LE POINT DE GRAY

ET

L'ALIGNEMENT Gra – I – X_{500}

Jean-Louis AYME

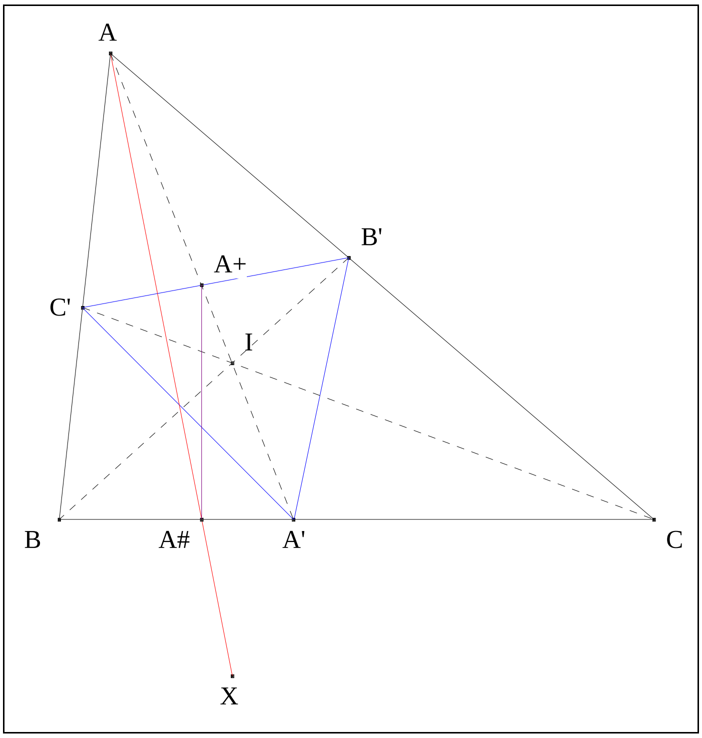
Résumé. Nous présentons une preuve entièrement synthétique de l'alignement des points de Gray et du centre d'un triangle avec l'orthocentre du triangle incentral de celui-ci.
La preuve commence par trois lemmes en chaîne qui permet de découvrir en suivant une voie longue, le point de Gray sans passer par le point de Kosnita. Un résultat catalytique conduit à l'alignement observé.
Tous les théorèmes cités en annexe peuvent tous être démontrés synthétiquement.

LEMMES

1. Deux perpendiculaires

VISION

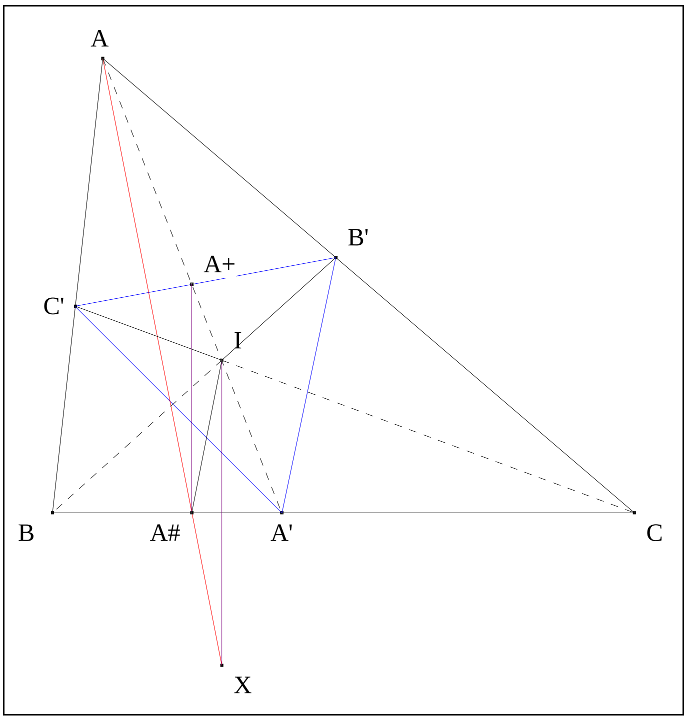
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	A'B'C'	le triangle incentral de ABC,
	A+	le point d'intersection de (AA') et (B'C').
	X	le symétrique de I par rapport à (BC),
et	A#	le point d'intersection de (AX) et (BC).

Donné : (A#A+) et (BC) sont perpendiculaires.

VISUALISATION



- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. Annexe 1) appliqué au quadrilatère AC'IB', la quaterne (A, I, A+, A') est harmonique.

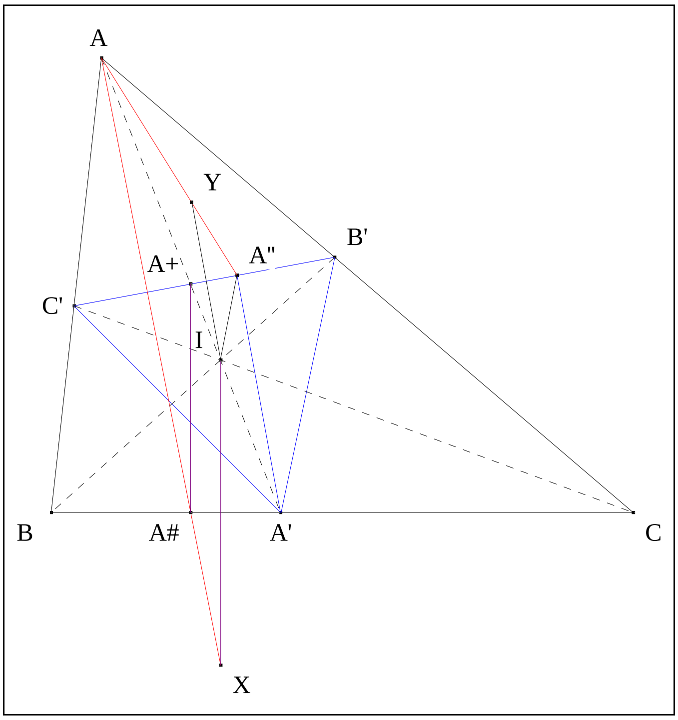
- Par définition, le pinceau (A# ; A, I, A+, A') est harmonique.

- D'après "Deux rayons perpendiculaires" (Cf. Annexe 2), (A#A') étant la bissectrice extérieure de <IA#A, (A#A+) est la bissectrice intérieure de <IA#A.

- **Scolie :** (A#A+) ⊥ (A#A').

- **Conclusion :** (A#A+) et (BC) sont perpendiculaires.

Scolie : pied de la A'-hauteur de A'B'C'



- Notons Y le symétrique de I par rapport à (B'C')
  et A" le point d'intersection de (AY) et (B'C').

- La quaterne (A, I, A+, A') étant harmonique, le pinceau (A" ; A, I, A+, A') est harmonique.

