

**LE POINT DE KOSNITZA
EST
L'ISOGONAL DU CENTRE DU CERCLE D'EULER**

Jean-Louis AYME

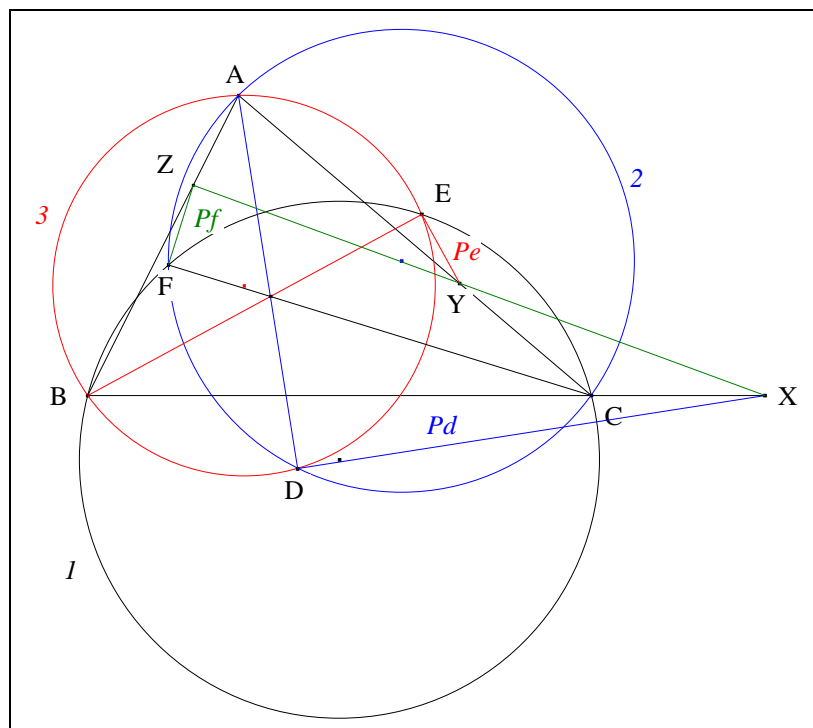
Résumé. Nous présentons une preuve purement synthétique d'un résultat de John Rigby concernant l'isogonal du point de Kosnitza d'un triangle. Cette preuve originale est bâtie "homme par homme", à partir d'un résultat revisité de Nikolaos Dergiades dont le rayonnement éclaire le point de Kosnitza et les cercles de Musselman, et d'un résultat de Karl Feuerbach, à savoir le centre du cercle d'Euler, dont le charme permet de conclure. Tous les résultats cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

NIKOLAOS DERGIADES ¹

VISION

Figure :

¹ Dergiades N., Orthogonal colinearity theorem, Message *Hyacinthos* # 6466 du 02/02/2003.

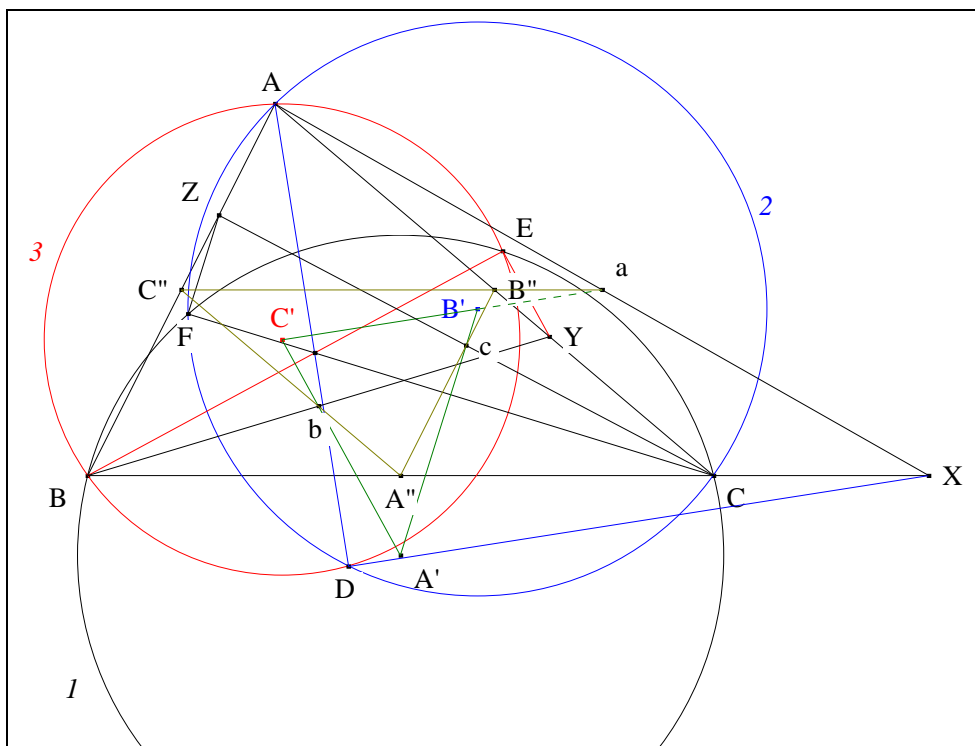


Traits : ABC un triangle,
 1, 2, 3 trois cercles passant par B et C, par C et A, par A et B,
 D, E, F les seconds points d'intersection de 2 et 3, de 3 et 1, de 1 et 2,
 Pd, Pe, Pf les perpendiculaires aux droites (AD), (BE), (CF) en D, E, F,
 et X, Y, Z les points d'intersection de Pd, Pe, Pf avec (BC), (CA), (AB).

