LE POINT DE KOSNITZA

EST

L'ISOGONAL DU CENTRE DU CERCLE D'EULER

Jean-Louis AYME

Résumé. Nous présentons une preuve purement synthétique d'un résultat de John Rigby concernant l'isogonal du point de Kosnitza d'un triangle.
Cette preuve originale est bâtie "homme par homme", à partir d'un résultat revisité de Nikolaos Dergiades dont le rayonnement éclaire le point de Kosnitza et les cercles de Musselman, et d'un résultat de Karl Feuerbach, à savoir le centre du cercle d'Euler, dont le charme permet de conclure.
Tous les résultats cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

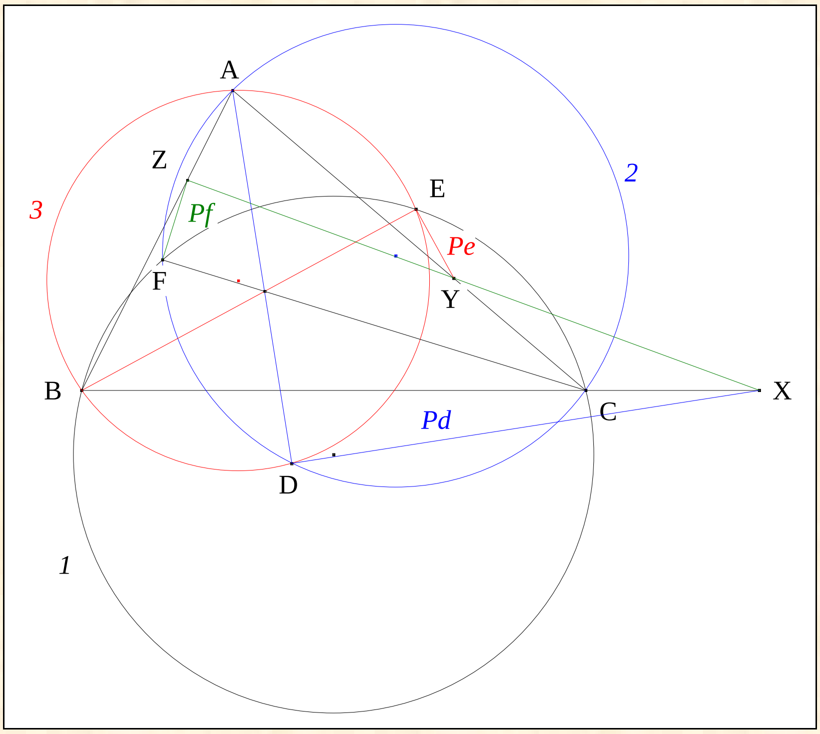
NIKOLAOS DERGIADES [1]

VISION

Figure :

---

[1] Dergiades N., Othogonal colinearity theorem, Message *Hyacinthos* # 6466 du 02/02/2003.

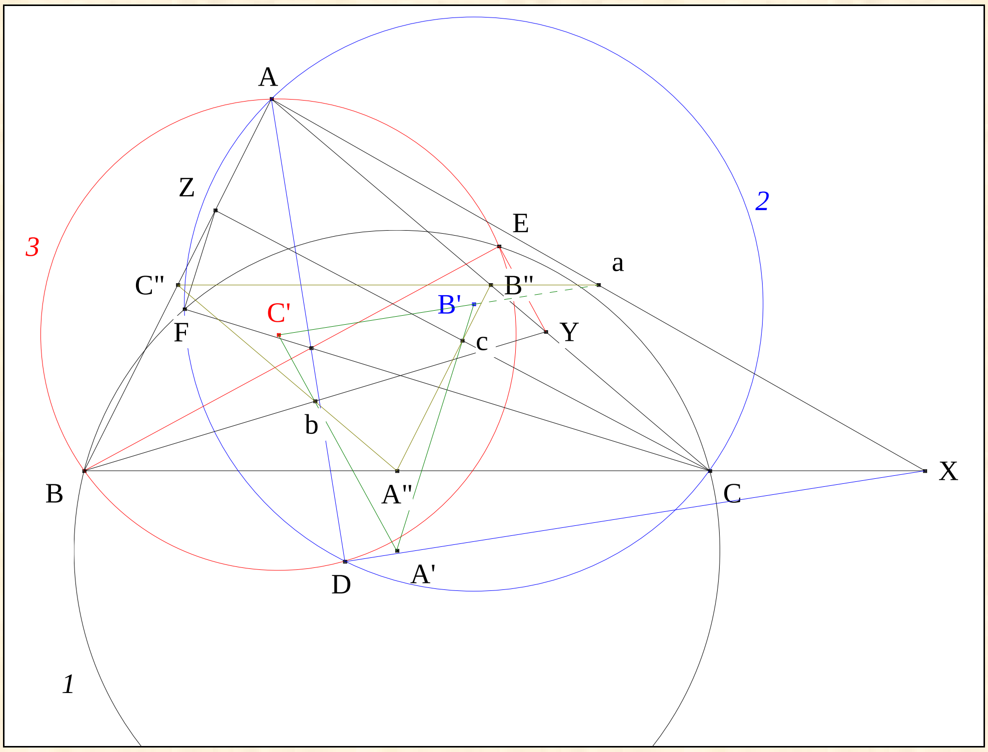


Traits :	ABC	un triangle,
	1, *2*, *3*	trois cercles passant par B et C, par C et A, par A et B,
	D, E, F	les seconds points d'intersection de *2* et *3*, de *3* et *1*, de *1* et *2*,
	*P*d, *P*e, *P*f	les perpendiculaires aux droites (AD), (BE), (CF) en D, E, F,
et	X, Y, Z	les points d'intersection de *P*d, *P*e, *P*f avec (BC), (CA), (AB).