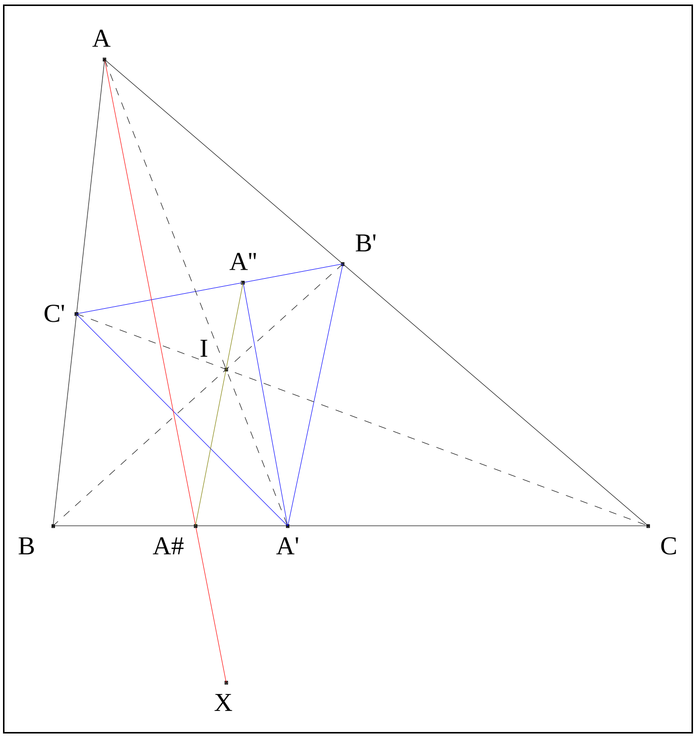
- D'après "Deux rayons perpendiculaires" (Cf. Annexe 2), (A"A+) étant la bissectrice intérieure de <IA"A, (A"A') est la bissectrice extérieure de <IA"A ; en conséquence, (A"A') ⊥ (A"A+).

- **Conclusion :** A" est le pied de la A'-hauteur de A'B'C'.

2. Deux points alignés avec I

VISION

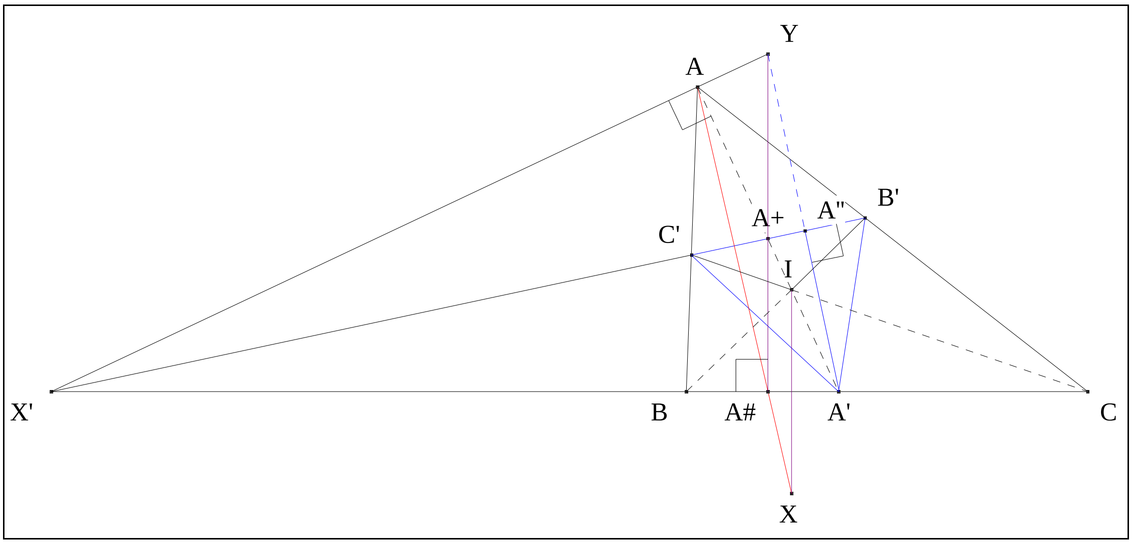
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	A'B'C'	le triangle incentral de ABC,
	A"	le pied de la A'-hauteur de A'B'C',
	X	le symétrique de I par rapport à (BC)
et	A#	le point d'intersection de (AX) et (BC)

Donné : A#, A" et I sont alignés.

VISUALISATION



- Notons A+ le point d'intersection de (AA') et (B'C'),
  et X' le point d'intersection de (B'C') et (BC).

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. Annexe 1)
  appliqué au quadrilatère AC'IB', la quaterne (B, C, A', X') est harmonique.

- Par définition, le pinceau (A ; B, C, A', X') est harmonique.

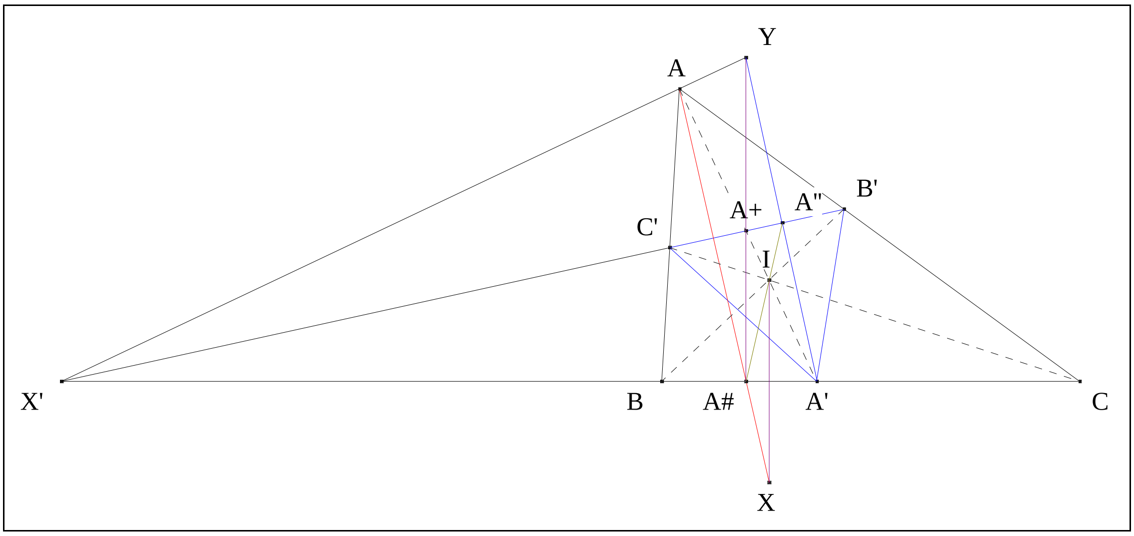
- D'après "Deux rayons perpendiculaires" (Cf. Annexe 2),
  (AA') étant la bissectrice intérieure de <BAC, (AX') est la bissectrice extérieure de <BAC ;
  en conséquence, (AX') ⊥ (AA').