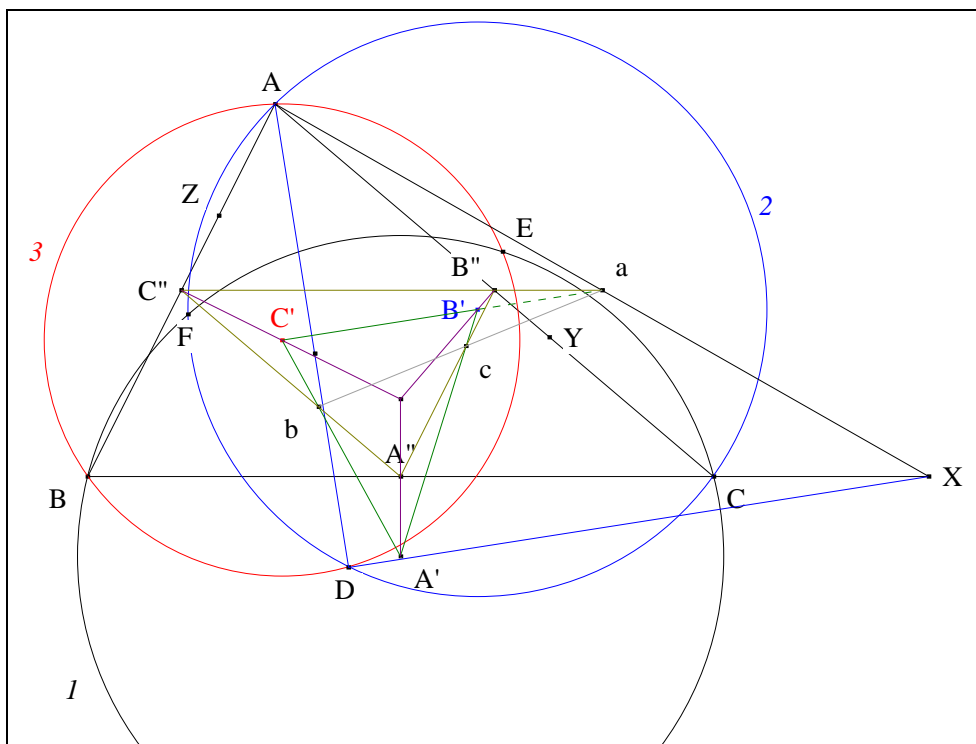
Donné : les points X, Y et Z sont alignés.

VISUALISATION

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" appliqué à 1, 2 et 3, deux à deux sécants (Cf. Annexe 1), les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes.



- Notons A', B', C' les centres de $1, 2, 3$,
 et A'', B'', C'' les milieux de $[BC], [CA], [AB]$,
 et a, b, c les milieux de $[AX], [BY], [CZ]$.
- D'après le théorème de la médiatrice,
 en conséquence,
 par hypothèse,
 d'après l'axiome IVa des perpendiculaires,
 d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle ADX ,
 i.e. $(B'C')$ est la médiatrice de $[AD]$;
 $(B'C') \perp (AD)$;
 $(AD) \perp (DX)$;
 $(B'C') \parallel (DX)$;
 $(B'C')$ passe par a
 les points B', C' et a sont alignés.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que
 les points C', A' et b sont alignés
 les points A', B' et c sont alignés.
- D'après Thalès "La droite des milieux" et le postulat d'Euclide,
 les points B'', C'' et a sont alignés
 les points C'', A'' et b sont alignés
 les points A'', B'' et c sont alignés.

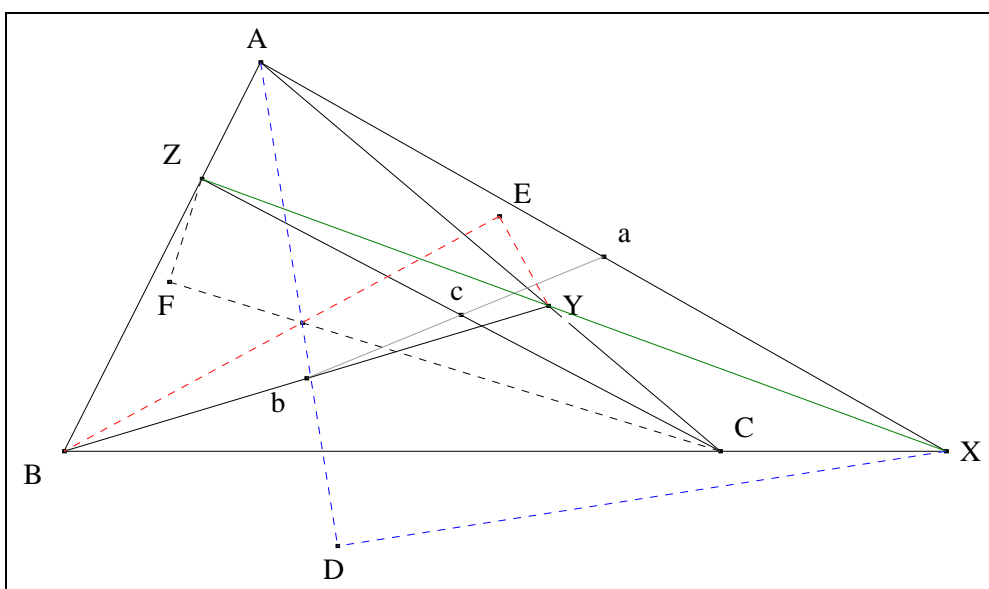


- D'après le théorème de la médiatrice,

(1)	(A'A'')	est la médiatrice de [BC]
(2)	(B'B'')	est la médiatrice de [CA]
(3)	(C'C'')	est la médiatrice de [AB] ;

en conséquence, (A'A''), (B'B'') et (C'C'') concourent au centre du cercle circonscrit de ABC.

