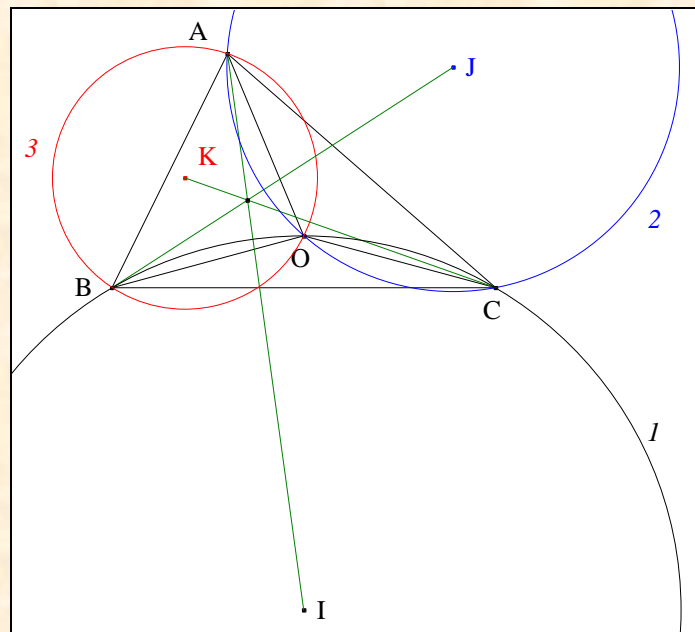


LE POINT DE CÉZAR KOSNITZA

PETITE ENCYCLOPÉDIE

†

Jean-Louis AYME ¹



Résumé.

L'auteur présente le point de Konitza datant de 1941 ainsi que des résultats épars concernant ce point sous la forme d'une petite encyclopédie. Cependant Joseph Neuberg l'avait évoqué en 1884...

Les figures ² sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements.

Je remercie chaleureusement et tout particulièrement Monsieur Yannick Banor, informaticien, de m'avoir permis, par ses compétences et surtout par son écoute attentive, de continuer l'activité de mon site, suite à un changement d'ordinateur. La sauvegarde du mode de fonctionnement de mon logiciel de géométrie me permettant de continuer à élaborer et à publier des articles pour les amoureux de la Géométrie du Triangle.

Je remercie également le professeur Paul A. Blaga de l'Université "Babes-Bolyai" de Cluj-Napoca, Roumanie, pour m'avoir précisé l'orthographe de Cezar Kosnitza, donner la référence du point en question, envoyer deux photos, et renseigner sur la vie de ce géomètre.

¹

Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/04/2016 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

²

Le triangle de départ ABC est acutangle sauf pour des cas de lisibilité des figures...

Abstract. The author presents the Konitza's point dating from 1941 and scattered results regarding this point in the form of a small Encyclopaedia. However Joseph Neuberg was mentioned this point in 1884... The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Acknowledgment. I warmly thank and especially Mr Yannick Banor, computer, allowing me, by his skills and especially his listens carefully, continue the activity on my site, following a change of computer. The backup of the mode of operation of my geometry software allowing me to continue to develop and publish articles for lovers of the geometry of the Triangle.

I thank also the Professor Paul A. Blaga of the "Babes-Bolya" University of Cluj-Napoca, Romania for having me clarify the spelling of Cezar Kosnitza, give the reference of the item in question, send two photos, and learn about the lives of this geometer.

Sommaire	
A. Le point de Kosnitza	4
B. John Rigby ou Ks isogonal de N	8
1. Ks isogonal de N	
2. Isogonale d'une droite de Kosnitza	
C. Perpendiculaires à une A-droite de Kosnitza	12
1. Le triangle N-pédal	
2. Le triangle N-symétrique	
3. Le triangle symétrique	
4. Une ménélienne	
5. Le triangle antimédian	
6. Le triangle O-symétrico de l'antimédian	
D. Points sur une A-droite de Kosnitza	24
1. Centre d'un cercle d'Euler	
2. Un résultat d'Antreas Hatzipolakis	
3. Le triangle d'Euler	
4. Le triangle H-circum-orthique	
5. Un point, intersection de deux cercles	
6. Un résultat de l'auteur	
E. La droite (OKs)	36
1. Une perpendiculaire à (OKs)	
2. Le centre du cercle circonscrit au triangle symétrique	
3. Le point Hs sur (OKs)	
4. Le résultat de Nguyen Van Linh	
5. Une perpendiculaire à (BC)	
6. Deux triangles homothétiques égaux	
7. Position de Hs sur (OKs)	
F. Les points de Schiffler et Kosnitza	54
1. Le triangle excentral	
2. Le second triangle circomperp	
3. Les points de Schiffler et Kosnitza	
4. Ks* est sur la droite d'Euler du triangle orthique	
5. Le triangle de contact	
6. Le triangle I-cévien	
G. La droite (NKs)	66
1. L'alignement Ks – N - Er	

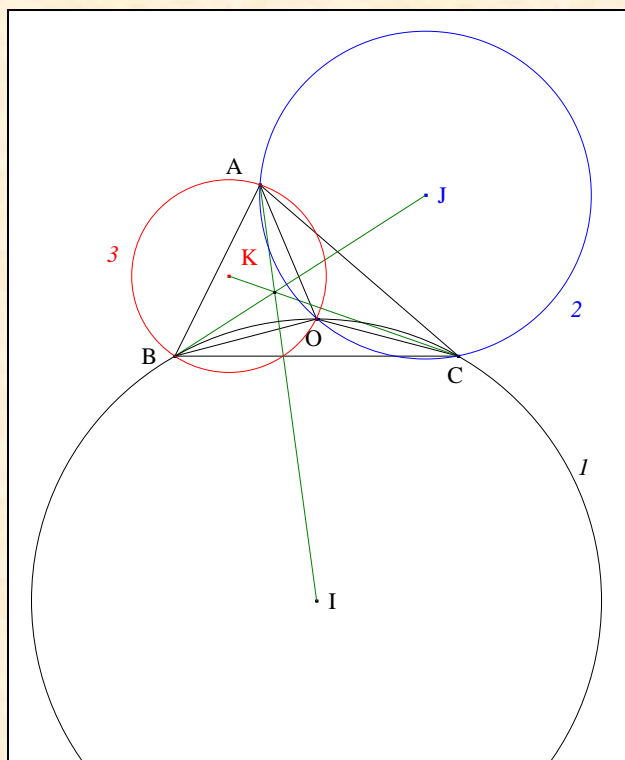
Sommaire (fin)

H. John Rodgers Musselman ou inverse de Ks	67
1. Inverse de Ks	
2. Une parallèle à (OKs)	
3. Quatre points cocycliques	
4. L'alignement Ks – N – Er - P	
5. Une parallèle à la droite d'Euler	
I. Symétrie de Ks par rapport à un côté du triangle	78
1. Deux parallèles	
2. Une cévienne du triangle tangentiel	
3. Une variante de l'auteur	
J. Une perpendiculaire à (HKs)	84
1. Le point de Schiffler du triangle tangentiel	
2. Isotomique de la polaire de l'orthocentre	
K. Avec des points de Kosnitza	89
1. Les triangles IBC	
2. Les triangles NBC	
L. Parallèle à une A-droite de Kosnitza	93
1. Le résultat de François Rideau	
U. Appendice	96
1. Un lemme	
2. Un point sur la droite d'Euler	
V. Annexe	99
1. Une relation de Carnot	
2. Symétrie de l'orthocentre par rapport à un côté	
3. Le théorème de Beltrami	

A. LE POINT DE KOSNITZA

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 1, 2, 3 les cercles circonscrits resp. aux triangles OBC, OCA, OAB
 et I, J, K les centres resp. de 1, 2, 3.

Donné : (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes³.

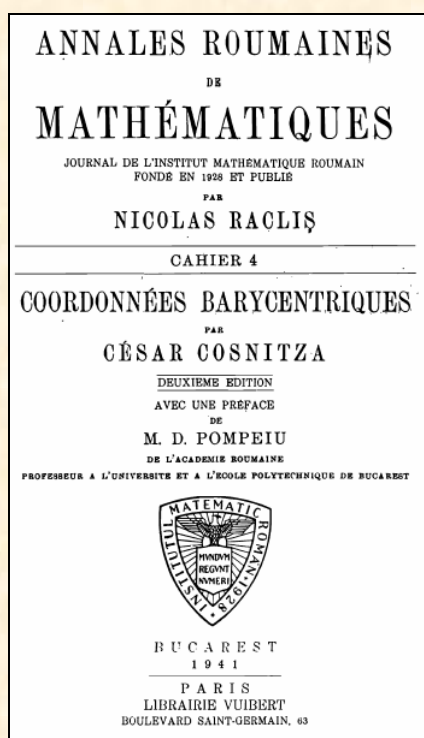
Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur.

- Scolies :**
- (1) ce point de concours, noté K_s , est "le point de Kosnitsa de ABC", nom attribué par John Rigby en 1997 ; il est répertorié sous X_{54} chez ETC⁴
 - (2) (AI), (BJ), (CJ) sont "les A, B, C-droites de Kosnitsa de ABC"
 - (3) IJK est "le triangle de Kosnitsa de ABC"
 - (4) 1, 2, 3 sont resp. "les A, B, C-cercles de Kosnitsa de ABC".

³ Ayme J.-L., Le point de Kosnitsa est l'isogonal du centre du cercle de Feuerbach, G.G.G. vol. 1 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

⁴ Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* ETC ; <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html#X54>

Archives :



17. Les droites qui unissent les sommets A, B, C du triangle ABC aux centres des cercles OBC, OCA, OAB (O le centre du cercle ABC) concourent en un même point. Quel est ce point?

5

Première note historique :

ce point de concours, attribué à Kosnitza, est apparu dans la revue roumaine *Gazeta Matematică*⁶ ce qui suggère que ce géomètre est peut être un professeur roumain. Jordan Tabov corrobore cette suggestion en précisant qu'il a en trouvé une référence dans un livre roumain.

Une courte biographie de Cezar Coșniță



⁵ Problem 17 at page 38

⁶ Dr. Paul A. Blaga precise :

This is the oldest Romanian journal in elementary mathematics (it appeared, continuously, from 1895)

Cezar Coșniță est né en 1910 à Adjud, une municipalité du județ de Vrancea, dans l'est de la Roumanie.

Fils de Ion Coșniță, il commence par fréquenter l'école primaire de sa ville natale, puis de 1922 à 1929, le lycée de Bârlad. En 1932, il obtient sa licence de mathématiques à l'Université de Bucarest. L'année suivante, il entre à l'Institut pédagogique. A sa sortie en 1934, il enseigne au lycée de Dealu, puis en 1937 à l'école secondaire à Focsani. En 1939, il revient à Bucarest où il enseigne à l'école secondaire Saint-Sava. Dans le même temps, il est assistant professeur à l'Institut Polytechnique ⁸ de Bucarest et en 1947, il soutient sa thèse doctorat en mathématiques.

De 1947 à 1952, il est membre du comité directeur du *Gazeta Matematică*. Au cours de la période 1951-1953, il travaille à l'Institut de Bucarest, puis comme professeur agrégé à l'Institut pour la construction.

Il décède en 1962.

Le docteur Paul Blaga ajoute :

In Romania he is well known especially for his contributions in elementary geometry but, first of all, by his high school textbooks (in geometry) and his excellent problem books (in algebra, calculus or analytical geometry). Among other publications, he is the author of an excellent introduction to barycentric coordinates, in French (1941). The book is not very well known not even in Romania (probably because it was published in a small number of copies, during the war). The point known as Kosnita's point can be found there as Problem 17 at page 38.

Une courte présentation du Dr. Paul A. Blaga



Dr. Paul A. Blaga is an assistant professor of geometry at the Faculty of Mathematics and Computer Science of the "Babes-Bolyai" University from Cluj-Napoca, Romania.

Seconde note historique :

⁷ Dr. Paul A. Blaga précise :
the photo was taken around 1950, according to the source).

The quality is not great ; they are scanned from an old book, with thin and yellowed pages

⁸ Dr. Paul A. Blaga précise :

Actually, the Institute had a name: Institute for Communal Households (the Romanian term was *Gospodăriilor comunale*, please don't ask me the significance, it was just a Soviet name for I don't know what, I wasn't able to find any information)

(63)

Nous faisons encore ressortir, à cette occasion, deux autres cas particuliers du théorème du n° 54 : 1° Les droites qui joignent A_1, A_2, A_3 aux centres des cercles circonscrits aux triangles $A_2hA_3, A_3hA_1, A_1hA_2$ se coupent sur la ligne ho au centre du cercle des neuf points de $A_1A_2A_3$; 2° les droites joignant A_1, A_2, A_3 aux centres des cercles circonscrits aux triangles $A_2oA_3, A_3oA_1, A_1oA_2$ se rencontrent en un même point (*).

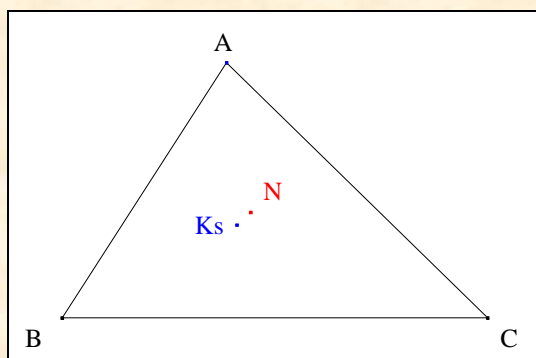
Un géomètre ayant voulu garder l'anonymat ma'a signalé que ce point de Kosnitza avait été en fait présenté en 1884 par Joseph Neuberg dans son *Mémoire sur le tétraèdre* à la page 63.

B. JOHN RIGBY
OU
K_s ISOGONAL DE N

1. K_s isogonal de N

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 N le centre du cercle d'Euler de ABC
et K_s le point de Kosnitza de ABC.

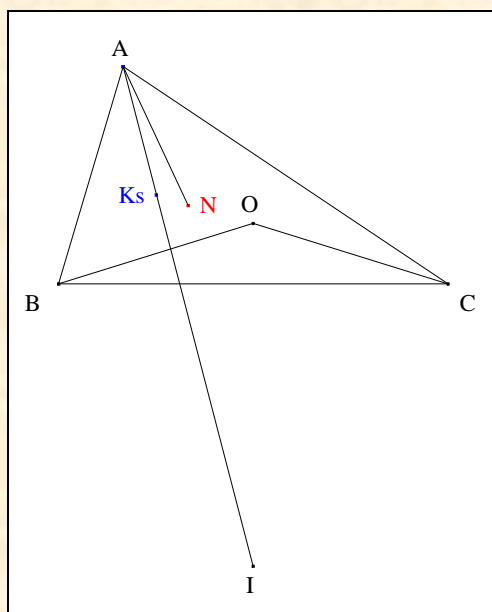
Donné : K_s est l'isogonal de N relativement à ABC⁹.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur.

Scolie : deux angles égaux¹⁰

⁹ Rigby J., Brief notes on some forgotten geometrical theorems, *Mathematics & Informatics Quarterly* 7 (1997) 156-158
 Ayme J.-L., Le point de Kosnitza est l'isogonal du centre du cercle de Feuerbach, G.G.G. vol. 1, p. 14-16 ;
<http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

¹⁰ Thorem about Kosnita point, AoPS du 08/03/2011 ; <http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h395496p2198659>

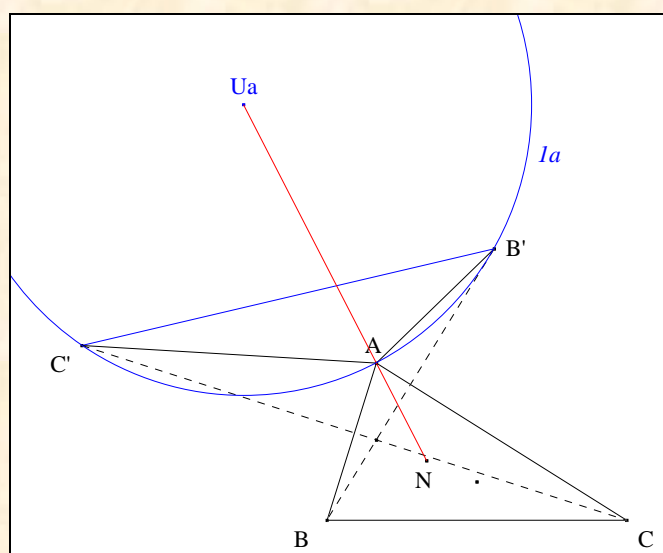


- Notons O le centre du cercle circonscrit à ABC
et I le centre du cercle circonscrit au triangle OBC .
- **Conclusion :** d'après B. 1. Ks isogonal de N , $\angle BAI = \angle CAN$.

2. Isogonales d'une droite de Kosnitza

VISION

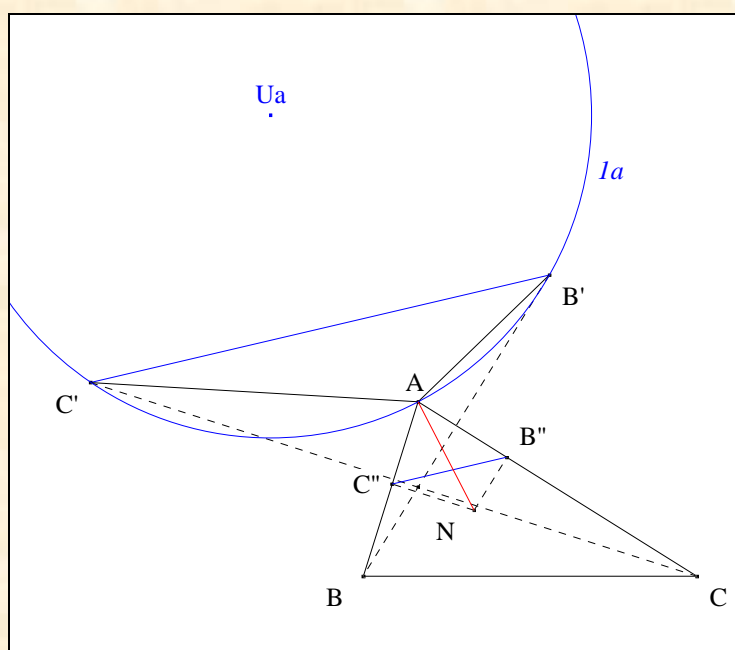
Figure :



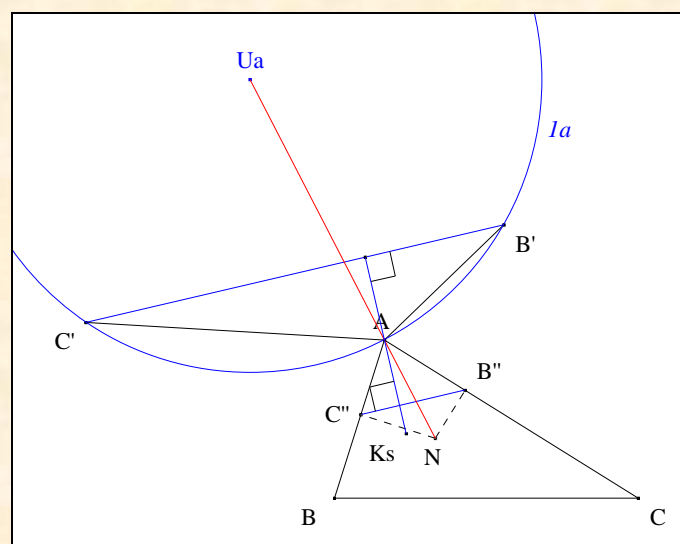
- Traits :**
- ABC un triangle,
 - N le centre du cercle d'Euler de ABC ,
 - B', C' les symétriques de B, C resp. par rapport à $(AC), (AB)$,
 - Ia le cercle circonscrit au triangle $AB'C'$
- et Ua le centre de Ia .

Donné : (AN) passe par U_a .¹¹

VISUALISATION



- Notons B', C'' les pieds des perpendiculaires à (AC), (AB) issues de N.
- D'après Oene Bottema "Les triangles symétrique et N-pédal"¹², $(B'C') \parallel (B''C'')$.



¹¹ Grinberg D., More on the Kosnita point and the reflection triangle, *Math Forum* du 08/08/2003 ; <http://mathforum.org/kb/thread.jspa?threadID=349807&tstart=0>

Prove that the circumcentre of AB_1C_1 lies on the line AO_1 , AoPS du 20/07/2009 ; <http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h289760>

Akopyan A., Tuymaada 2009, Senior League, Second Day, Problem 3, AoPS du 14/10/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1151530_euler_center

¹² Bottema O. (1901-1992), *Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde*, 2nd ed. Utrecht, Netherlands : Epsilon, Chapter XVI (1987) 83-87 ;

Boutte G., Message *Hyacinthos* # 3997 du 28 septembre 2001 ;

<https://groups.yahoo.com/neo/groups/hyacinthos/conversations/messages/3997>

Grinberg D., On the Kosnita point and the reflection triangle, *Forum Geometricorum* 3 (2003) 105-111 ; <http://forumgeom.fau.edu/>

- Notons K_s le point de Kosnitza de ABC.
- D'après **B. 1.** K_s isogonal de N, $(AK_s) \perp (B'C')$ ou encore $(AK_s) \perp (B''C'')$.
- Par construction, (AK_s) et (AN) sont deux A-isogonales du triangle $AB'C'$.
- **Conclusion :** d'après Nagel "Un rayon" ¹³, (AN) passe par U_a .

Commentaire : une preuve synthétique différente de la précédente a été dédiée à l'auteur par Kostas Vitas.

Solie : I_a est le "A-cercle de Yui de ABC".

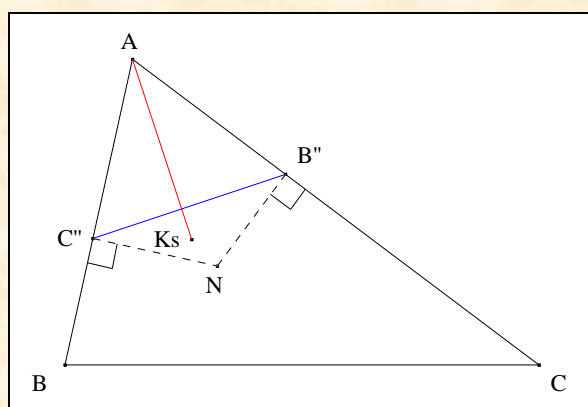
¹³ Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G vol. 3, p. 21-22; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

C. PERPENDICULAIRES
À
UNE A-DROITE DE KOSNITZA

1. Le triangle N-pédal

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 Ks le point de Kosnitza de ABC,
 N le centre du cercle d'Euler de ABC
 et B'', C'' les pieds des perpendiculaires à (AC), (AB) issues de N.

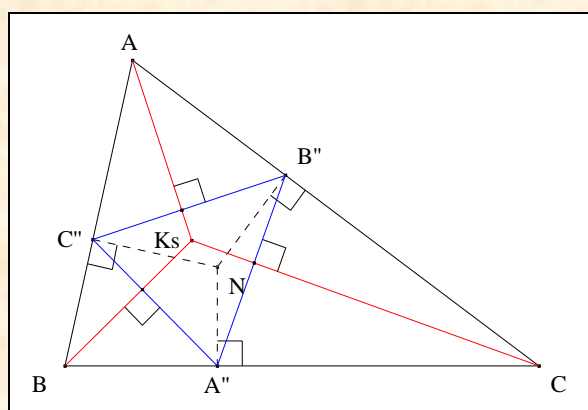
Donné : (B''C'') est perpendiculaire à (AKs).

VISUALISATION

• **Conclusion :** d'après Vigarié "Isogonale et perpendiculaire" ¹⁴, (B''C'') \perp (AKs).