- Notons Y le point d'intersection de (AX') et (A+A#).

- D'après Lemme 1. "Deux perpendiculaires", (YA#) ⊥ (BC) et (A'A") ⊥ (X'A").

- A+ étant l'orthocentre du triangle X'A'Y, (X'A") ⊥ (A'Y) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (A'A") // (A'Y) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (A'A") = (A'Y).

- **Conclusion partielle :** A', A" et Y sont alignés.



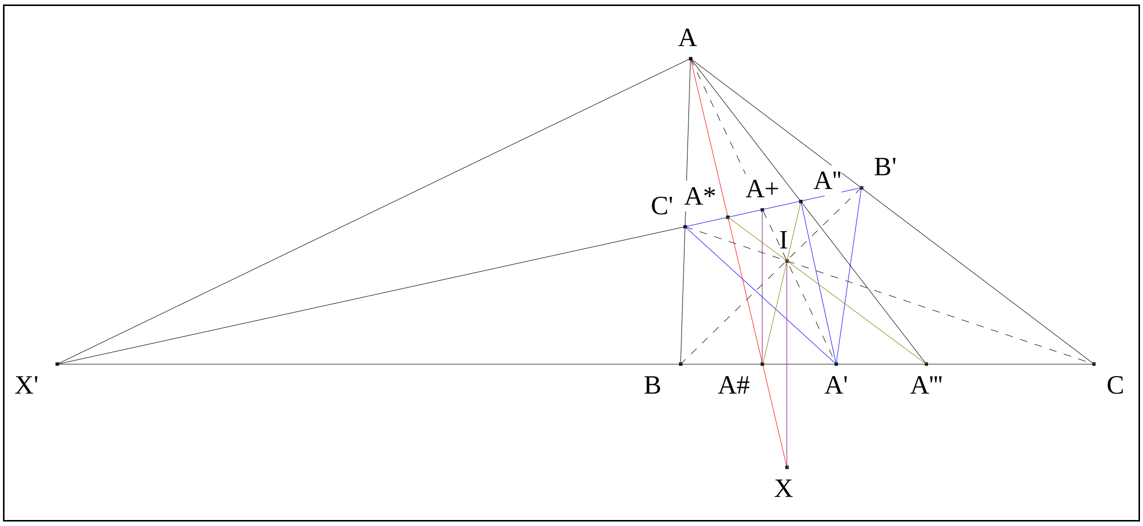
- Notons I' le point d'intersection de (A'A+) et (A"A#).

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. Annexe 1)
  appliqué au quadrilatère A'A"A+A#, la quaterne (A', A+, I', A) est harmonique;
  par permutation des deux premiers points avec les deux derniers, la quaterne (I', A, A', A+) est harmonique;
  par permutation
  du 1-ier avec le 2-ième point et du 3-ième avec le 4-ième, la quaterne (A, I', A+, A') est harmonique.

- D'après Lemme 1. "Deux perpendiculaires", la quaterne (A, I, A+, A') est harmonique;
  en conséquence, les points I et I' sont confondus.

- **Conclusion :** A", A# et I sont alignés.

Scolie : deux autres alignements



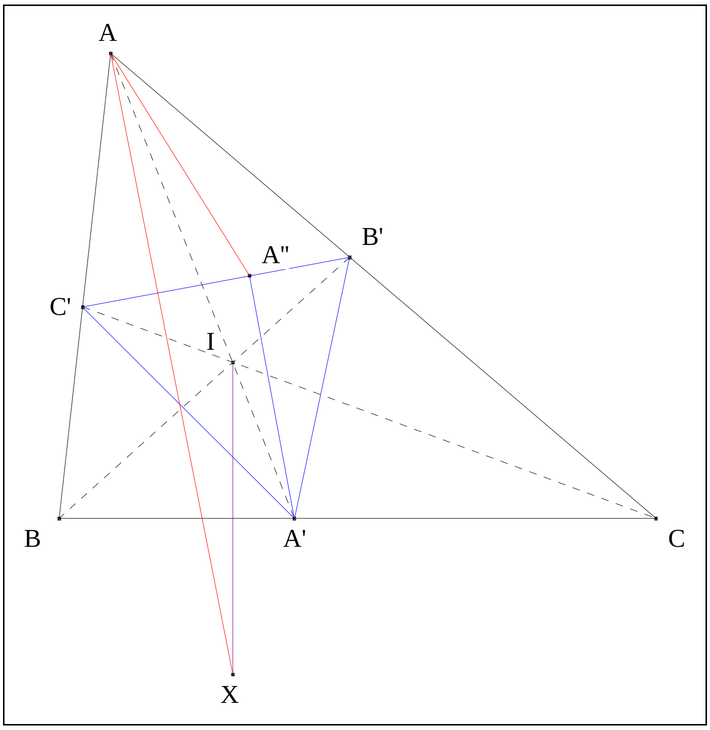
- Notons A''' le point d'intersection de (AA") et (BC)
  et A* le point d'intersection de (AX) et (B'C').

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que A*, A''' et I sont alignés.

3. Deux isogonales

VISION

Figure :

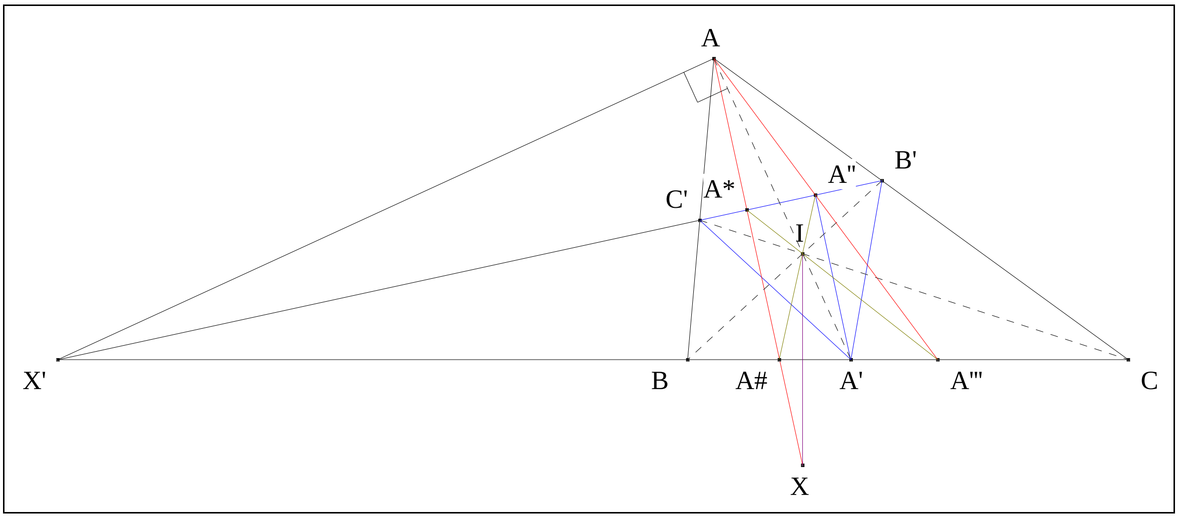


Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
A'B'C' le triangle incentral de ABC,

	A"	le pied de la A'-hauteur de A'B'C'
et	X	le symétrique de I par rapport à (BC).

