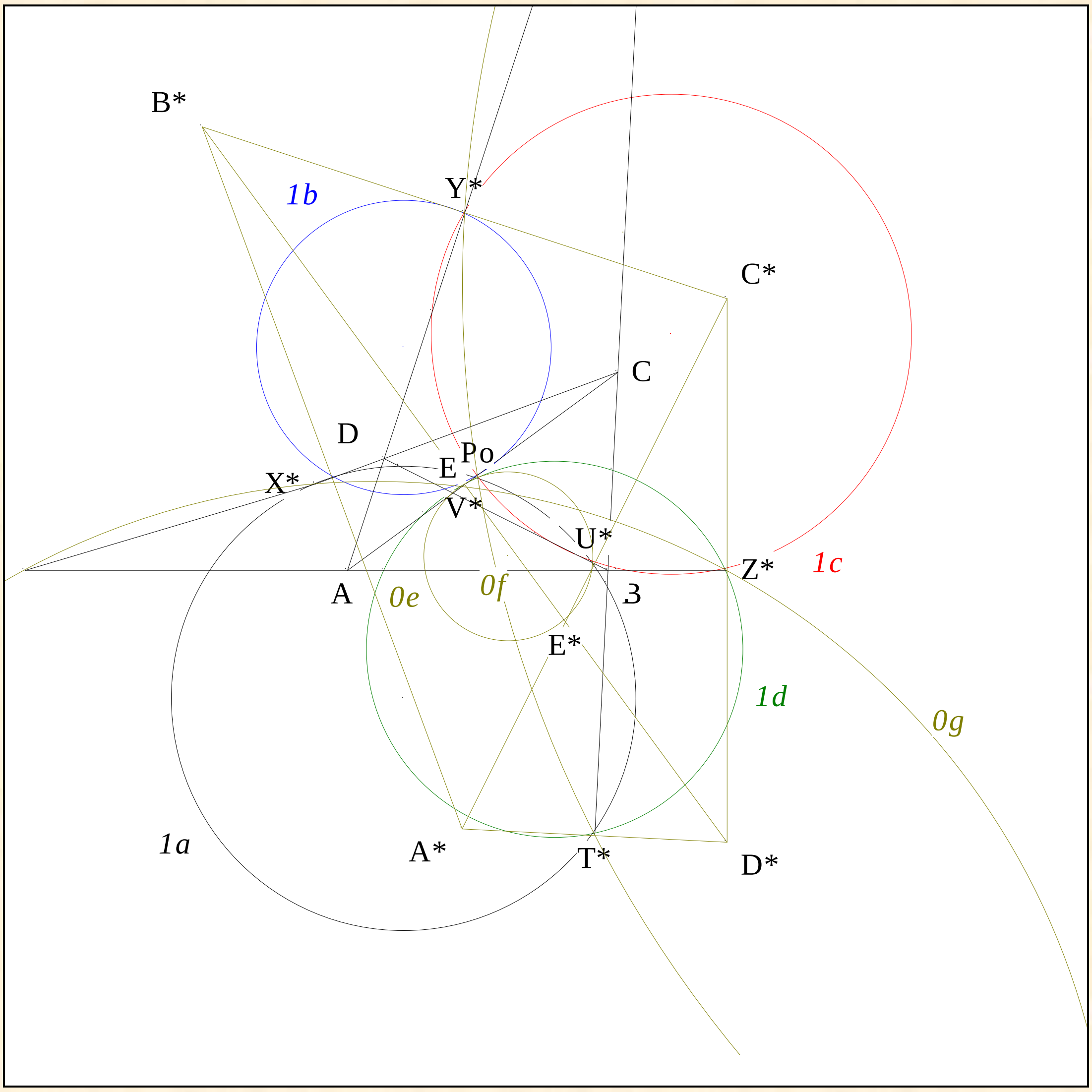
(2) Les deux autres cercles d'Ayme

- Notons F, G les points d'intersection resp. de (AD) et (BC), de (AB) et (CD),
  F*, G* les points d'intersection resp. de (D*C*) et (C*B*), de (D*C*) et (B*A*)
  0f le cercle passant par F, F*, X* et Z*
  et *0g* le cercle passant par G, G*, Y* et T*.

- *0f* et *Og* sont resp. "les F, G-cercles d'Ayme de ABCD".

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que *0f* passe par Po
  0g passe par Po.

5. Commentaire : nous venons de répertorier trois nouveaux cercles passant par Po en plus des vingt cercles déjà recensés.

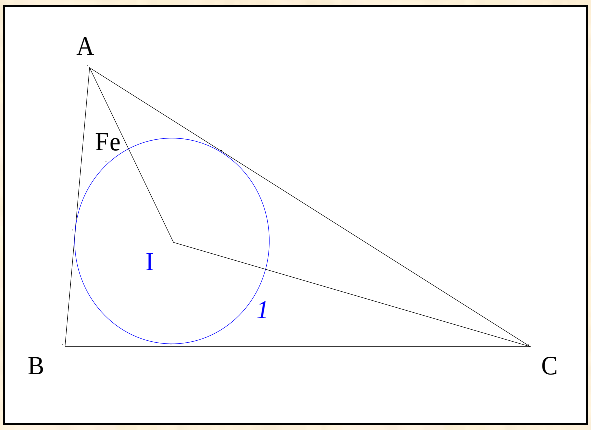


D. APPLICATIONS

1. Le point de Feuerbach d'un triangle

VISION

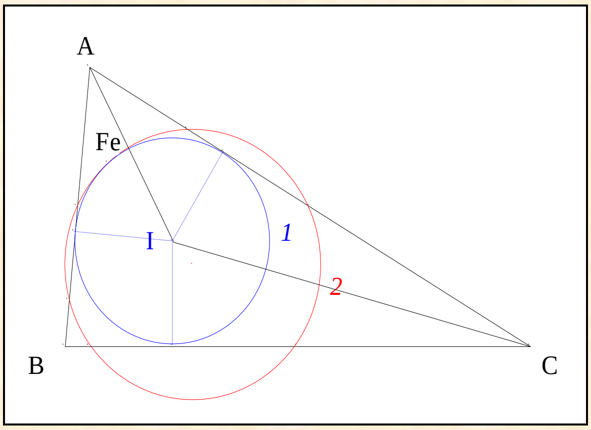
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit de ABC
	I	le centre de *1*
et	Fe	le point de Feuerbach de ABC.

Donné : Fe est le point d'Euler-Poncelet du quadrilatère ABCI.

VISUALISATION



- Notons Po le point d'Euler-Poncelet de ABCI
  et *2* le cercle d'Euler[49] de ABC.

- **Scolie :** *1* est le I-cercle pédal de ABCI.

- D'après A. I. 6. Les quatre cercles pédaux d'un quadrilatère, Po est sur *1*.

- D'après A. I. 2. Les quatre cercles d'Euler d'un quadrilatère, Po est sur *2*.

- D'après "Le théorème de Feuerbach"[50], *1* et *2* sont tangents en Fe ;

---

[49] Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler…, G.G.G. vol. 2 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/

[50] Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach, G.G.G. vol. 1 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/

en conséquence, Fe et Po sont concondus.

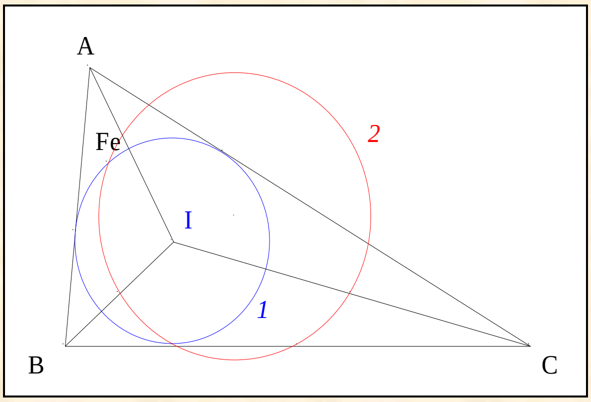
- **Conclusion :** Fe est le point d'Euler-Poncelet du quadrilatère ABCI.

Scolie : Fe est répertorié sous X_{11} chez ETC [51].

2. Le cercle d'Euler du triangle BIC

VISION

Figure :

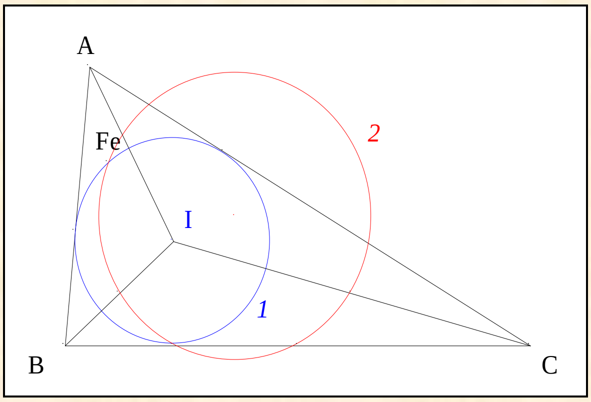


Traits :

	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit de ABC
	I	le centre de *1*
	Fe	le point de Feuerbach de ABC.
et	*2*	le cercle d'Euler de ABC.

Donné : *2* passe par Fe.

VISUALISATION



---

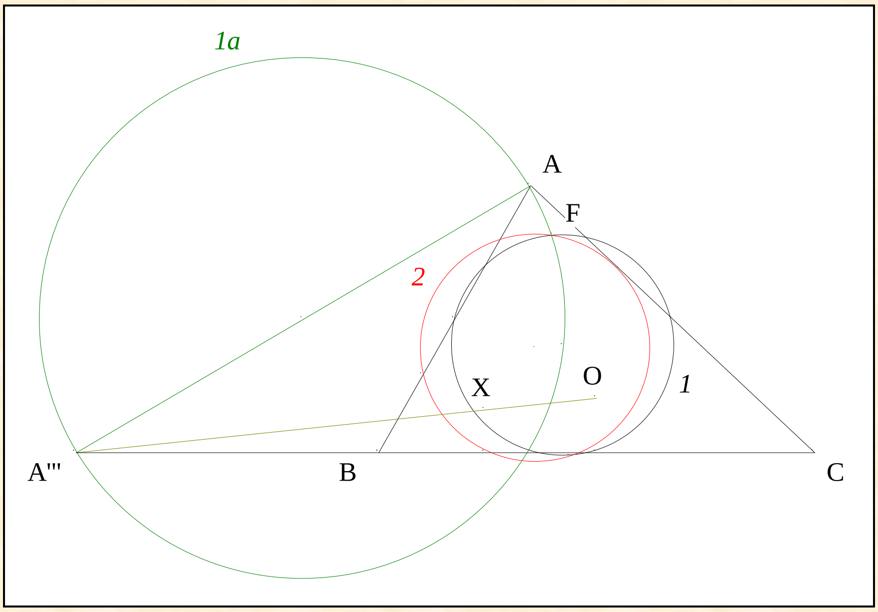
51 El theorema de Feuerbach, *Revistaoim* (Espagne) 26 (2006) ; http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/
Kimberling Clark, Triangle Centers and Central Triangles ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

- D'après D. 1. Le point de Feuerbach, Fe est le point d'Euler-Poncelet du quadrilatère ABCI.
- D'après A. I. 2. Les quatre cercles d'Euler d'un quadrilatère, Fe est sur *2*.
- **Conclusion :** *2* passe par Fe.