Solie : vision triangulaire

¹⁴ Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-
 Ayme J.-L., Mantel * Noyer * Droz-Farny * Goormaghtigh or Simson-Wallace generalized , G.G.G. vol.12, p. 29-32 ;
<http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

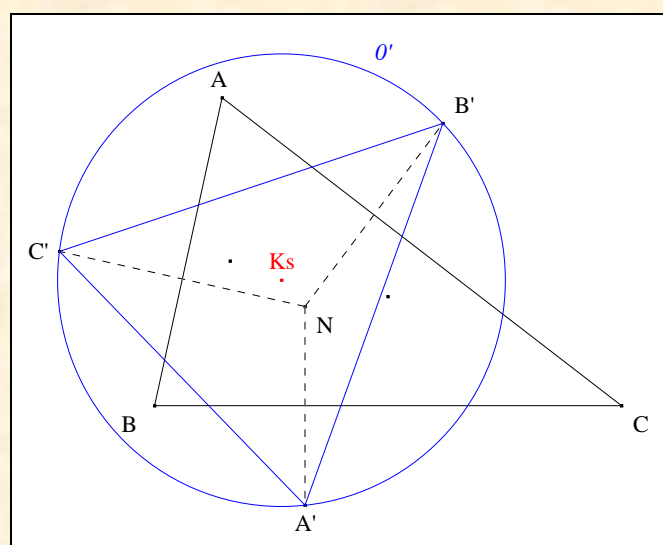


- Notons A'' le pied de la perpendiculaires à (BC) issue de N .
 - **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que $(C''A'')$ est perpendiculaire à (BKs) .
 $(A''B'')$ est perpendiculaire à (CKs) .
- (2) $A''B''C''$ est le triangle N-pédal de ABC
- (3) ABC et $A''B''C''$ sont deux triangles orthologiques ;
- * Ks est l'orthopôle de ABC relativement à $A''B''C''$
 - * N est l'orthopôle de $A''B''C''$ relativement à ABC .

2. Le triangle N-symétrique

VISION

Figure :



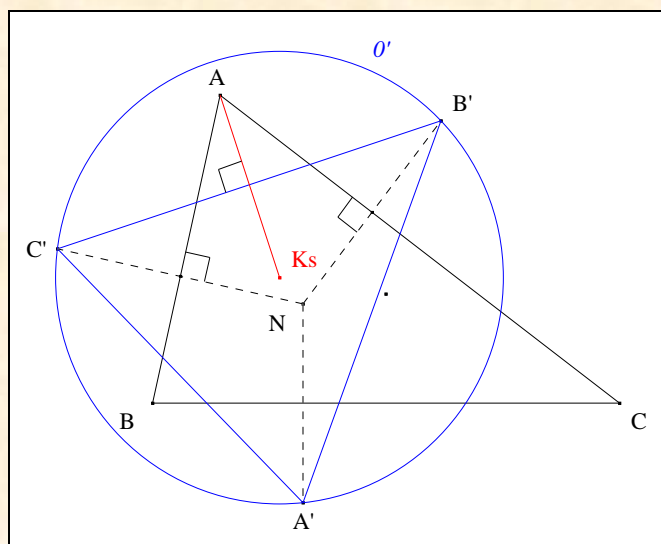
Traits :

ABC	un triangle,
N	le centre du cercle d'Euler de ABC ,
$A'B'C'$	le triangle N-symétrique de ABC ,

et O' le cercle circonscrit à $A'B'C'$
 K_s le point de Kosnitsa de ABC .

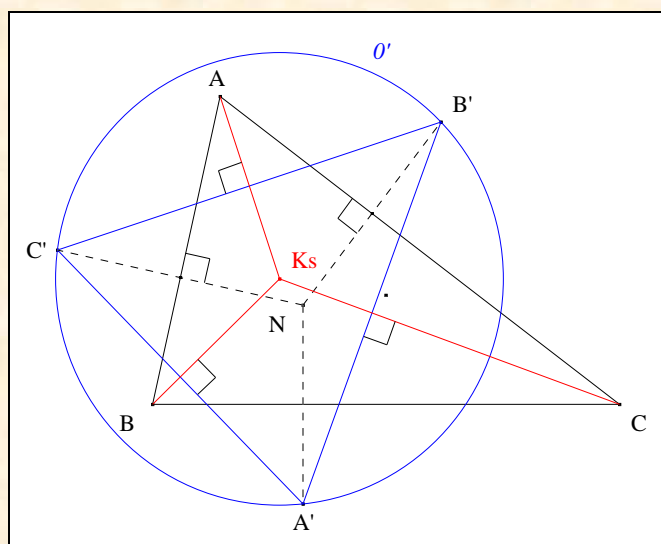
Donné : $(B'C')$ est perpendiculaire à (AK_s) .

VISUALISATION



- A étant le centre du cercle circonscrit au triangle $NB'C'$, la perpendiculaire à $(B'C')$ issue de A est la médiatrice de $[B'C']$.
- **Conclusion :** d'après **B. 1.** N isogonal de K_s , $(AK_s) \perp (B'C')$.

Scolies : (1) en considérant le triangle $AB'C'$, (AK_s) est la médiatrice de $[B'C']$
 (2) Vision triangulaire

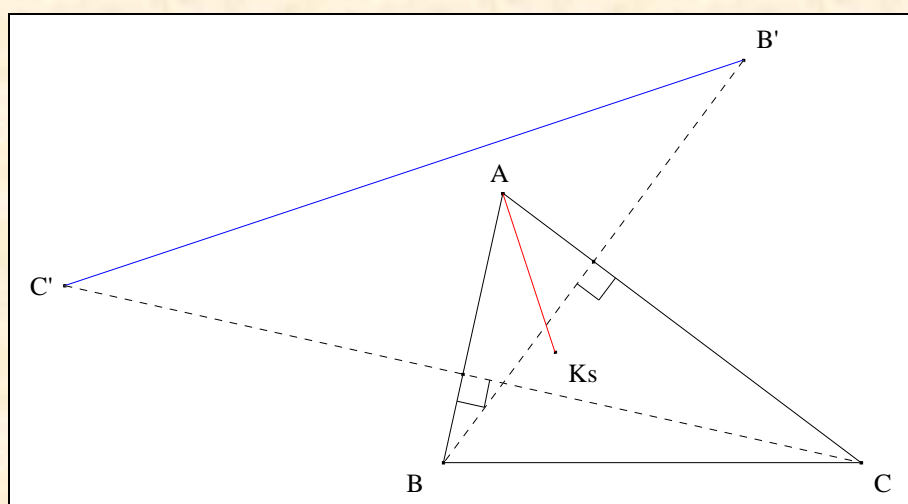


- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BK_s) est la médiatrice de $[C'A']$
 (CK_s) est la médiatrice de $[A'B']$.
- **Conclusion :** K_s est le centre de O' .

3. Le triangle symétrique

VISION

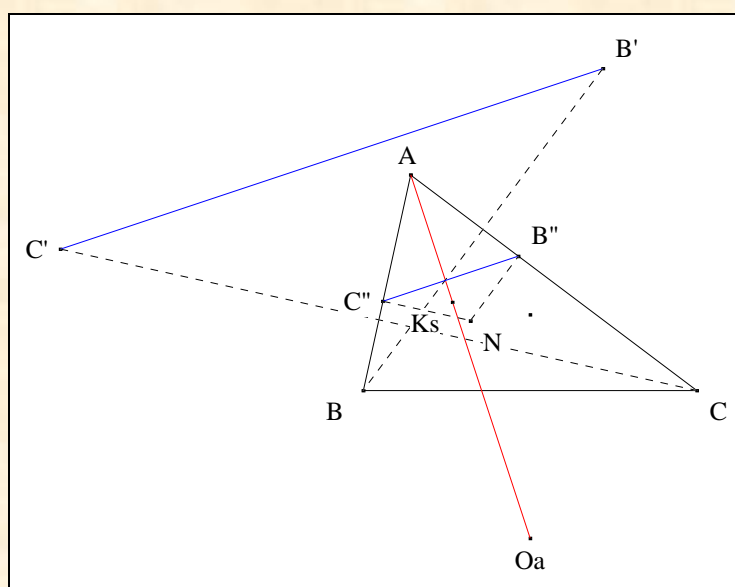
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 Ks le point de Kosnitsa de ABC
 et B', C' les symétriques de B, C resp. par rapport à (AC), (AB).

Donné : (B'C') est perpendiculaire à (AKs).¹⁵

VISUALISATION



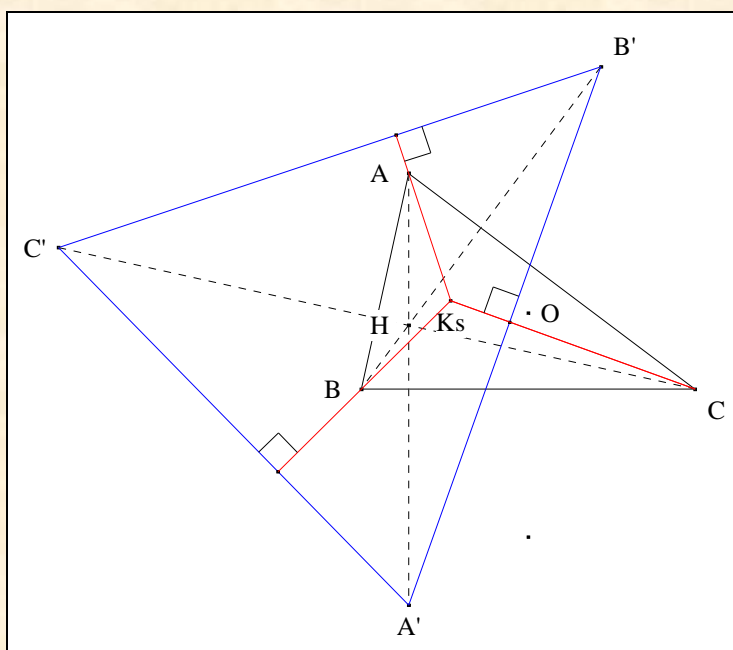
• Notons N le centre du cercle d'Euler de ABC

¹⁵ Deux perpendiculaires, *Les-Mathematiques.net* ; <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1231423>

et B'', C'' les pieds des perpendiculaires à (AC) , (AB) issues de N .

- D'après Oene Bottema "Les triangles symétrique et N-pédal" ¹⁶, $(B'C') // (B''C'')$.
- D'après C. 1. Le triangle N-pédal, en conséquence, $(B''C'') \perp (AK_s)$;
 $(B'C') \perp (AK_s)$;
- **Conclusion** : par symétrie de la relation \perp , $(B'C')$ est perpendiculaire à (AK_s) .

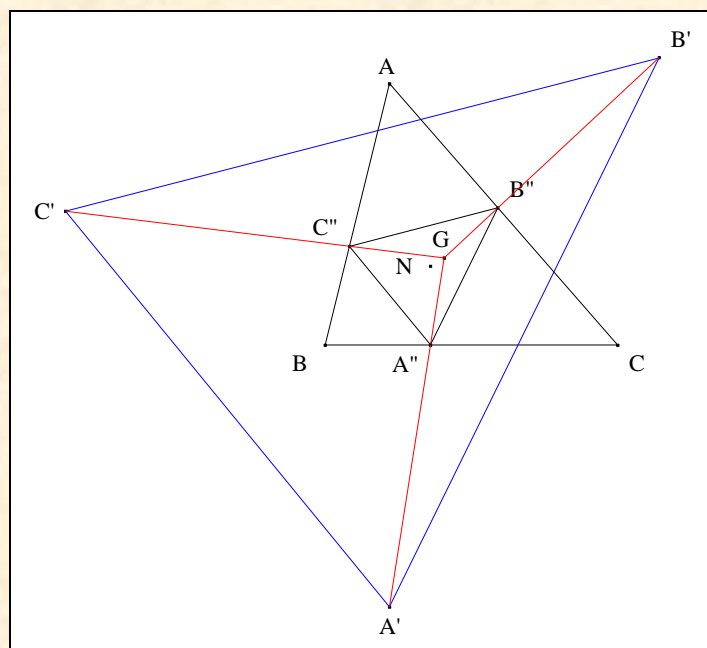
Scolies : (1) vision triangulaire



- Notons A' le symétrique de A par rapport à (BC)
et H l'orthocentre de ABC .
- **Conclusion** : mutatis mutandis, nous montrerions que $(C'A')$ est perpendiculaire à (BK_s)
 $(A'B')$ est perpendiculaire à (CK_s) .

- (2) $A'B'C'$ est le triangle symétrique de ABC ou
 $A'B'C'$ is the reflexion triangle of ABC en anglais
- (3) ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles orthologiques ;
 - * K_s est l'orthopôle de ABC relativement à $A'B'C'$
 - * H est l'orthopôle de $A'B'C'$ relativement à ABC .
- (4) Les triangles symétrique et N-pédal

¹⁶ Bottema O. (1901-1992), Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde, 2nd ed. Utrecht, Netherlands : Epsilon, Chapter XVI (1987) 83-87 ;
Boutte G., Message *Hyacinthos* # 3997 du 28 septembre 2001 ;
<https://groups.yahoo.com/neo/groups/hyacinthos/conversations/messages/3997>
Grinberg D., On the Kosnita point and the reflection triangle, *Forum Geometricorum* 3 (2003) 105-111 ;
<http://forumgeom.fau.edu/>

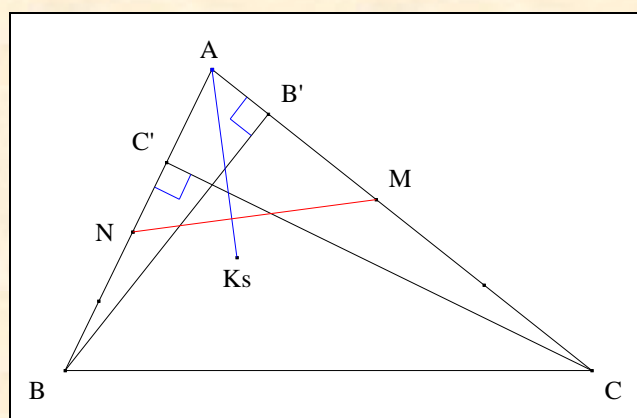


- Notons G le point médian de ABC
et $A''B''C''$ le triangle N-pédal de ABC .
- **Conclusion :** $A''B''C''$ est homothétique à $A'B'C'$ (centre G et rapport 4).¹⁷
(une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur¹⁸)

4. Une ménélienne de ABC

VISION

Figure :



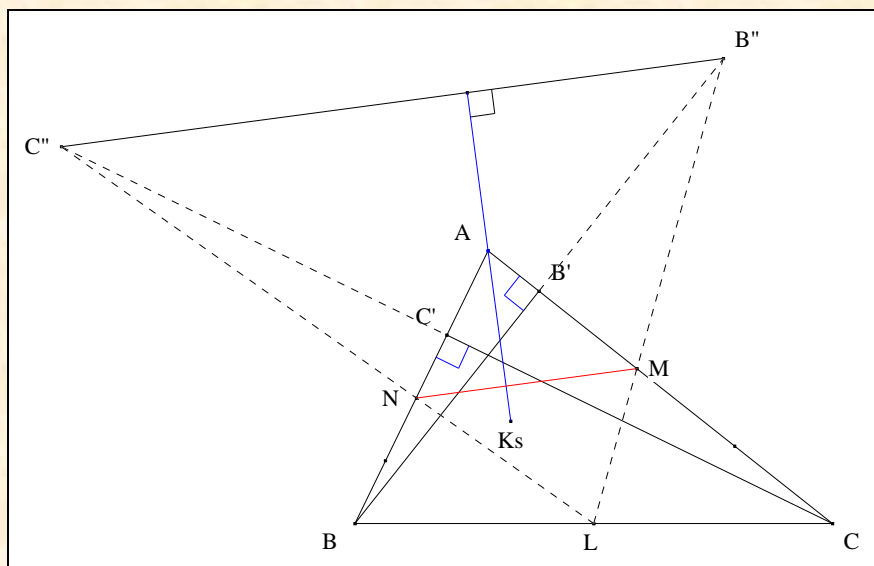
¹⁷ Bottema O. (1901-1992), Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde, 2nd ed. Utrecht, Netherlands : *Epsilon*, Chapter **XVI** (1987) 83-87 ;
Boutte G., Message *Hyacinthos* # **3997** du 28 septembre 2001 ;
<https://groups.yahoo.com/neo/groups/hyacinthos/conversations/messages/3997>
Grinberg D., On the Kosnita point and the reflection triangle, *Forum Geometricorum* **3** (2003) 105-111 ;
<http://forumgeom.fau.edu/>

¹⁸ Ayme J.-L., Les triangles symétrique et N-pédal sont homothétiques, *G.G.G.* vol. **25** ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

Traits : ABC un triangle,
 Ks le point de Kosnitsza de ABC,
 B', C' les pieds des B, C-perpendiculaires de ABC
 et M, N les premier tiers-points de [B'C'], [C'B] resp. à partir de M, N.

Donné : (MN) est perpendiculaire à (AKs).¹⁹

VISUALISATION



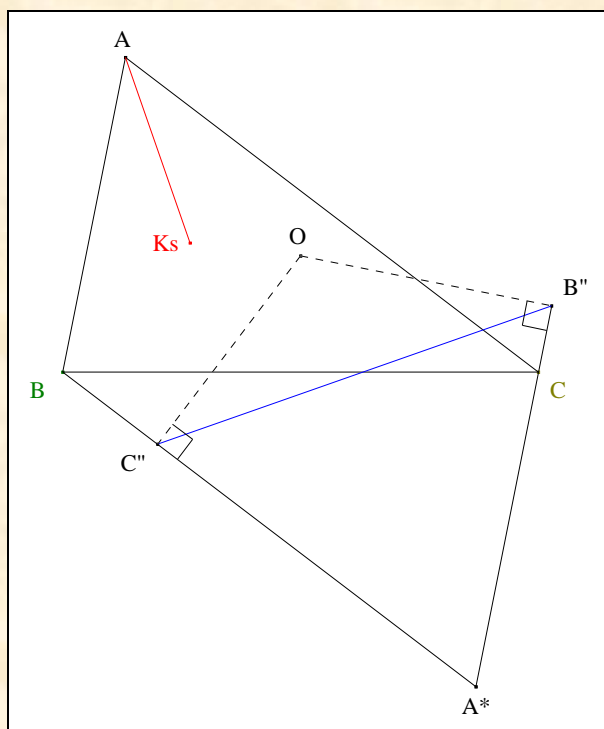
- Notons et B'', C'' les symétriques de B, C resp. par rapport à (AC), (AB)
 L le milieu de [BC].
- D'après "Le théorème de Ménélaüs" appliqué
 - (1) au triangle BCC', la ménélienne (LN) passe par C''.
 - (2) au triangle BCB', la ménélienne (LM) passe par B''.
- D'après "Le théorème de Ménélaüs" appliqué
 au triangle LCC'' et à la ménélienne (BNC'), $NL/NC'' = 1/3$.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $ML/MB'' = 1/3$.
- D'après Thalès "Rapports", $(MN) \parallel (B''C'')$.
- D'après C. 3. Le triangle symétrique,
 en conséquence, $(B''C'') \perp (AKs)$.
 $(MN) \perp (AKs)$.
- **Conclusion :** par symétrie de la relation \perp , (MN) est perpendiculaire à (AKs).

¹⁹ AK is perpendicular to MN, AoPS du 22/01/2015 ; <http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h622010p3718645>

5. Le triangle antimédian

VISION

Figure :



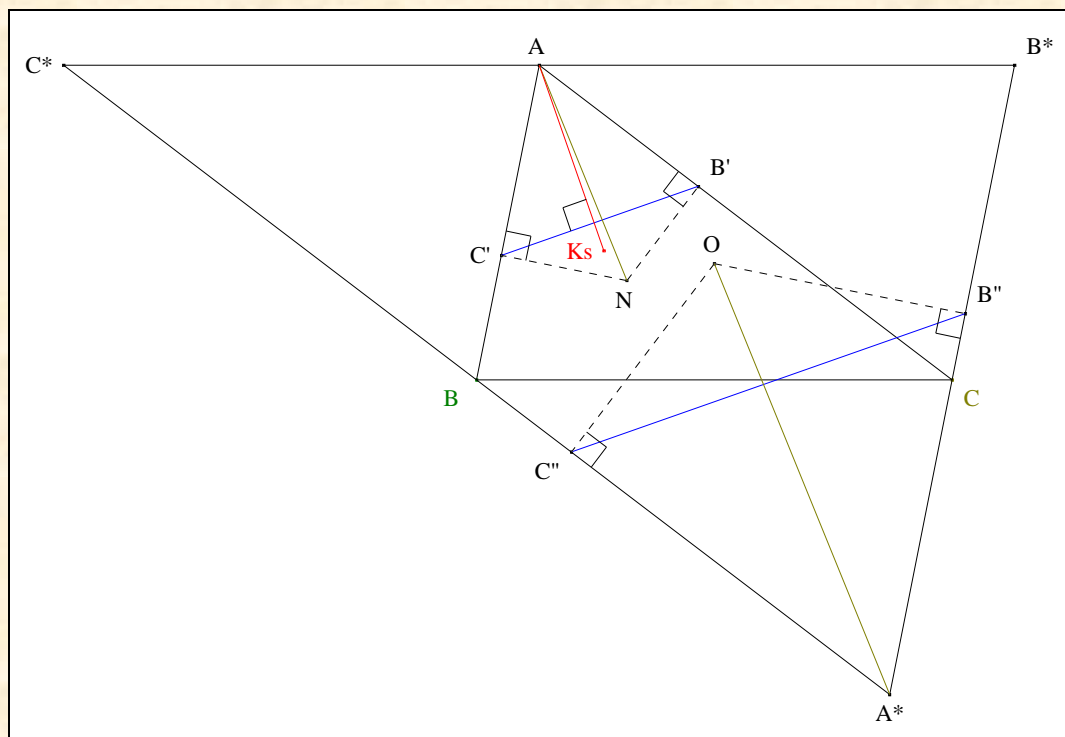
Traits : ABC un triangle,
 Ks le point de Kosnita de ABC,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 A* le point d'intersection de
 la parallèle à (AC) issue de B avec la parallèle à (AB) issue de C
 et B", C" les pieds des perpendiculaires à (A*C), (A*B) issues de O.

Donné : (B"C") est perpendiculaire à (AKs).²⁰

VISUALISATION

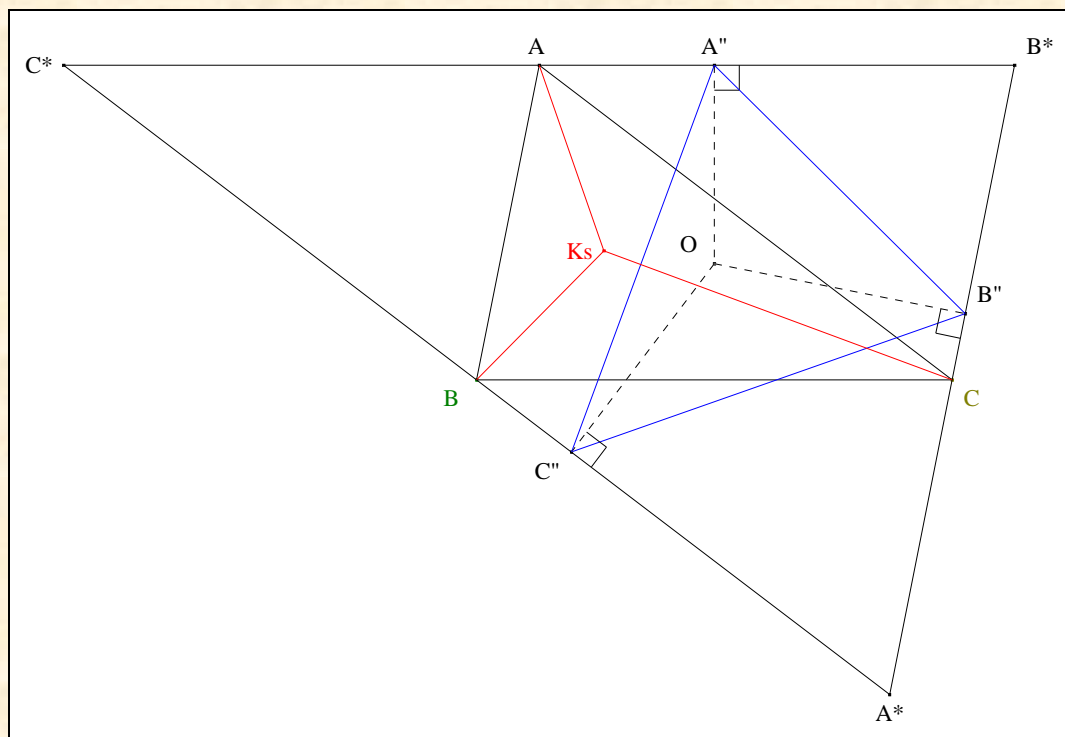
²⁰

Hatzipolakis A., Kosnita Point, AoPS du 19/11/2014 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h614549p3656989>
<https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/22770>



- Notons B^*, C^* les points d'intersection de la parallèle à (BC) issue de A resp. avec (A^*C) , (A^*B) ,
 N le centre du cercle d'Euler de ABC
 B', C' les pieds des perpendiculaires à (AC) , (AB) issues de N .
- **Scolies :** (1) O est le centre du cercle d'Euler du triangle $A^*B^*C^*$
(2) $A^*B^*C^*$ étant homothétique à ABC , $(A^*O) \parallel (AN)$.
- Les quadrilatère $AC'NB'$ et $A^*B''OC''$ étant homothétiques et ayant deux diagonales correspondantes parallèles, $(B''C'') \parallel (B'C')$.
- D'après **C. 3**. Le triangle symétrique, en conséquence, $(B'C') \perp (AK_s)$;
 $(B''C'') \perp (AK_s)$.
- **Conclusion :** par symétrie de \perp , $(B''C'')$ est perpendiculaire à (AK_s) .