Donné : (AX) et (AA") sont deux A-isogonales de ABC.

VISUALISATION



- Notons A# le point d'intersection de (AX) et (BC),
  A* le point d'intersection de (AX) et (BC),
  A''' le point d'intersection de (AA") et (BC),
  et X' le point d'intersection de (B'C') et (BC).

- D'après Lemme 2. "Deux points alignés avec I", **(1)** A", A# et I sont alignés
  (2) A*, A''' et I sont alignés.

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. Annexe 1)
  appliqué au quadrilatère A*A#A'''A", la quaterne (A#, A''', A', X') est harmonique ;
  par définition, le pinceau (A ; A#, A''', A', X') est harmonique.

- D'après Lemme 2 "Deux points alignés avec I", (AX') ⊥ (AA') ;
  en conséquence, (AA') est la bissectrice intérieure de <A#AA'''.

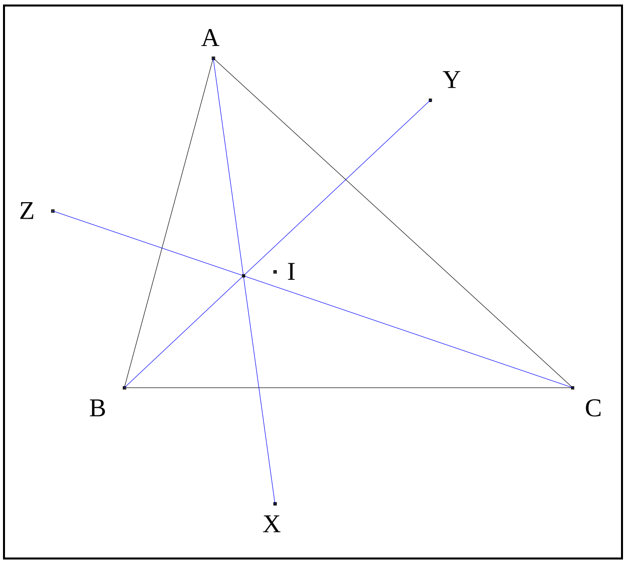
- **Conclusion :** (AX) et (AA") sont deux A-isogonales de ABC.

LE POINT DE GRAY [1]

VISION

Figure :

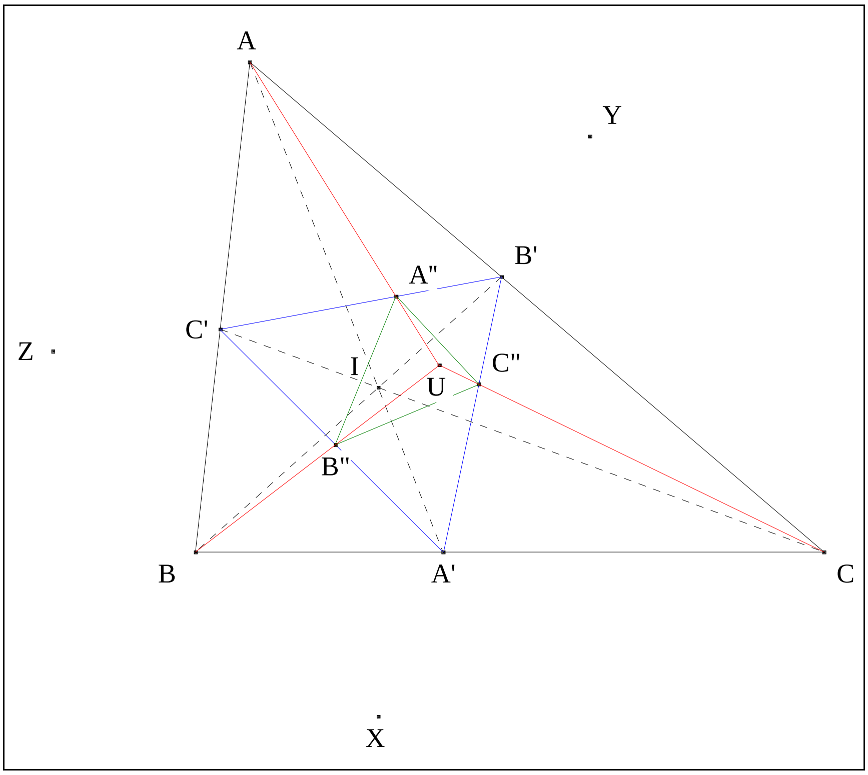
[1] Grinberg D., Gray point X(79) and X(80), Message *Hyacinthos* # 6491 du 19/09/2001.



Traits : ABC		un triangle,
	I	le centre de ABC
et	X, Y, Z	les symétriques de I par rapport aux droites (BC), (CA), (AB).

Donné : (AX), (BY), (CZ) sont concourantes.

VISUALISATION

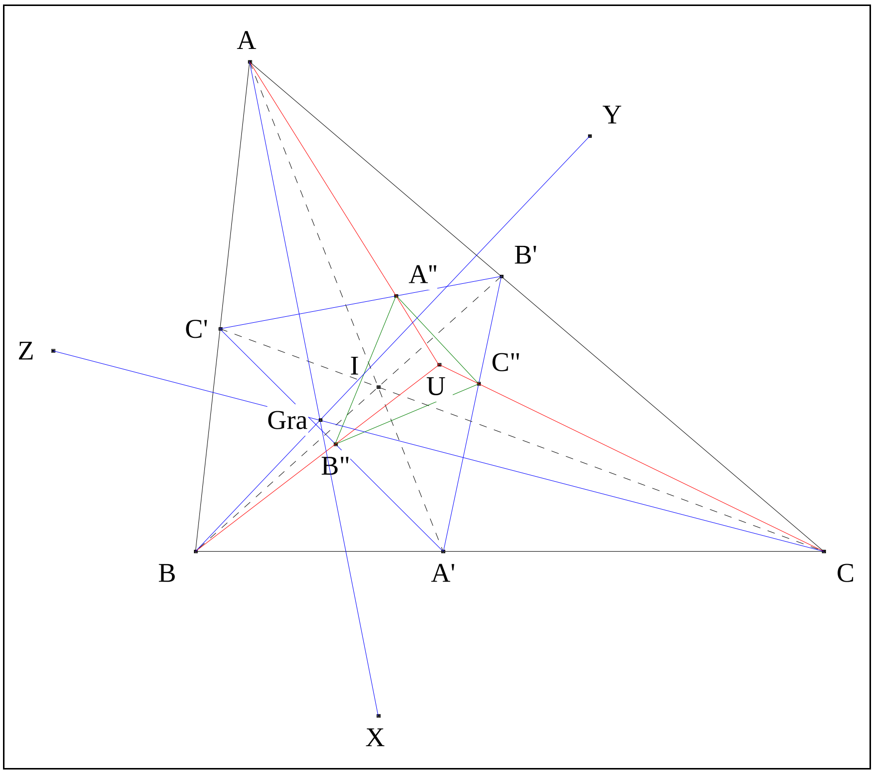


- Notons A'B'C' le triangle incentral de ABC
  et A"B"C" le triangle orthique de A'B'C'.