3. La première question d'Éric Danneels

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle d'Euler de ABC,
X un point,
2 le X-cercle pédal de ABC,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
F le point de Fontené de O et X relativement à ABC,
A''' le point d'intersection de (OX) et (BC)
et *1a* le cercle de diamètre [AA'''].

Donné : *1a* passe par F. [52]

VISUALISATION

- **Scolies :** **(1)** F est l'orthopôle de (OX) relativement à ABC [53]
(2) *1* et *2* passe par F
(3) *1a* est le A'''-cercle pédal de ABC
(4) A''' est sur (OX).

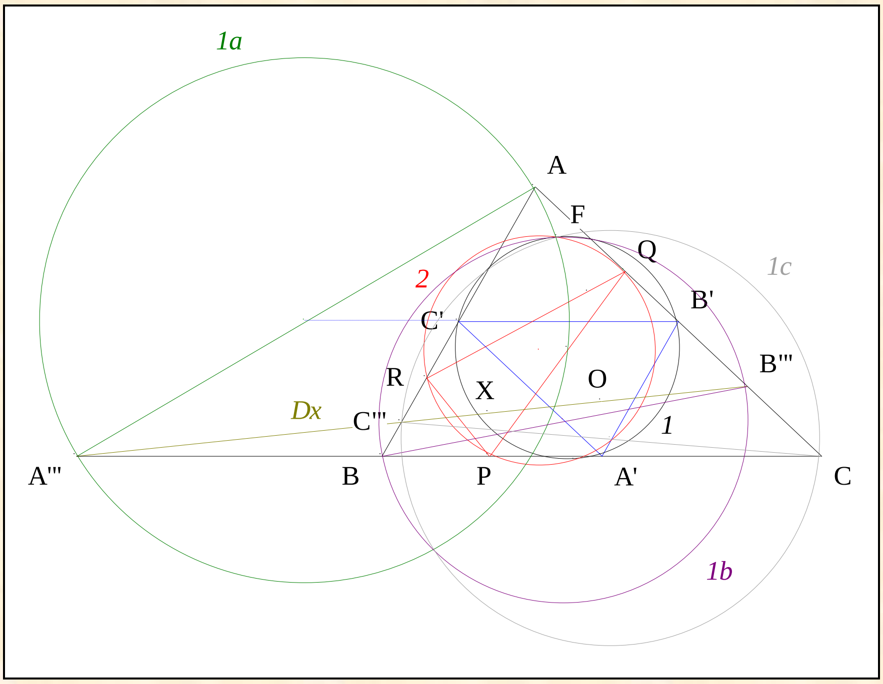
---

[52] Danneels E., how to proof Fontene theorems?, Message *Hyacinthos* # 8794 du 08/12/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

[53] Ayme J.-L., Les trois théorèmes de Fontené, G.G.G. vol. 5 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

- **Conclusion :** d'après B. Le second théorème de Griffiths-Fontené [54], *1a* passe par F.

Scolies : **(1)** deux autres cercles passant par F



- Notons B''', C''' les points d'intersection de (OX) resp. avec (CA), (AB)
  et *1b*, *1c* les cercles de diamètre resp. [BB'''], [CC'''].

- **Conclusion :** d'après B. Le second théorème de Griffiths-Fontené, *1b* passe par F
  1b passe par F.

Note historique : Darij Grinberg [55] a en donné une réponse.
Éric Danneels de Bruges (Flandre-Occidentale, Belgique) est un géomètre qui participe activement au site ETC de Clark Kimberling [56].

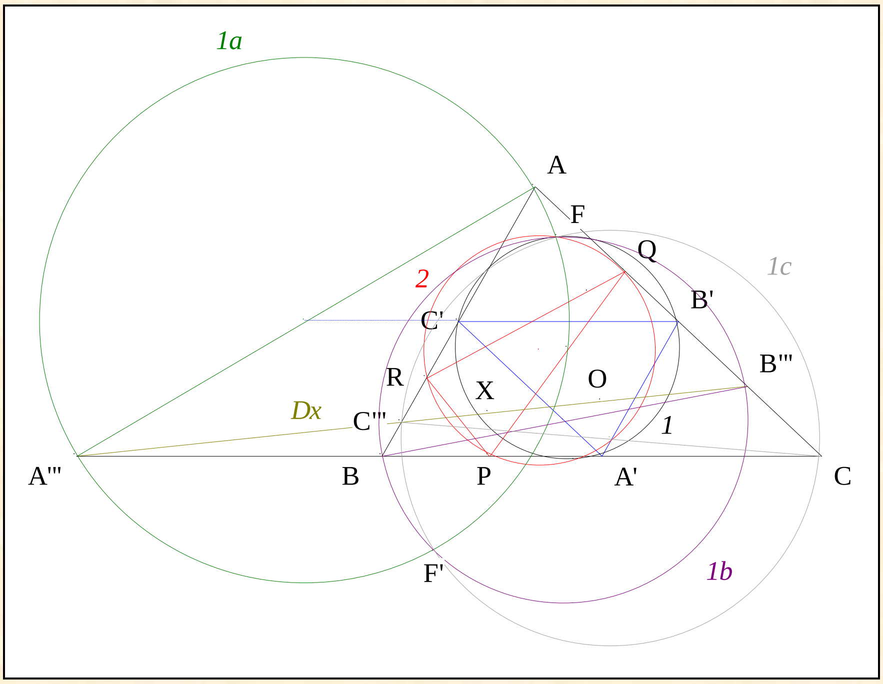
(2) Trois cercles coaxiaux à points de base

---

[54] Ayme J.-L.,

[55] Griberg D., how to proof Fontene theorems?, Message *Hyacinthos* # 8796 du 08/12/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

[56] http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.



- D'après Bodenmiller "Trois céviennes diamétrales" (Cf. Annexe 11) appliqué à ABC et à la ménélienne (OX), *1a*, *1b* et *1c* étant concourants en F, concourent en un second point.

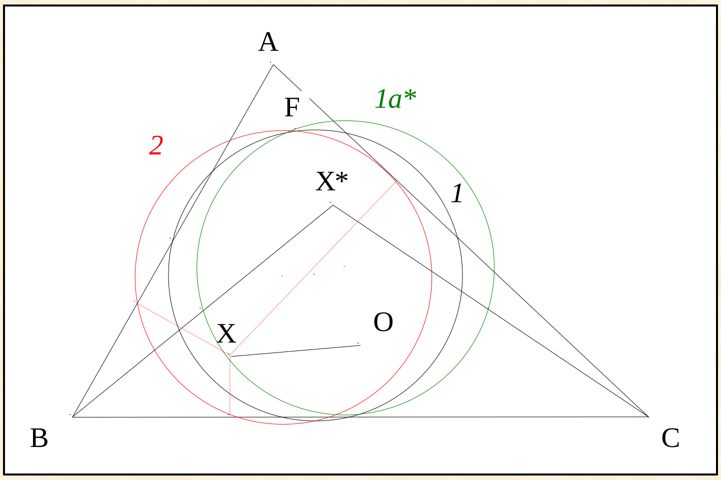
- Notons F' ce second point de concours.

- **Conclusion :** *1a*, *1b* et *1c* sont trois cercles coaxiaux à points de base F et F'.

4. La deuxième question d'Éric Danneels ou une généralisation du cercle d'Euler de BIC

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle d'Euler de ABC,

	X	un point,
	2	le X-cercle pédal de ABC,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	F	le point de Fontené de O et X relativement à ABC,
	X*	l'isogonal de X relativement à ABC
et	*1a**	le cercle d'Euler du triangle X*BC.

Donné : *1a** passe par F.[57]

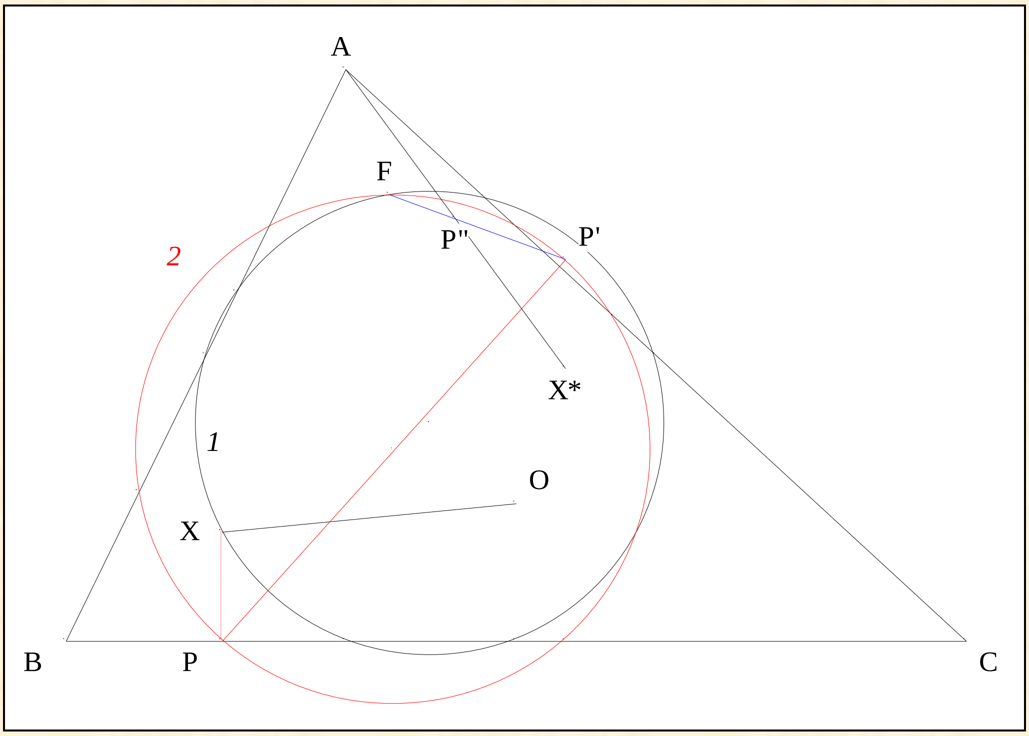
VISUALISATION

- **Scolies :** **(1)** F est l'orthopôle de (OX) relativement à ABC[58]
  (2) *1* et *2* passe par F.
- D'après B. III. 2. Avec l'isogonal D* de D relativement à ABC, F est le point d'Euler-Poncelet de ABCX*.
- **Conclusion :** *1a** passe par F.