Scolies : (1) vision triangulaire

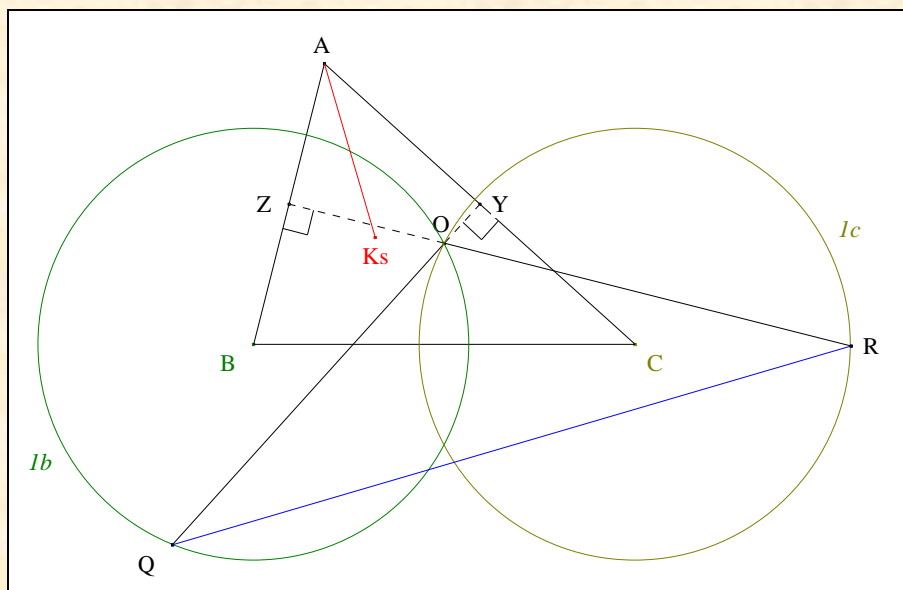


- Notons A'' le pied de la perpendiculaires à (B^*C^*) issue de O .
 - **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que $(C''A'')$ est perpendiculaire à (BKs)
 $(A''B'')$ est perpendiculaire à (CKs) .
- (2) $A^*B^*C^*$ est "le triangle antimédian de ABC ".
- (3) ABC et $A''B''C''$ sont deux triangles orthologiques ;
- * Ks est l'orthopôle de ABC relativement à $A''B''C''$
 - * O est l'orthopôle de $A''B''C''$ relativement à ABC .

6. Le triangle O-symétrico de l'antimédian

VISION

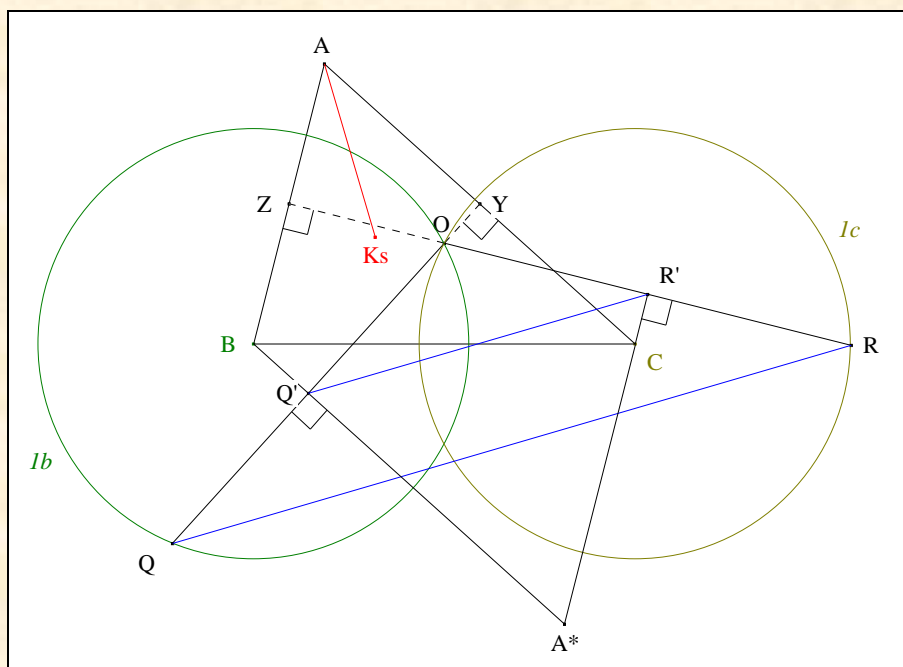
Figure :



- Traits :**
- ABC un triangle,
 - K_s le point de Kosnita de ABC,
 - O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 - Y, Z les milieux resp. de [AC], [AB],
 - I_b, I_c les cercles de centres resp. B, C passant par O
- et Q, R les seconds points d'intersection de (OY), (OZ) resp. avec I_b, I_c .

Donné : (QR) est perpendiculaire à (AK_s).²¹

VISUALISATION



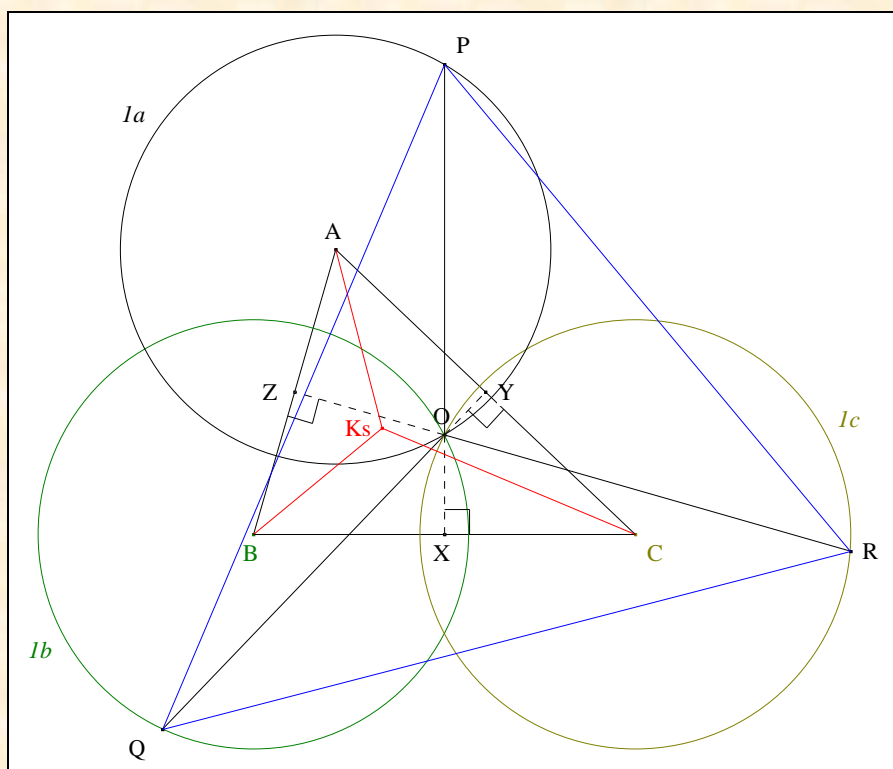
- Notons A^* le point d'intersection de la parallèle à (AC) issue de B avec la parallèle à (AB) issue de C

²¹ Hatzipolakis A., Kosnita Point, AoPS du 19/11/2014 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h614549p3656989>
<https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/22770>

et Q', R' les points d'intersection resp. de (A^*B) et (OQ) , (A^*C) et (OR) .

- **Scolie :** Q', R' sont les milieux resp. de $[OQ]$, $[OR]$.
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle OQR , $(QR) \parallel (Q'R')$.
- D'après **C. 5**. Le triangle antimédian, en conséquence, $(Q'R') \perp (AK_s)$;
 $(QR) \perp (AK_s)$;
- **Conclusion :** (QR) est perpendiculaire à (AK_s) .

Scolie : (1) vision triangulaire



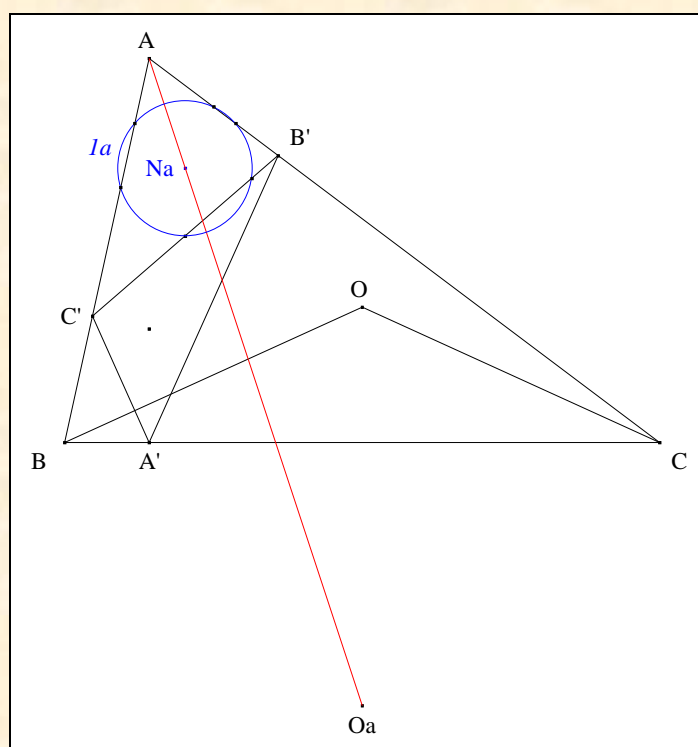
- Notons X le milieu de $[BC]$,
 Ia le cercle de centre A passant par O
et P le second point d'intersection de (OX) avec Ia .
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (RP) est perpendiculaire à (BK_s)
 (PQ) est perpendiculaire à (CK_s) .
- (2) PQR est "le triangle O -symétrico de l'antimédian $A^*B^*C^*$ ".
- (3) ABC et PQR sont deux triangles orthologiques ;
 - * K_s est l'orthopôle de ABC relativement à PQR
 - * O est l'orthopôle de PQR relativement à ABC .

**D. POINTS
SUR
UNE A-DROITE DE KOSNITZA**

1. Centre d'un cercle d'Euler

VISION

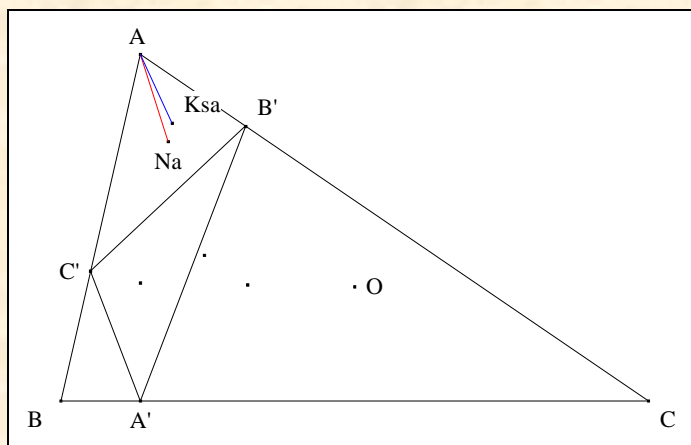
Figure :



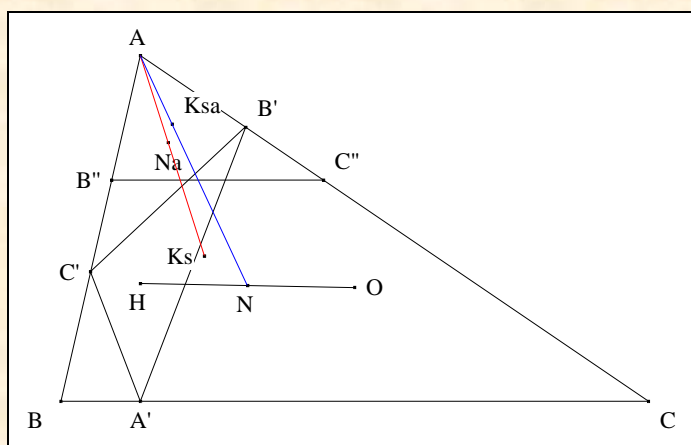
Traits : ABC un triangle acutangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 Oa le centre du cercle circonscrit à BOC,
 A'B'C' le triangle orthique de ABC,
 Ia le cercle d'Euler du triangles AB'C'
 et Na le centre de Ia.

Donné : A, Na et Oa sont alignés.

VISUALISATION



- Notons K_{sa} le point de Kosnitza de $AB'C'$.
- D'après **B**, K_s est l'isogonal de N , (ANa) et (AK_{sa}) sont deux A-isogonales de $AB'C'$.



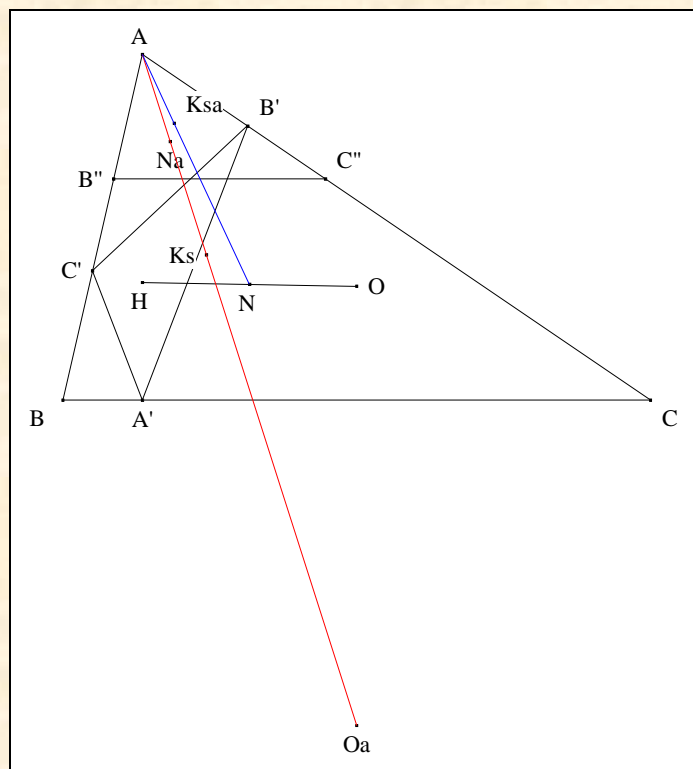
- Notons H l'orthocentre de ABC ,
 N le milieu de $[OH]$,
 B'', C'' les symétriques de B, C par rapport à la A-bissectrice intérieure de ABC
 et K_s le point de Kosnitza de ABC .

- D'après **B**, K_s est l'isogonal de N , (AN) et (AK_s) sont deux A-isogonales de ABC .

- **Scolies :** le triangle $AB''C''$ étant homothétique à ABC ,

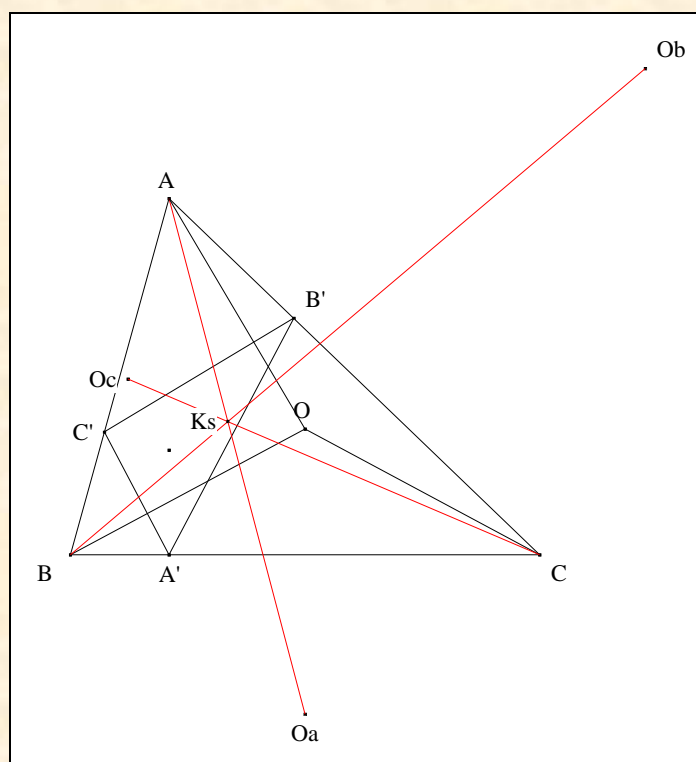
(1) (ANa) passe par K_s

(2) (AK_{sa}) passe par N .



- **Conclusion :** d'après A. Le point de Kosnitza, A , Na et Oa sont alignés.

Solie : vision triangulaire ²²



- Notons Oa, Ob, Oc les centres des cercles circonscrits resp. aux triangles BOC, COA, AOB .

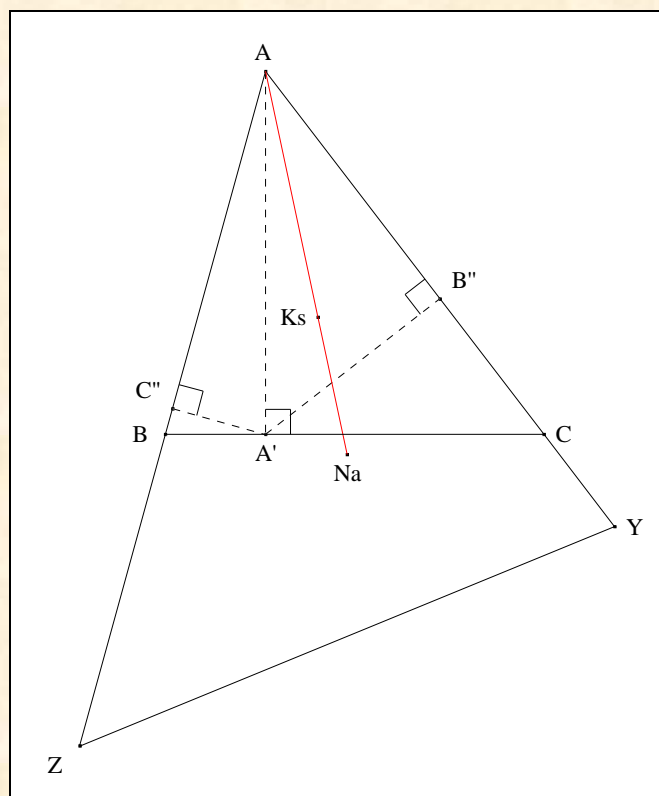
²² Geometry from Kazakhstan!, AoPS du 27/10/2013 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=559990>

- **Conclusion** : d'après A. Le point de Kosnitza, (AOa) , (AOb) et (AOc) concourent en Ks .

2. Un résultat d'Antreas Hatzipolakis

VISION

Figure :

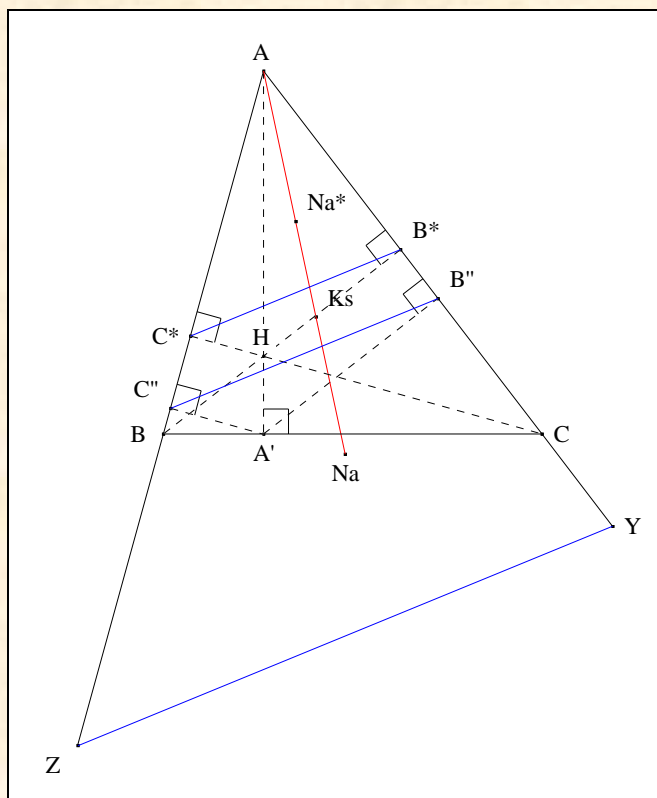


Traits : ABC un triangle acutangle,
 Ks le point de Kosnitza de ABC ,
 A' le pied de la A -hauteur de ABC ,
 B'', C'' les pieds des perpendiculaires à (AC) , (AB) issue de A' ,
 Y, Z les symétriques de A resp. par rapport à B'', C''
 et Na le centre du cercle d'Euler de AYZ

Donné : Na est sur (AKs) .²³

VISUALISATION

²³ Hatzipolakis A., Kosnita Point again, AoPS du 20/11/2014 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h614695p3658055>
 Hatzipolakis A., Sondat's line ;
<https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/22772>



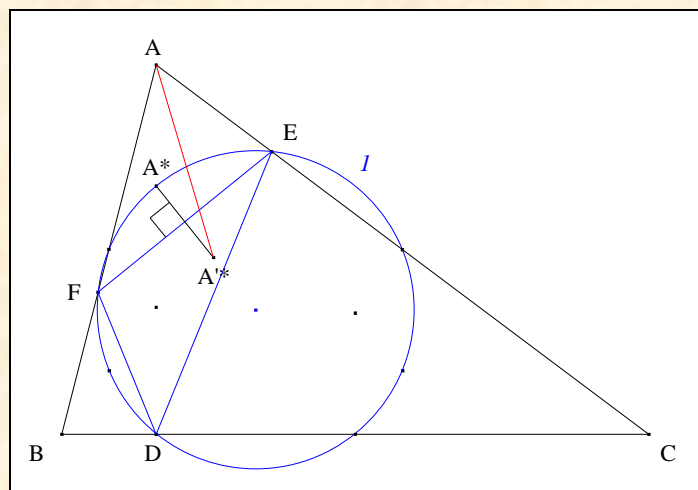
- Notons H l'orthocentre de ABC
et B^*, C^* les pieds des B, C -hauteur de ABC .
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" ²⁴,
appliqué aux triangles perspectifs HB^*C^* et $A'B''C''$ de centre A , $(B^*C^*) \parallel (B''C'')$.
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle AYZ ,
par transitivité de la relation \parallel , $(B''C'') \parallel (YZ)$;
 $(B^*C^*) \parallel (YZ)$.
- Les triangles AYZ et AB^*C^* étant homothétiques,
en conséquence, Na est l'homologue de Na^* ;
 A, Na et Na^* sont alignés.
- **Conclusion** : d'après **D. 1.** Centre du cercle d'Euler, Na est sur (AKs) .