- Nous avons : A"B"C" est inscrit dans A'B'C', A'B'C' est inscrit dans ABC ;
  A"B"C" est en perspective avec A'B'C', A'B'C' est en perspective avec ABC ;
  d'après Döttl "The cevian nests theorem", A"B"C" est en perspective avec ABC.

- **Conclusion partielle :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 3), (AA"), (BB") et (CC") sont concourantes.

- Notons U ce point de concours.



- D'après Lemme 3. "Deux isogonales", (AX) et (AA") sont deux A-isogonales de ABC
(BY) et (BB") sont deux B-isogonales de ABC
(CZ) et (CC") sont deux C-isogonales de ABC.

- **Conclusion :** d'après "The isogonal theorem", (AX), (BY), (CZ) sont concourantes.

Note historique : lors du congrès de l'AFAS qui s'est tenu à Paris en 1889, Émile Lemoine[2] a présenté une généralisation de ce résultat.
L'année suivante, Boutin[3] a poursuivi l'étude de ce résultat dans le *Journal de Mathématiques Spéciales*. En 1896, V. Retali de Milan, puis Speckman[4] d'Arnhem ont publié à nouveau cette généralisation. En 1904, Kariya de Tokyo publie une partie de ce résultat ainsi qu'une preuve longue et peu élégante dans l'*Enseignement mathématique*[5] et la *Revista de mathematicas*[6] de Santiago du Chili. L'article de Kariya aura un succès retentissant et provoquera de nombreuses remarques, démonstrations et extensions. Parmi toutes ces réactions, citons celles de Barbarin de Bordeaux, de Demoulin de Gand, d'Harold Hiltonde Bangor, de Daniels de Fribourg (Suisse), de Franke de Berlin, de P. Faure de Paris, de Cantoni de Mantoue et de Neuberg[7].
Rappelons que Kariya demandera qu'on lui attribue ce point et précisons que Lemoine et Boutin ne s'y opposeront pas.

---

2 Lemoine E., *AFAS* (1889) 202-206.
3 Boutin A., Sur un groupe de quatre coniques remarquables du plan d'un triangle, *J.M.S.* (1890) 105, 124, 265.
4 Speckman H.-A.-W., *Mathesis* (1905) 265.
5 Kariya, *Enseignement mathématique* VI (1904) 131, 236, 406.
6 Kariya, *Revista mathematicas* (1905) 439.
7 Neuberg J., *Mathesis* (1905) 117-118.

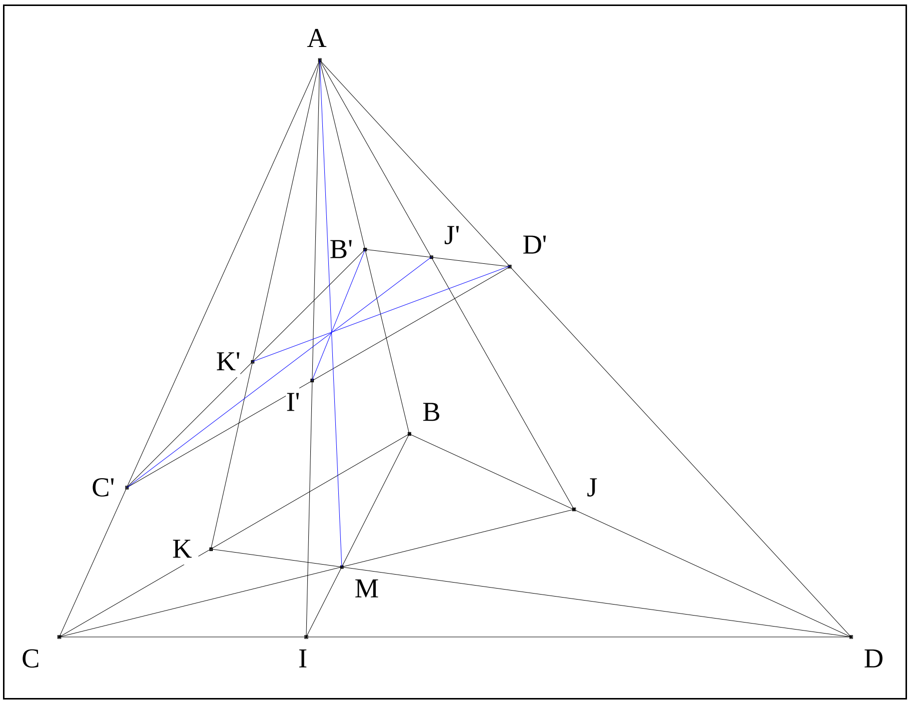
Pour terminer disons qu'il arrive fréquemment, dans les recherches sur la *Géométrie du triangle*, qu'un géomètre redécouvre un résultat déjà connu.
Darij Grinberg[8] attribue ce point de concours à Steve Gray qui l'a découvert en cherchant autre chose. Il a énoncé, sans preuve, sa découverte le 19 septembre 2001dans *Geometry-research*.

Scolie : ce point de concours, noté Gra, est "le point de Gray de ABC" ;
il est répertorié sous X_{79} chez ETC.

UN THÉORÈME CATALYTIQUE [9]

VISION

Figure :