5. La troisième question d'Éric Danneels

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle d'Euler de ABC,

---

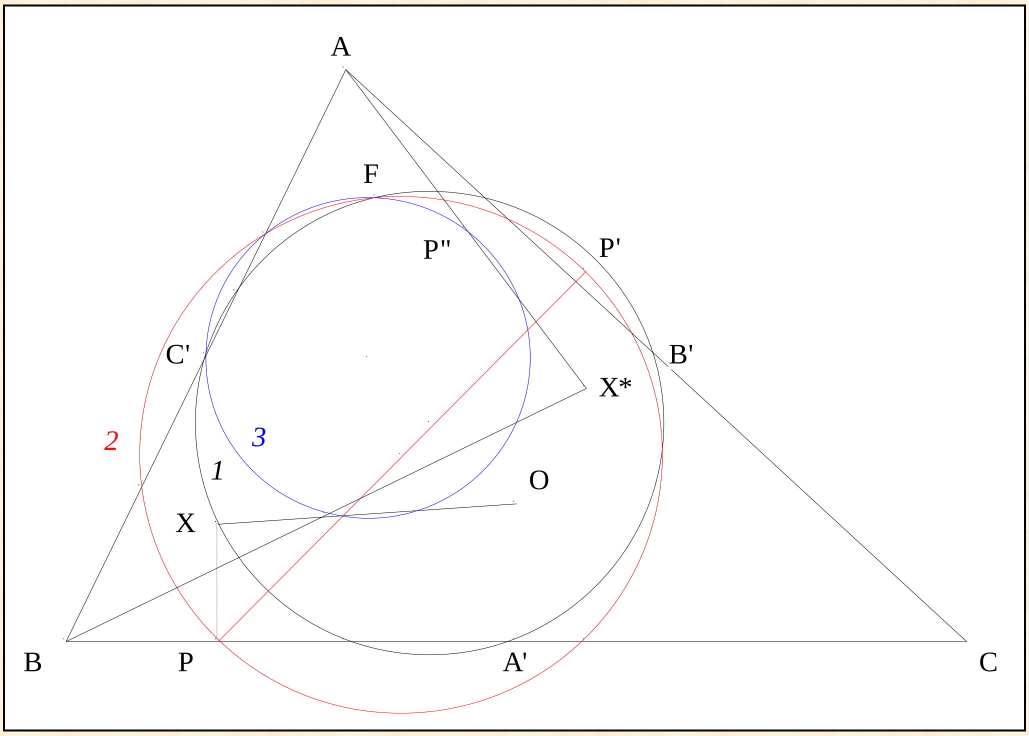
[57] Danneels E., how to proof Fontene theorems?, Message *Hyacinthos* # 8794 du 08/12/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.

[58] Ayme J.-L., Les trois théorèmes de Fontené, G.G.G. vol. 5 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

	X	un point,
	P	le sommet du triangle X-pédal sur (BC),
	2	le X-cercle pédal de ABC,
	P'	l'antipôle de P relativement à *2*,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	F	le point de Fontené de O et X relativement à ABC,
	X*	l'isogonal de X relativement à ABC
et	P"	le milieu de [AX*].

Donné : P", F et P' sont alignés. [59]

VISUALISATION



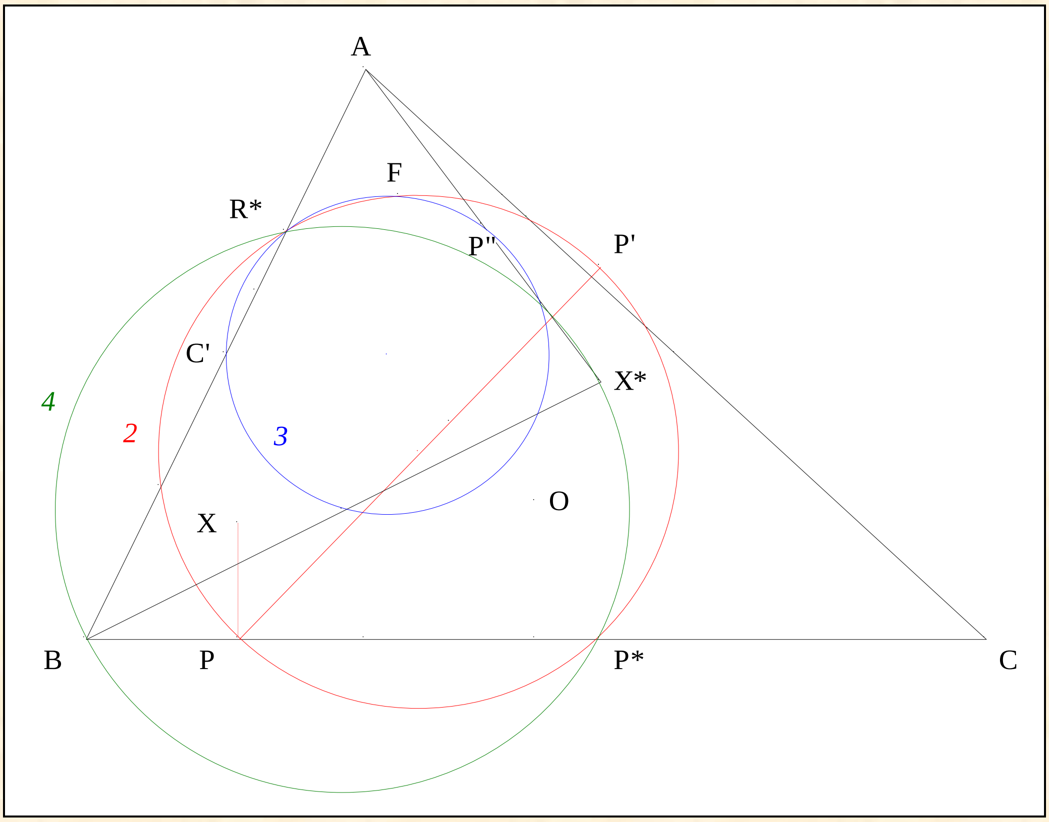
- D'après B. III. 2. Avec l'isogonal D* de D relativement à ABC, F est le point de Poncelet de ABCX*.

- Notons PQR le triangle X-pédal de ABC,
  A'B'C' le triangle médian de ABC
  et *3* le cercle d'Euler du triangle ABX*.

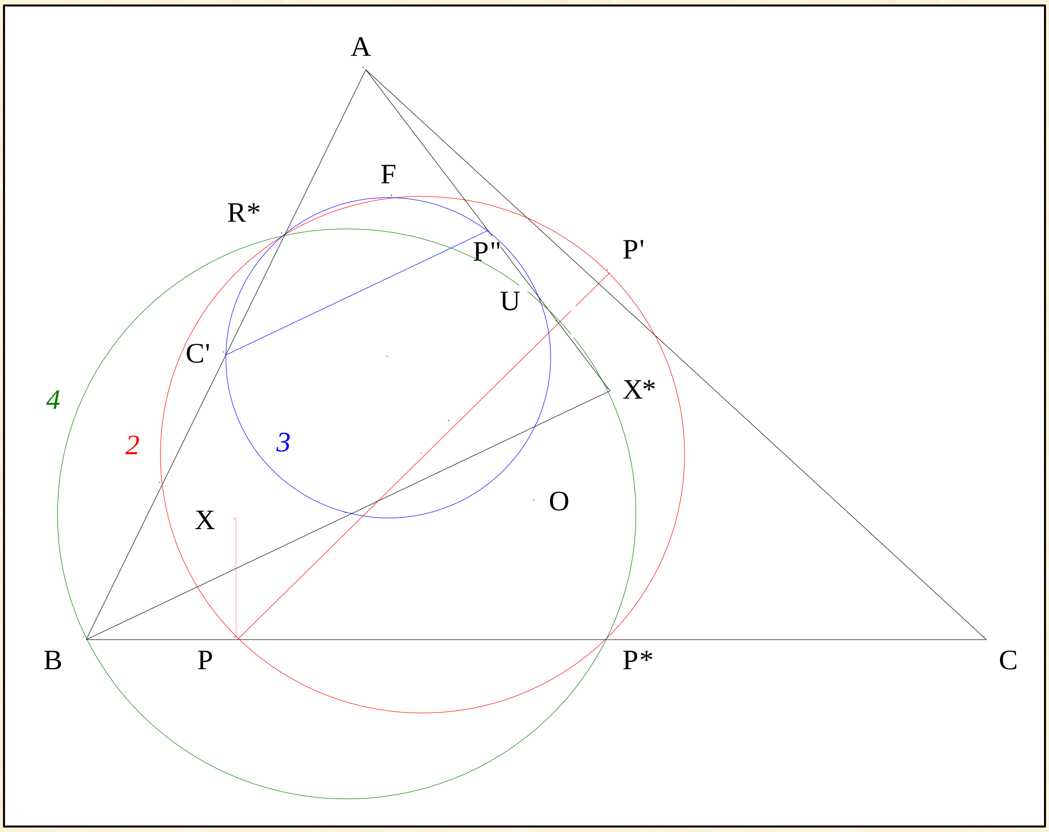
- D'après B. III. 3. Le point de Fontené, *3* passe par F, C' et P".

---

[59] Danneels E., how to proof Fontene theorems?, Message *Hyacinthos* # 8794 du 08/12/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/.