- Par définition, les triangles A'B'C' et A''B''C'' sont perspectifs.
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" appliqué aux triangles perspectifs A'B'C' et A''B''C'' (Cf. Annexe 2), les points a, b et c sont alignés.



- **Conclusion :** d'après Gauss-Newton "La droite de..." appliqué au quadrilatère BCYZ, les milieux a, b, c des diagonales [AX], [BY] et [CZ] étant alignés, les points X, Y et Z sont alignés.

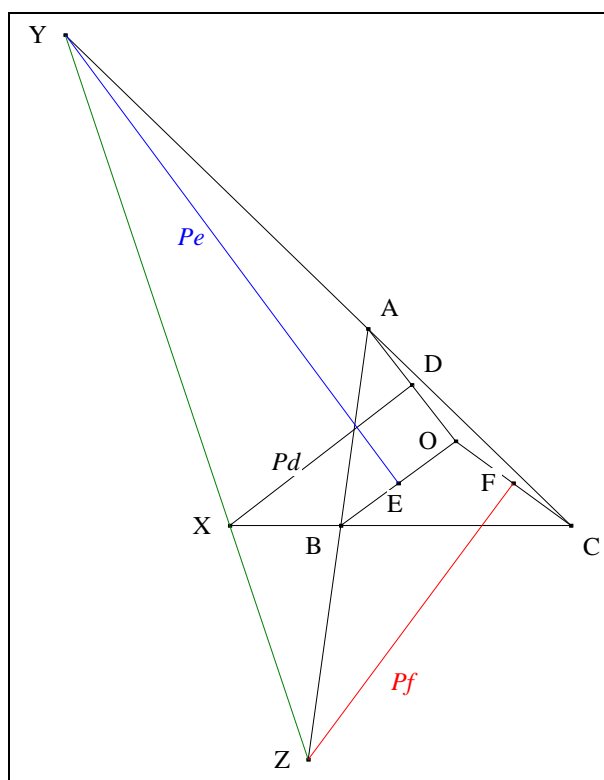
Scolie : la preuve de Dergiades utilise les théorèmes de Céva dans sa version trigonométrique et de Ménélaüs.

Commentaire : l'énoncé a été reformulé par l'auteur.

L'AUTEUR

VISION

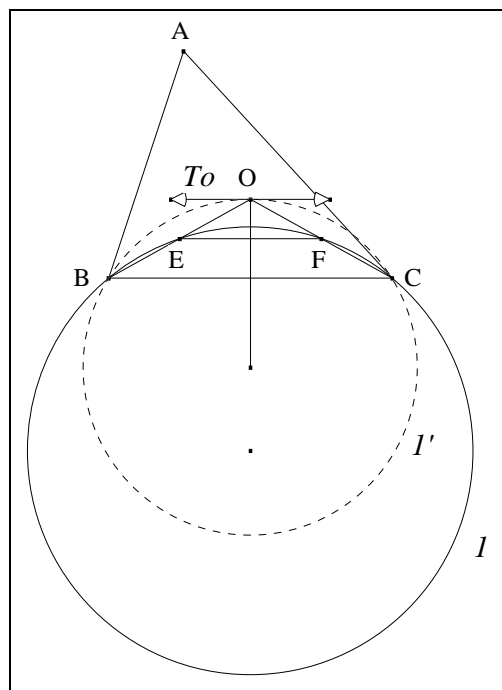
Figure :



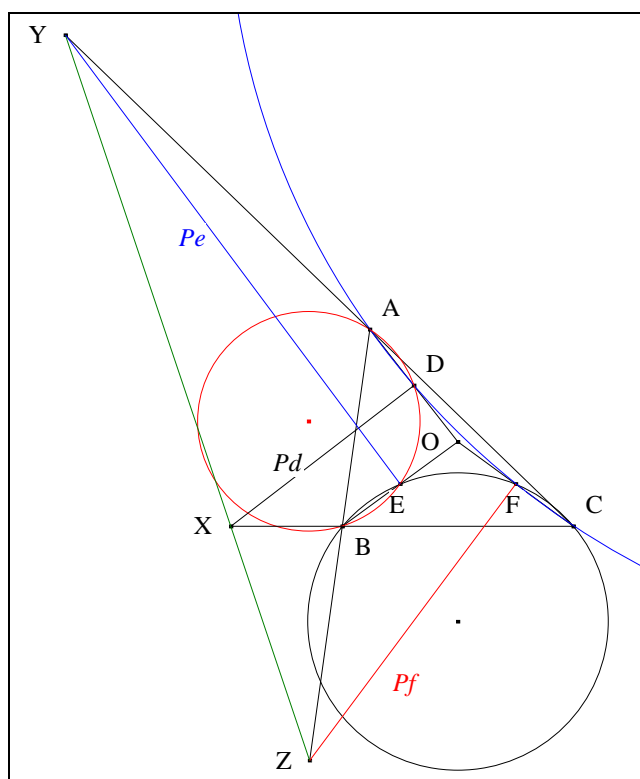
Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 D, E, F les milieux de [OA], [OB], [OC],
Pd, Pe, Pf les médiatrices de [OA], [OB], [OC],
 et X, Y, Z les points d'intersection de *Pd, Pe, Pf* respectivement avec (BC), (CA), (AB).