Donné : les points X, Y et Z sont alignés.

VISUALISATION

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" appliqué à *1*, *2* et *3*, deux à deux sécants (Cf. Annexe 1), les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes.

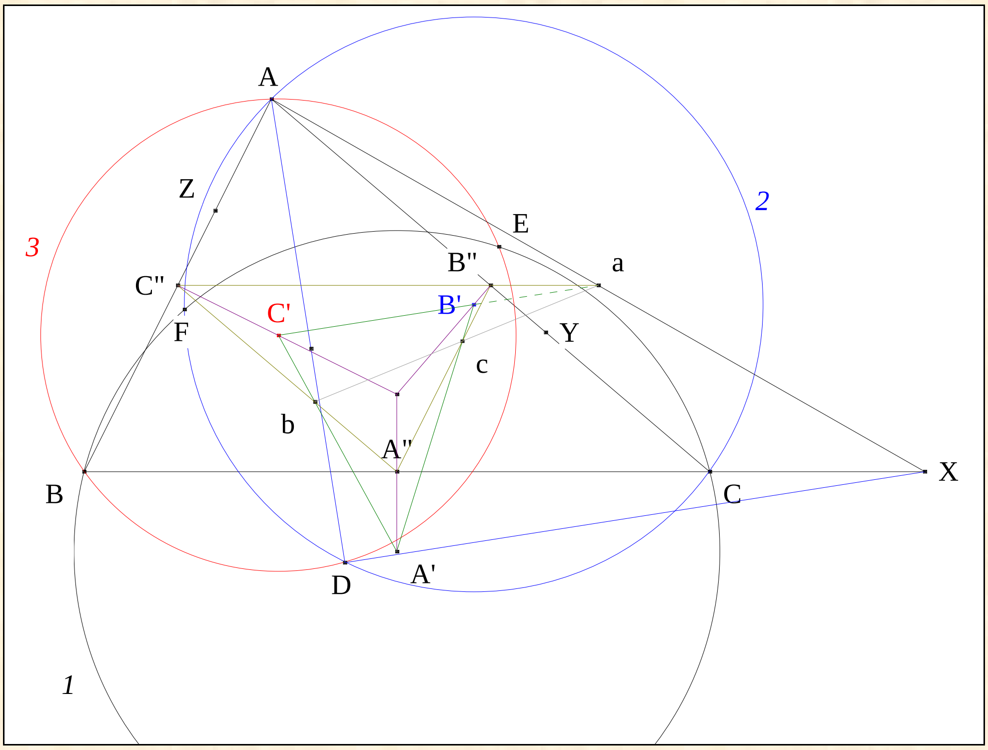


- Notons A', B', C' les centres de *1*, *2*, *3*,
  A", B", C" les milieux de [BC], [CA], [AB],
  et a, b, c les milieux de [AX], [BY], [CZ].

- D'après le théorème de la médiatrice, (B'C') est la médiatrice de [AD] ;
  en conséquence, (B'C') ⊥ (AD) ;
  par hypothèse, (AD) ⊥ (DX) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (B'C') // (DX) ;
  d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle ADX, (B'C') passe par a
  i.e. les points B', C' et a sont alignés.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que les points C', A' et b sont alignés
  les points A', B' et c sont alignés.

- D'après Thalès "La droite des milieux" et le postulat d'Euclide, les points B", C" et a sont alignés
  les points C", A" et b sont alignés
  les points A", B" et c sont alignés.



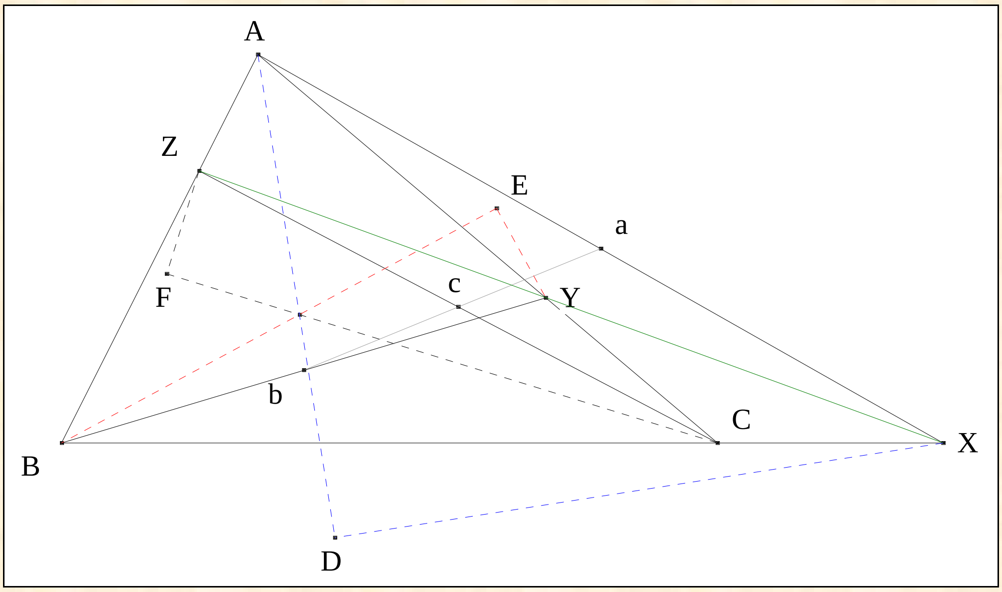
- D'après le théorème de la médiatrice,

(1)	(A'A")	est la médiatrice de [BC]
(2)	(B'B")	est la médiatrice de [CA]
(3)	(C'C")	est la médiatrice de [AB] ;

  en conséquence, (A'A"), (B'B") et (C'C") concourent au centre du cercle circonscrit de ABC.