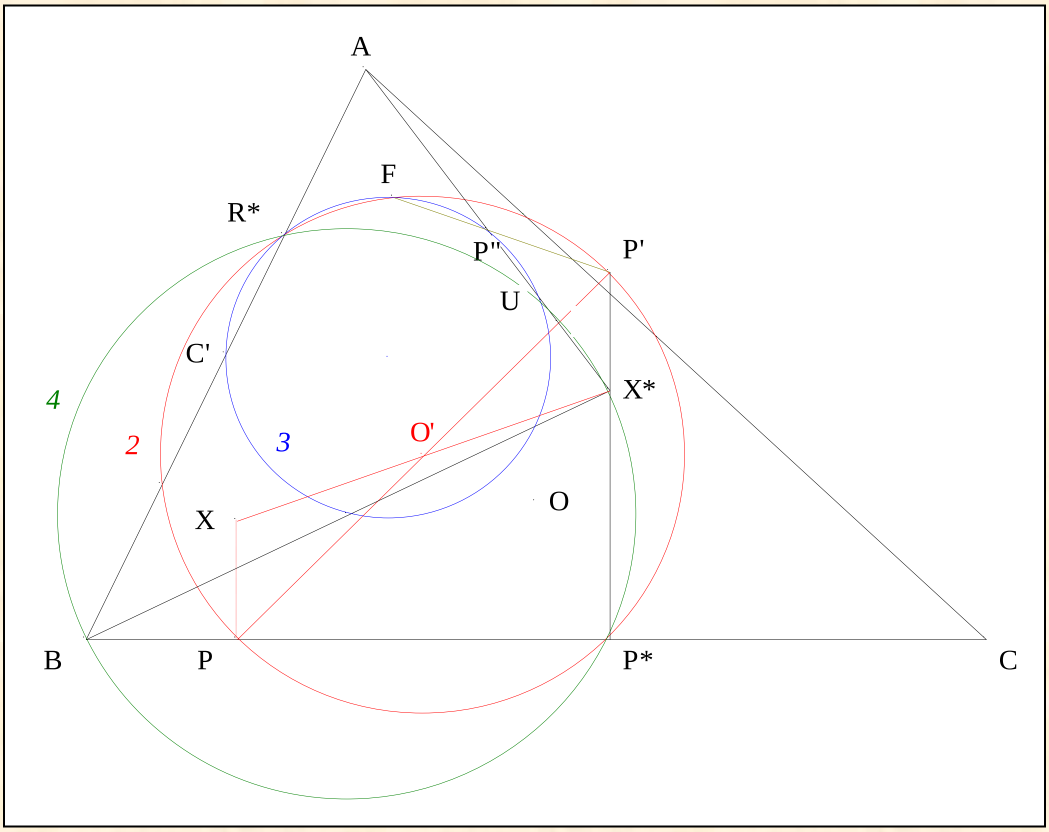
- Notons P*Q*R* le triangle X*-pédal de ABC,
  et *4* le cercle de diamètre [BX*] ; il passe par P* et R*.



- Notons U le second point d'intersection de *3* et *4*.

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle ABX*, (C'P") // (BX*).

- Les cercles *3* et *4*, les points de base R* et U, la monienne (C'R*B), les parallèles (C'P") et (BX*), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, P", U et X* sont alignés.



- Notons O' le centre de *2*.

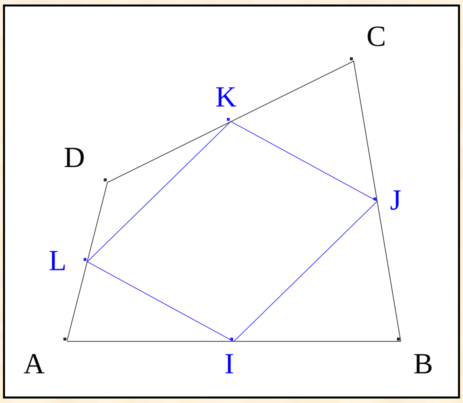
- D'après Mathieu "The pedal circle theorem" (Cf. Annexe 6), O' est le milieu de [XX*] ;
  par hypothèse, O' est le milieu de [PP'].

- Le quadrilatère PX*P'X ayant ses diagonales se coupant en leur milieu est un parallélogramme ;
  en conséquence, (P'X*) // (PX) ;
  par hypothèse, (PX) ⊥ (BC) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (P'X*) ⊥ (BC) ;
  par hypothèse, (BC) ⊥ (X*P*) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (P'X*) // (X*P*) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (P'X*) = (X*P*) ;
  en conséquence, P*, X* et P' sont alignés.

- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 8)
  appliqué au triangle P'P"X* avec U sur (P"X*), P* sur (X*P')
  et aux cercles *2*, *3* et *4* concourants en R*,
  P", F et P' sont alignés.

D. ANNEXE

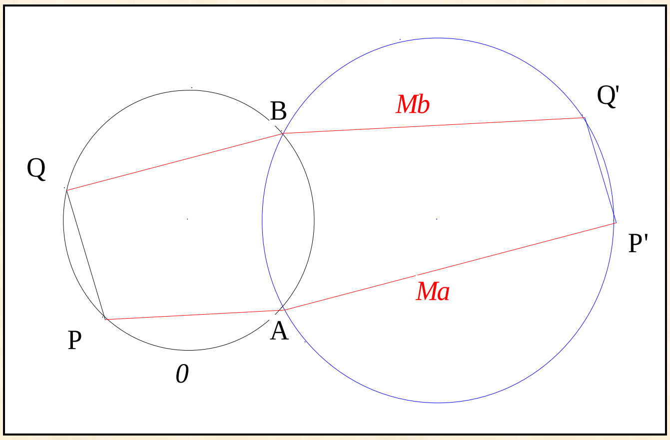
1. Le parallélogramme de Varignon[60]



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
et I, J, K, L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].

Donné : le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

2. **Le théorème des moniennes semblables de Reim**



Traits : *0* un cercle,
A, B deux points de *0*,
P, Q deux points de *0*,
Ma la parallèle à (QB) passant par A,
Mb la parallèle à (PA) passant par B
et P', Q' deux points resp. de *Ma*, *Mb* tels que (P'Q') soit parallèle à (PQ).

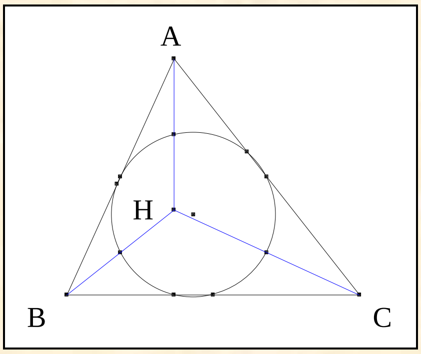
Donné : A, B, P' et Q' sont cocycliques.

3. Le théorème d'Hamilton [61]

---

[60] Varignon P. , *Éléments de mathématiques* (1731).

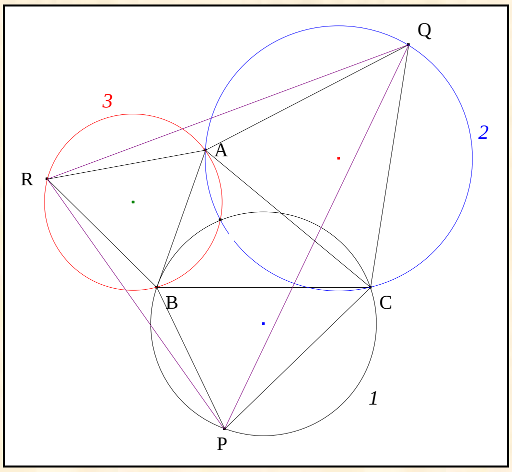
[61] Hamilton, *The Quaterly Journal* (1861) 249;
Hamilton, Question 594, *Nouvelles Annales de mathématiques* XX (1861) 216 ; solution de Saint-Michel (de) G., (1862) 183.



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
et *1* le cercle d'Euler de ABC.

Donné : *1* est le cercle d'Euler des triangles HBC, HCA et HAB.

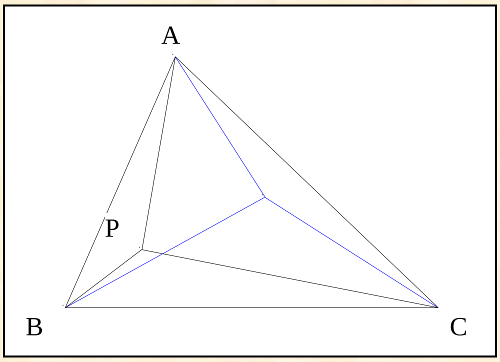
3. Le théorème de Heis [62]



Traits : ABC un triangle,
BCP, QCA, BRA trois triangles extérieurement adjacents à ABC
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits à PCB, QAC, RBA.

Donné : <CPB + <AQC + <BRA = 180° *si, et seulement si,* *1*, *2* et *3* sont concourants.

5. The isogonal theorem [63]

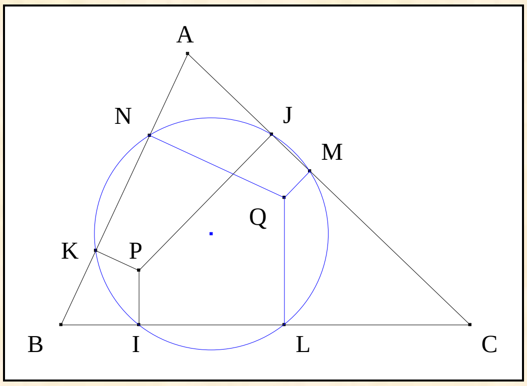


[62] Heis E. (1806-1877), résultat de 1875.
[63] Mathieu J. J. A., *Nouvelles Annales* (1865) 393 ff., 400.

Traits : ABC un triangle,
P un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC
et *Da* , *Db* , *Dc* les isogonales resp. de (AP), (BP), (CP).

Donné : *Da* , *Db* et *Dc* sont concourantes.