Donné : les points X, Y et Z sont alignés.

VISUALISATION



- Notons I' le cercle circonscrit au triangle OBC
et To la tangente à I en O.
- Le triangle OBC étant isocèle en O, $To \parallel (BC)$.
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué à OBC,
par transitivité de la relation \parallel , $(BC) \parallel (EF)$;
 $To \parallel (EF)$.
- Le cercle I , les points de base B et C, les médiannes naissantes (OBE) et (OCF), les parallèles To et (EF),
conduisent au théorème 1" de Reim ; en conséquence, B, C, E et F sont cocycliques.
- Notons I ce cercle.

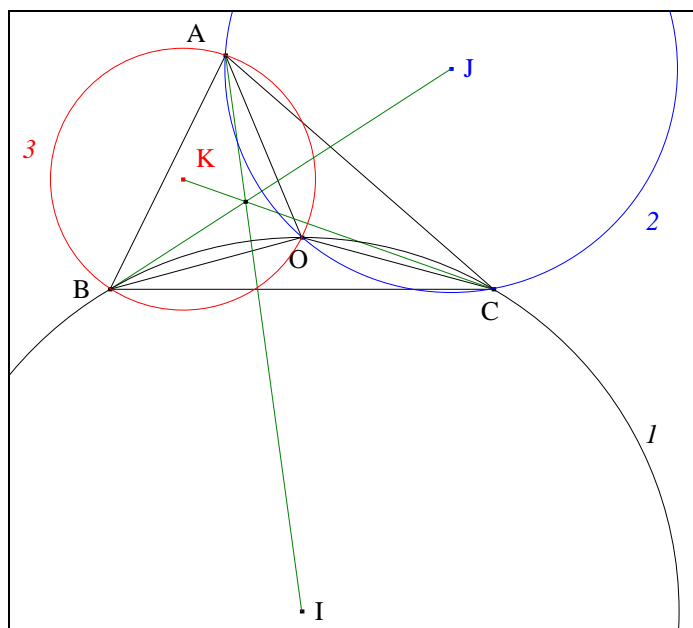


- Mutatis mutandis, nous montrerions que C, A, F et D sont cocycliques.
- Notons 2 ce cercle.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que A, B, D et E sont cocycliques.
- Notons 3 ce cercle.
- **Conclusion :** d'après Nikolaos Dergiades appliqué à ABC et aux cercles $1, 2, 3$ deux à deux sécants, les points X, Y et Z sont alignés.

CEZAR KOSNITZA

VISION

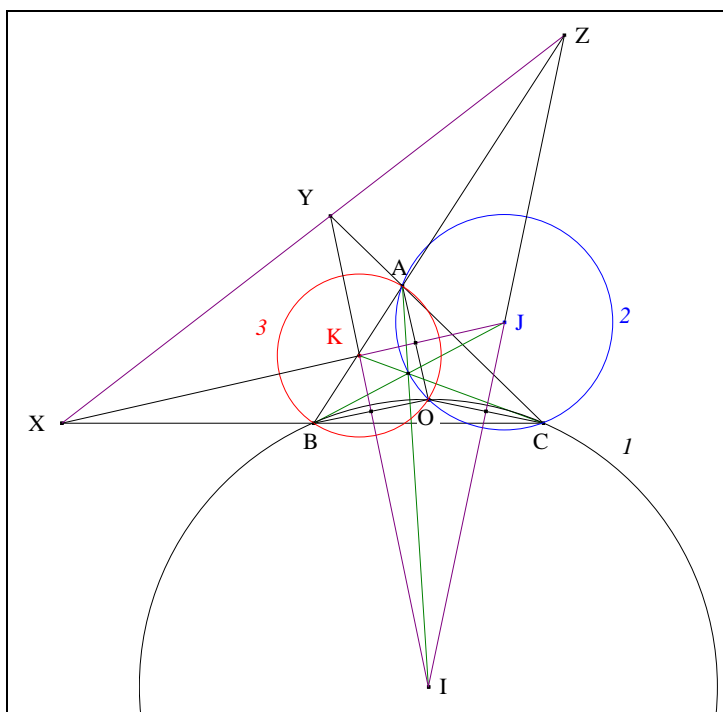
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 1, 2, 3 les cercles circonscrits aux triangles OBC, OCA, OAB
 et I, J, K les centres de 1, 2, 3.

Donné : les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

VISUALISATION



- Notons X, Y, Z les points d'intersection de (JK) et (BC), de (KI) et (CA), de (IJ) et AB.
- D'après le théorème de la médiatrice, (JK) est la médiatrice de [OA]
 (KI) est la médiatrice de [OB]
 (IJ) est la médiatrice de [OC].