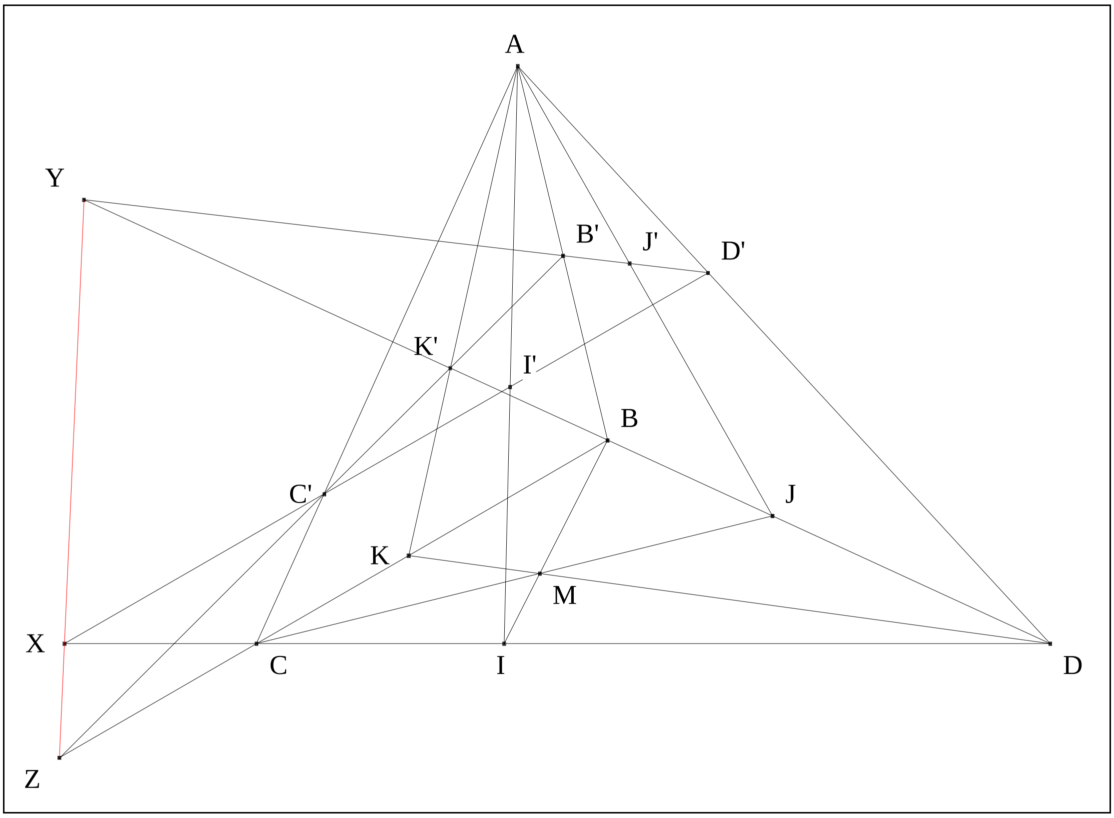
Traits :

	A	un point,
	BCD, B'C'D'	deux triangles en perspective de centre A,
	M	un point,
	IJK	le triangle M-cévien de BCD
et	I', J', K'	les points d'intersection de (AI) et (C'D'), de (AJ) et (D'B'), de (AK) et (B'C').

Donné : (B'I'), (C'J'), (D'K') et (AM) sont concourantes.

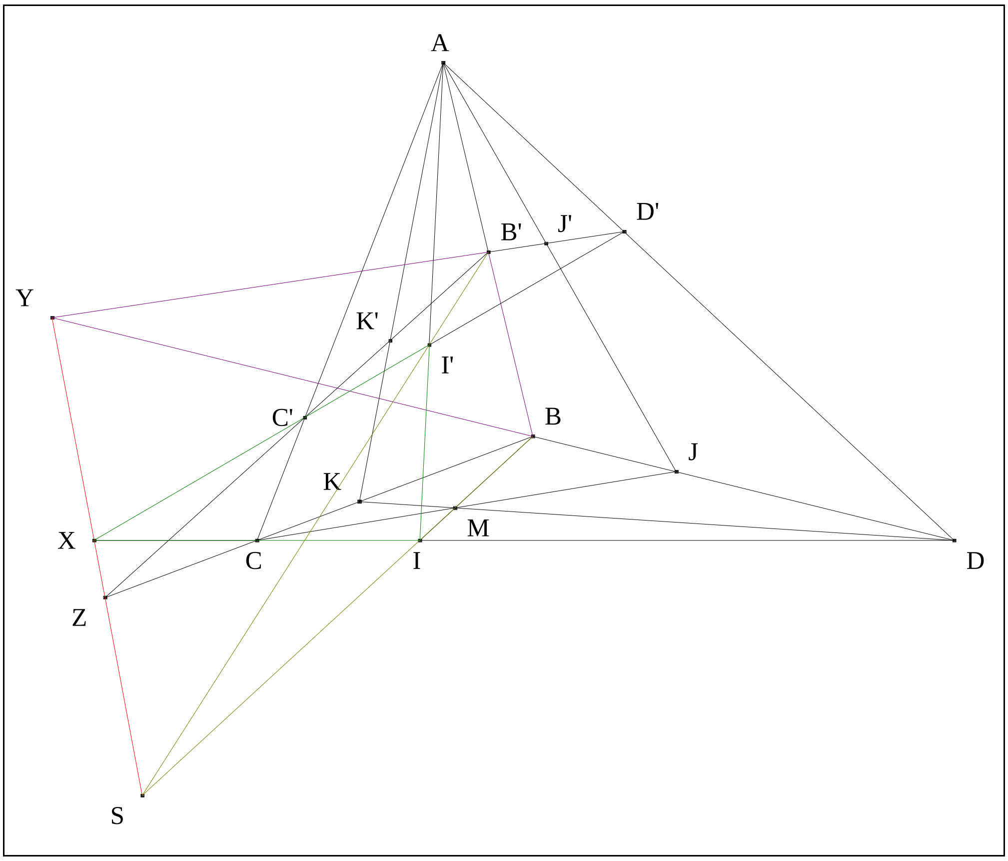
VISUALISATION

8 Grinberg D., Gray point X(79) and X(80), Message *Hyacinthos* # 6491 du 19/09/2001.
9 Grinberg D., Two Lemuan's points, Message *Hyacinthos* # 9923 du 20/06/04.



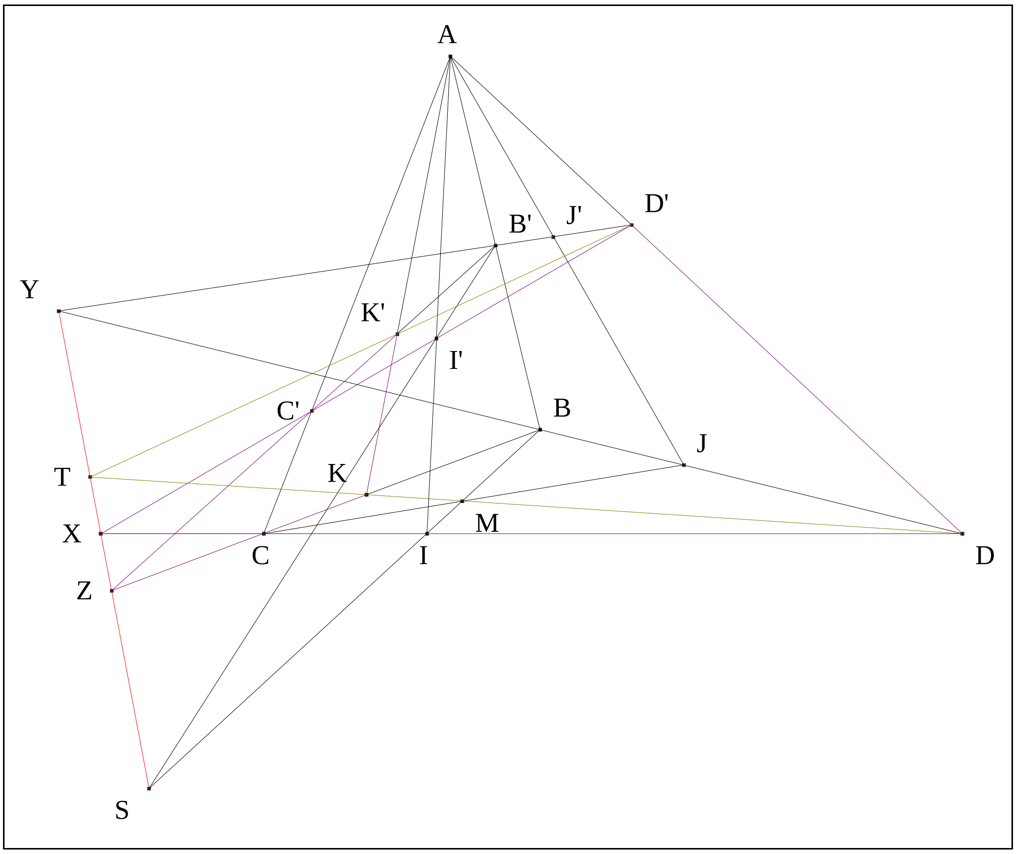
- Notons X, Y, Z les points d'intersection resp. de (CD) et (C'D'), de (DB) et (D'B'), de (BC) et (B'C').