3. Le triangle d'Euler

VISION

Figure :

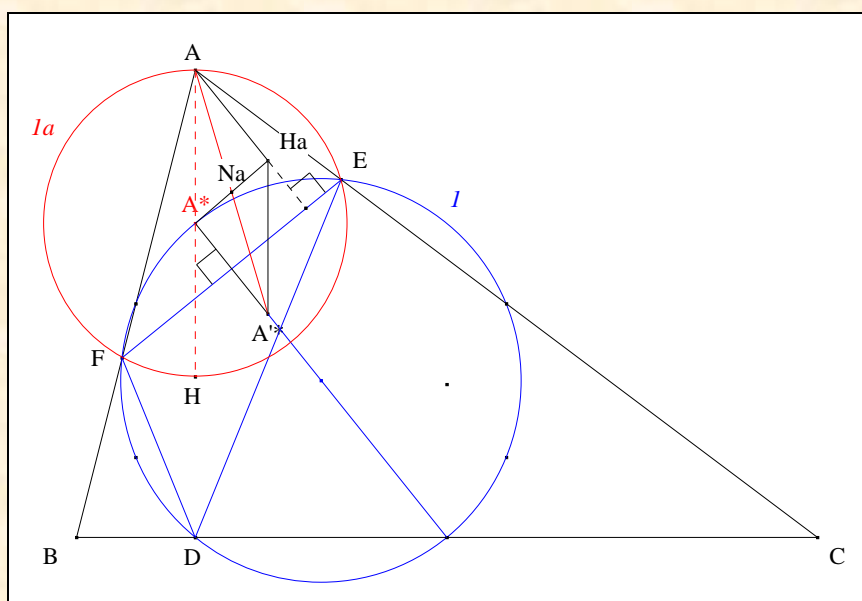
²⁴ Ayme J.-L., Une reverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. 6, p. 40-44 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>



Traits : ABC un triangle,
 DEF le triangle orthique de ABC,
 I le cercle d'Euler de ABC,
 A^* le A-point d'Euler de ABC
 et A'^* le symétrique de A^* par rapport à (EF).

Donné : A'^* est sur la A-droite de Kosnitsa de ABC.

VISUALISATION



• Notons H l'orthocentre de ABC,
 H_a l'orthocentre de triangle AEF,
 I_a le cercle de diamètre [AH] ; il passe par E et F ;
 et Na le centre du cercle d'Euler du triangle AEF.

• D'après "La relation de Carnot" (Cf. V. Annexe 1), le quadrilatère $AA^*A'^*H_a$ est un parallélogramme.

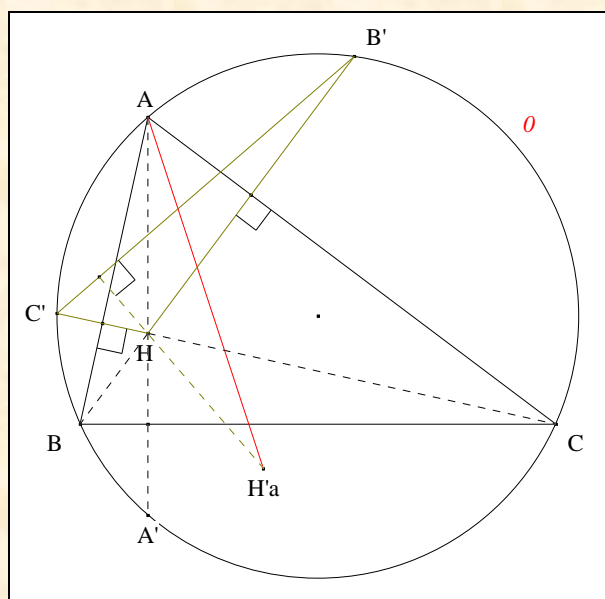
• **Scolies :** (1) A^* est le centre de I_a
 (2) Na est le milieu de $[A^*H_a]$
 (3) A, Na et A'^* sont alignés.

- **Conclusion** : d'après **D. 1**. Centre d'un cercle d'Euler, A^* est sur la A-droite de Kosnitsa de ABC.

4. Le triangle H-circum-orthique

VISION

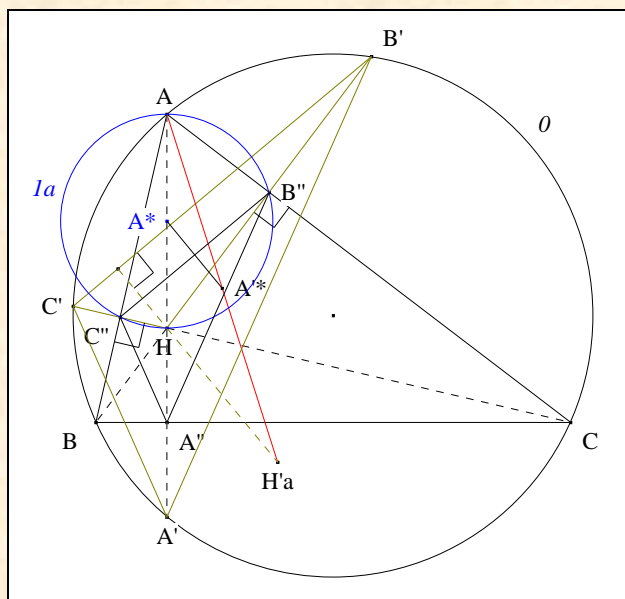
Figure :



Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre de ABC,
 O le cercle circonscrit à ABC,
 $A'B'C'$ le triangle H-circumorthique de ABC
et $H'a$ l'orthocentre du triangle $HB'C'$.

Donné : $H'a$ est sur le A-droite de Kosnitsa de ABC.

VISUALISATION

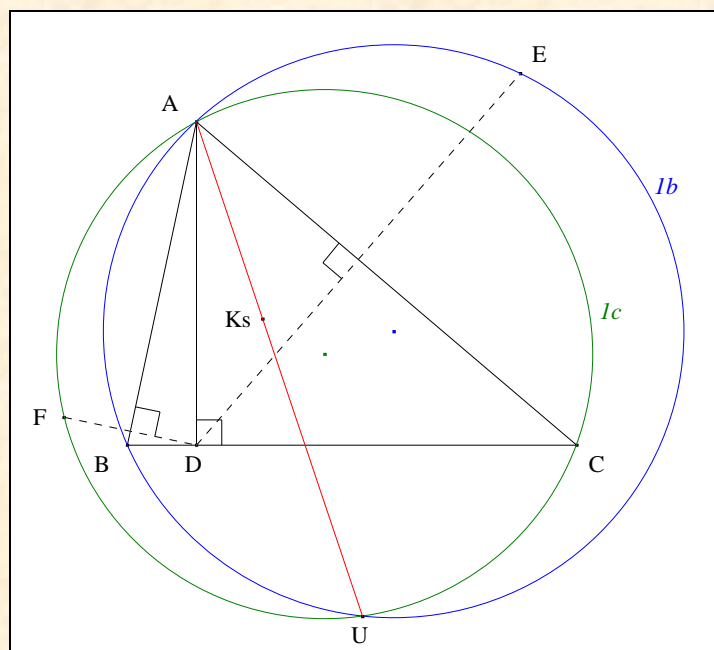


- Notons $A''B''C''$ le triangle orthique de ABC,
 - A^* le A-point d'Euler de ABC
 - Ia le cercle de diamètre $[AH]$; il a pour centre A^* et passe par B'' et C'' ;
 - et A'^* le symétrique de A^* par rapport à $(B''C'')$.
- D'après Carnot "Symétrie de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. V. Annexe 2), $A'B'C'$ est homothétique à $A''B''C''$ (centre H et rapport 2).
 - D'après Carnot "La relation" (Cf. V. Annexe 1), $H'aH = 2.A^*A'^*$.
 - **Scolie :** $(H'aH) // (A^*A'^*)$.
 - D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle $AHH'a$, A'^* est sur $(AH'a)$.
 - **Conclusion :** d'après D. 2. Le triangle d'Euler, $H'a$ est sur le A-droite de Kosnitza de ABC.

5. Un point, intersection de deux cercles

VISION

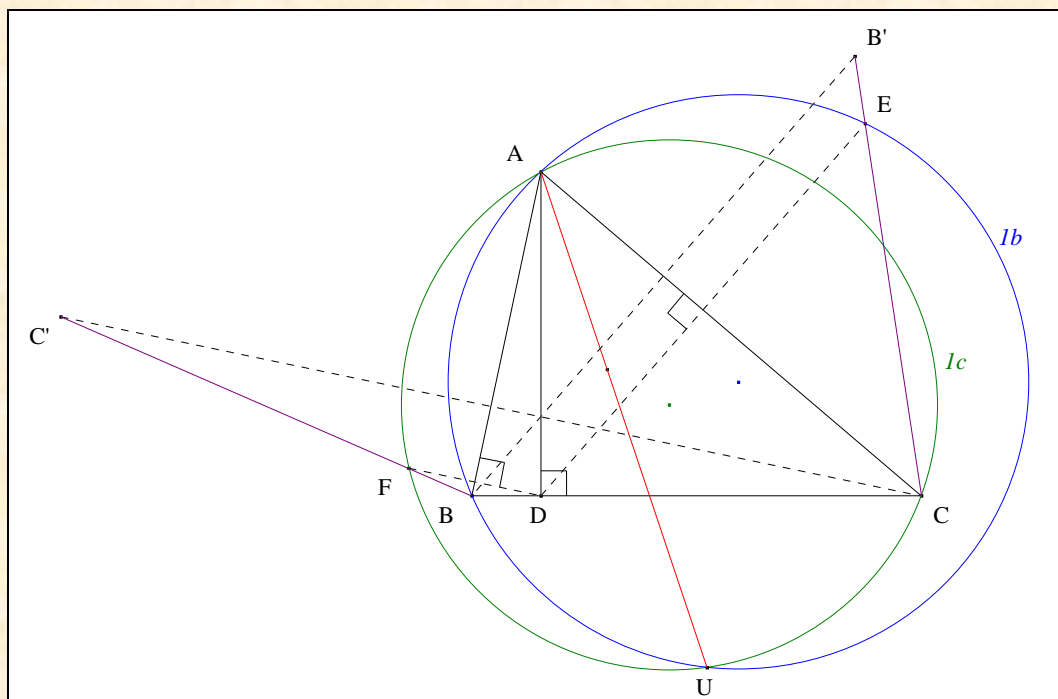
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 K_s le point de Kosnita de ABC ,
 D le pied de la A -hauteur de ABC ,
 E, F les symétriques de D resp. par rapport à (AC) , (AB) ,
 I_b, I_c les cercles circonscrits resp. aux triangles BAE , CAF
 et U le second point d'intersection de I_b et I_c .

Donné : U est sur (AK_s) ²⁵.

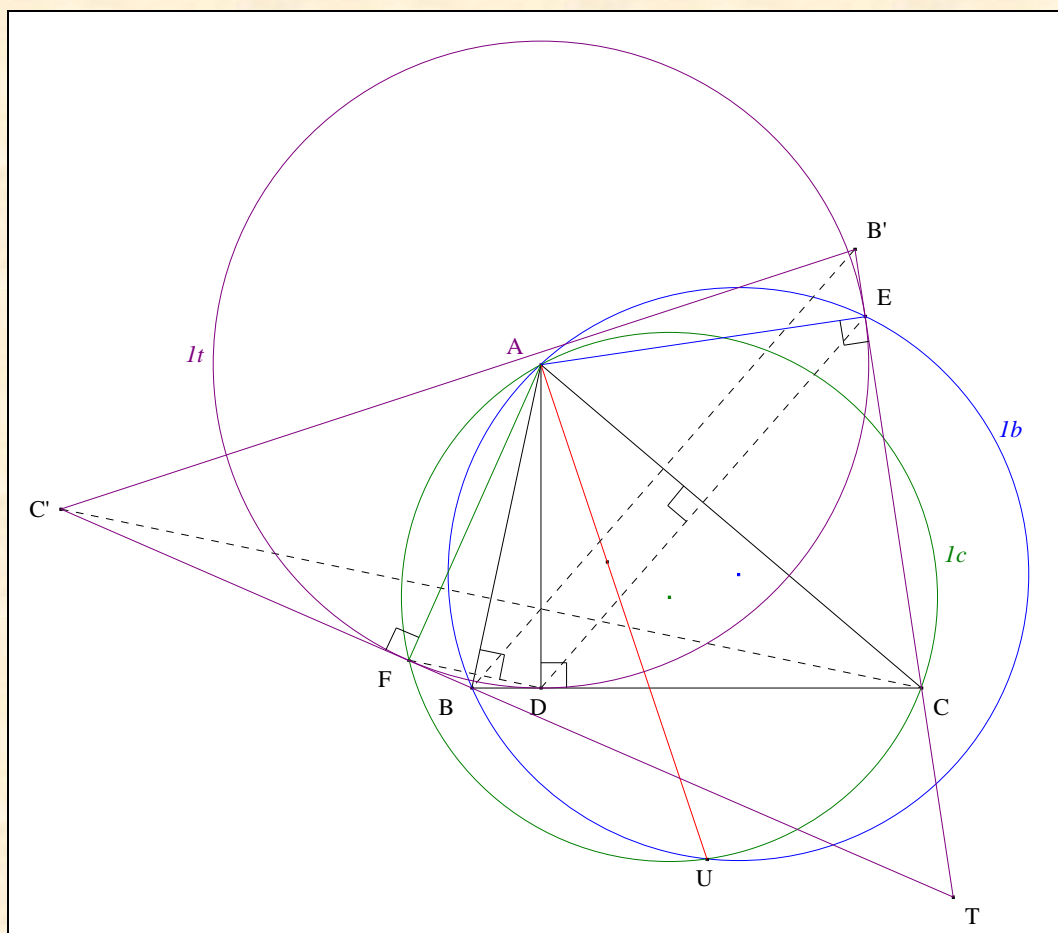
VISUALISATION



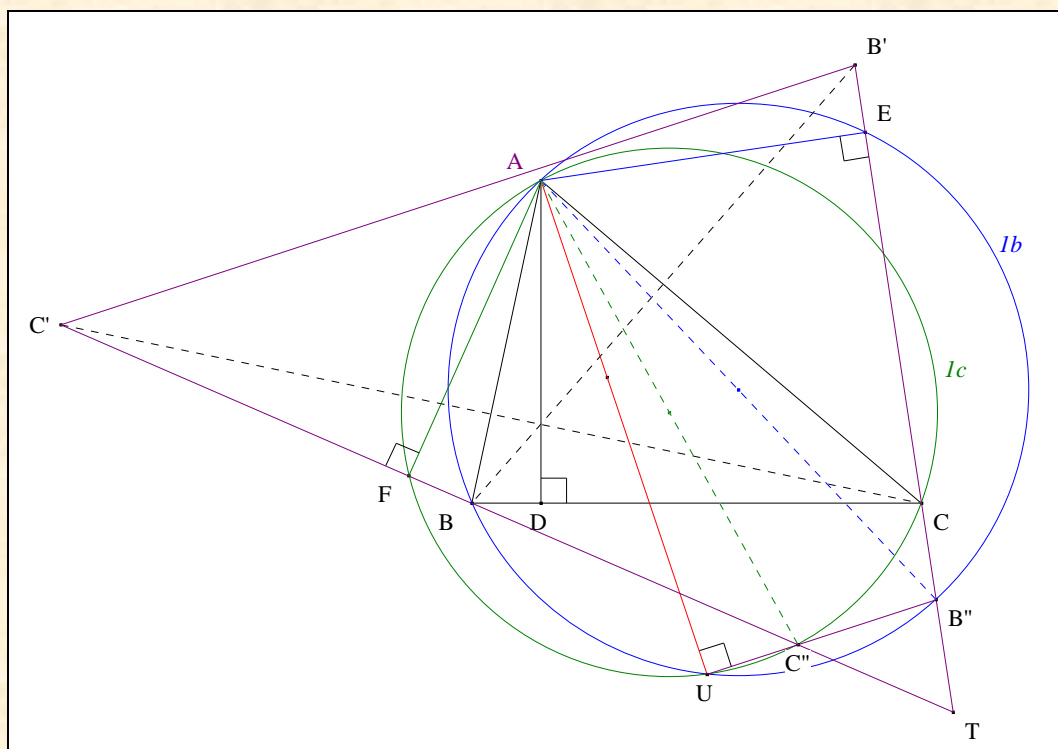
²⁵

The Kosnita point lies on AU , AoPS du 29/12/2014 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h619169p3693390>

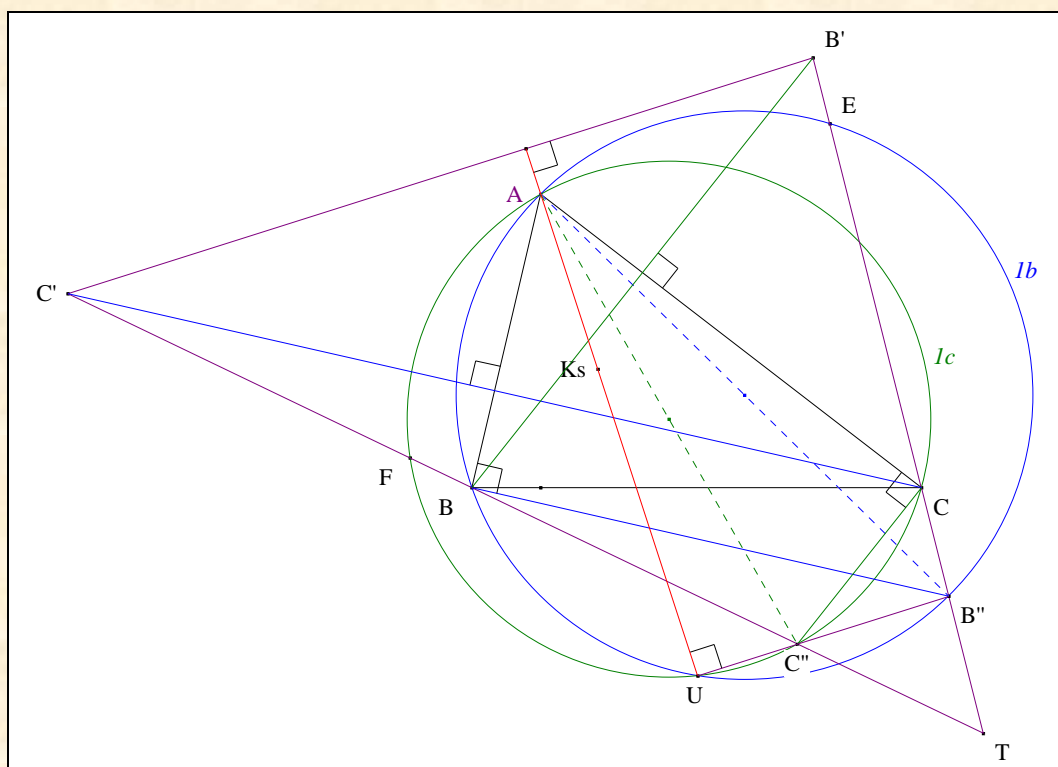
- Notons B', C' les symétriques de B, C resp. par rapport à $(AC), (AB)$.
- Par symétrie axiale, (1) B, F et C' sont alignés
(2) C, E et B' sont alignés.



- Notons T le point d'intersection de (BF) et (CE) ,
et I_t le cercle de centre A passant par D .
- **Scolies :** (1) I_t est tangent à (BC) en D
(2) I_t est tangent à (CE) en E
(3) I_t est tangent à (BF) en F
(4) I_t est le T -exercerle du triangle TBC .



- Notons B'', C'' les seconds points d'intersection de (CE) , (BF) resp. avec lb , lc .
- **Scolies :**
 - (1) B'', C'' sont les antipôles de A resp. par rapport à lb , lc
 - (2) B'', C'' et U sont alignés
 - (3) $(B''C'') \perp (AU)$.



- **Scolies :** (1) (BB'') , (CC'') sont resp. les B , C -bissectrices intérieures de TBC

$$(2) \quad (BB'') // (CC') \text{ et } (CC'') // (BB').$$

- D'après "Le petit théorème de Pappus"²⁶ appliqué à l'hexagone sectoriel $B''C''CC'B''B''$ de frontières (TC') et (TB') , nous savons que en conséquence,

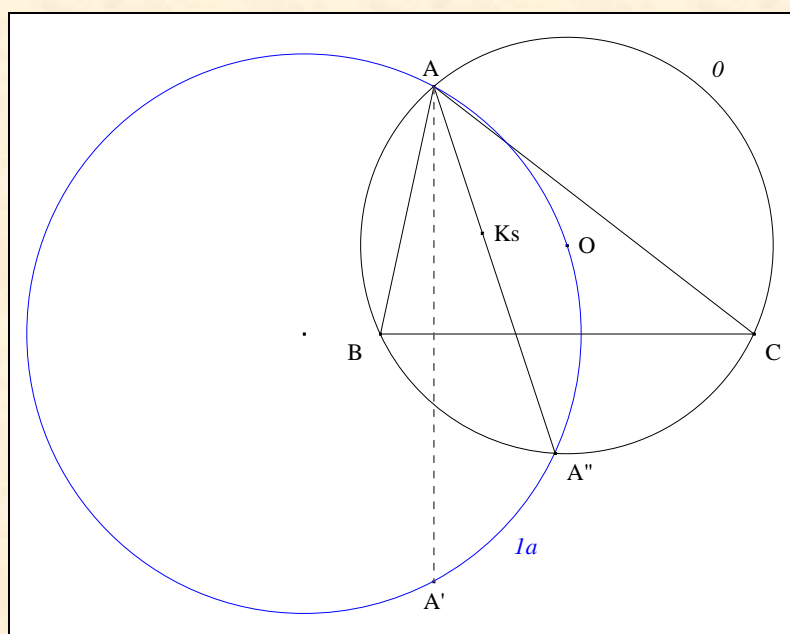
$$\begin{aligned} (B'C') & // (B''C''); \\ (B''C'') & \perp (AU); \\ (B'C') & \perp (AU). \end{aligned}$$

- **Conclusion :** d'après C. 3. Le triangle symétrique, U est sur (AKs) .

6. Un résultat de l'auteur

VISION

Figure :



- Traits :**
- ABC un triangle acutangle,
 - O le cercle circonscrit à ABC ,
 - O le centre de O ,
 - A' le symétrique de A par rapport à (BC) ,
 - Ia le cercle circonscrit au triangle AOA' ,
 - A'' le second point d'intersection de Ia et O ,
- et Ks le point de Kosnitza de ABC .

Donné : Ks est sur la corde commune $[AA'']$.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur.²⁷

²⁶ Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexanrie, G.G.G. vol. 6, p. 2-5 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

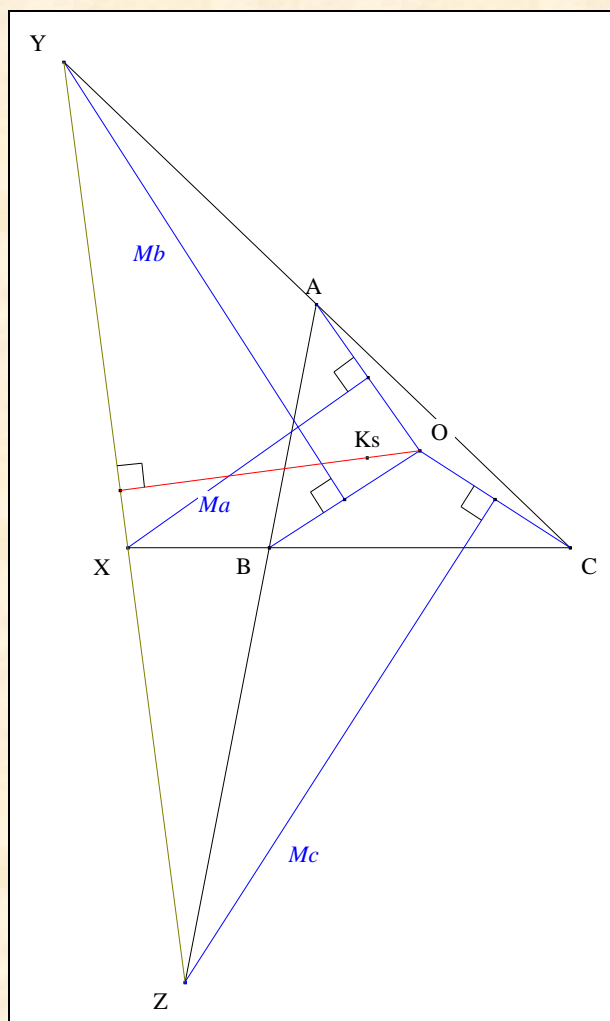
²⁷ Ayme J.-L., Le point de Kosnitza est l'isogonal du centre du cercle d'Euler, G.G.G. vol. 1, p. 11-13 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

E. LA DROITE (OKs)

1. Une perpendiculaire à (OKs)

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 Ks le point de Kosnitzer de ABC,
 Ma, Mb, Mc les médiatrices de [OA], [OB], [OC]
 et X, Y, Z les points d'intersection de Ma, Mb, Mc resp. avec (BC), (CA), (AB).

Donnés : (1) X, Y et Z sont alignés ²⁸
 (2) (OKs) est perpendiculaire à (XYZ) ²⁹.