- D'après l'auteur, les points X, Y et Z sont alignés.
- **Scolie :** (XYZ) est l'arguésienne des triangles perspectifs ABC et IJK.
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" appliqué à ABC et IJK (Cf. Annexe 2), les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

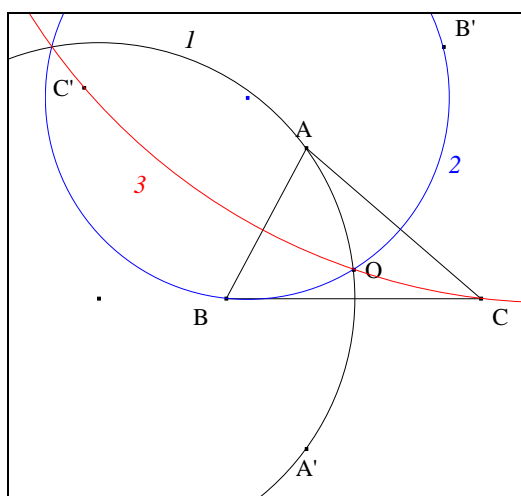
- Scolies :**
- (1) ce point de concours, noté K_s , est "le point de Kosnitza de ABC" ; il est répertorié sous X_{54} chez ETC².
 - (2) (AI), (BJ), (CJ) sont "les A, B, C-droites de Kosnitza de ABC".
 - (3) IJK est "le triangle de Kosnitza de ABC".

Note historique : ce point de concours, attribué à Kosnitza, est apparu dans la revue roumaine *Gazeta Matematica* ce qui suggère que ce géomètre est peut être un professeur roumain. Jordan Tabov corrobore cette suggestion en précisant qu'il a trouvé une référence à Kosnitza dans un livre roumain. Le docteur Paul A. Blaga de l'université Babes-Boylyai de Cluj Napoca (Roumanie) m'a précisé que Cezar Kosnitza (1910-1962) a enseigné à l'Institut Polytechnique de Bucarest (Roumanie) et écrit de nombreux livres dont l'un écrit en français vers 1940, concerne les coordonnées barycentriques. Ce livre, tiré en un petit nombre d'exemplaires, est connu seulement des passionnés de la Géométrie du Triangle.

J. R. MUSSELMAN³

VISION

Figure :



²

<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html#X54>.

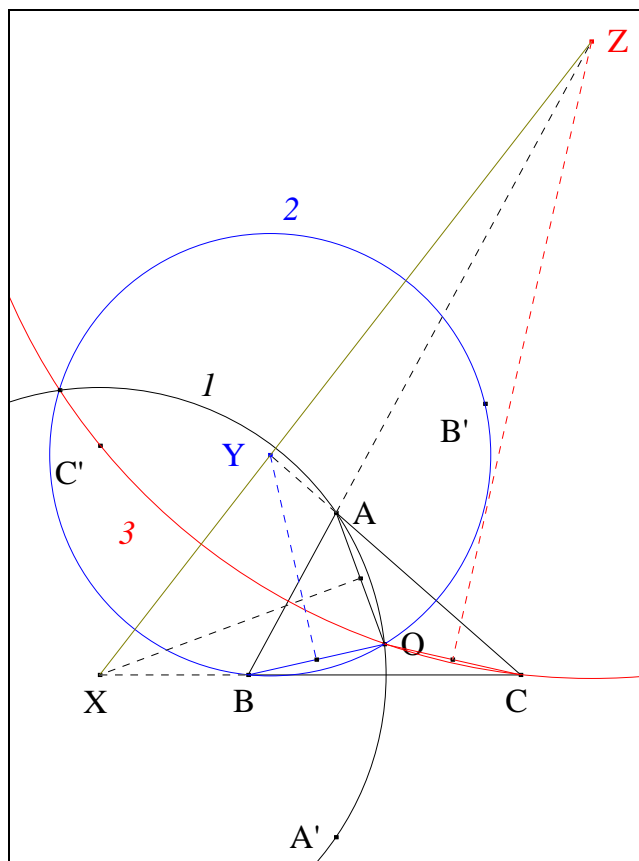
³

Musselman J. R., Advanced Problem 3928, *American Mathematical Monthly* 46 (1939) 601.

Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC ,
 A', B', C' les symétriques de A, B, C par rapport aux droites $(BC), (CA), (AB)$
 et $I, 2, 3$ les cercles circonscrits aux triangles AOA', BOB', COC' .

Donné : $I, 2$ et 3 se recourent en un second point.

VISUALISATION



- Notons X, Y, Z les centres de $I, 2, 3$.
- Les médiatrices de $[OA], [OB], [OC]$ passent respectivement par X, Y, Z .
- D'après l'auteur, X, Y et Z sont alignés.
- **Conclusion :** les cercles concourants $I, 2$ et 3 ayant leurs centres alignés, se recourent en un second point.

Scolies :

- (1) $I, 2, 3$ sont les A, B, C-cercles de Musselman de ABC .
- (2) Le second point d'intersection est le point de Gibert de ABC ; il est répertorié sous X_{1157} chez ETC⁴.

Note historique : ce résultat de l'américain Musselman a été démontré et généralisé par le belge René Goormaghtigh⁵ ; sa preuve a recours aux nombres complexes.

⁴ <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html#X1157>.

⁵ Goormaghtigh R., Advanced Problem 3928, *American Mathematical Monthly* 48 (1941) 281-283.

Notons que cette généralisation était connue du belge Joseph Neuberg⁶.
Rappelons que la preuve proposée par Darij Grinberg a recours à l'inversion.