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 3),
  (XYZ) est l'axe de BCD et B'C'D' en perspective de centre A.



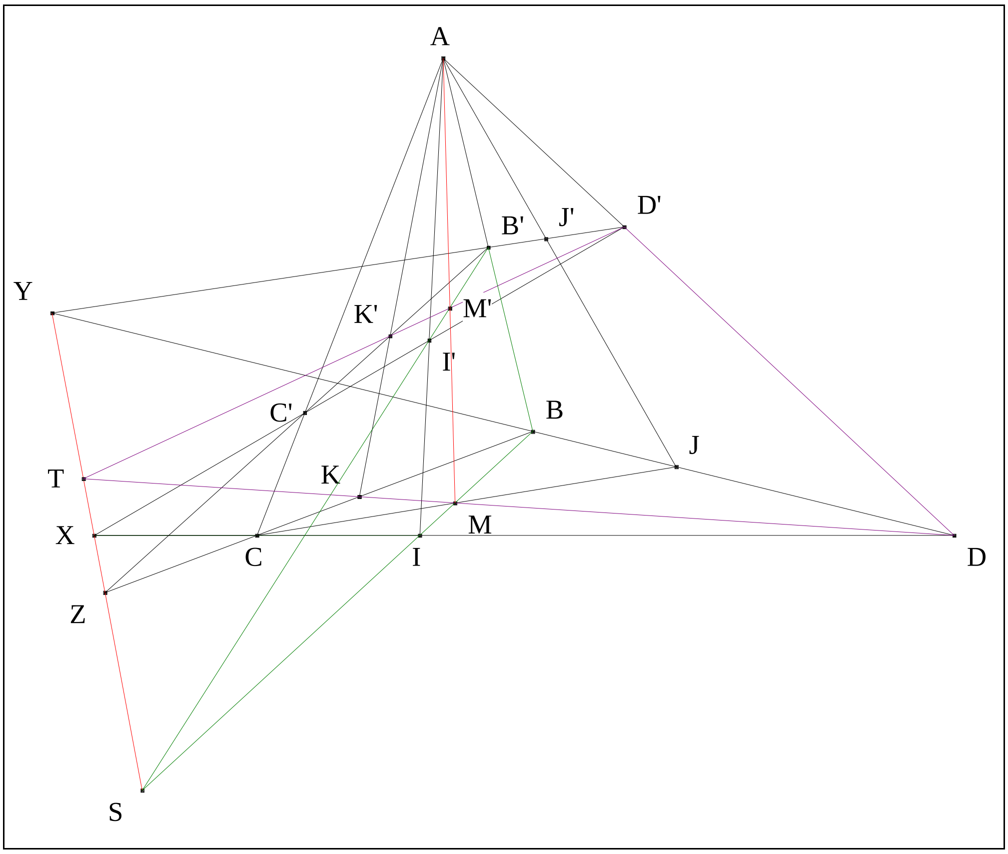
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 3), (AD'D) étant l'axe des triangles BB'Y et II'X, BB'Y et II'X sont en perspective ; en conséquence, (BI), (B'I') et (YX) sont concourantes.

- Notons S ce point de concours.



- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 3), (AC'C) étant l'axe des triangles DD'X et KK'Z, DD'X et KK'Z sont en perspective ; en conséquence, (DK), (D'K') et (XZ) sont concourantes.

- Notons T ce point de concours.



- Notons M' le point d'intersection de (D'K'T) et (B'I'S).

- Par définition, les triangles DD'T et BB'S sont en perspective de centre Y.

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 3)
  (AM'M) est l'axe de perspective de DD'T et BB'S.

- **Conclusion partielle :** (D'K'), (B'I') et (AM'M) sont concourantes.

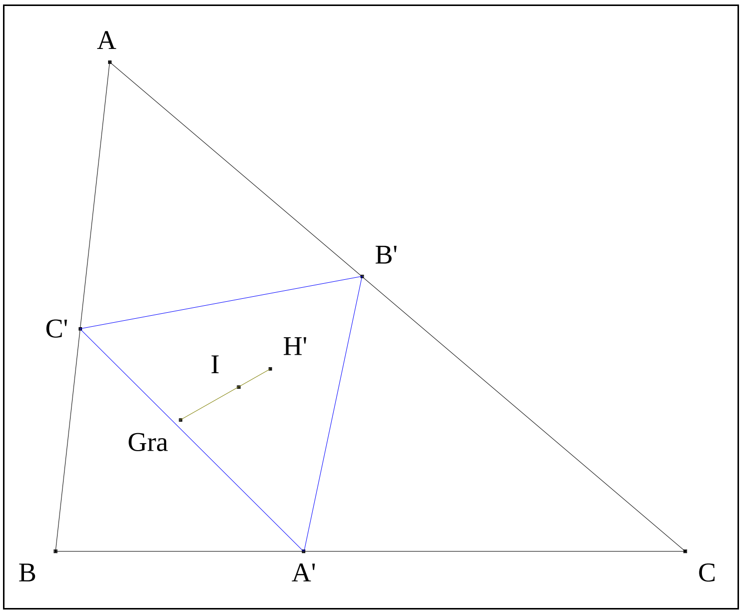
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B'I'), (C'J') et (AM'M) sont concourantes.

- **Conclusion :** (B'I'), (C'J'), (D'K') et (AM) sont concourantes.