- Par définition, les triangles A'B'C' et A"B"C" sont perspectifs.

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" appliqué aux triangles perspectifs A'B'C' et A"B"C" (Cf. Annexe 2), les points a, b et c sont alignés.



- **Conclusion :** d'après Gauss-Newton "La droite de..." appliqué au quadrilatère BCYZ, les milieux a, b, c des diagonales [AX], [BY] et [CZ] étant alignés, les points X, Y et Z sont alignés.

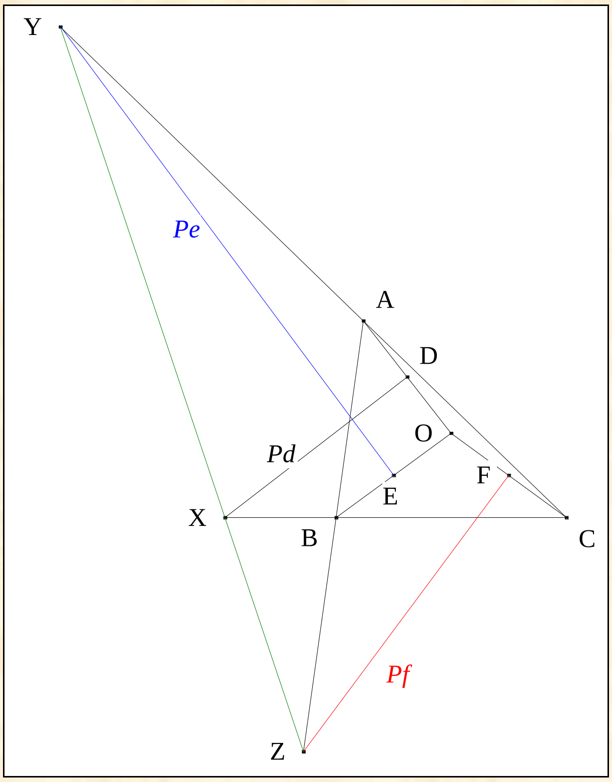
Scolie : la preuve de Dergiades utilise les théorèmes de Céva dans sa version trigonométrique et de Ménélaüs.

Commentaire : l'énoncé a été reformulé par l'auteur.

L'AUTEUR

VISION

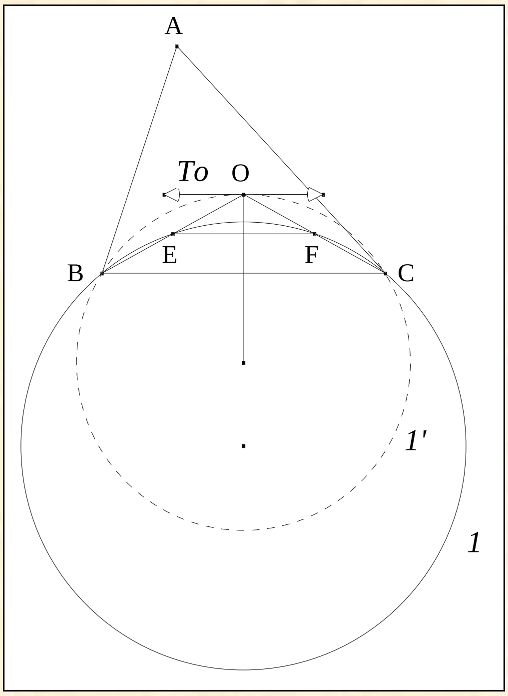
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	D, E, F	les milieux de [OA], [OB], [OC],
	*P*d, *P*e, *P*f	les médiatrices de [OA], [OB], [OC],
et	X, Y, Z	les points d'intersection de *P*d, *P*e, *P*f respectivement avec (BC), (CA), (AB).

Donné : les points X, Y et Z sont alignés.

VISUALISATION



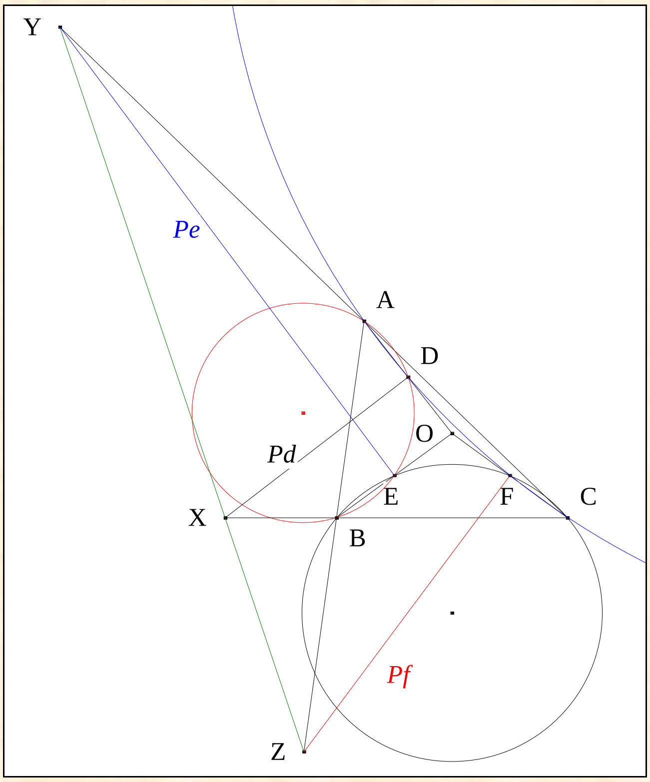
- Notons *1'* le cercle circonscrit au triangle OBC
  et To la tangente à *4* en O.