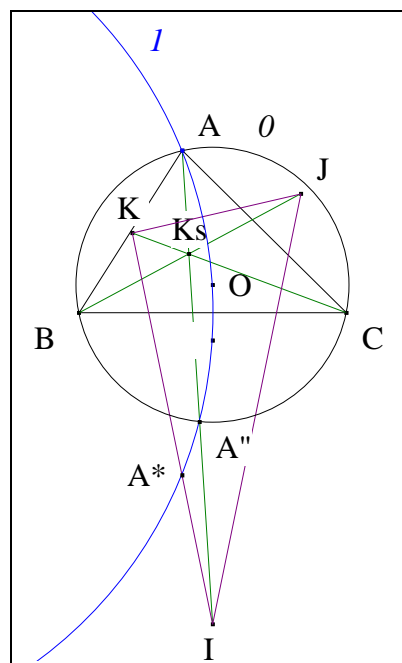
L'AUTEUR

OU

"MUSSELMAN ET KOSNITZA"

VISION

Figure :



Traits :

- ABC un triangle,
- O le cercle circonscrit de ABC,
- O le centre de O ,
- IJK le triangle de Kosnitzer,
- K_s le point de Kosnitzer de ABC,
- A^* le symétrique de A par rapport à (BC),
- I le A-cercle de Musselman de ABC

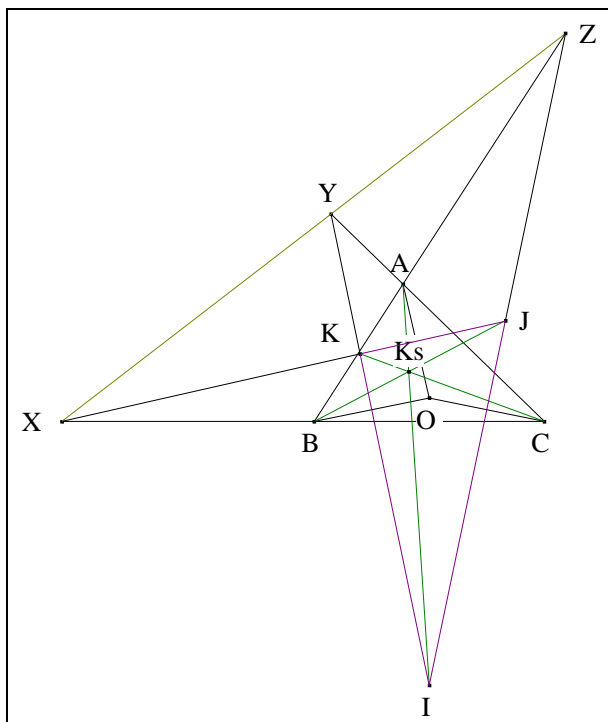
et

- A'' le second point d'intersection de O et I .

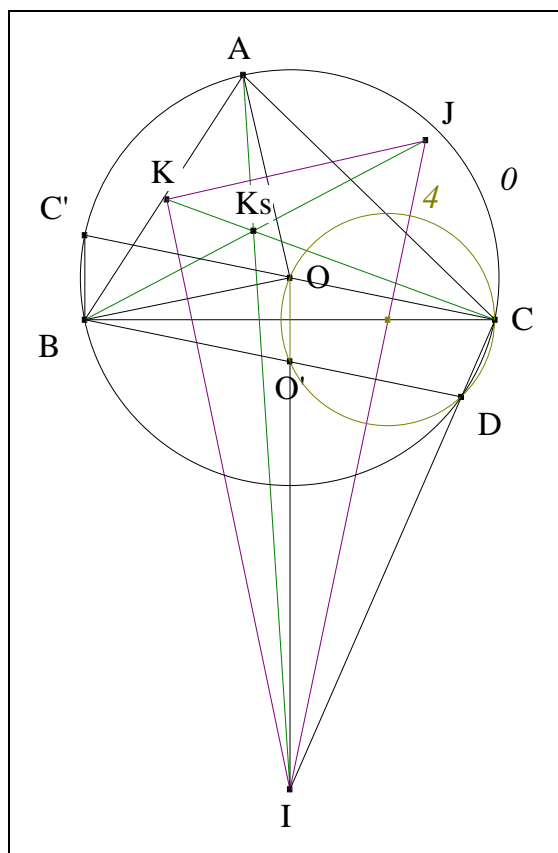
Donné : les points A, K_s , A'' et I sont alignés.

VISUALISATION

⁶ Neuberg J., Mémoire sur le Tétraèdre (1884).