L'ALIGNEMENT Gra – I – X_{500}

VISION

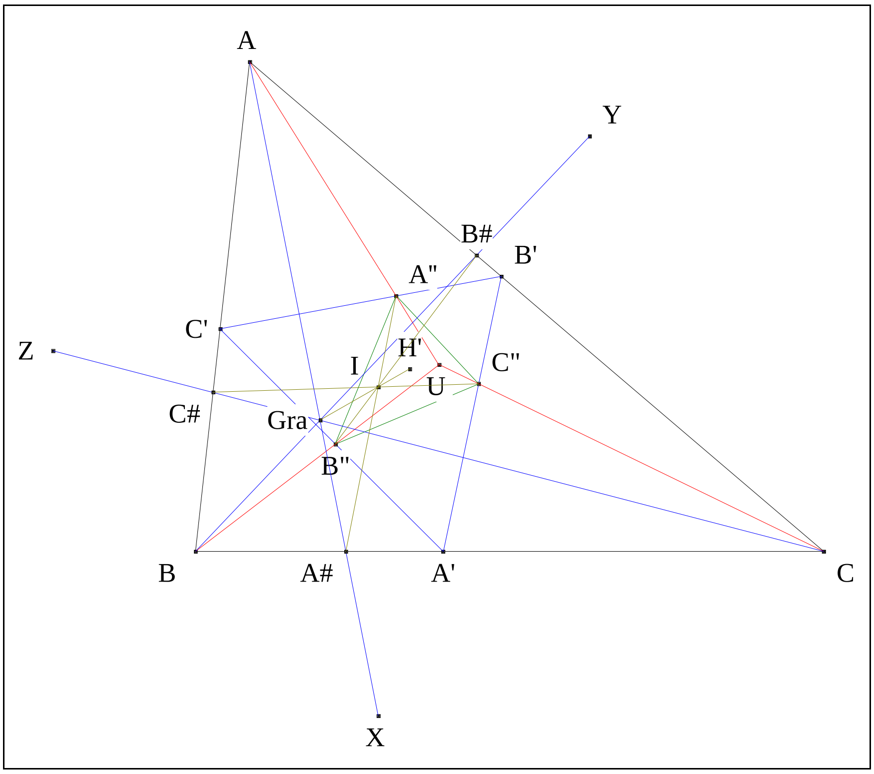
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	Gra	le point de Gray de ABC,
	A'B'C'	le triangle incentral de ABC
et	H'	l'orthocentre de A'B'C'.

Donné : H', Gra et I sont alignés.

VISUALISATION



- Notons A#B#C" le triangle Gra-cévien de ABC.

- D'après Lemme 2. "Deux points alignés avec I", les triangles A"B"C" et A#B#C# sont en perspective de centre I.

- D'après "Un théorème catalytique" appliqué à ABC et A'B'C' en perspective de centre I et au point Gra, (A'A"), (B'B"), (C'C") et (IGra) sont concourantes.

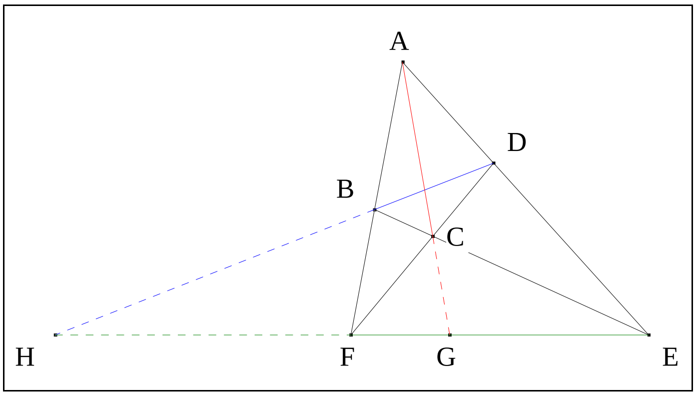
- **Scolie :** (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes en H'.

- **Conclusion :** H', Gra et I sont alignés.

Scolie : H' est répertorié sous X_{500} chez ETC.

ANNEXE

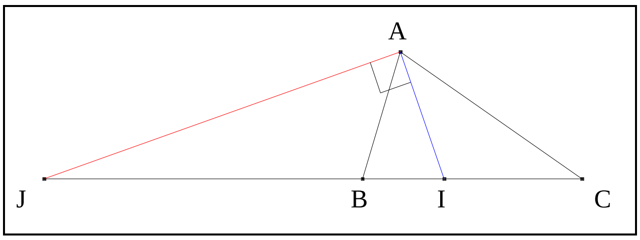
1. "Diagonales d'un quadrilatère" de Pappus[10]



Traits : ABCD un quadrilatère,
E, F les points d'intersection de (AD) et (BC), de (AB) et (CD),
G, H le point d'intersection de (AC) et (EF), de (BD) et (EF).

Donné : la quaterne (E, F, G, H) est harmonique.

2. Deux rayons perpendiculaires



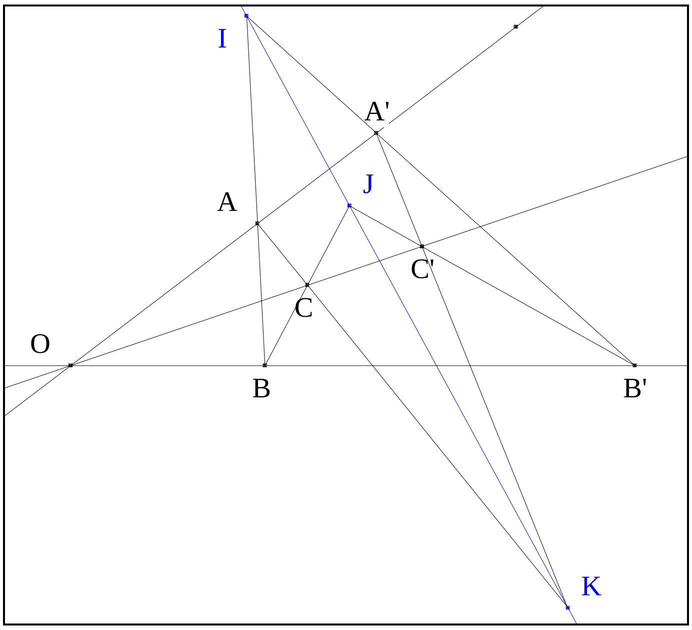
Traits : ABC un triangle,
et I, J deux point de (BC) tels que la quaterne (B, C, I, J) soit harmonique.

Donné : (AI) est la A-bissectrice intérieure de ABC

[10] Pappus, *Collections*, Livre 7, proposition 131.

si, et seulement si,
(AJ) est la A-bissectrice extérieure de ABC.

3. "Le théorème des deux triangles" de Desargues[11]



Traits : ABC un triangle,
A'B'C' un triangle tel que les droites (AA') et (BB') soient concourantes,
O le point de concours de (AA') et (BB'),
I le point d'intersection des droites (AB) et (A'B'),
J le point d'intersection des droites (BC) et (B'C')
et K le point d'intersection des droites (CA) et (C'A').

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si*, les points I, J et K sont alignés.

[11] Bosse A. (1602-1676), *Perspective et de la Coupe des pierres*.