- Le triangle OBC étant isocèle en O, To // (BC).

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué à OBC, (BC) // (EF) ;
  par transitivité de la relation //, To // (EF).

- Le cercle *4*, les points de base B et C, les moniennes naissantes (OBE) et (OCF), les parallèles To et (EF), conduisent au théorème **1"** de Reim ; en conséquence, B, C, E et F sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que C, A, F et D sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que A, B, D et E sont cocycliques.

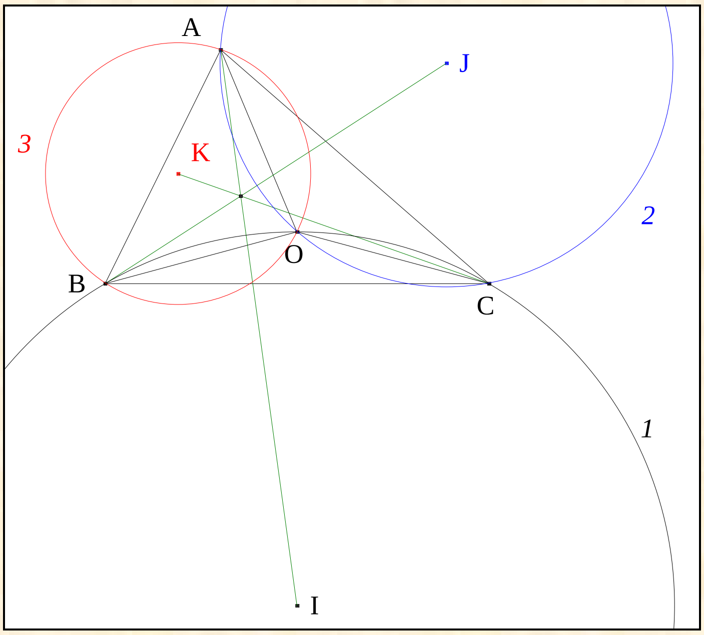
- Notons *3* ce cercle.

- **Conclusion :** d'après Nikolaos Dergiades appliqué à ABC et aux cercles *1*, *2*, *3* deux à deux sécants, les points X, Y et Z sont alignés.

CEZAR KOSNITZA

VISION

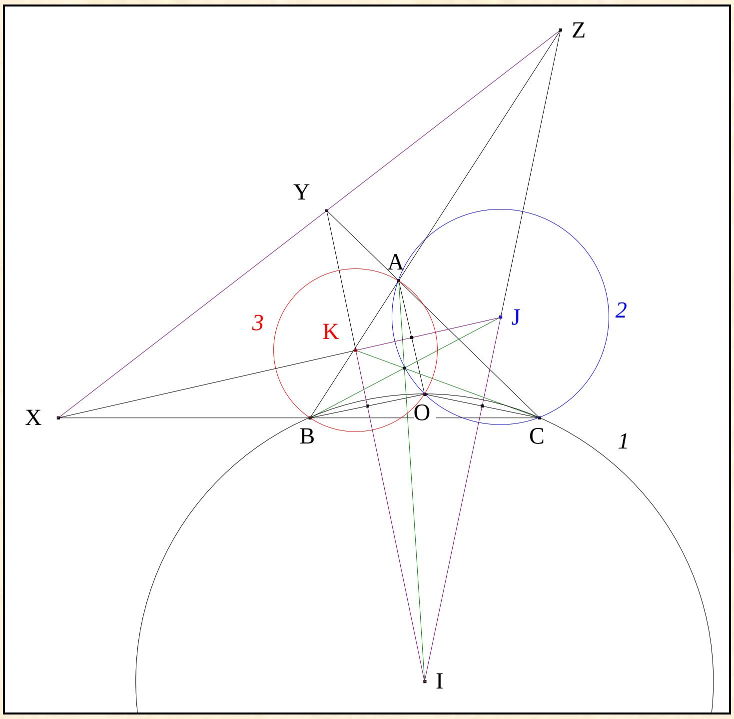
Figure :



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
1, *2*, *3* les cercles circonscrits aux triangles OBC, OCA, OAB
et I, J, K les centres de *1*, *2*, *3*.

Donné : les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

VISUALISATION



- Notons X, Y, Z les points d'intersection de (JK) et (BC), de (KI) et (CA), de (IJ) et AB.

- D'après le théorème de la médiatrice, (JK) est la médiatrice de [OA]
(KI) est la médiatrice de [OB]
(IJ) est la médiatrice de [OC].

- D'après l'auteur, les points X, Y et Z sont alignés.

- **Scolie :** (XYZ) est l'arguésienne des triangles perspectifs ABC et IJK.

- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" appliqué à ABC et IJK (Cf. Annexe 2), les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

Scolies : **(1)** ce point de concours, noté Ks, est "le point de Kosnitza de ABC" ; il est répertorié sous X_{54} chez ETC [2].