6. Le cercle de Mathieu ou "The pedal circle theorem" [64]



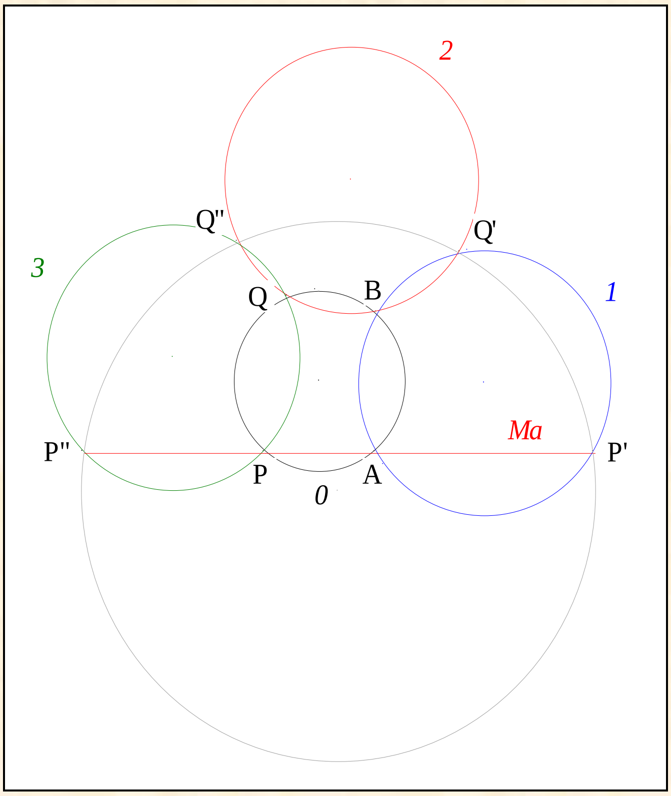
Traits : ABC un triangle,
P un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC,
I, J, K les pieds des perpendiculaires abaissées de P resp. sur (BC), (CA), (AB),
Q l'isogonal de P relativement à ABC
et L, M, N les pieds des perpendiculaires abaissées de Q resp. sur (BC), (CA), (AB).

Donné : I, J, K, L, M et N sont cocycliques.

Scolie : le centre de cercle est le milieu de [PQ].

7. Le théorème des cinq cercles [65]

64 Mathieu.
65 Lebesgue H. L., Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1916).

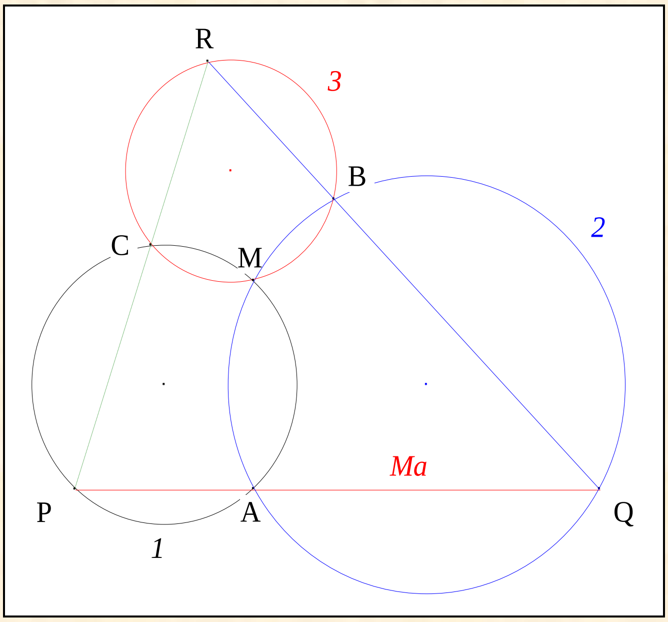


Traits :		*0*, *1*	deux cercles sécants,
		A, B	les points d'intersection de *0* et *1*,
		*M*a	une droite passant par A,
		P, P'	les seconds points d'intersection de *M*a avec *0* et *1*,
		2	un cercle passant par B,
		Q, Q'	les seconds points d'intersection de *2* resp. avec *0* et *1*,
		3	un cercle passant par P et Q,
	et	P", Q"	les seconds points d'intersection de *3* resp. avec *M*a et *2*.

Donné : P', Q', P" et Q" sont cocycliques.

Commentaire : le résultat reste vraie dans les cas de tangence des droites ou de deux cercles.

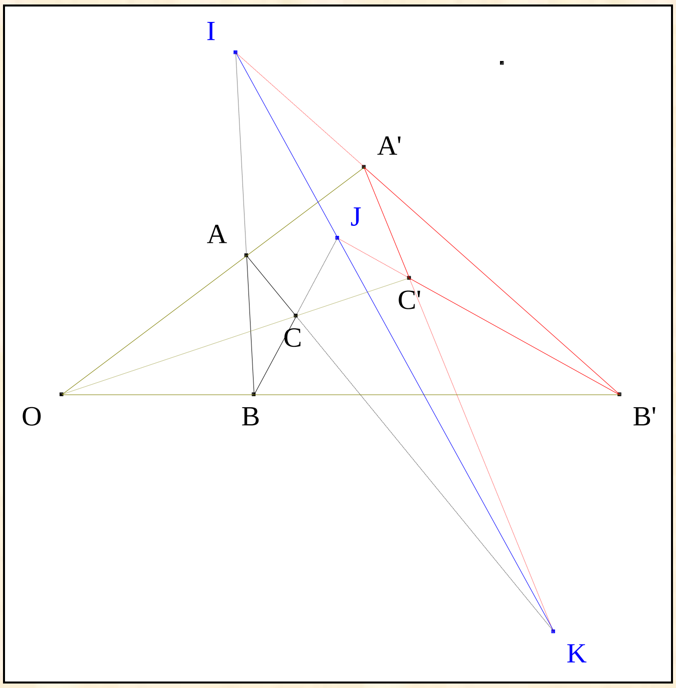
8. Le théorème des trois cercles



Traits : *1*, *2*, *3* trois cercles concourants,
M le point de concours de *1*, *2*, *3*,
A le second point d'intersection de *1* et *2*,
*M*a une A-monienne de *1* et *2*,
P, Q les seconds points d'intersection de *M*a resp. avec *1*, *2*,
B, C les seconds points d'intersection de *3* resp. avec *2*, *1*
et R un point de *3*.

Donné : (QBR) est une monienne de *2* et *3*
si, et seulement si,
(PCR) est une C-monienne de *1* et *3*.

9. Le théorème des deux triangles de Desargues

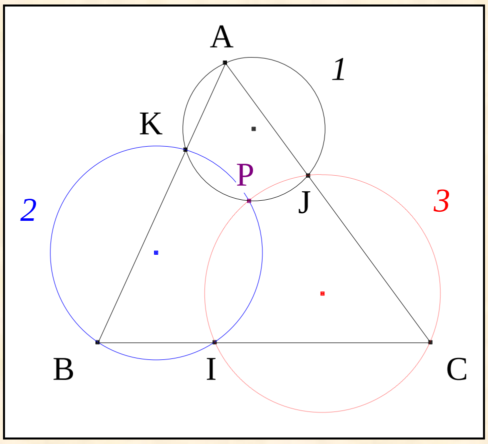


Traits : ABC un triangle,

	A'B'C'	un triangle tel que les droites (AA') et (BB') soient concourantes,
	O	le point de concours de (AA') et (BB'),
et	I, J, K	le point d'intersection de (AB) et (A'B'), de (BC) et (B'C'), de (CA) et (C'A').

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* I, J et K sont alignés.

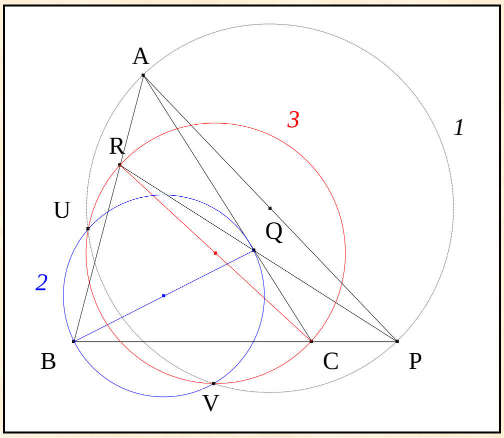
10. Le théorème du pivot[66]



Traits :	*1*, *2*, *3*	trois cercles sécants deux à deux,
	K, P	les points d'intersection de *1* et *2*,
	I	l'un des points d'intersection de *2* et *3*,
	J	l'un des points d'intersection de *3* et *1*,
	A	un point de *1*,
	B	le second point d'intersection de la monienne (AK) avec *2*
et	C	le second point d'intersection de la monienne (BI) avec *3*.

Donné : (CJA) est une monienne de *3* et *1* *si, et seulement si,* *3* passe par P.

11. Trois céviennes diamétrales [67]



Traits :	ABC	un triangle,
	P, Q, R	trois points resp. de (AB), (BC), (CA),
	1, *2*, *3*	les cercles de diamètre resp. [AP], [BQ], [CR]
et	U, V	les points d'intersection de *2* et *3*.

Donné : (PQR) est une ménélienne *si, et seulement si,* *1* passe par U et V.

---

[66] Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. 1, 3 (1838) 485-487.
[67] Bodenmiller, *Analytische Sphärik*, Cologne (1830) 138.

IV.

RECHERCHES SUR LA DÉTERMINATION D'UNE HYPERBOLE ÉQUILATÈRE, AU MOYEN DE QUATRE CONDITIONS DONNÉES; PAR MM. BRIANCHON ET PONCELET.

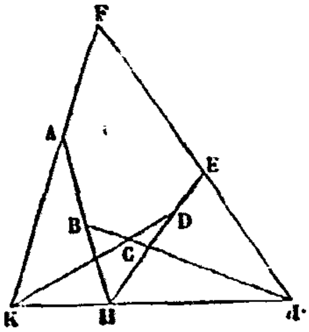
(T. XI des *Annales*, 1er janvier 1821.)

THÉORÈME I. — *Dans tout triangle inscrit à une hyperbole équilatère, le point de concours des trois hauteurs est situé sur la courbe.*

Démonstration. — On sait que, pour tout hexagone ABCDEF (*fig.* 170) inscrit à une section conique, les trois points de concours H, I, K des côtés opposés sont en ligne droite. Si donc, la courbe ayant des branches infinies, on suppose que l'hexagone ait deux de ses sommets, comme E, F, situés à l'infini, le point I, concours des deux côtés EF, BC, se trouvera à l'infini; ce qui revient à dire que BC et HK seront parallèles.

Maintenant, la courbe étant une hyperbole, il est clair que les deux côtés DE, FA, adjacents à EF qui est à l'infini, seront respectivement

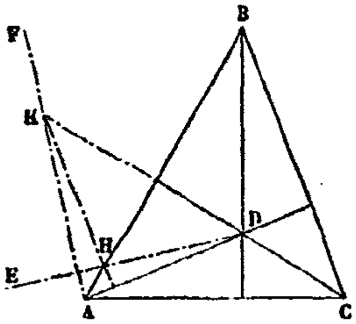
Fig. 170.



parallèles aux deux asymptotes, et, partant, seront rectangulaires, pour le cas de l'hyperbole équilatère, qui est celui dont il s'agit ici.