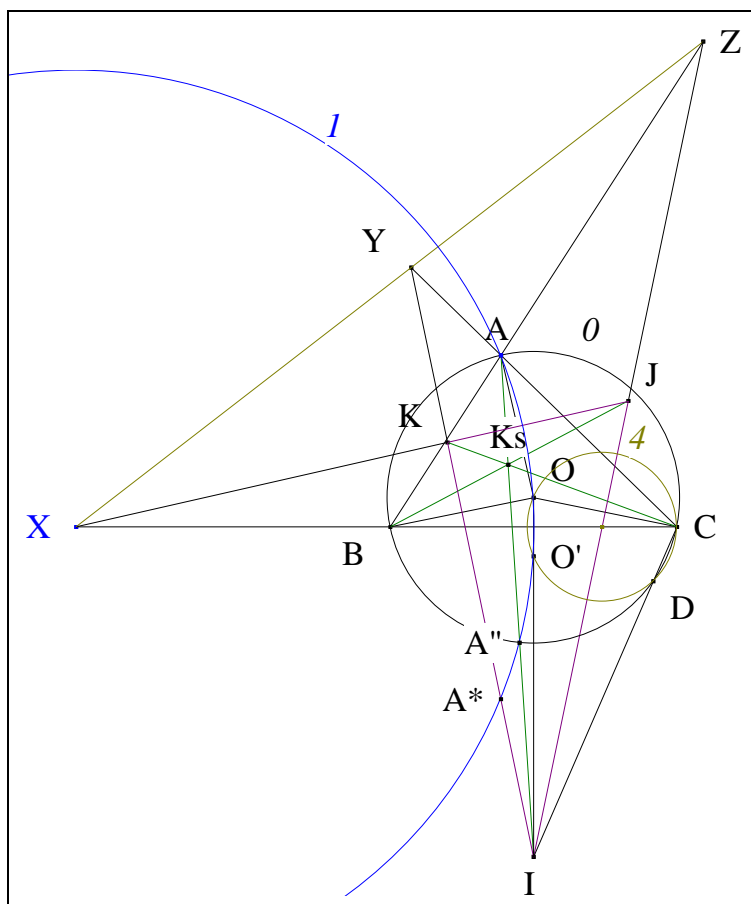


- Notons X, Y, Z les points d'intersection de (JK) et (BC) , de (KI) et (CA) , de (IJ) et AB .
- D'après l'auteur, X, Y et Z sont alignés.



- Notons C' le second point d'intersection de (CO) avec θ ,
- O' le symétrique de O par rapport à (BC)
- et D le second point d'intersection de (BO') avec θ .

- **Scolie :** (OO') passe par I.
- D'après Thalès "Triangle inscrit dans un demi cercle",
par construction,
d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, $(C'B) \perp (BC)$;
 $(BC) \perp (OO')$;
 $(C'B) \parallel (OO')$.
- Le cercle θ , les points de base C et D, les moniennes naissantes $(C'CO)$ et (BDO') , les parallèles $(C'B)$ et (OO') , conduisent au théorème θ'' de Reim ; en conséquence, C, D, O et O' sont cocycliques.
- Notons 4 ce cercle.
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle $CC'B$, $BC' = OO'$;
le quadrilatère $BO'OC'$ ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme ;
en conséquence, $(BO') \parallel (C'O)$.
- Le trapèze $O'DCO$ étant cyclique, est isocèle ; il admet (IJ) pour axe de symétrie ;
en conséquence, (CD) passe par I.



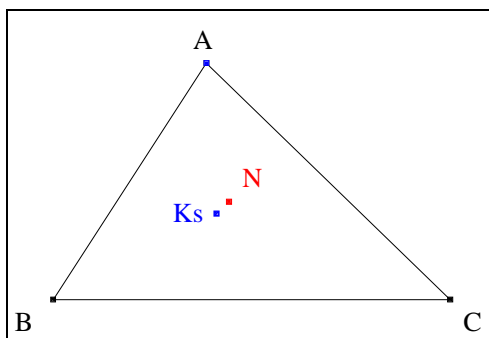
- **Scolie :** I est le cercle de centre X passant par A ; il passe par O, O' et A*.
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" appliqué à θ , I et 4 (Cf. Annexe 1), A, A'' et I sont alignés.
- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, les points A, Ks, A'' et I sont alignés.

JOHN RIGBY

OU
K_s ISOGONAL DE N

VISION

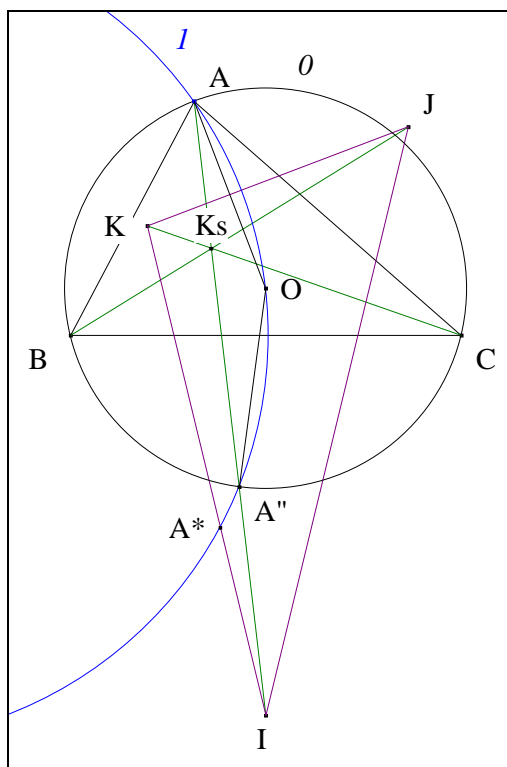
Figure :



Traits : ABC un triangle,
N le centre du cercle d'Euler de ABC
et K_s le point de Kosnitzer de ABC.

Donné : K_s est l'isogonal de N relativement à ABC⁷.

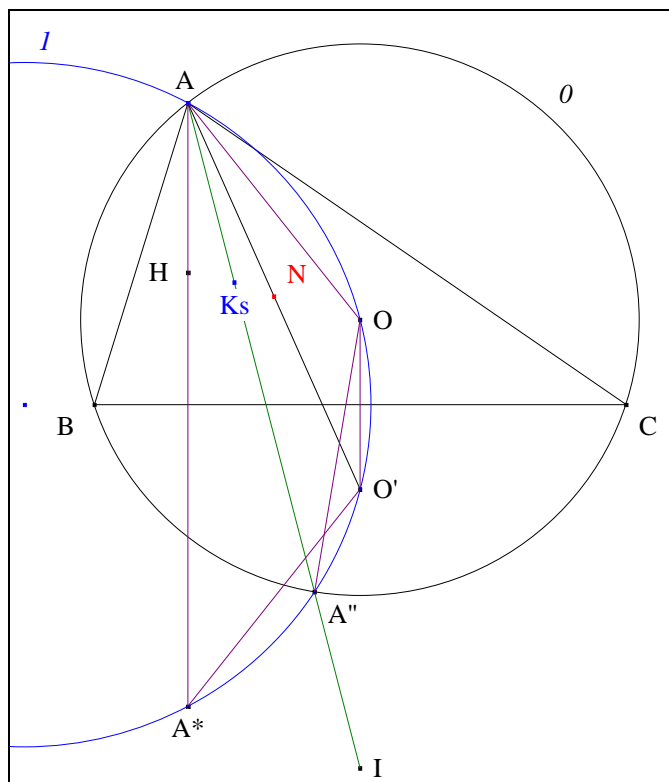
VISUALISATION



⁷

Rigby J., Brief notes on some forgotten geometrical theorems, Mathematics & Informatics Quarterly, 7 (1997) 156158.