²⁸ Geometry Problem (23), AoPS du 24/10/2010 ; <http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h373509>
 Ayme J.-L., Le point de Kosnitzer est l'isogonal du centre du cercle de Feuerbach, G.G.G. vol. 1 (2007) p. 5-7 ;
<http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

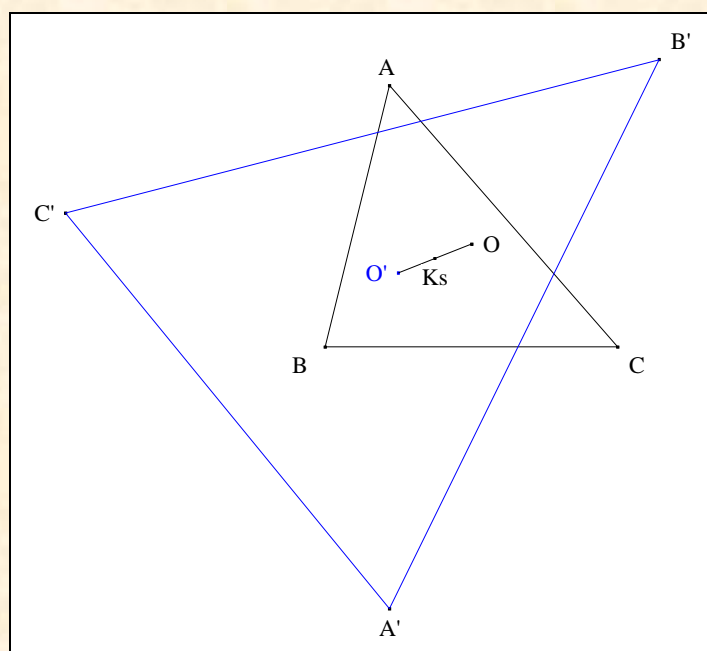
²⁹ Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. 1 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur.

2. Le centre du cercle circonscrit au triangle symétrique

VISION

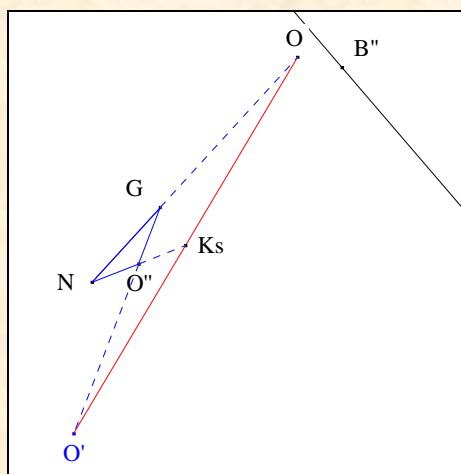
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 A'B'C' le triangle symétrique de ABC,
 O' le centre du cercle circonscrit à A'B'C'
 et Ks le point de Kosnitzer de ABC.

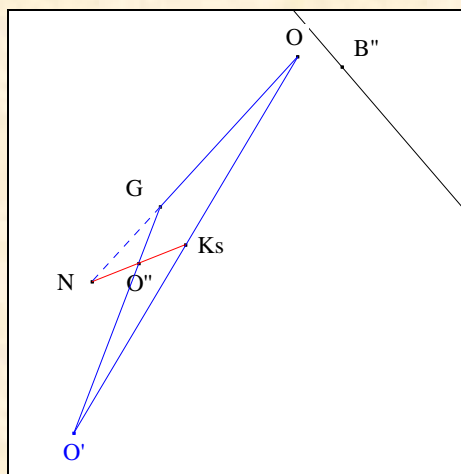
Donné : Ks est le milieu de [OO'].

VISUALISATION



- Notons N le centre du cercle d'Euler de ABC ,
 $A''B''C''$ le triangle N-pédal de ABC ,
 O'' le centre du cercle circonscrit à $A''B''C''$,
 et G le point médian de ABC

- D'après "Le cercle de Mathieu" ³⁰, O'' est le milieu de $[NKs]$.
- D'après "La droite d'Euler" ³¹, G est le premier tiers point de $[NO]$ à partir de N .
- D'après C. 3. Le triangle symétrique, scolie 4, O'' est le premier quart point de $[GO']$ à partir de G .
- D'après Ménélaüs "Le théorème des six segments" appliqué au triangle GNO'' avec O sur (GN) , Ks sur (NO'') , O sur $(O'G)$, O, Ks et O' sont alignés.



- **Conclusion :** d'après Ménélaüs "Le théorème des six segments" appliqué au triangle GOO' avec la ménélienne $(NKsO'')$, Ks est le milieu de $[OO']$.

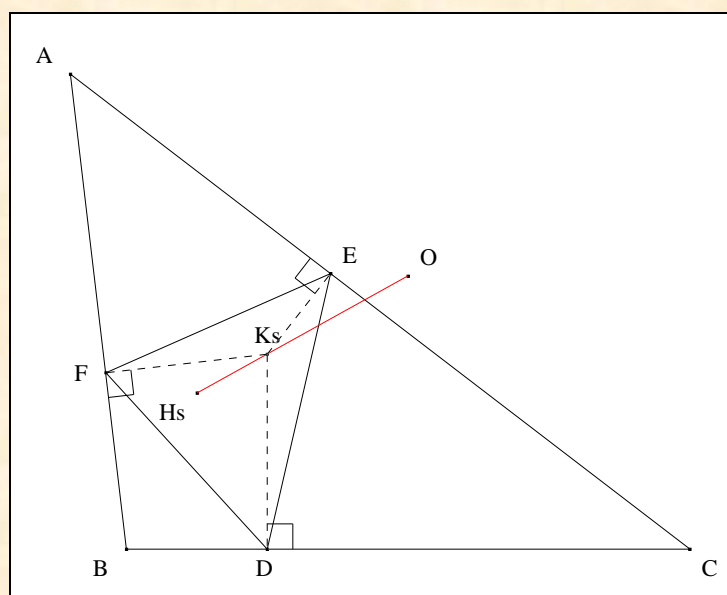
³⁰ Ayme J.-L., Pedal-cevian lines go through the de Longchamps's point, G.G.G. vol.6, p. 34-37 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

³¹ Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol.2, p. 5 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

3. Le point H_s sur (OKs)

VISION

Figure :

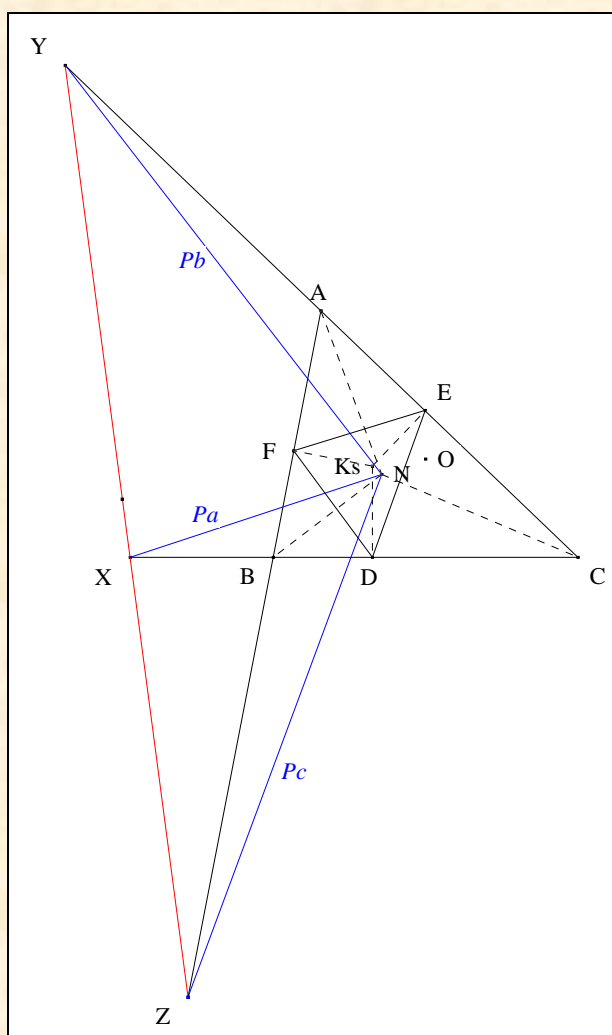


Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC ,
 K_s le point de Kosnitzer de ABC ,
 DEF le triangle K_s -pédal de ABC
 et H_s l'orthocentre de DEF .

Donné : H_s , K_s et O sont alignés ³².

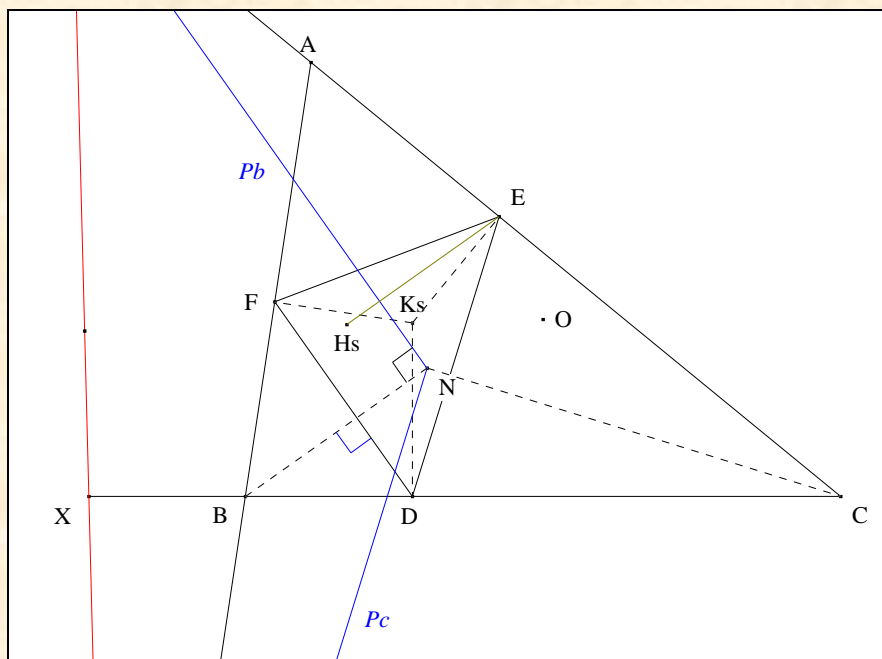
VISUALISATION

³² HK passes through the circumcenter, AoPS du 05/08/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1125044_hk_passes_through_the_circumcenter

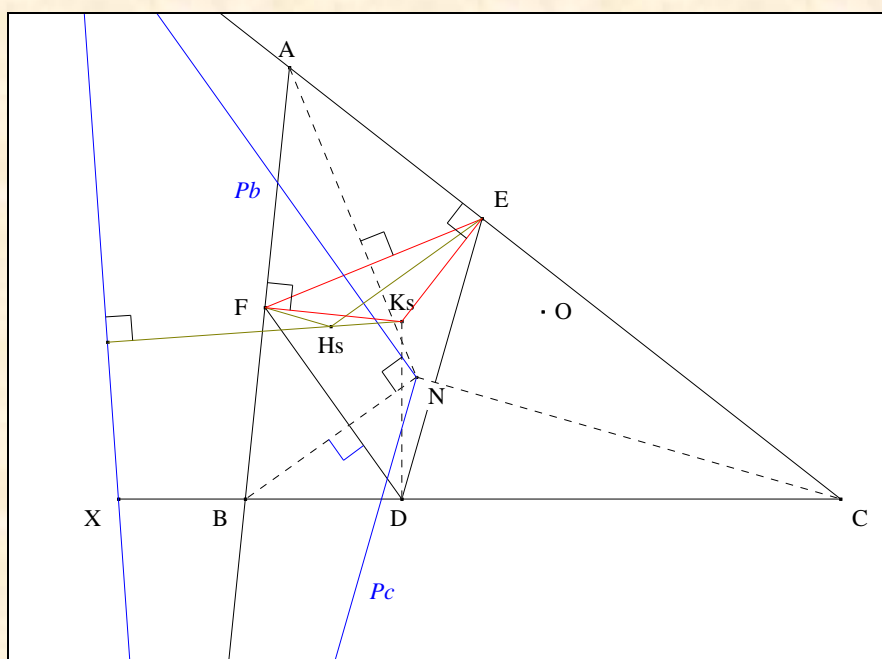


- Notons N le centre du cercle d'Euler de ABC ,
 Pa, Pb, Pc les perpendiculaires à $[NA], [NB], [NC]$ en N
 et X, Y, Z les points d'intersection de Pa, Pb, Pc resp. avec $(BC), (CA), (AB)$.
- D'après Félix Laroche "Pôle et ortho-transversale" ³³, X, Y et Z sont alignés.

³³ Ayme J.-L., Pôle et ortho-transversale, G.G.G. vol.9, p. 3-6 ;
<http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>



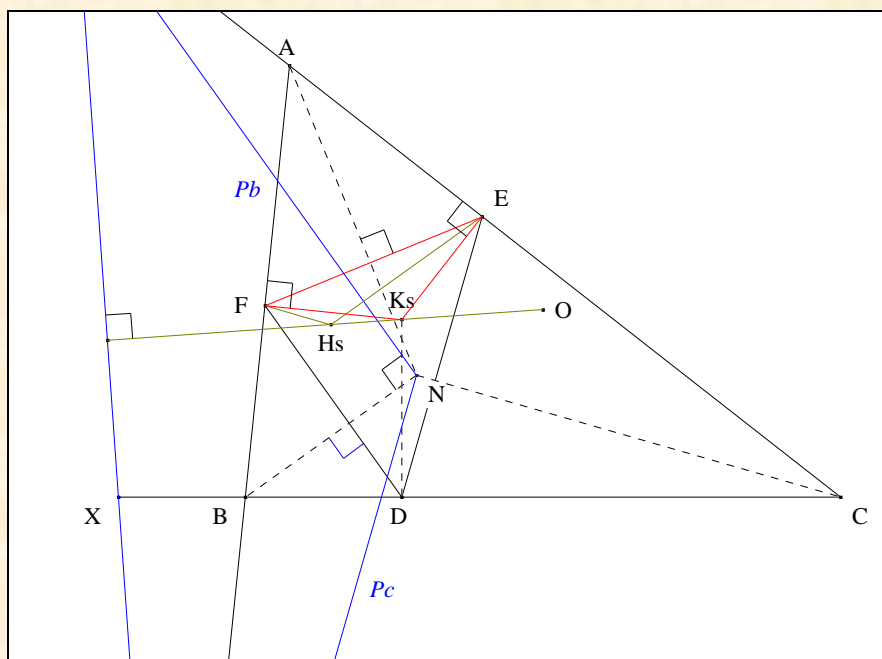
- D'après Vigarié "Isogonale et perpendiculaire"³⁴,
par hypothèse,
d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires,
 - $(DF) \perp (BN)$;
 - $(BN) \perp (NY)$;
 - $(DF) \parallel (NY)$.
- Par hypothèse,
nous savons que
en conséquence,
 - $(EH_s) \perp (DF)$;
 - $(DF) \parallel (NY)$
 - $(EH_s) \perp (NY)$.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que
 - $(FH_s) \perp (NZ)$.



- Considérons les triangles NYZ et KsFE.

³⁴ Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-
Ayme J.-L., Mantel * Noyer * Droz-Farny * Goormaghtigh or Simson-Wallace generalized , G.G.G. vol.12, p. 29-32 ;
<http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

- Par hypothèse et par définition, (1) NYZ est orthologique à KsFE
- (2) A est le centre d'orthologie de NYZ relativement à KsFE.
- D'après Steiner "Triangles orthologiques", KsFE est orthologique à NYZ ;
en conséquence, Hs est le centre d'orthologie de KsFE relativement à NYZ.
- **Conclusion partielle :** (KsHs) \perp (XYZ).

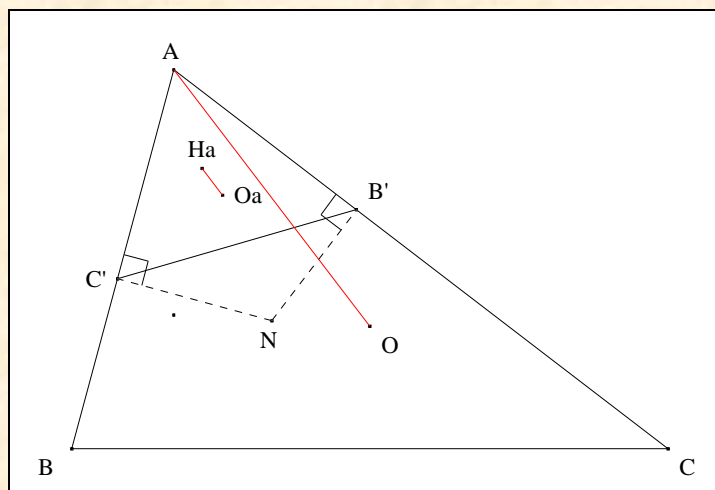


- D'après **E. 1.** Une perpendiculaire à (OKs),
d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires,
d'après le postulat d'Euclide, (XYZ) \perp (OKs) ;
(KsHs) // (OKs) ;
(KsHs) = (OKs).
- **Conclusion :** Hs, Ks et O sont alignés.

4. Le résultat de Nguyen Van Linh

VISION

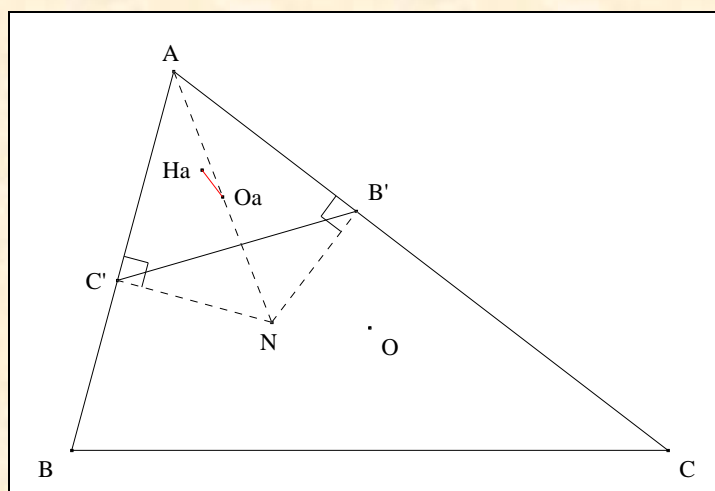
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 N le centre du cercle d'Euler de ABC,
 A'B'C' le triangle N-pédal de ABC
 et Ha, Oa l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit à AB'C'.

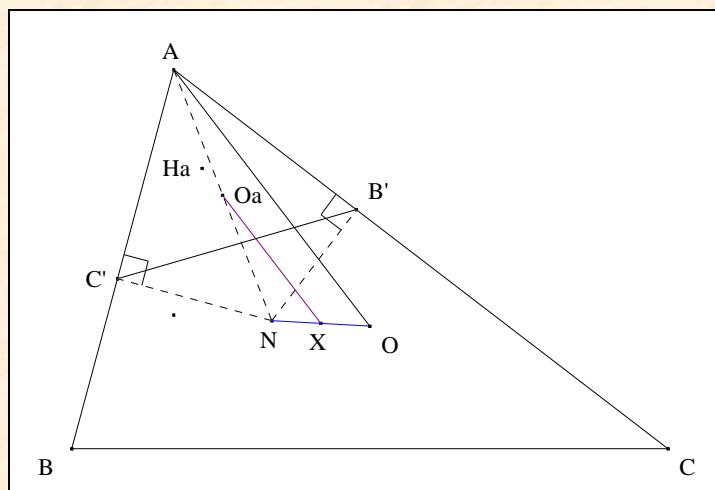
Donné : (HaOa) est parallèle à (AO).³⁵

VISUALISATION

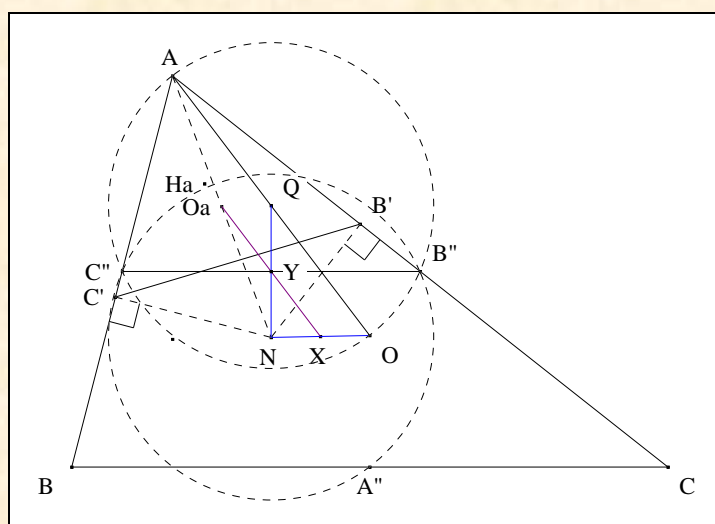


• **Scolie :** (HaOa) est la droite d'Euler de AB'C'.

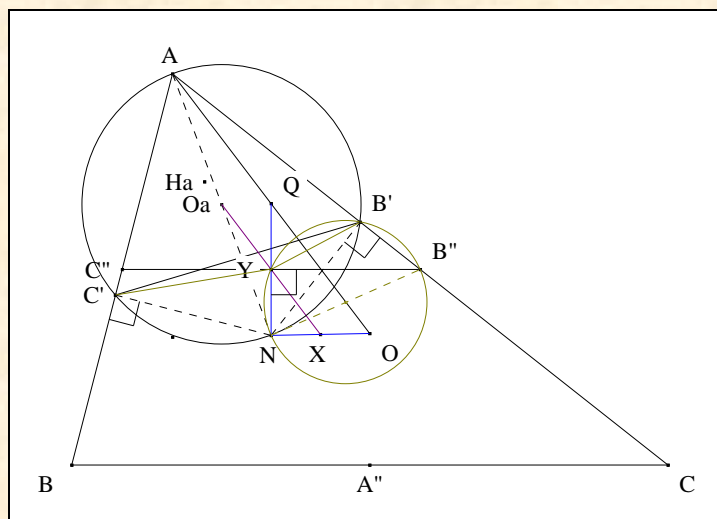
³⁵ Nguyen Van Linh, 4 Euler lines are concurrent, Vietnam IMO training 2015 test, AoPS du 11/05/2015 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1087710p4817974>
 Three interesting collinear points, AoPS du 30/03/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1220084_three_interesting_collinear_points



- Notons X le milieu de $[ON]$.
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle ANO , $(OaX) \parallel (AO)$.



- Notons Q le milieu de $[AO]$
et $A''B''C''$ le triangle médian de ABC .
- **Scolie :** Q est le centre du cercle circonscrit au triangle $AB''C''$.
- $AB''C''$ et $A''C''B''$ étant égaux, $(B''C'')$ est la médiatrice de $[NQ]$.
- Notons Y le milieu de $[NQ]$.
- **Scolie :** Y est sur $(B''C'')$.
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle ANQ , Y est sur (OaX) .



- Une chasse angulaire :

* B' et Y étant sur le cercle de diamètre [NB''],	$\angle AB'Y = \angle B''NY$
* par duplication,	$\angle B''NY = \frac{1}{2} \angle B''NC''$
* par symétrie d'axe (B''C''),	$\frac{1}{2} \angle B''NC'' = \frac{1}{2} \angle C''QB''$
* N étant sur le cercle circonscrit à AB''C'' par "Angle au centre",	$\frac{1}{2} \angle C''QB'' = \angle C''AB''$
* par une autre écriture,	$\angle C''AB'' = \angle C'AB'$
* par transitivité de la relation =,	$\angle AB'Y = \angle C'AB'$

- Mutatis mutandis, nous montrerions que

$$\angle YC'A = \angle C'AB'.$$

- Les angles $\angle AB'Y$, $\angle YC'A$ et $\angle C'AB'$ étant égaux,
d'après "Un point sur la droite d'Euler" (Cf. U. Appendice 2),

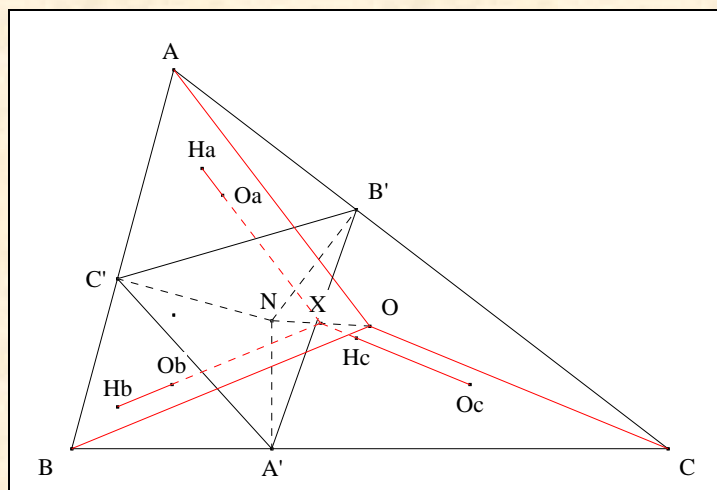
Y est sur (HaOa).