Les deux derniers sommets E, F de l'hexagone inscrit à cette courbe étant ainsi portés à l'infini, les quatre autres resteront arbitraires. Soient

Fig. 171.



donc pris à volonté les trois premiers A, B, C (*fig.* 171), et soit marqué

le quatrième D tel que les deux côtés AB, CD, respectivement opposés à DE, FA, soient rectangulaires entre eux. Il résulte de ceci que AH est perpendiculaire sur DK. D'ailleurs AK est perpendiculaire sur DH, par la propriété des asymptotes; donc le point A est le croisement des trois hauteurs du triangle DHK; donc AD est perpendiculaire sur HK, et conséquemment aussi sur BG, parallèle à HK. Mais, par construction, CD est perpendiculaire sur AB; donc le point D est le croisement des trois hauteurs du triangle ABC. Or, le triangle ABC a été inscrit à volonté à la courbe; donc généralement « dans tout triangle ABC, inscrit à une » hyperbole équilatère, le point de croisement D des trois hauteurs est » un point de la courbe » ; *ce qu'il fallait démontrer*.

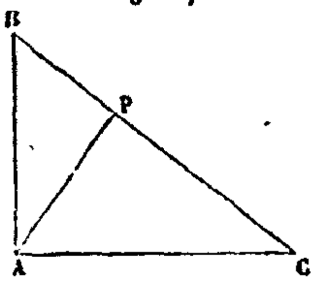
Si l'un A des angles du triangle inscrit varie de grandeur, en tendant vers l'angle droit, le point D se déplacera sur la courbe en s'approchant continuellement du sommet A; ce qui revient à dire que la sécante AD, perpendiculaire sur BC, tendra sans cesse à toucher la courbe en A, et qu'enfin elle sera tangente quand l'angle A sera droit. Donc :

Théorème II. — *Dans tout triangle rectangle inscrit à une hyperbole équilatère, la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est tangente à la courbe.*

Il suit de là que, si l'angle droit oscille sur son sommet, l'hypoténuse se déplacera parallèlement à elle-même et à la normale menée à ce sommet; ce qui est un cas particulier du beau théorème démontré par M. Frégier dans le présent recueil (*Annales*, t. VI, p. 229 et 321, t. VII, p. 95).

Au moyen de ce qui précède, si on connaissait deux points A, B (*fig.* 172) de la courbe, et la tangente AP en l'un A de ces points, on pourrait en

Fig. 172.



construire un troisième C en cette manière: du point B abaissez une perpendiculaire BC sur la tangente donnée, elle ira couper au point cherché C la perpendiculaire AC à AB.

On sait donc résoudre ces trois problèmes :

Décrire une hyperbole équilatère dont on a trois points et la tangente en l'un d'eux.

Décrire une hyperbole équilatère dont on a deux points et les tangentes en ces points.

Décrire une hyperbole équilatère dont on a deux points, la tangente en l'un de ces points et une autre tangente quelconque.

En effet, par la construction qui vient d'être indiquée, on obtiendra un nouveau point de la courbe; après quoi, pour achever, on aura recours aux solutions connues de ces questions (*) :

Décrire une section conique dont on a quatre points et la tangente en l'un d'eux.

Décrire une section conique dont on a trois points et les tangentes en deux de ces points.

Décrire une section conique dont on a trois points, une tangente quelconque et la tangente en l'un de ces points.

Il résulte encore du Théorème I que, lorsqu'on connaît trois points A, B, C (*fig.* 171) d'une hyperbole équilatère, on en a un quatrième D, qui est le croisement des trois hauteurs du triangle ABC; en sorte qu'on sait aussi résoudre ces deux problèmes :

Décrire une hyperbole équilatère dont on a quatre points.

Décrire une hyperbole équilatère dont on a trois points et une tangente.

Car, au moyen de la construction indiquée, on obtiendra un nouveau point de la courbe; après quoi, pour achever, on aura recours aux solutions connues de ces questions (**) :

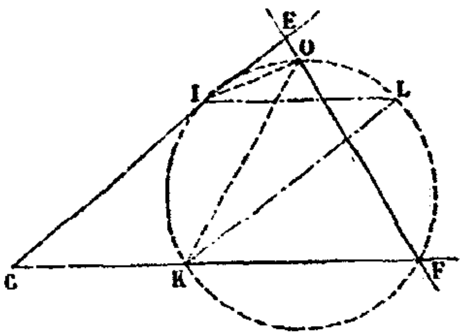
Décrire une section conique dont on a cinq points.

Décrire une section conique dont on a quatre points et une tangente.

Théorème III. — *Si deux points, situés sur le plan d'une hyperbole équilatère, sont les milieux ou les pôles respectifs de deux cordes ou de deux droites quelconques également situées sur ce plan; et que, par chacun d'eux, on mène une parallèle à la corde ou à la polaire qui correspond à l'autre, le cercle qui passera par ces deux points et par celui où se coupent les parallèles passera aussi par le centre de la courbe.*

Démonstration. — Soient, en premier lieu, CE, CF (*fig.* 173) les direc-

Fig. 173.



tions indéfinies des deux cordes en question, I, K leurs milieux respec-

(*) *Mémoire sur les lignes du second ordre, etc.*, par C.-J. Brianchon, Paris, 1817.

(**) Même ouvrage.

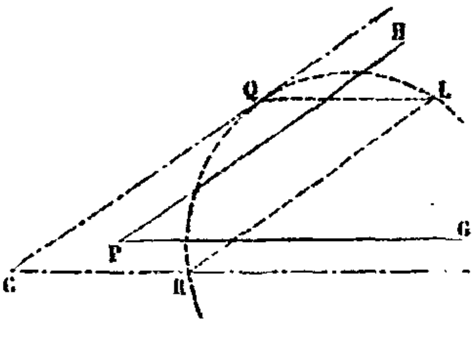
tifs, O le centre de l'hyperbole équilatère et EF l'une de ses asymptotes, rencontrant en E, F, les deux cordes CI, CK prolongées; les droites OK, OI seront les diamètres de la courbe, conjugués à la direction de ces cordes.

Cela posé, puisque l'angle des asymptotes est droit et que le point K est le milieu de la partie interceptée par ces asymptotes sur la direction de CF, la distance KO = KF et par conséquent l'angle KFO = KOF. Par la même raison, l'angle IEO = IOE; mais, à cause du triangle CEF, l'angle C est supplément de la somme des angles E, F, et par conséquent supplément de celle des angles KOF, IOE; donc il est égal à l'angle IOK, formé de l'autre côté de IK par les diamètres IK, IO. D'ailleurs, on prouverait de la même manière que, si le point O était supposé du côté du sommet de l'angle C, l'angle IOK, formé par ces mêmes diamètres, serait égal au supplément de l'angle C; donc il est sur la circonférence du cercle qui passe par les points K, I et par celui L où se coupent les parallèles KL, IL menées par chacun d'eux à la corde qui passe par l'autre: c'est-à-dire que,

1° « Si par chacun des points milieux de deux cordes quelconques d'une » hyperbole équilatère, on mène une parallèle à la corde qui correspond » à l'autre, le cercle qui passera par ces deux points et par celui où se » coupent les parallèles passera aussi par le centre de la courbe. »

En second lieu, soient PG, PH (*fig.* 174) deux droites quelconques, situées sur le plan d'une hyperbole équilatère; R, Q leurs pôles respec-

Fig. 174.



tifs, par rapport à cette courbe. Concevons, par le point Q, la parallèle QC à la polaire PH de ce point; la corde correspondante sera évidemment partagée en deux parties égales en Q; car, d'après la théorie généralement connue des pôles, « le diamètre d'une section conique qui renferme » les milieux de toutes les cordes parallèles à une même droite, située » sur le plan de la courbe, passe aussi par le pôle de cette droite. »

Par la même raison, si, par le point R, pôle de la droite PG, on mène la parallèle CR à cette droite, rencontrant la première au point C, la corde qui lui correspond, dans l'hyperbole équilatère, sera divisée en deux parties égales en R; ainsi, les points R, Q seront les milieux des droites ou cordes indéfinies RC, QC, qui passent respectivement par ces points et sont parallèles aux deux droites PG, PH.

Il suit de là et de ce qui précède que :

2° « La circonférence qui passe par deux points quelconques R, Q, situés » sur le plan d'une hyperbole équilatère, et par le point L où se cou- » pent les parallèles menées par chacun d'eux à la polaire PG ou PH de » l'autre, passe aussi par le centre de la courbe. »

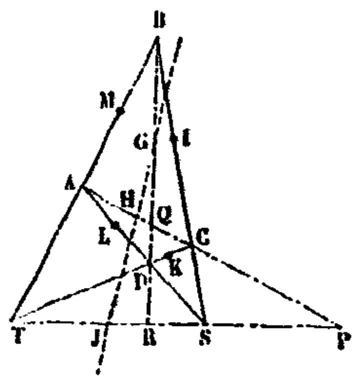
Il est d'ailleurs évident que les mêmes choses auraient encore lieu si, à la place de l'une des deux droites et de son pôle, on substituait une corde et son point milieu ; ce qui complète la démonstration du théorème énoncé.

S'il arrivait, dans le cas où l'on considère deux droites PG, PH et leurs pôles R, Q, que chacun de ces derniers fût situé sur la droite qui correspond à l'autre ; c'est-à-dire, si le point Q se trouvait sur PG et le point R sur PH, les parallèles RL, QL se confondraient évidemment avec ces droites ; donc la circonférence qui renferme le centre de l'hyperbole équilatère correspondante passerait alors par le point P où se rencontrent ces mêmes droites ; mais, d'après la théorie des pôles, ce point a évidemment pour polaire la droite qui passe par les points Q, R ; de sorte que ces trois points sont tels, que chacun d'eux est le pôle de la droite qui contient les deux autres ; on peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème IV. — *Lorsque trois points situés sur le plan d'une hyperbole équilatère sont tels, que chacun d'eux est le pôle de la droite qui contient les deux autres, le cercle qui passe par ces trois points passe aussi par le centre de la courbe.*

Quatre tangentes AB, BC, CD, DA (*fig.* 175) à une même section conique forment, par leurs intersections mutuelles, un quadrilatère complet

Fig. 175.