(2) (AI), (BJ), (CJ) sont "les A, B, C-droites de Kosnitza de ABC".

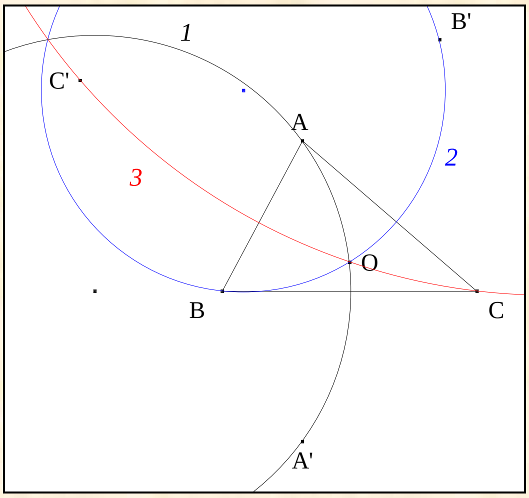
(3) IJK est "le triangle de Kosnitza de ABC".

Note historique : ce point de concours, attribué à Kosnitza, est apparu dans la revue roumaine *Gazeta Matematika* ce qui suggère que ce géomètre est peut être un professeur roumain. Jordan Tabov corrobore cette suggestion en précisant qu'il a trouvé une référence à Kosnitza dans un livre roumain.
Le docteur Paul A. Blaga de l'université Babes-Boylyai de Cluj Napoca (Roumanie) m'a précisé que Cezar Kosnitza (1910-1962) a enseigné à l'Institut Polytechnique de Bucarest (Roumanie) et écrit de nombreux livres dont l'un écrit en français vers 1940, concerne les coordonnées barycentriques. Ce livre, tiré en un petit nombre d'exemplaires, est connu seulement des passionnés de la Géométrie du Triangle.

J. R. MUSSELMAN [3]

VISION

Figure :



---

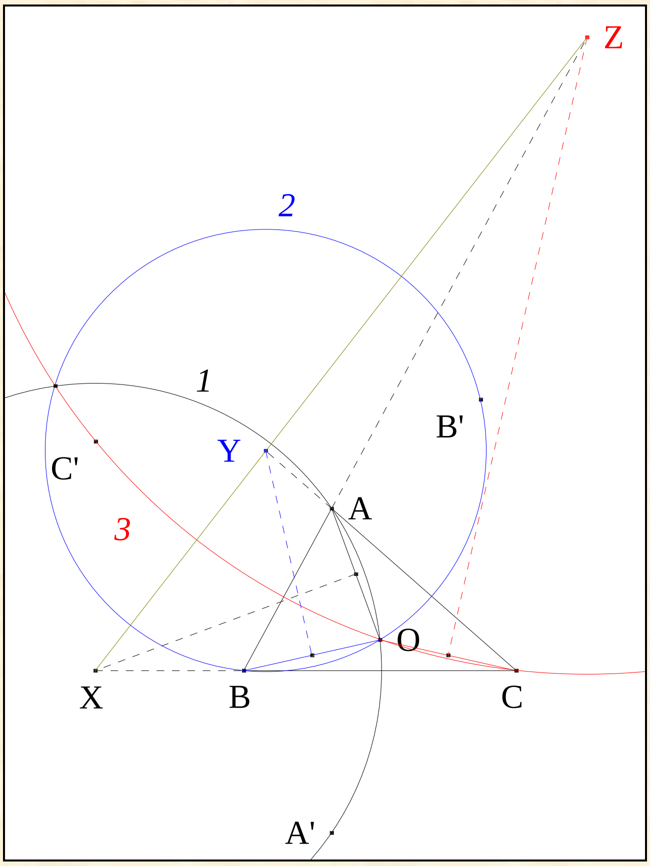
2 http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html#X54.

3 Musselman J. R., Advanced Problem 3928, *American Mathematical Monthly* 46 (1939) 601.

Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
A', B', C' les symétriques de A, B, C par rapport aux droites (BC), (CA), AB)
et *1, 2, 3* les cercles circonscrits aux triangles AOA', BOB', COC'.

Donné : *1*, *2* et *3* se recoupent en un second point.

VISUALISATION



- Notons X, Y, Z les centres de *1*, *2*, *3*.
- Les médiatrices de [OA], [OB], [OC] passent respectivement par X, Y, Z.
- D'après l'auteur, X, Y et Z sont alignés.
- **Conclusion :** les cercles concourants *1*, *2* et *3* ayant leurs centres alignés, se recoupent en un second point.

Scolies : **(1)** *1*, *2*, *3* sont les A, B, C-cercles de Musselman de ABC.

(2) Le second point d'intersection est le point de Gibert de ABC ;
il est répertorié sous X_{1157} chez ETC [4].

Note historique : ce résultat de l'américain Musselman a été démontré et généralisé par le belge René Goormaghtigh[5] ; sa preuve a recours aux nombres complexes.

---

[4] http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html#X1157.
[5] Goormaghtigh R., Advanced Problem 3928, *American Mathematical Monthly* 48 (1941) 281-283.

Notons que cette généralisation était connue du belge Joseph Neuberg[6].
Rappelons que la preuve proposée par Darij Grinberg a recours à l'inversion.