- D'après l'axiome d'incidence **Ia**,

(HaOa) passe par X.

- **Conclusion :** (HaOa) // (AO).

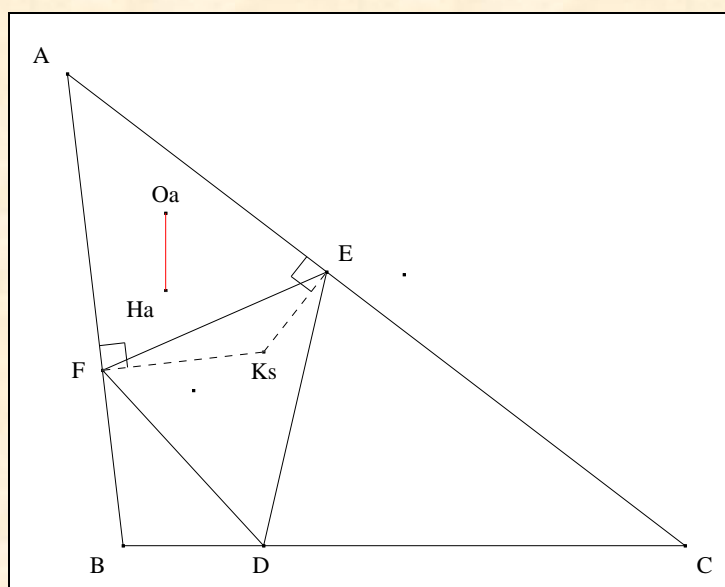
Scolie : vision triangulaire



5. Une perpendiculaire à (BC)

VISION

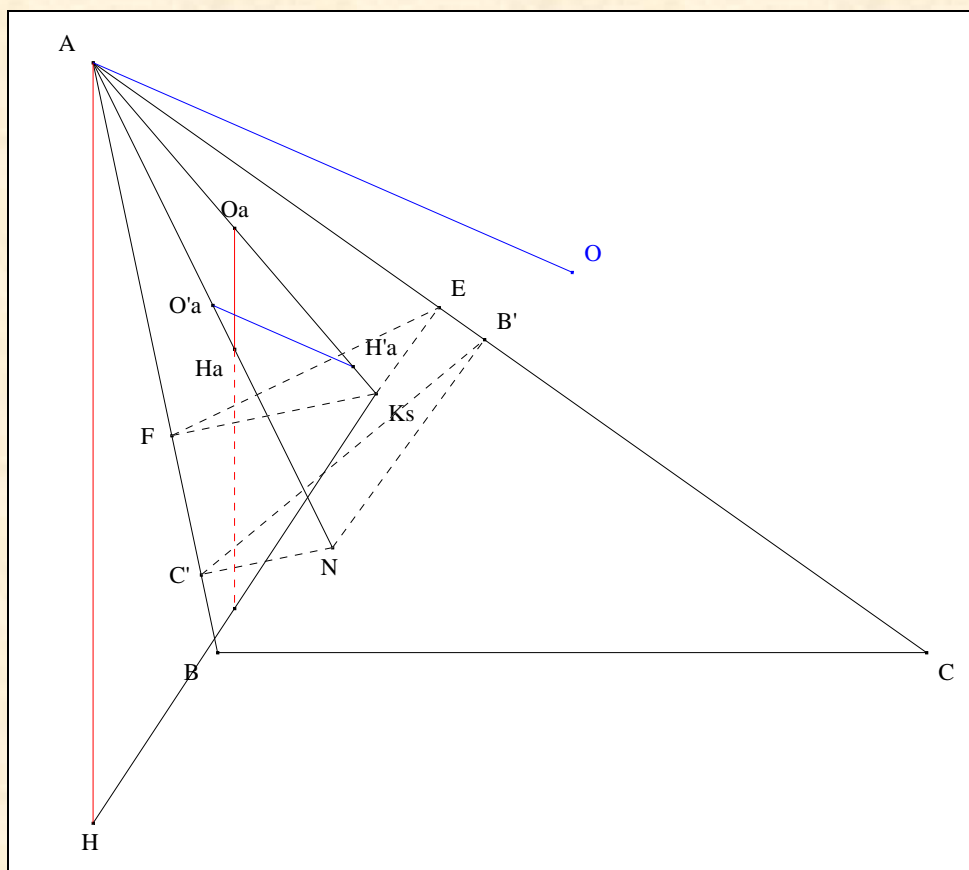
Figure :



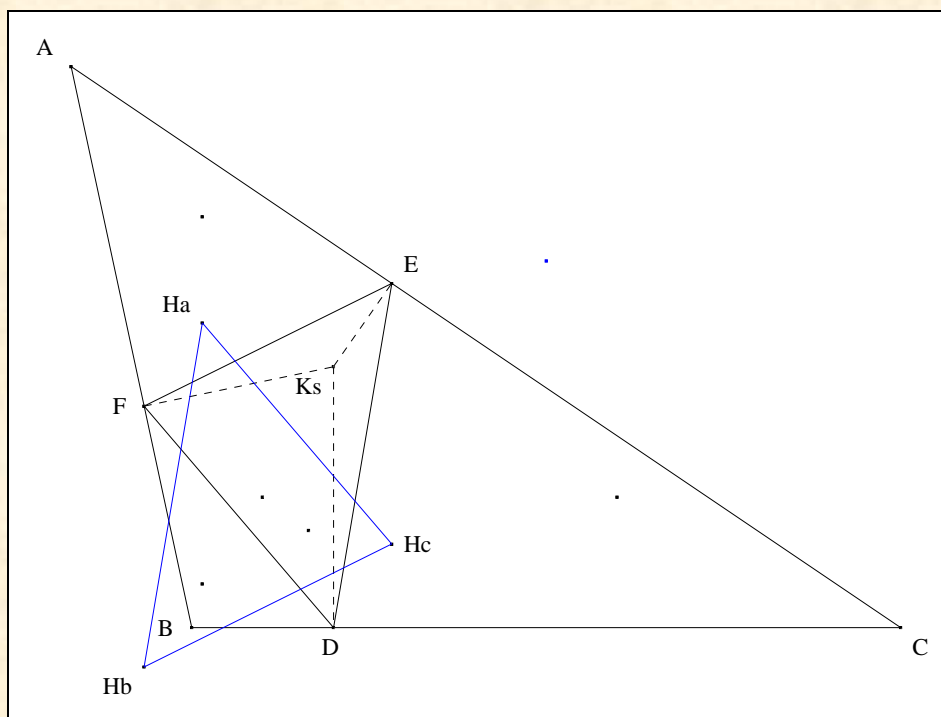
Traits : ABC un triangle,
 Ks le point de Kosnitzer de ABC,
 DEF le triangle Ks-pédal de ABC
 et Ha, Oa l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit au triangle AEF.

Donné : (HaOa) est perpendiculaire à (BC).

VISUALISATION



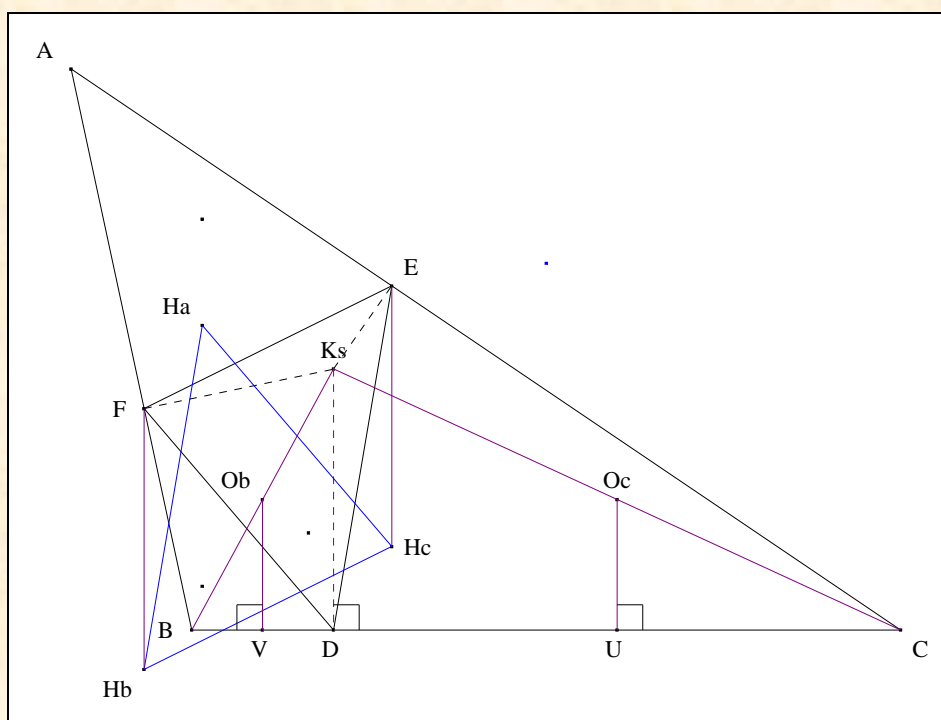
- Notons H l'orthocentre de ABC ,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC ,
 N le centre du cercle d'Euler de ABC ,
 $A'B'C'$ le triangle N-pédal de ABC
 et $H'a, O'a$ l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit au triangle AEF .
- D'après **E. 4.** Le résultat de Nguyen Van Linh, $(H'aO'a) \parallel (AO)$;
- D'après **B. 1.** K_s isogonal de N ,
 - (1) (AHa) et $(AH'a)$ sont deux A-isogonales de ABC
 - (2) (AOa) et $(AO'a)$ sont deux A-isogonales de ABC
- **Scolies :**
 - (1) O_a est sur $(AH'aK_s)$
 - (2) H_a est sur $(AO'aN)$
- H étant l'isogonal de O , (AH) et (AO) sont deux A-isogonales de ABC .
- D'après **E. 4.** Le résultat de Nguyen Van Linh, mutatis mutandis nous montrerions que
 - * (HaO_a) passe par le milieu de $[HK_s]$
 - * (HaO_a) est parallèle à (AH) .
- **Conclusion :** (AH) étant perpendiculaire à (BC) , (HaO_a) est perpendiculaire à (BC) .



Traits : ABC un triangle,
 Ks le point de Kosnitza de ABC,
 DEF le triangle Ks-pédal de ABC
 et Ha, Hb, Hc les orthocentres resp. des triangles AEF, BFD, CDE.

Donné : les triangles HaHbHc et DEF sont homothétiques et égaux.

VISUALISATION



• Notons Oc le centre du cercle circonscrit au triangle CDE
 et U le pied de la perpendiculaire à (BC) issue de Oc.

- D'après Carnot "La relation" (Cf. V. Annexe 1),
d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué à CDE,
par transitivité de la relation =,

$E H_c$	$= 2.OcU$	et	$(E H_c) // (OcU)$
$2.OcU$	$= KsD$	et	$(OcU) // (KsD)$
$E H_c$	$= KsD$	et	$(E H_c) // (KsD)$
- Mutatis mutandis, nous montrerions que

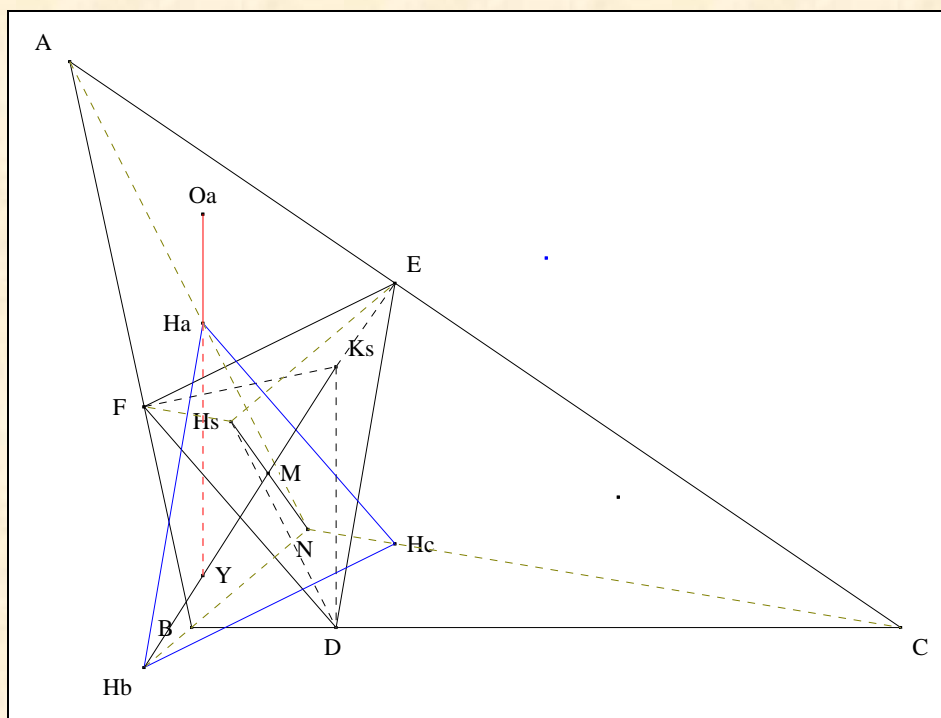
KsD	$= FH_b$	et	$(KsD) // (FH_b)$
-------	----------	----	-------------------
- Par transitivité des relations = et //,

$E H_c$	$= FH_b$	et	$(E H_c) // (FH_b)$
---------	----------	----	---------------------
- **Conclusion partielle :**
le quadrilatère EFH_bH_c
ayant deux côtés opposés parallèles et égaux,

H_bH_c	$= EF$	et	$(H_bH_c) // (EF)$
----------	--------	----	--------------------
- Mutatis mutandis, nous montrerions que

*	H_cH_a	$= FD$	et	$(H_cH_a) // (FD)$
*	H_aH_b	$= DE$	et	$(H_aH_b) // (DE)$
- **Conclusion :** les triangles $H_aH_bH_c$ et DEF sont homothétiques et égaux.

Scolie : $H_aH_bH_c$ et DEF sont perspectifs et orthologiques



- Notons M le centre d'homothétie de $H_aH_bH_c$ et DEF .
- Notons H_s l'orthocentre de DEF .
- Nous avons :
 - * N est l'orthopôle de $H_aH_bH_c$ relativement à DEF
 - * H_s est l'orthopôle de DEF relativement à $H_aH_bH_c$.
- D'après "Le théorème de Sondat" ³⁶, H_s, M et N sont alignés.
- K_s et Y étant deux points homologues, M est sur (H_bK_s) .

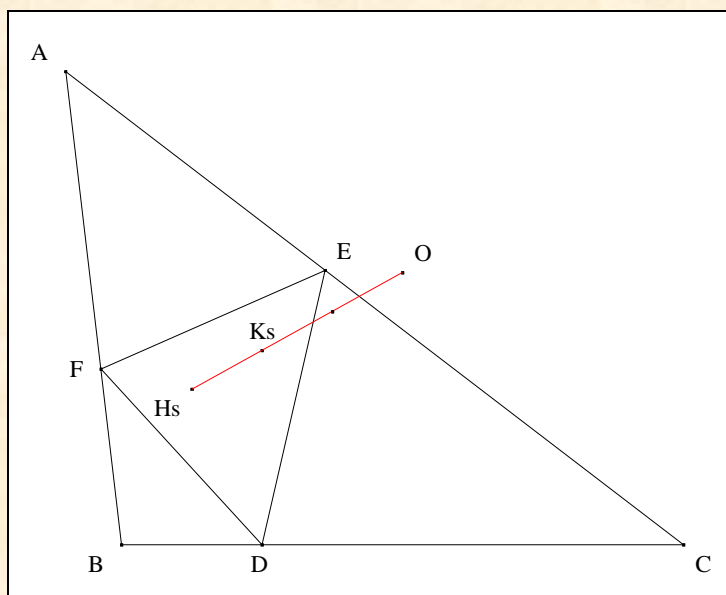
³⁶ Ayme J;-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. 1 ; <http://jl;ayme.pagesperso-orange.fr/>

- **Conclusion** : $HaHbHc$ et DEF étant égaux, M est le milieu de $[HsN]$ et $[KsY]$.

7. Position de Hs sur (OKs)

VISION

Figure :

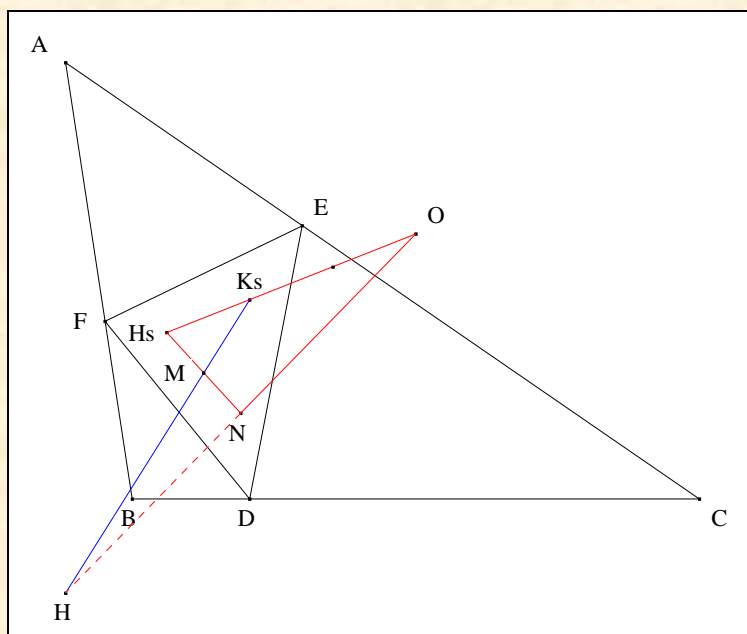


Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 Ks le point de Kosnitzer de ABC,
 DEF le triangle Ks-pédal de ABC
 et Hs l'orthocentre de DEF.

Donné : $HsO = 3.HsKs$ ³⁷.

VISUALISATION

³⁷ HK passes through the circumcenter, AoPS du 05/08/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1125044_hk_passes_through_the_circumcenter



- D'après **E. 3.** Le point Hs sur (OKs), $Hs, Ks \text{ et } O \text{ sont alignés.}$
- Notons M le point d'intersection de (HKs) et (NHs).
- D'après **E. 6.** Deux triangles homothétiques et égaux, $M \text{ est le milieu de } [NHs]$
d'après Feuerbach³⁸, $N \text{ est le milieu de } [OH].$
- **Conclusion :** d'après le théorème de Ménélaüs
appliqué au triangle ONHs et à la ménélienne (HKsM), $HsO = 3.HsKs.$

Scolies : (1) deux parallèles

³⁸

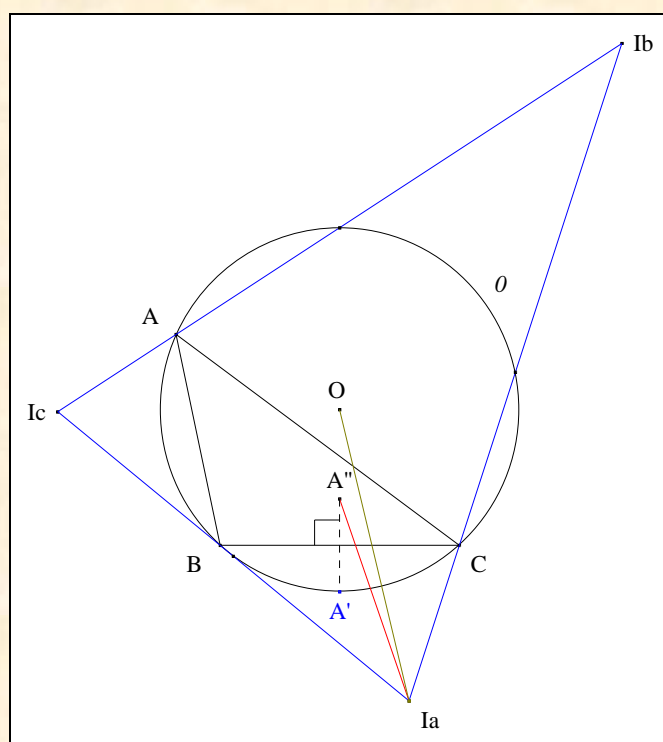
Ayme J;-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2, p. 4-5 ; <http://jl:ayme.pagesperso-orange.fr/>

**F. LES POINTS
DE
SCHIFFLER ET KOSNITZA**

1. Le triangle excentral

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 θ le cercle circonscrit à ABC,
 O le centre de θ ,
 A' le milieu de l'arc BC ne contenant pas A,
 A'' le symétrique de A' par rapport à (BC)
 et IaIbIc le triangle excentral de ABC.

Donné : (IaA'') est la I_a-droite de Kosnitzer de IaIbIc.

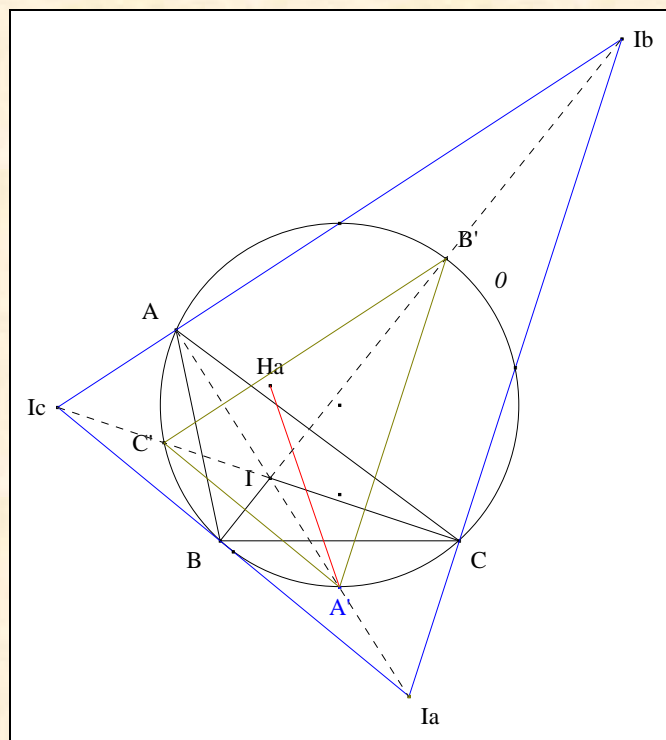
VISUALISATION

- **Scolie :** (1) θ est le cercle d'Euler de IaIbIc
- (2) A' est le I_a-point d'Euler de IaIbIc
- **Conclusion :** d'après D. 3. Le triangle d'Euler, (IaA'') est la I_a-droite de Kosnitzer de IaIbIc.

2. Le second triangle circonperp

VISION

Figure :



Traits :

ABC	un triangle,
θ	le cercle circonscrit à ABC,
O	le centre de θ ,
I	le centre de ABC,
A'B'C'	le triangle I-circompédal de ABC,
IaIbIc	le triangle excentral de ABC

et

Ha	l'orthocentre du triangle IBC.
----	--------------------------------

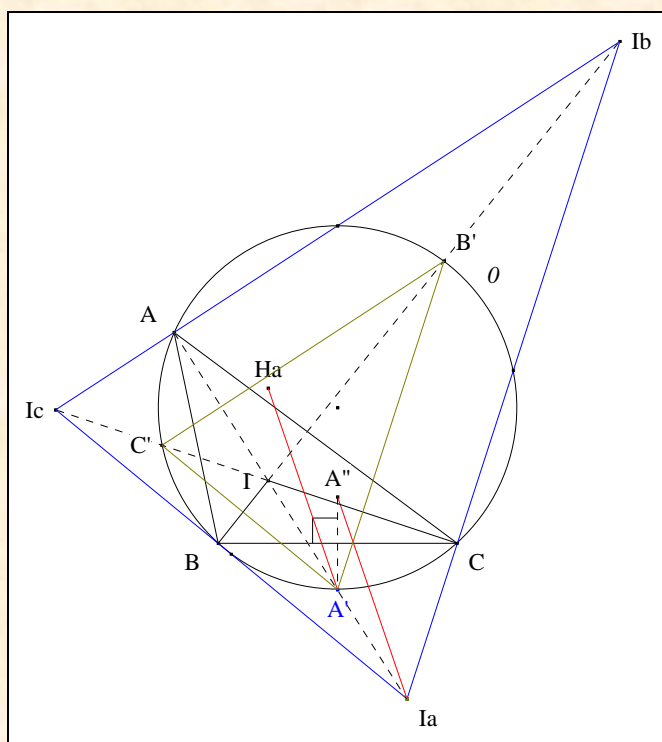
Donné : (A'Ha) est la A'-droite de Kosnitzer de A'B'C'.