TABCSD, dont les trois diagonales AC, BD, ST sont, comme l'on sait, telles que « chacune d'elles est la polaire de l'intersection des deux autres ; » de sorte que, si la courbe est une hyperbole équilatère, la circonférence qui passera par les trois points P, Q, R, intersection des diagonales, passera aussi, d'après ce qui précède, par le centre de la courbe ; d'où résulte ce nouveau théorème :

THÉORÈME V. — *Si l'on mène quatre tangentes quelconques à une hyperbole équilatère, le centre de la courbe sera situé sur la circonférence qui passe par les trois points d'intersection des diagonales du quadrilatère complet formé par ces tangentes;*

Ou, ce qui revient au même :

Les centres de toutes les hyperboles équilatères tangentes à quatre droites quelconques, tracées sur un plan, sont situés sur la circonférence d'un cercle unique qui passe par les trois points d'intersection des diagonales du quadrilatère complet formé par ces droites.

D'un autre côté, il résulte d'un théorème découvert par Newton (*Principes mathématiques, etc.*, liv. I, Lem. XXV, Corol. III) que

« Dans tout quadrilatère circonscrit à une conique quelconque, les » trois points milieux des diagonales sont sur une droite unique qui passe » par le centre de la courbe; »

Ou, ce qui revient encore au même :

» Les centres de toutes les sections coniques tangentes à quatre droites » quelconques, tracées sur un même plan, sont situés sur la droite unique » qui passe par les trois points milieux des diagonales du quadrilatère » complet formé par ces droites. »

Donc, dans le cas de l'hyperbole équilatère, le centre de la courbe se trouve à la fois sur la droite unique dont il s'agit et sur la circonférence du cercle qui passe par les trois points P, Q, R, où se croisent les diagonales; en sorte qu'on peut aussi résoudre ce nouveau problème :

Décrire une hyperbole équilatère dont on a quatre tangentes.

En effet, ayant déterminé, au moyen de ce qui précède, le centre de la courbe (et il y en a évidemment deux, en général, qui résolvent la question), on le joindra par une droite avec l'un quelconque P des points d'intersection des diagonales, laquelle ira rencontrer la diagonale opposée BD, polaire de P, en un point X qui, d'après la théorie des pôles, sera nécessairement le milieu de la corde correspondante, et par conséquent aussi le milieu de la partie interceptée par les asymptotes sur cette diagonale; portant donc, à partir du point X, deux distances égales à OX sur la direction de la droite indéfinie BDX, leurs extrémités appartiendront aux deux asymptotes de la courbe, qui ainsi sera parfaitement déterminée de grandeur et de situation; car le point qui divisera en deux parties égales la distance interceptée par les asymptotes sur l'une quelconque des quatre tangentes données sera le point de contact de cette tangente.

Supposons maintenant que ABCD soit un quadrilatère inscrit à une section conique quelconque; les points de concours S, T de ses côtés opposés et le point d'intersection Q de ses deux diagonales simples seront encore, d'après la théorie des pôles, trois points tels, que « chacun d'entre eux sera le pôle de la droite qui passe par les deux autres »; donc,

si la courbe est une hyperbole équilatère, son centre se trouvera situé, d'après le Théorème IV démontré ci-dessus, sur la circonférence du cercle qui passe par les trois points Q, S, T, et par conséquent :

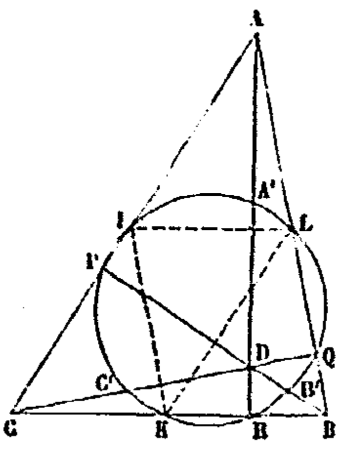
THÉORÈME VI. — *Dans tout quadrilatère simple, inscrit à une hyperbole équilatère quelconque, le cercle passant par les deux points de concours des côtés opposés et par le point d'intersection des diagonales passe aussi par le centre de la courbe.*

Il suit de là que, quand quatre points A, B, C, D sont donnés sur un plan, on connaît aussi la circonférence qui passe par le centre de l'hyperbole équilatère passant par ces quatre points (*); d'ailleurs le Théorème III indique d'autres circonférences qui renferment également ce centre; donc il est entièrement déterminé de position sur le plan des quatre points donnés, et il en est par conséquent de même des asymptotes de la courbe; car, si l'on prend le milieu K de l'une quelconque CD des distances qui séparent deux à deux les points donnés, puis qu'on porte, à partir de K, sur la direction infinie de CD, deux longueurs égales à la distance de ce même point au centre de la courbe, leurs extrémités appartiendront aux asymptotes de cette courbe. Voilà donc une nouvelle solution, très-directe et très-simple, du problème déjà résolu plus haut, dans lequel il s'agit de *décrire une hyperbole équilatère passant par quatre points donnés sur un plan.*

On peut tirer du Théorème III d'autres conséquences remarquables.

Que A, B, C (*fig.* 176) soient trois points quelconques, appartenant à une hyperbole équilatère; si l'on divise les côtés CA, CB du triangle ABC,

Fig. 176.



formé par ces points, en deux parties égales, aux nouveaux points I, K,

---

(*) On peut remarquer que, à quatre points donnés sur un plan, correspondent toujours trois quadrilatères simples différents, mais qui tous redonnent les mêmes points Q, S, T; en sorte que la circonférence en question est unique.

et que, par ces derniers, on mène les parallèles IL, KL aux côtés CB, CA, elles viendront se couper en un point L qui, d'après le théorème cité, appartiendra au cercle qui, passant par I, K, passe en outre par le centre de l'hyperbole équilatère; mais le point L se confond évidemment avec le milieu du troisième côté AB du triangle ABC; donc

THÉORÈME VII. — *Dans tout triangle inscrit à une hyperbole équilatère, le cercle qui passe par les trois points milieux des côtés passe aussi par le centre de la courbe;*

Ou, ce qui revient au même :

Les centres de toutes les hyperboles équilatères circonscrites à un même triangle quelconque, sont sur la circonférence d'un cercle qui renferme les trois points milieux des côtés de ce triangle.

On peut conclure de là et de ce qui précède que, quand un quadrilatère quelconque ABCD (*fig.* 175) est inscrit à une hyperbole équilatère, le centre de la courbe doit se trouver, à la fois, sur les circonférences de huit cercles différents.

En effet, si l'on trace les diagonales AC, BD de ce quadrilatère, on obtiendra quatre triangles inscrits à la courbe, dont les points milieux G, H, I, K, L, M, qui sont aussi ceux des diagonales et des côtés du quadrilatère, détermineront un égal nombre de circonférences, passant par le centre de cette courbe; d'ailleurs, ce centre devra aussi se trouver sur la circonférence qui renferme les trois points Q, S, T, où se coupent les diagonales et les côtés opposés du quadrilatère (Théor. VI); et il en sera de même encore de chacune des trois circonférences qui, passant par les points milieux de deux côtés opposés ou des deux diagonales de ce quadrilatère, renfermerait aussi le point où se coupent les deux parallèles menées par chacun d'eux (Théor. III) au côté ou à la diagonale qui renferme l'autre.

Le point où se coupent les huit circonférences dont il vient d'être question est nécessairement unique; car, s'il était possible qu'il y en eût un second, toutes les circonférences devraient y passer à la fois, comme par le premier; or, toutes ces circonférences, excepté celle qui renferme les points Q, S, T, et pourvu qu'on ne combine pas entre elles celles qui passent par les milieux des deux côtés opposés ou des diagonales du quadrilatère, sont évidemment telles que, prises deux à deux, elles ont pour intersection commune l'un des points milieux de ces côtés et de ces diagonales; donc il faudrait que tous ces points milieux fussent confondus en un seul, ce qui est absurde; donc enfin le centre de l'hyperbole équilatère qui passe par quatre points donnés sur un plan est unique.

Si l'on fait attention à la manière particulière dont se trouve déterminé le point dont il s'agit, relativement aux côtés et diagonales du quadrilatère ABCD, il sera permis d'en déduire cette conséquence générale :

Théorème VIII. — *Quatre points étant pris à volonté sur un plan, il existe un autre point, et un seul point, tel, qu'en le joignant par des droites avec les milieux des six distances qui séparent les quatre premiers deux à deux, l'angle formé par deux quelconques de ces droites est égal à celui des deux distances qui leur correspondent, ou en est le supplément. Ce point unique est, en outre, le centre de l'hyperbole équilatère passant par les quatre points dont il s'agit.*

Ce théorème souffre pourtant une exception qu'il est nécessaire de signaler : c'est lorsque l'un D (*fig.* 176) des quatre points que l'on considère, est le croisement des hauteurs du triangle ABC formé par les trois autres; car alors (Théor. I) il y a une infinité d'hyperboles équilatères passant par les quatre points A, B, C, D; et par conséquent la position du centre de la courbe ne saurait être unique; elle est nécessairement indéterminée. Or, il résulte de là que les huit circonférences de cercle dont il vient d'être question, et qui renferment simultanément le centre, doivent se confondre en un seul et même cercle; ce qui donne lieu à la proposition suivante appartenant à la Géométrie élémentaire :

Théorème IX. — *Le cercle qui passe par les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle quelconque sur les côtés respectivement opposés, passe aussi par les milieux de ces trois côtés, ainsi que par les milieux des distances qui séparent les sommets du point de croisement des perpendiculaires.*

Démonstration. — Soient P, Q, R (*fig.* 176) les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle ABC sur les côtés opposés, et soient K, I, L les points milieux de ces côtés.

Les triangles rectangles CBQ et ABR étant semblables, on aura

$$BC : BQ :: AB : BR;$$

d'où, à cause que K et L sont les points milieux de BC et AB,

$$BK \cdot BR = BL \cdot BQ;$$

c'est-à-dire que les quatre points K, R, L, Q appartiennent à une même circonférence.

On prouverait semblablement que les quatre points K, R, I, P sont sur un cercle, aussi bien que les quatre points P, I, Q, L.

Cela posé, s'il était possible que les trois cercles en question ne fussent pas un seul et même cercle, il faudrait que les directions des cordes qui leur sont deux à deux communes concourussent en un point unique; or, ces cordes sont précisément les côtés du triangle ABC, lesquels ne sauraient concourir en un même point; donc il est également impossible de supposer que les trois cercles diffèrent entre eux; donc ils se confondent en un seul et même cercle.