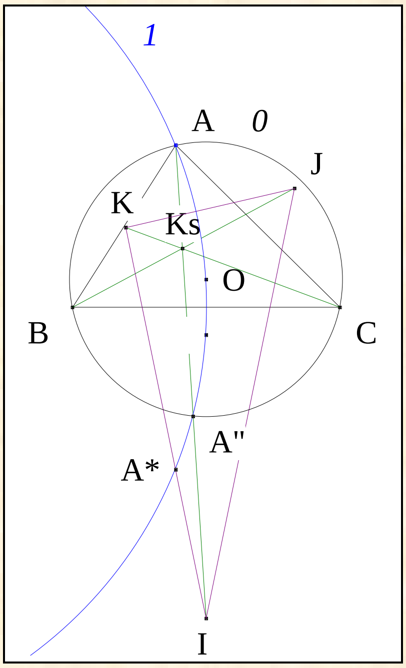
L'AUTEUR

OU

"MUSSELMAN ET KOSNITZA"

VISION

Figure :

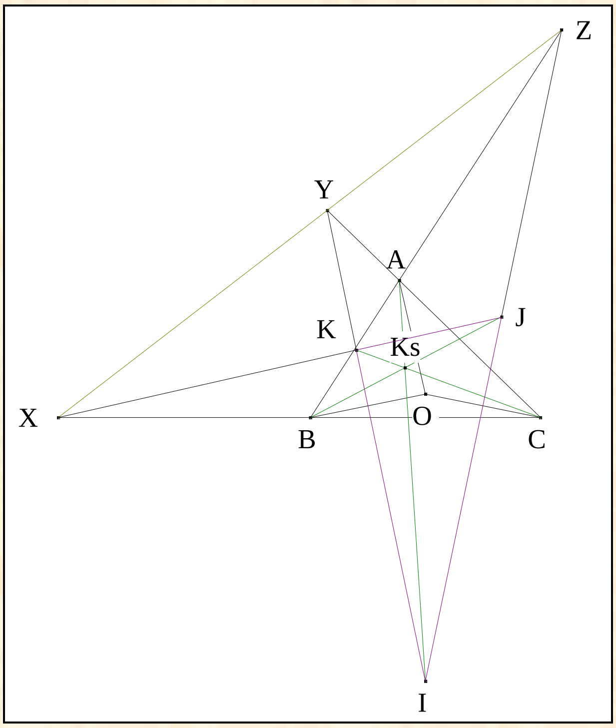


Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit de ABC,
	O	le centre de *0*,
	IJK	le triangle de Kosnitza,
	Ks	le point de Kosnitza de ABC,
	A*	le symétrique de A par rapport à (BC),
	1	le A-cercle de Musselman de ABC
et	A"	le second point d'intersection de *0* et *1*.

Donné : les points A, Ks, A" et I sont alignés.

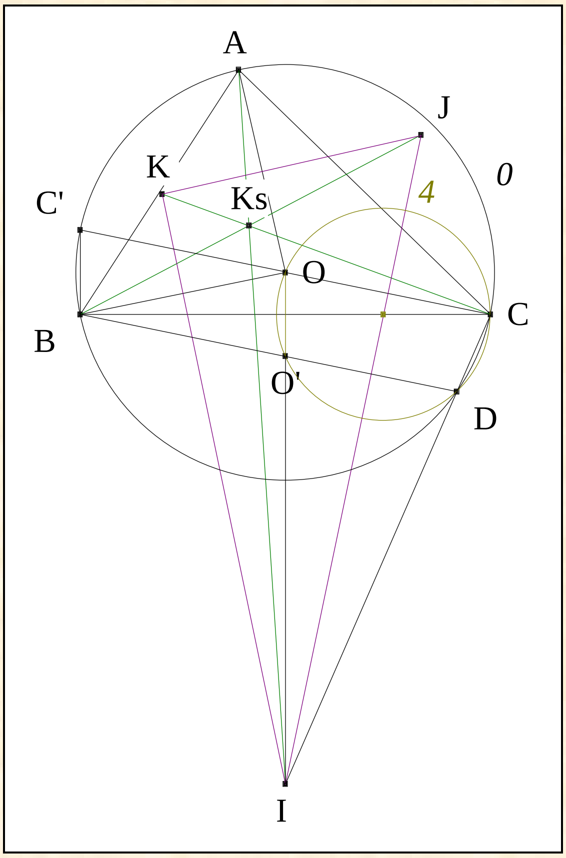
VISUALISATION

[6] Neuberg J., Mémoire sur le Tétraèdre (1884).



- Notons X, Y, Z les points d'intersection de (JK) et (BC), de (KI) et (CA), de (IJ) et AB.

- D'après l'auteur, X, Y et Z sont alignés.



- Notons C' le second point d'intersection de (CO) avec *0*,
  O' le symétrique de O par rapport à (BC)
  et D le second point d'intersection de (BO') avec *0*.

- **Scolie :** (OO') passe par I.