VISUALISATION

- **Scolie :**
 - (1) I est l'orthocentre de IaIbIc
 - (2) ABC est le triangle orthique de IaIbIc
 - (2) A'B'C' est le triangle d'Euler de IaIbIc

- **Conclusion :** d'après **D. 4.** Le triangle H-circum-orthique, (A'Ha) est la A'-droite de Kosnitzer de A'B'C'.

Solie : deux parallèles

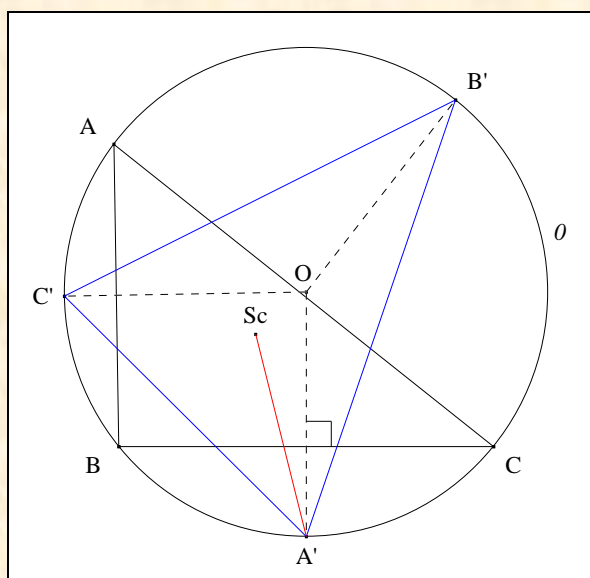


- Notons A'' le symétrique de A' par rapport à (BC) .
- **Conclusion :** $IaIbIc$ étant homothétique à $A'B'C'$ (centre I et rapport 2), $(A'Ha) \parallel (IaA'')$.

3. Les points de Schiffler et Kosnitza

VISION

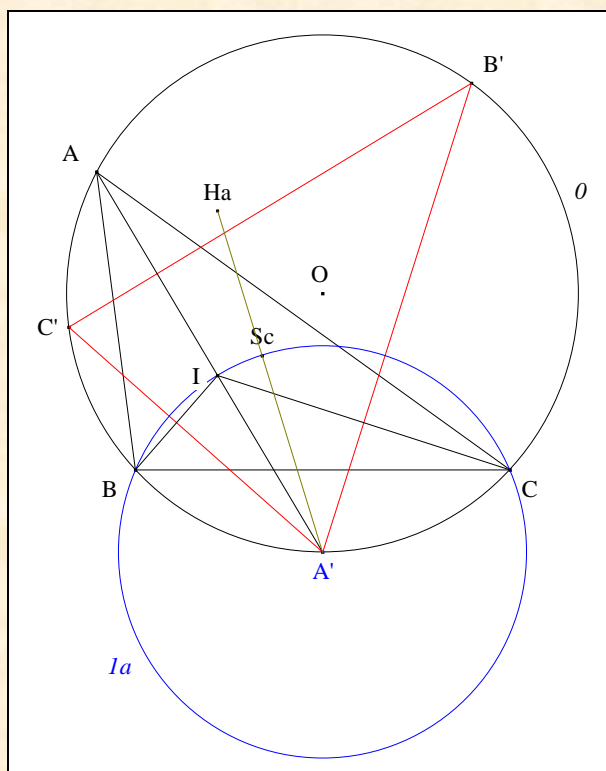
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC ,
 O le centre de O ,
 Sc le point de Schiffler de ABC
 et $A'B'C'$ le second triangle circumpérp de ABC .

Donné : $(A'Sc)$ est la A' -droite de Kosnitza $A'B'C'$ ³⁹.

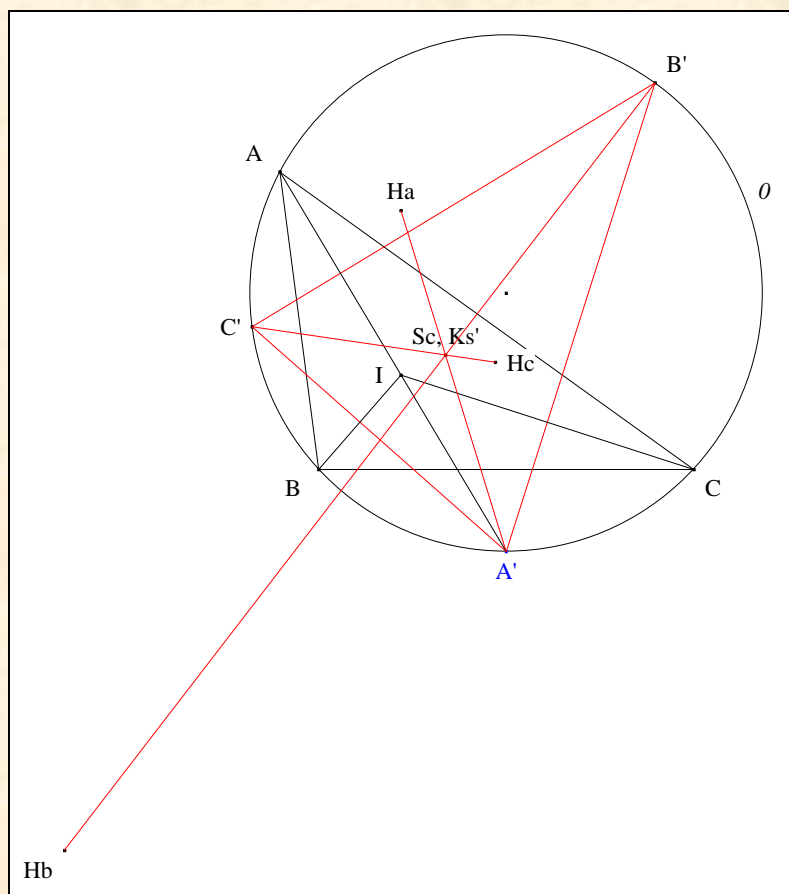
VISUALISATION



- Notons I le centre de ABC ,
 Ha l'orthocentre du triangle IBC
 et Ia le A-cercle de Miquel de ABC ; il passe par B, I, C et a pour centre A' .
- D'après **D. 4**. Le triangle H-circum-orthique, $(A'Ha)$ est la A' -droite de Kosnitza de $A'B'C'$.
- **Scolie :** $(A'Ha)$ est la droite d'Euler du triangle IBC .
- D'après "Le point de Schiffler" ⁴⁰, $(A'Ha)$ passe par Sc .
- **Conclusion :** $(A'Sc)$ est la A' -droite de Kosnitza $A'B'C'$.

Scolies : (1) vision triangulaire

³⁹ Euler Lines Reflected, AoPS du 17/10/2014 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h610293>
 Hatzipolakis A., one more !! re: i - euler lines - parallelgic - tr. - oi line
<https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/22657>
⁴⁰ Ayme J.-L., Le point de Schiffler, G.G.G. vol. 9 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

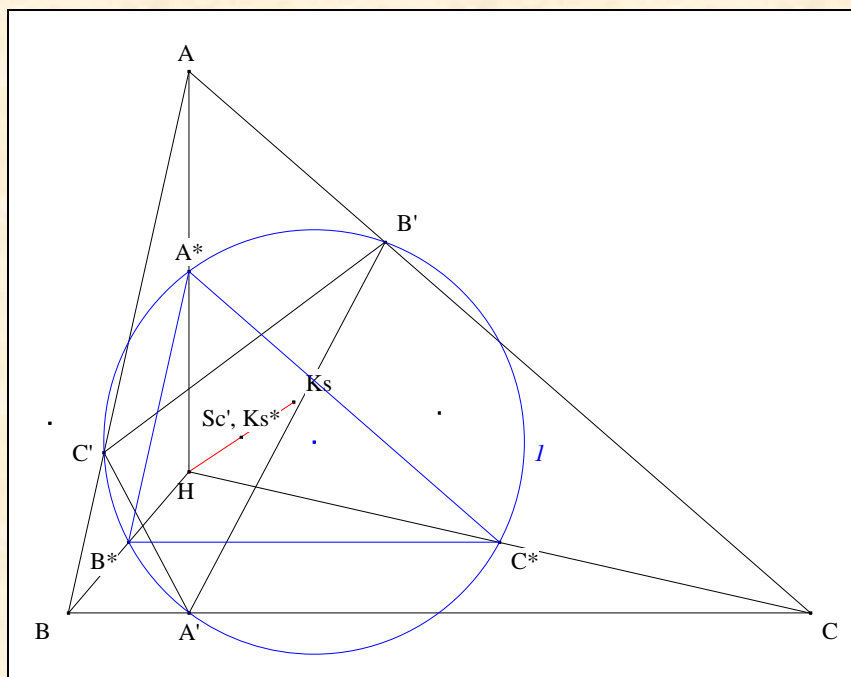


- Notons H_b, H_c les orthocentres resp. des triangles ICA, IAB
et $K_{s'}$ le point de Kosnitzer de $A'B'C'$.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (1) $(B'S_c)$ est la B' -droite de Kosnitzer $A'B'C'$
(2) $(C'S_c)$ est la C' -droite de Kosnitzer $A'B'C'$.
- **Conclusion :** $K_{s'}$ et S_c sont confondus.

Énoncé traditionnel :

le point de Schiffler de ABC est le point de Kosnitzer de $A'B'C'$.

- (2) une situation remarquable

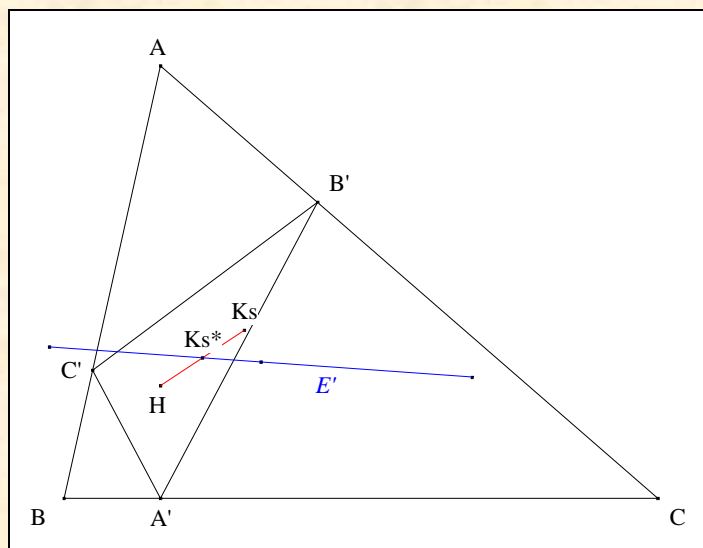


- Notons $A^*B^*C^*$ le triangle d'Euler de ABC ,
 K_{S^*} le point de Kosnitzer de $A^*B^*C^*$
 I le cercle d'Euler de ABC ; il passe par A^*, B^*, C^* ;
 et Sc' le point de Schiffler de $A^*B^*C^*$.
- $A^*B^*C^*$ étant homothétique à ABC (centre H et rapport $1/2$),
 - (1) K_{S^*} est le milieu de $[HK_S]$
 - (2) K_{S^*} est le point de Kosnitzer de $A^*B^*C^*$
- **Scolies :**
 - (1) A^* est le milieu de l'arc B^*C^* ne contenant pas A^*
 - (2) B^* est le milieu de l'arc C^*A^* ne contenant pas B^*
 - (3) C^* est le milieu de l'arc A^*B^* ne contenant pas C^* .
- **Conclusion :** d'après **F. 3**. Les points de Schiffler et Kosnitzer, Sc' et K_{S^*} sont confondus.

4. K_{S^*} est sur la droite d'Euler du triangle orthique

VISION

Figure :

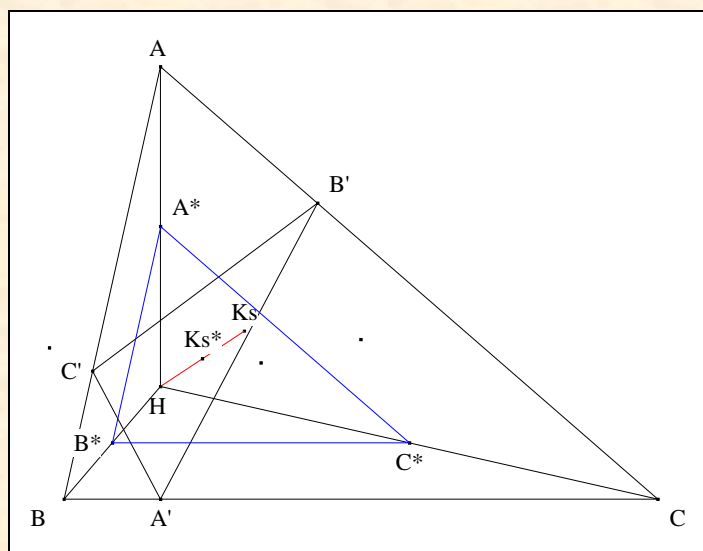


Traits :

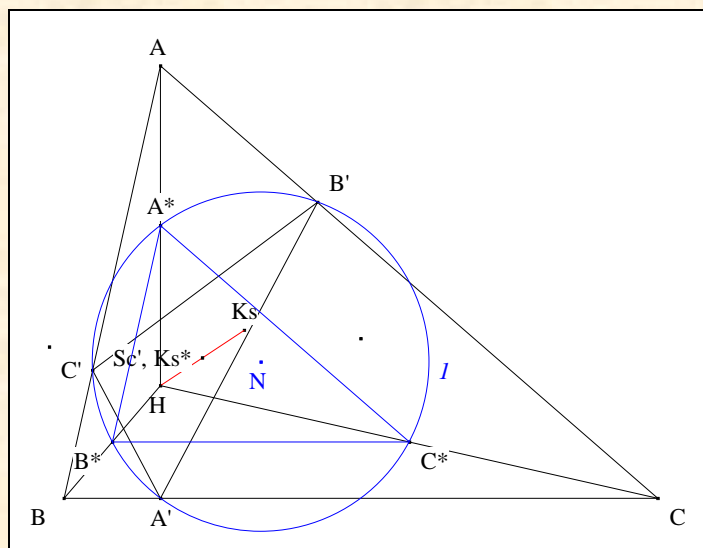
ABC	un triangle acutangle,
H	l'orthocentre de ABC,
A'B'C'	le triangle orthique de ABC,
E'	la droite d'Euler de A'B'C',
Ks	le point de Kosnitsa de ABC
et Ks*	le milieu de [HKs].

Donné : E' passe par Ks*.

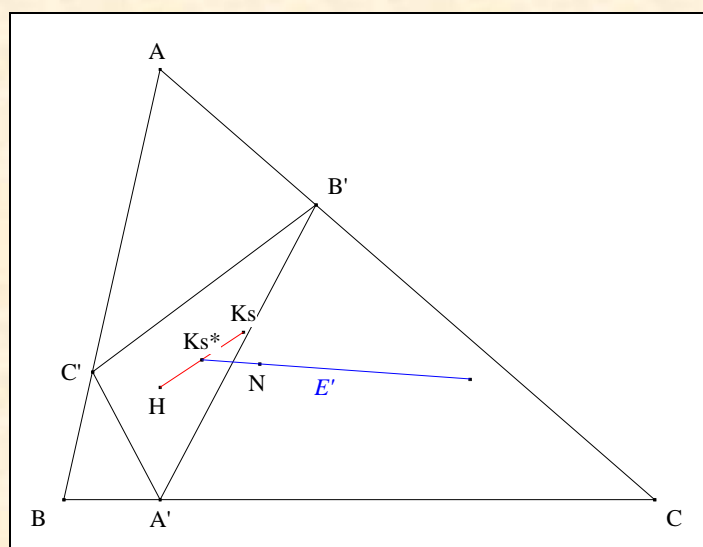
VISUALISATION



- Notons $A^*B^*C^*$ le triangle d'Euler de ABC.
- **Conclusion partielle :** $A^*B^*C^*$ étant homothétique à ABC (centre H et rapport $\frac{1}{2}$), Ks^* est le point de Kosnitsa de $A^*B^*C^*$.



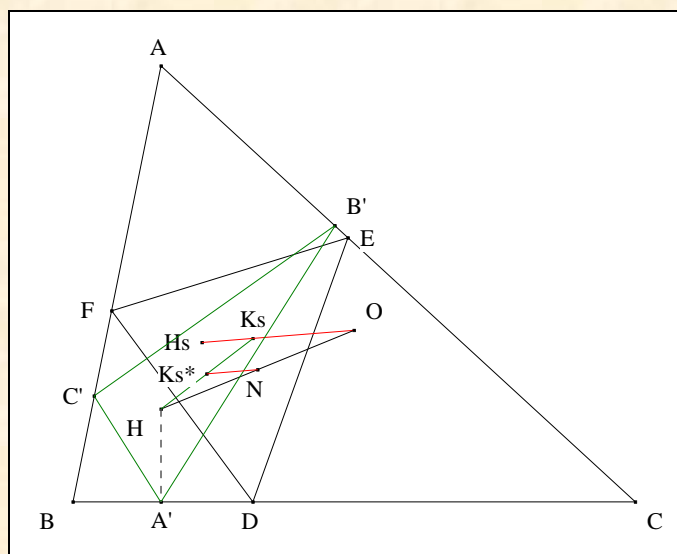
- Notons I le cercle d'Euler de ABC ; il passe par A^* , B^* , C^* ;
 N le centre de I
 et Sc' le point de Schiffler de $A'B'C'$.
- **Scolies :**
 - (1) A^* est le milieu de l'arc $B'C'$ ne contenant pas A'
 - (2) B^* est le milieu de l'arc $C'A'$ ne contenant pas B'
 - (3) C^* est le milieu de l'arc $A'B'$ ne contenant pas C' .
- D'après **F. 3.** Les points de Schiffler et Kosnitza, Sc' et Ks^* sont confondus.



- D'après "Le point de Schiffler"⁴¹, (NKs^*) est la droite d'Euler de $A'B'C'$
 ou encore $(NKs^*) = E'$.
- **Conclusion :** E' passe par Ks^* .

Scolie :

⁴¹ Ayme J.-L., Le point de Schiffler, G.G.G. vol. 9 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

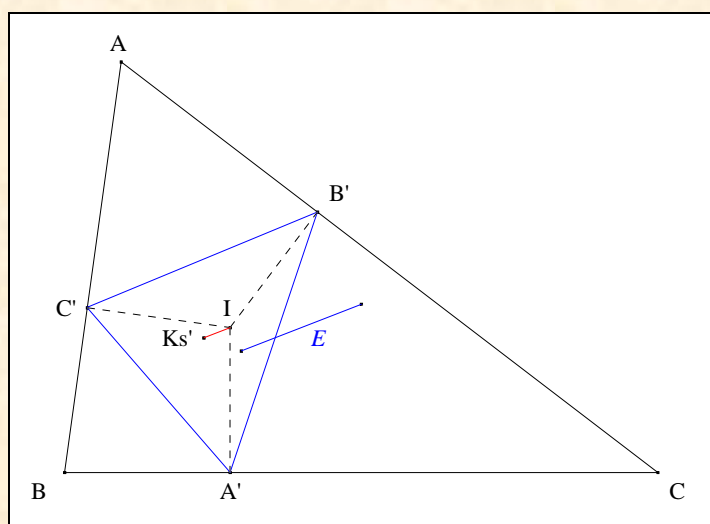


- Les hypothèses et notations sont les mêmes qu'en 7. Position de H_s sur (OK_s) .
- **Conclusion** : d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle HOK_s , $(NK_s^*) \parallel (OK_s)$.

5. Le triangle de contact

VISION

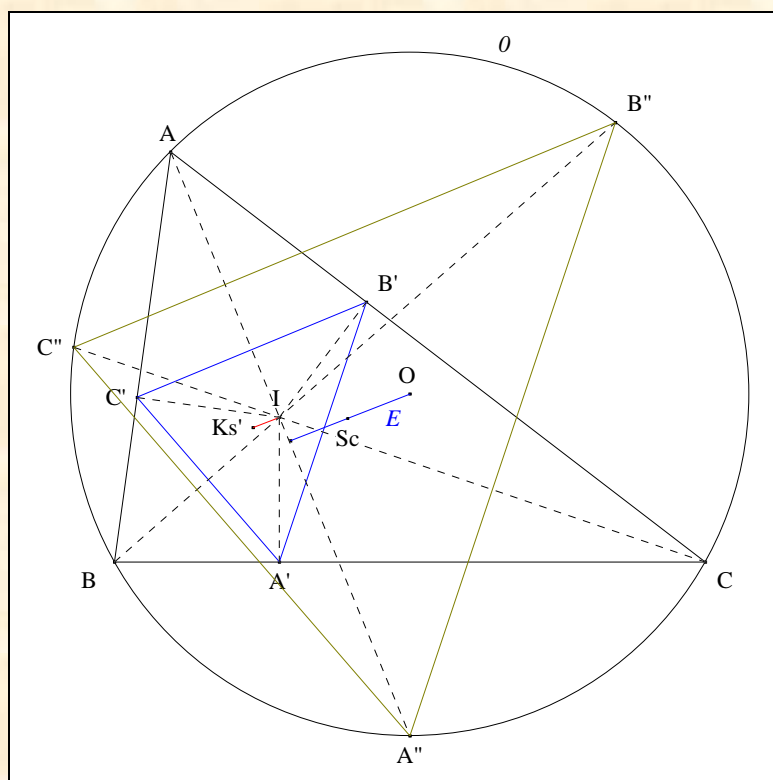
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 E la droite d'Euler de ABC ,
 I le centre de ABC ,
 $A'B'C'$ le triangle de contact de ABC
 et Ks' le point de Kosnitza de $A'B'C'$.

Donné : (IKs') est parallèle à E .⁴²

VISUALISATION



- Notons Sc le point de Schiffler de ABC ,
 O le cercle circonscrit à ABC ,
 O le centre de O
 et $A''B''C''$ le triangle I-circompédal de ABC .
- D'après **F. 3**. Les points de Schiffler et Kosnita, scolie **3**, Sc est le point de Kosnita de $A''B''C''$.
- D'après "Le point de Schiffler"⁴³, Sc est sur E .
- Les triangles $A'B'C'$ et $A''B''C''$ étant homothétiques, les homologues de I et Ks' sont resp. O et Sc .
- **Conclusion :** (IKs') est parallèle à E .

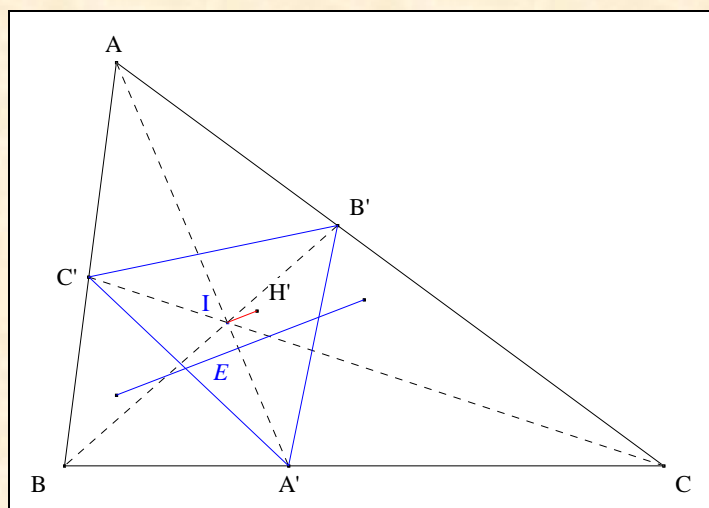
⁴² Nice property of Kosnita Point, AoPS du 18/06/2011 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h412741p2317616>
<http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h412741p3632970>

⁴³ Ayme J.-L., Le point de Schiffler, G.G.G. vol. **9** ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

6. Le triangle I-cévien

VISION

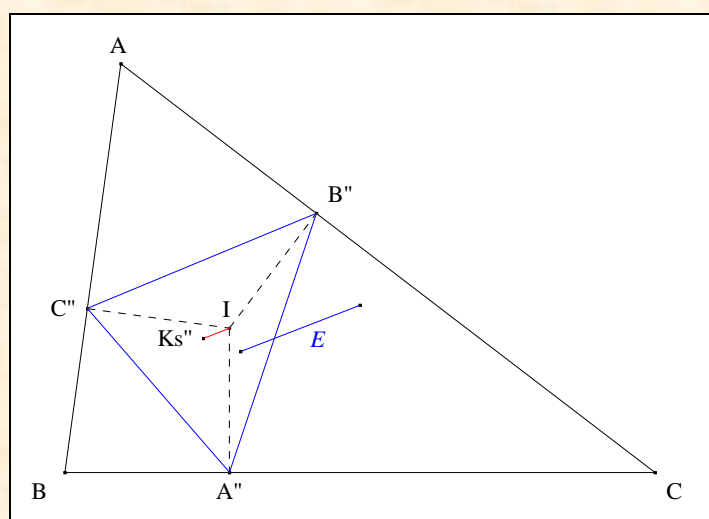
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 E la droite d'Euler de ABC ,
 I le centre de ABC ,
 $A'B'C'$ le triangle I-cévien de ABC
 et H' l'orthocentre de $A'B'C'$.