Soient maintenant C', A', B' les points milieux des distances DC, DA, DB qui séparent le point de croisement D des hauteurs du triangle ABC de chacun de ses sommets respectifs. Les triangles rectangles CDR et CQB étant semblables, on aura

$$CD : CR :: CB : CQ,$$

d'où, à cause que les points C' et K sont les milieux des distances CD et CB,

$$CC' . CQ = CR . CK,$$

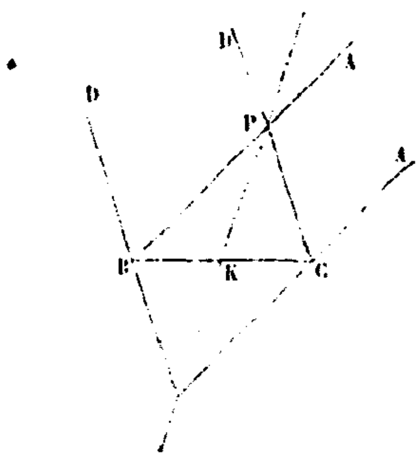
c'est-à-dire que le cercle qui passe par K, R, Q passe aussi par C'.

On prouverait de la même manière que ce cercle passe par les deux autres points A', B'; donc il passe à la fois par les neuf points P, Q, R, I, K, L, A', B', C'. C. Q. F. D.

Les théorèmes qui précèdent subsistent, en tout ou en partie, et avec des modifications convenables, dans les diverses circonstances particulières que peut présenter le système des trois ou quatre points que l'on considère, et qu'on suppose appartenir à une hyperbole équilatère.

Par exemple, si l'un A des sommets du triangle ABC s'éloigne à l'infini des deux autres, et que, par conséquent, les côtés CA, AB deviennent parallèles comme l'exprime la *fig.* 177, le pied R de la perpendiculaire AR

Fig. 177.



s'écartera à l'infini sur BC, et il en sera de même des milieux I, L des côtés AC, AB du triangle et des points A', B', C'; par conséquent, une portion tout entière du cercle qui passe par ces points sera elle-même passée à l'infini, c'est-à-dire qu'elle se sera confondue avec la droite qui contient tous les points à l'infini du plan de la figure.

Il suit de là que l'autre partie de ce cercle sera aussi devenue une ligne droite, et c'est ce qui a lieu en effet; car (*fig.* 176), si des sommets B, C on abaisse des perpendiculaires sur les côtés opposés du triangle, leurs pieds respectifs R, Q seront en ligne droite avec le milieu K du côté BC.

Dans le cas particulier qui nous occupe donc, la suite des centres des hyperboles équilatères appartenant aux points A, B, C doit se trouver sur la droite indéfinie PKQ, comme cela a lieu en effet.

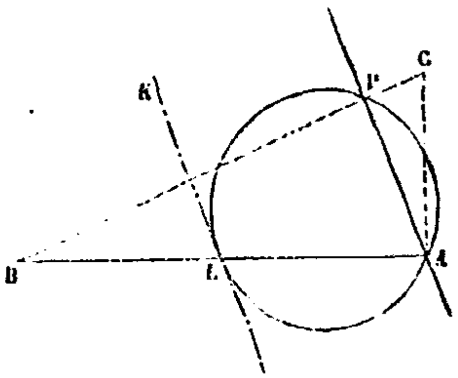
Dans la même hypothèse, où le point A s'éloigne à l'infini et où les côtés CA, BA deviennent par conséquent parallèles, le point de croisement D des trois hauteurs du triangle ABC étant aussi passé à l'infini, il est, dans ce cas particulier, bien évident que c'est, avec les trois autres, un *quatrième point de l'hyperbole équilatère*.

Il y a ici une remarque essentielle à faire; c'est que, bien que par quatre points donnés à volonté sur un plan, on puisse toujours faire passer une hyperbole équilatère, cependant, quand deux de ces points doivent être situés à l'infini, il n'est pas possible de se les donner arbitrairement par le système de deux droites quelconques concourant respectivement en ces points; il faut nécessairement que les droites dont il s'agit soient perpendiculaires entre elles, puisqu'elles doivent être parallèles aux asymptotes de la courbe.

Si le sommet A du triangle ABC (*fig.* 176), au lieu de s'écarter indéfiniment des deux autres B, C, se rapprochait, au contraire, de l'un d'eux C, jusqu'à ce que le côté AC devînt infiniment petit ou nul, en conservant toujours sa direction primitive, les points L, K se trouveraient eux-mêmes rapprochés à une distance infiniment petite l'un de l'autre, sur une parallèle à AC passant par le milieu du côté AB ou CB; quant au point milieu I du côté AC, il serait confondu avec le sommet A.

Soit donc AP (*fig.* 178) la direction indéfinie de la droite qui renferme

Fig. 178.



les deux points ou sommets confondus en un seul au point A, et soit B le troisième point ou le troisième sommet que l'on considère; divisons le double côté BA en deux parties égales au point L par la parallèle LK à AP, le cercle qui passera par A et touchera la parallèle KL en L représentera évidemment celui qui, dans le cas général, contient les milieux des côtés du triangle ABC; par conséquent il renfermera la suite des centres des hyperboles équilatères qui passent par les points A, B et touchent la droite AP en A. Du reste, il serait facile de reconnaître ce que

sont devenues les autres propriétés du cercle dont il s'agit, et d'en déduire divers théorèmes analogues aux précédents, mais qui n'en seraient que des cas particuliers.

Ainsi, le moyen que nous avons indiqué ci-dessus, pour trouver le centre et finalement les asymptotes d'une hyperbole équilatère assujettie à passer par quatre points donnés sur un plan, s'applique très-bien au cas particulier où l'on suppose ces points, en tout ou en partie, réunis deux à deux en un seul sur des droites ou tangentes dont la direction est assignée, ainsi que le point de contact, comme il s'applique aussi très-bien à celui où un ou deux de ces mêmes points passent à l'infini sur des droites dont la direction est également assignée.

Mais quand on ne se donne que trois points de l'hyperbole équilatère avec une tangente quelconque, il n'est plus possible de déterminer de la même manière le centre de la courbe, car alors on n'obtient qu'un seul cercle dont la circonférence renferme ce centre ; il faut donc avoir recours au procédé indiqué plus haut, au moyen duquel on peut obtenir directement un quatrième point de la courbe : ce qui ramène le problème à celui où il s'agit de *décrire une section conique dont on a quatre points et une tangente*.

Enfin, quand on se donne deux points et deux tangentes quelconques de l'hyperbole équilatère, ou seulement un point et trois tangentes quelconques, les deux procédés dont il s'agit sont également en défaut. Néanmoins, dans le premier de ces deux cas, on trouve encore un cercle dont la circonférence renferme le centre de la courbe ; ce qui donne lieu à ce nouveau théorème :

THÉORÈME X. — *Les centres de toutes les hyperboles équilatères tangentes à deux droites et passant par deux points donnés sur un plan sont situés sur une circonférence de cercle unique.*

Dans le même cas, on parvient à déterminer d'une manière très-simple un système de deux droites dont l'intersection avec le cercle en question donne encore la position des centres des quatre hyperboles équilatères qui résolvent le problème ; mais la démonstration de ces diverses propositions exige l'emploi de principes qui sont, jusqu'à un certain point, étrangers à l'objet actuel de cet article.

On a vu, dans ce qui précède, le rôle qu'on peut faire jouer aux différents lieux des centres des sections coniques assujetties à certaines conditions, pour fixer entièrement la position du centre de la courbe, et par conséquent celle de cette courbe elle-même, quand le nombre de ces conditions ne laisse plus rien d'arbitraire ni d'indéterminé. Il se présente à ce sujet une question fort intéressante, et qui nous semble n'avoir pas encore été résolue d'une manière complète et dans toute sa généralité ; en voici l'énoncé :

Déterminer quelle est la nature de la courbe qui renferme les centres

de toutes les sections coniques assujetties à quatre conditions telles que de passer par des points ou de toucher des droites données sur un plan.

Aux divers cas particuliers dont il a déjà été question dans le présent Article, et dont le plus remarquable est sans contredit celui qui résulte du théorème cité de Newton, sur le quadrilatère circonscrit à une section conique, nous ajouterons les suivants, qui, si nous ne nous trompons, n'ont pas jusqu'ici été démontrés ou résolus :

Les centres de toutes les sections coniques assujetties à passer par quatre points donnés sur un plan, sont situés sur une autre conique passant par les points où se coupent les deux diagonales et les côtés opposés du quadrilatère correspondant aux quatre points donnés.

Les centres de toutes les sections coniques assujetties à toucher deux droites et à passer par deux points donnés sur un plan sont situés sur une autre section conique passant par le point d'intersection des deux droites, par le milieu de la distance qui sépare entre eux les deux points, et par le milieu de la partie interceptée par ces droites sur la direction indéfinie de celle qui renferme les deux mêmes points (*).

V.

RECHERCHES DIVERSES SUR LE LIEU DES CENTRES DES SECTIONS CONIQUES ASSUJETTIES A QUATRE CONDITIONS, ET SOLUTION DE DEUX PROBLÈMES PROPOSÉS A LA PAGE 372 DU TOME XI DES ANNALES.

(T. XII des *Annales*, 1^er février 1822.)

PROBLÈME. — *Déterminer le lieu des centres de toutes les sections coniques qui, touchant à la fois deux droites données, passent en outre par deux points donnés ?*

Solution. — Concevons une droite par les deux points dont il s'agit; sa direction indéfinie sera celle d'une sécante commune à la fois à toutes les sections coniques proposées; ainsi, nous pouvons poser la question d'une manière plus générale, comme il suit :

(*) Je supprime ici une note où M. Gergonne, rappelant son élégante et générale solution du problème des sphères et des cercles tangents, émet, comme moyen d'émulation permis au rédacteur d'un *Journal*, l'opinion que le problème proposé, p. 254 du t. VIII des *Annales*, où il s'agit de *décrire une conique qui en touche cinq autres sur un plan*, est peut-être susceptible d'une construction élégante et facile. Mais l'Article ci-après et ses propres recherches analytiques, insérées au t. XI des *Annales*, ont dû convaincre M. Gergonne qu'il n'en pouvait être ainsi. (Note de 1863.)