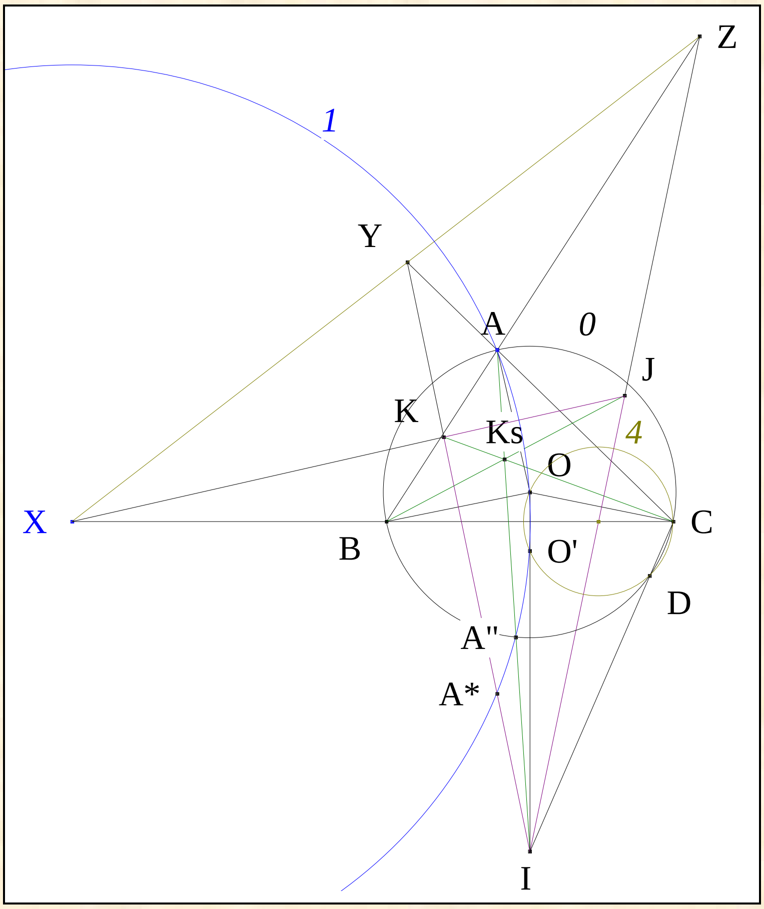
- D'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi cercle", (C'B) ⊥ (BC) ;
  par construction, (BC) ⊥ (OO') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (C'B) // (OO').

- Le cercle *0*, les points de base C et D, les moniennes naissantes (C'CO) et (BDO'), les parallèles (C'B) et (OO'), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, C, D, O et O' sont cocycliques.

- Notons *4* ce cercle.

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle CC'B, BC' = OO' ;
  le quadrilatère BO'OC' ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (BO') // (C'O).

- Le trapèze O'DCO étant cyclique, est isocèle ; il admet (IJ) pour axe de symétrie ;
  en conséquence, (CD) passe par I.



- **Scolie :** *1* est le cercle de centre X passant par A ; il passe par O, O' et A*.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" appliqué à *0*, *1* et *4* (Cf. Annexe 1), A, A" et I sont alignés.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, les points A, Ks, A" et I sont alignés.

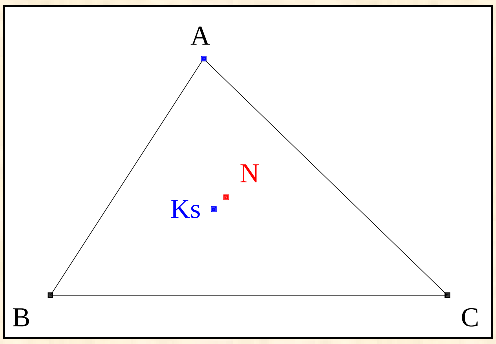
JOHN RIGBY

OU

Ks **ISOGONAL DE** N

VISION

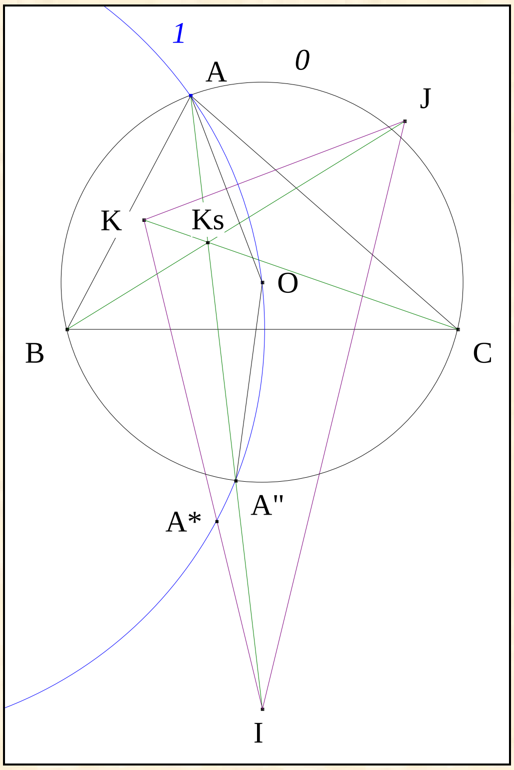
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	N	le centre du cercle d'Euler de ABC
et	Ks	le point de Kosnitza de ABC.

Donné : Ks est l'isogonal de N relativement à ABC[7].