- Notons θ le cercle circonscrit de ABC,
 O le centre de θ ,
 IJK le triangle de Kosnitza,
 A^* le symétrique de A par rapport à (BC),
 I le A-cercle de Musselman de ABC
 et A'' le second point d'intersection de θ et I .
- D'après "Musselman et Kosnitza", les points A, Ks, A'' et I sont alignés.
- **Conclusion partielle** : par définition, le triangle OAA'' est isocèle en O.

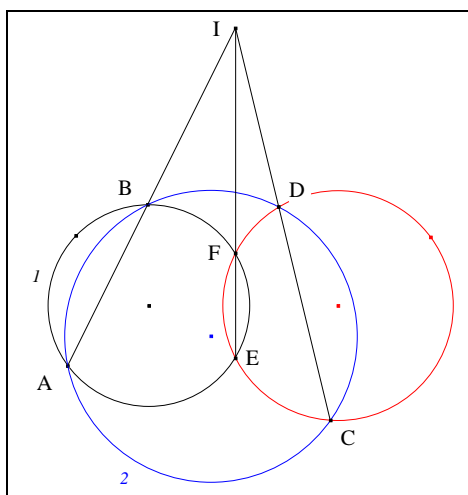


- Notons H l'orthocentre de ABC
 et O' le symétrique de O par rapport à (BC),.
- **Scolies** : (1) I passe par O'
 (2) (AO') passe par N
 (3) par définition d'une hauteur, (AA^*) passe par H.
- Le quadrilatère cyclique $AA^*O'O$ étant un trapèze isocèle,
 le triangle OAA'' étant isocèle en O,
 par transitivité de la relation =, $A^*O' = AO$;
 $AO = OA''$;
 $A^*O' = OA''$.
- Nous avons : $\angle A^*AO' = \angle A''AO$.
- **Scolie** : (AH) et (AO) sont deux A-isogonales de ABC.
- Par une chasse angulaire, nous montrerions que (AA'') et (AO') sont deux A-isogonales de ABC.
- **Conclusion partielle** : (AKs) et (AN) sont deux A-isogonales de ABC.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BKs) et (BN) sont deux B-isogonales de ABC
 (CKs) et (CN) sont deux C-isogonales de ABC.

- **Conclusion :** par définition, K_s est l'isogonal de N relativement à ABC .

ANNEXE

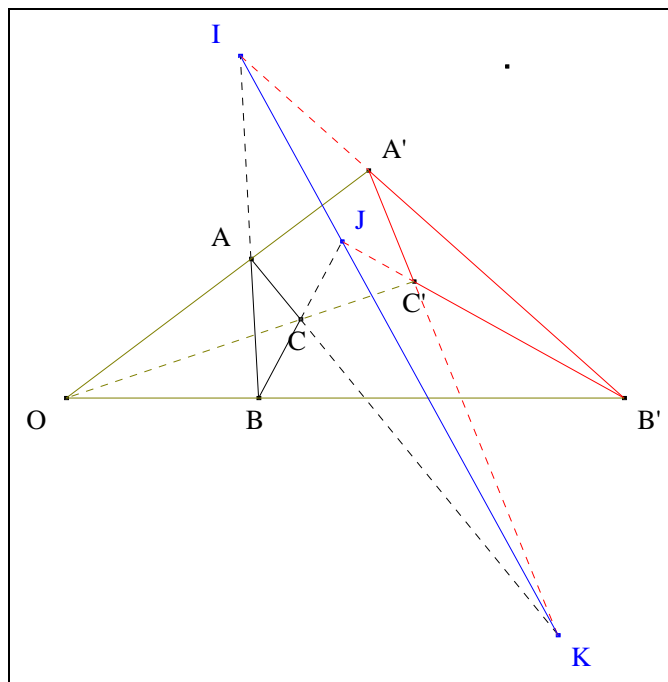
1. Le théorème des trois cordes de Monge



Traits : $I, 2$ deux cercles sécants,
 A, B les points d'intersection de I et 2 ,
 C, D deux points de 2 ,
 E, F deux points de I
 et I le point d'intersection des droites (AB) et (CD) .

Donné : les points C, D, E et F sont cocycliques
si, et seulement si,
 les droites $(AB), (CD)$ et (EF) sont concourantes en I .

2. Le théorème des deux triangles de Desargues



Traits : ABC un triangle,
 $A'B'C'$ un triangle tel que les droites (AA') et (BB') soient concourantes,
 O le point de concours de (AA') et (BB') ,
 et I, J, K le point d'intersection de (AB) et $(A'B')$, de (BC) et $(B'C')$, de (CA) et $(C'A')$.

Donné : (CC') passe par O si, et seulement si, les points I, J et K sont alignés.