VISUALISATION

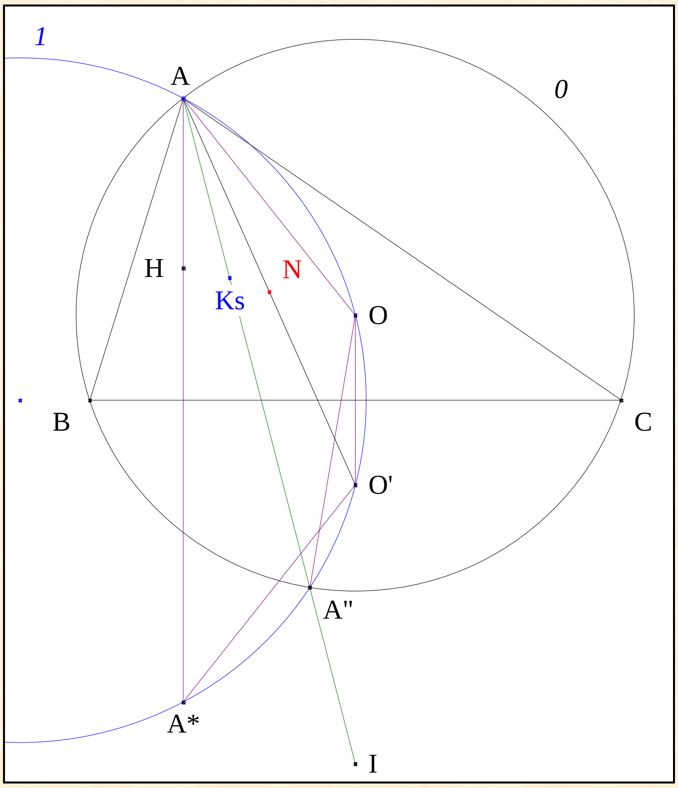


[7] Rigby J., Brief notes on some forgotten geometrical theorems, Mathematics & Informatics Quarterly, 7 (1997) 156158.

- Notons *0* le cercle circonscrit de ABC,
  O le centre de *0*,
  IJK le triangle de Kosnitza,
  A* le symétrique de A par rapport à (BC),
  1 le A-cercle de Musselman de ABC
  et A" le second point d'intersection de *0* et *1*.

- D'après "Musselman et Kosnitza", les points A, Ks, A" et I sont alignés.

- **Conclusion partielle :** par définition, le triangle OAA" est isocèle en O.



- Notons H l'orthocentre de ABC
  et O' le symétrique de O par rapport à (BC),.

- **Scolies :** **(1)** *1* passe par O'
  (2) (AO') passe par N
  (3) par définition d'une hauteur, (AA*) passe par H.

- Le quadrilatère cyclique AA*O'O étant un trapèze isocèle, A*O' = AO ;
  le triangle OAA" étant isocèle en O, AO = OA" ;
  par transitivité de la relation =, A*O' = OA".

- Nous avons : <A*AO' = <A"AO.

- **Scolie :** (AH) et (AO) sont deux A-isogonales de ABC.

- Par une chasse angulaire, nous montrerions que (AA") et (AO') sont deux A-isogonales de ABC.

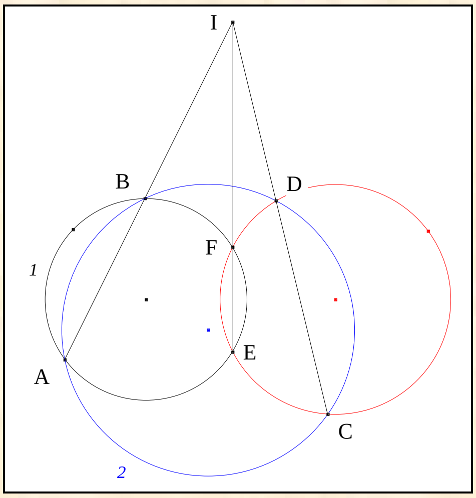
- **Conclusion partielle :** (AKs) et (AN) sont deux A-isogonales de ABC.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BKs) et (BN) sont deux B-isogonales de ABC
  (CKs) et (CN) sont deux C-isogonales de ABC.

- **Conclusion :** par définition, Ks est l'isogonal de N relativement à ABC.

ANNEXE

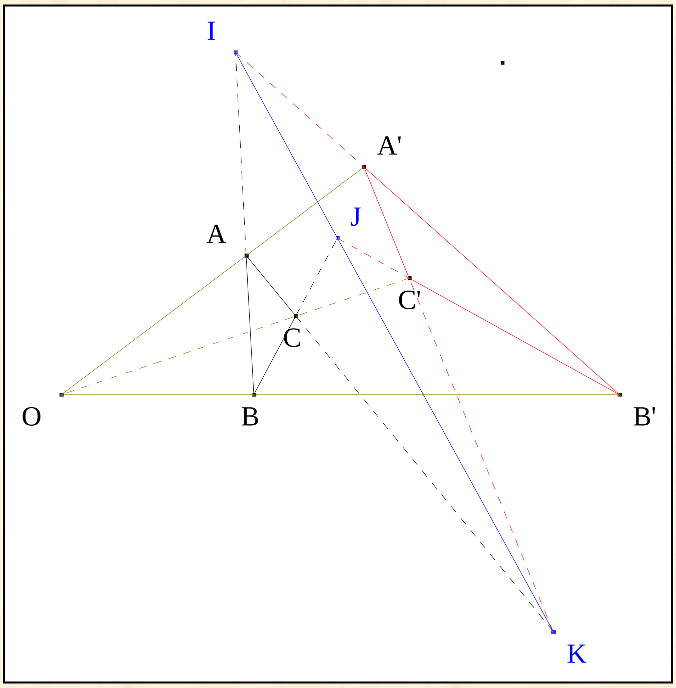
1. Le théorème des trois cordes de Monge



Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	C, D	deux points de *2*,
	E, F	deux points de *1*
et	I	le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

Donné : les points C, D, E et F sont cocycliques
si, et seulement si,
les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes en I.

2. Le théorème des deux triangles de Desargues



Traits :	ABC	un triangle,
	A'B'C'	un triangle tel que les droites (AA') et (BB') soient concourantes,
	O	le point de concours de (AA') et (BB'),
et	I, J, K	le point d'intersection de (AB) et (A'B'), de (BC) et (B'C'), de (CA) et (C'A').

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* les points I, J et K sont alignés.