Donné : (IH') est parallèle à E .⁴⁴

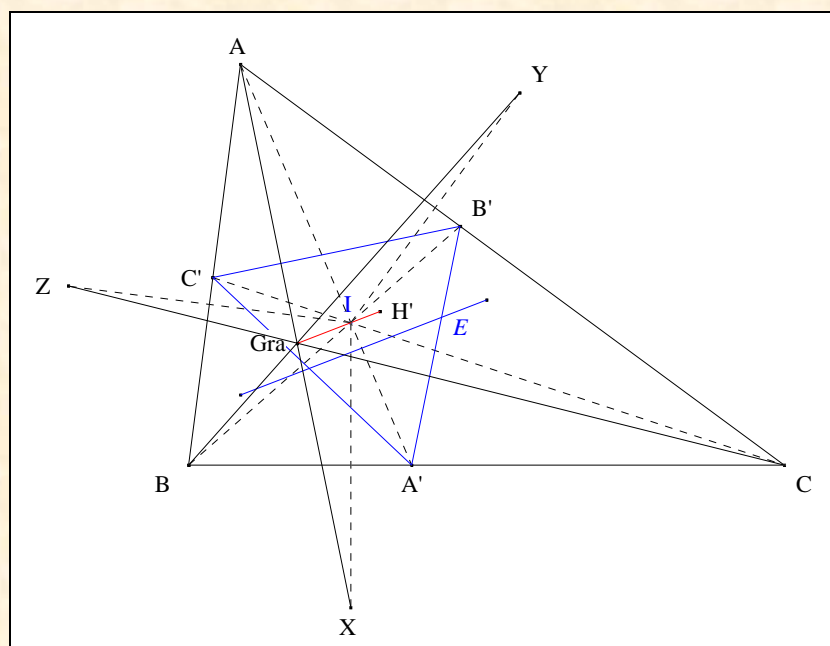
VISUALISATION



• Notons $A''B''C''$ le triangle I-pédal de ABC
 et Ks'' le point de Kosnitsa de $A''B''C''$.

⁴⁴ The Euler line, AoPS du 22/10/2007 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h171583_parallel_to_Euler_line_!_AoPS_du_02/08/2012_
<http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h491764p2761508>

- D'après F. 5. Le triangle de contact, $(IKs'') // E$.



- Notons XYZ le triangle I-symétrique de ABC
et Gra le point de Gray⁴⁵ de ABC .
- D'après "La droite de Gray"⁴⁶,
par transitivité de $//$,
d'après le postulat d'Euclide,
en conséquence, $E // (IGraH)$;
 $(IKs'') // (IGraH)$;
 $(IKs'') = (IGraH)$;
 I, Ks'' et H' sont alignés.
- **Conclusion** : (IH') est parallèle à E .

⁴⁵ Ayme J.-L., Le point de Gray, G.G.G. vol. 2 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

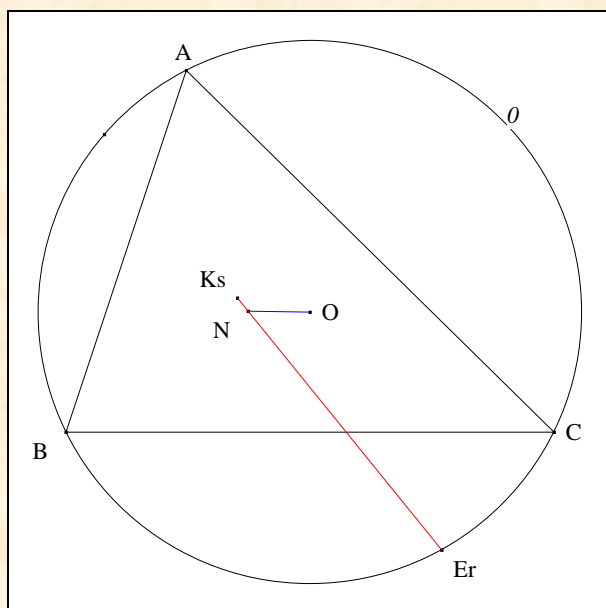
⁴⁶ Ayme J.-L., the Gray's line, AoPS du 06/12/2007 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=177764>
Ayme J.-L., La droite de Gray, G.G.G. vol. 2 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

G. LA DROITE (KsN)

1. L'alignement Ks – N - Er

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 θ le cercle circonscrit à ABC ,
 O le centre de θ ,
 N le centre du cercle d'Euler de ABC ,
 Ks le point de Kosnitsa de ABC ,
 et Er l'antipoint d'Euler de ABC .

Donné : Ks , N et Er sont alignés ⁴⁷.

Commentaire : une preuve synthétique basée sur une idée de Telv Cohl peut être vue sur le site de l'auteur. ⁴⁸

⁴⁷ antigonal conjugate of I wrt its cevian triangle lies on $O'I$, AoPS du 14/10/2014 ;
 inspired from pohoatza's post
<http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h610037>

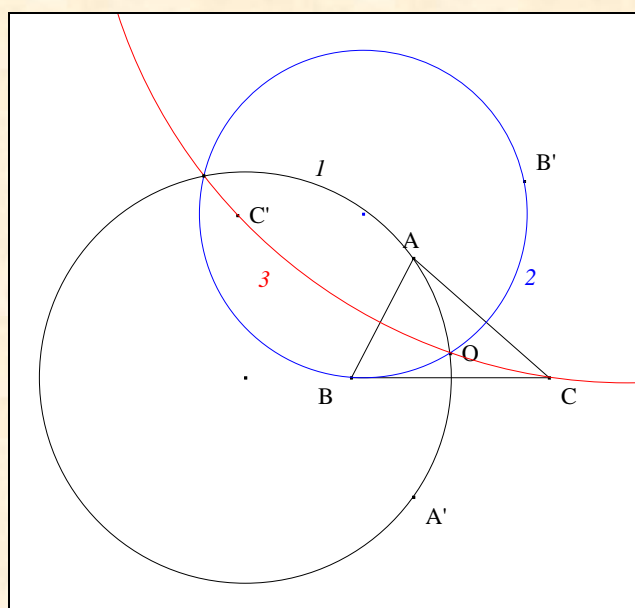
⁴⁸ Ayme J.-L., Le P-cercle de Hagge, G.G.G. vol. 5, p. 38-43 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

H. JOHN RODGERS MUSSELMAN
OU
INVERSE DU POINT DE KOSNITZA

1. Inverse de Ks

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC ,
 $A'B'C'$ le triangle symétrique de ABC
 et $1, 2, 3$ les cercles circonscrits resp. aux triangles AOA' , BOB' , COC' .

Donné : $1, 2$ et 3 sont coaxiaux. ⁴⁹

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. ⁵⁰

Note historique : ce résultat de l'américain John Rogers Musselman a été démontré et généralisé par le belge René Goormaghtigh ⁵¹ ; sa preuve a recours aux nombres complexes. Notons que cette généralisation était connue de Joseph Neuberg ⁵². Rappelons que la preuve proposée par Darij Grinberg a recours à l'inversion.

⁴⁹ Musselman J. R., Advanced Problem **3928**, *American Mathematical Monthly* 46 (1939) 601

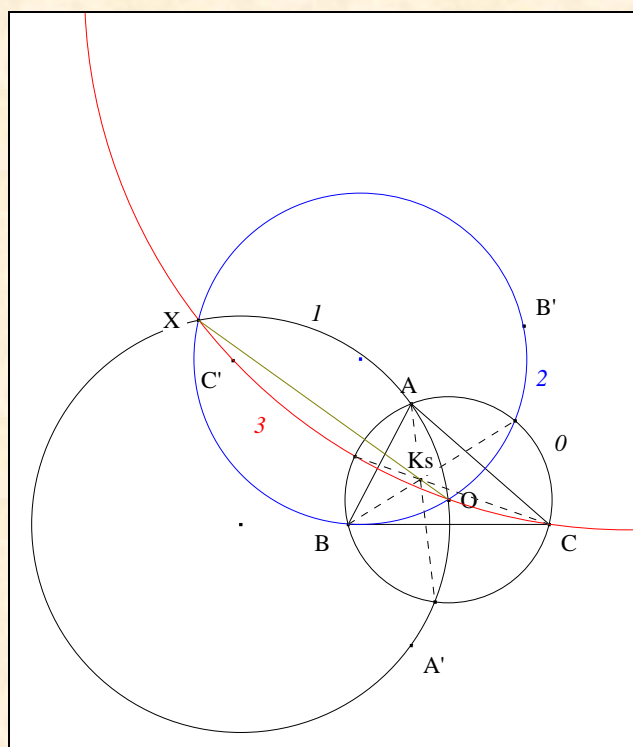
⁵⁰ Ayme J.-L., Cercles coaxiaux **1**, G.G.G. vol. **24**, p. 20-21 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

Ayme J.-L., Trois cercles coaxiaux de Ngo Quang Duong, G.G.G. vol. **23** p. 3-4 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

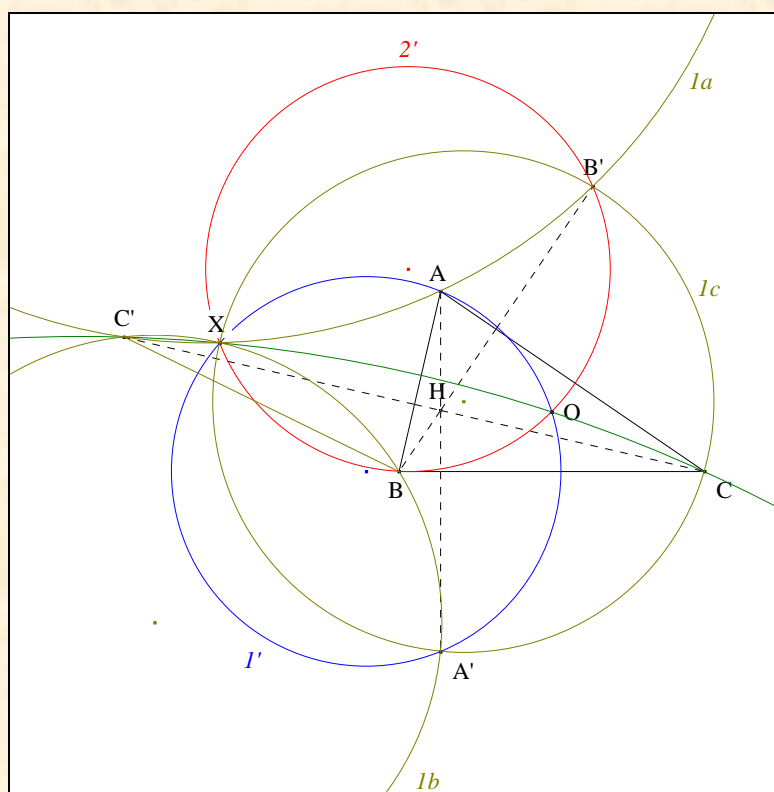
⁵¹ Goormaghtigh R., Advanced Problem **3928**, *American Mathematical Monthly* **48** (1941) 281-283

⁵² Neuberg J., Mémoire sur le Tétrahèdre (1884)

Scolies :



- (1) le second point de base répertorié sous X_{1157} chez ETC a été attribué à Bernard Gibert. Ce point est l'inverse de Ks par rapport à O
- (2) (BC) , (CA) , (AB) sont des axes de symétrie resp. de 1, 2, 3



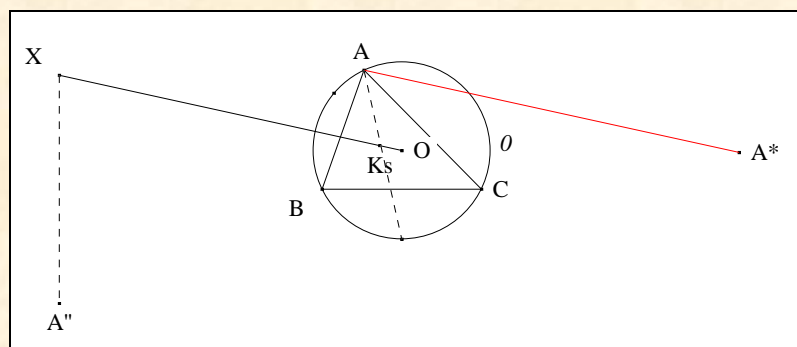
- (3) les cercles circonscrits (de Paul Yiu) resp. aux triangle $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$

passe par X⁵³.

2. Une parallèle à (OKs)

VISION

Figure :



Traits :

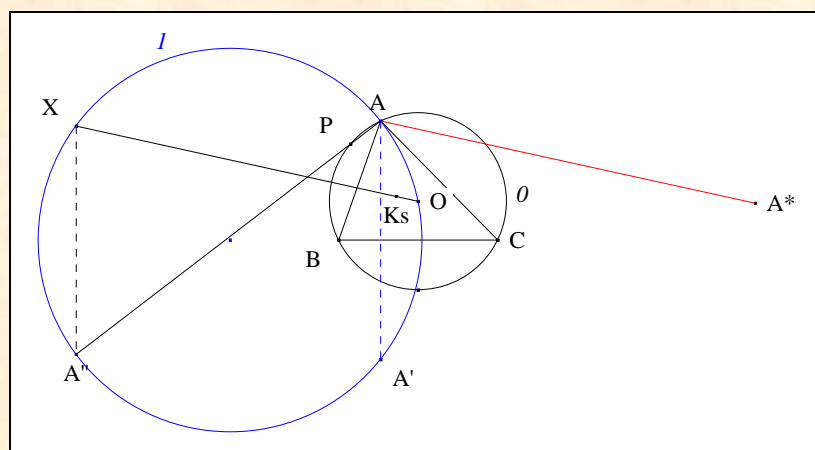
ABC	un triangle,
θ	le cercle circonscrit à ABC,
O	le centre de θ ,
Ks	le point de Kosnita de ABC,
X	l'inverse de Ks relativement à θ ,
A''	le symétrique de X par rapport à (BC)

et

A*	le symétrique de A'' par rapport à la A-bissectrice intérieure de ABC.
----	--

Donné : (AA*) est parallèle à (OKs).⁵⁴

VISUALISATION



- Notons A' le symétrique de A par rapport à (BC),

⁵³ Yiu P., A triad of circles with an interesting common point, Message *Hyacinthos* # 4533 (2001) ; <https://groups.yahoo.com/neo/groups/hyacinthos/conversations/messages/4533>

Grinberg D., On the Kosnita point and the reflection triangle, <http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200311.pdf>

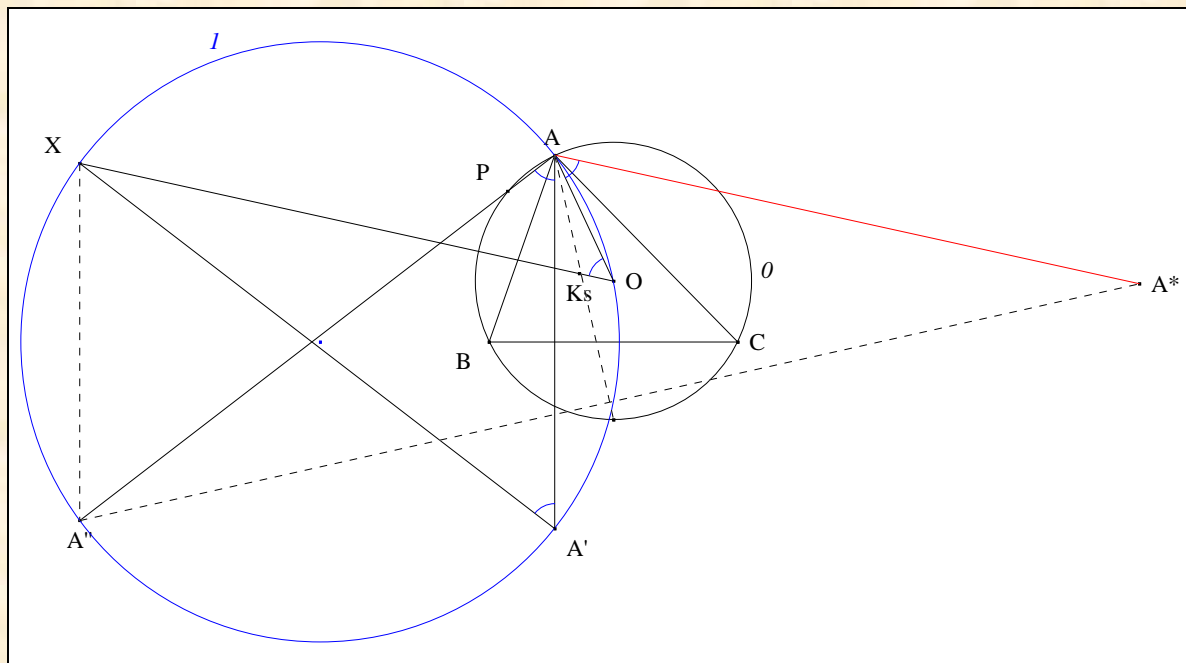
Ayme J.-L., Trois cercles coaxiaux de Ngo Quang Duong, G.G.G. vol. 23, p. 5-7, 8-13 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

⁵⁴ Ayme J.-L., Parallel to OKs, AoPS du 04/04/2016 ;

http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1222187_parallel_to_oks

et I le cercle circonscrit au triangle AOA'
 et P le second point d'intersection de (AA'') avec θ .

- D'après **H. 1**. Inverse de K_s ,
 - * I passe par X et A''
 - * O , K_s et X sont alignés.

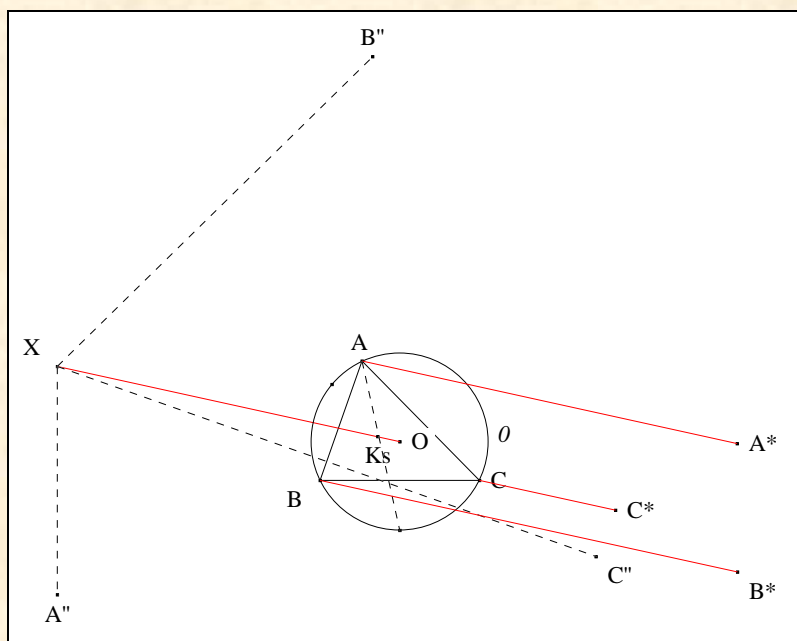


- Une chasse angulaire :

*	(AA') et (AO) étant deux A-isogonales de ABC ,	$\angle OAA^* = \angle A''AA'$
*	par symétrie d'axe (BC) ,	$\angle A''AA' = \angle AA'X$
*	par "Angles inscrits",	$\angle AA'X = \angle AOX$
*	par transitivité de $=$,	$\angle OAA^* = \angle AOX$
*	par "Angles alternes-internes",	$(AA^*) \parallel (OX)$.

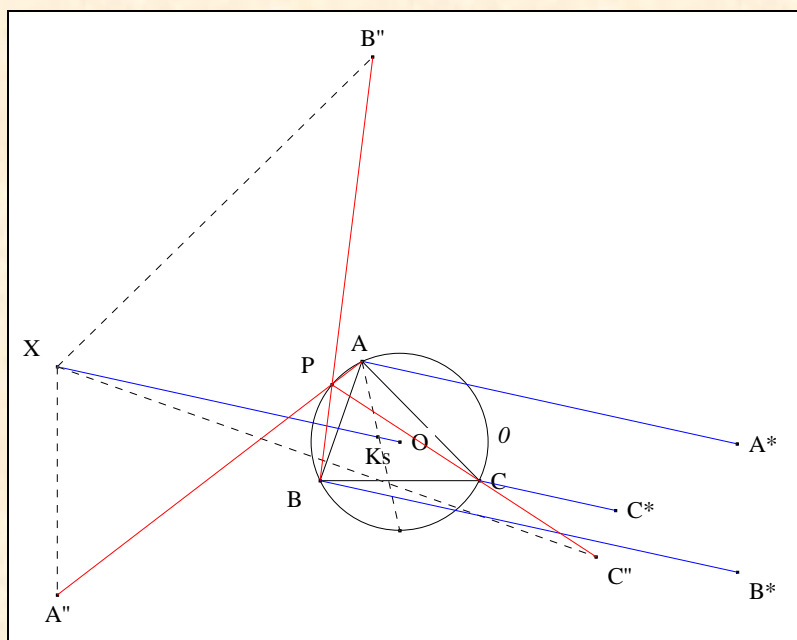
- **Conclusion** : par une autre écriture, (AA^*) est parallèle à (OK_s) .

Scolies : (1) trois droites parallèles entre elles



- Notons B'', C'' les symétriques de X resp. par rapport à (CA) , (AB)
 et B^*, C^* les symétrique de B'', C''
 resp. par rapport à la B, C -bissectrice intérieure de ABC .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que $(BB^*) \parallel (OK_s)$
 $(CC^*) \parallel (OK_s)$.
- **Conclusion :** (AA^*) , (BB^*) , (CC^*) et (OK_s) sont parallèles entre elles.

(2) Trois droites concourantes



- **Conclusion :** d'après "Le théorème de Beltrami"⁵⁵ (Cf. V. Annexe 3),
 (AA'') , (BB'') et (CC'') sont concourantes en P .

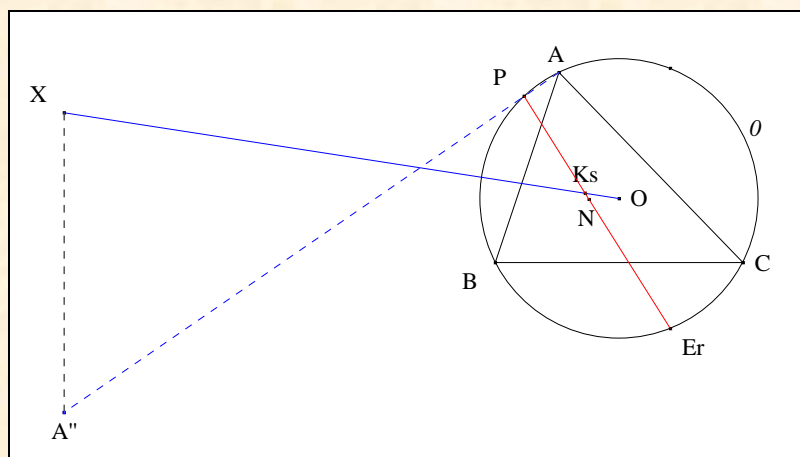
⁵⁵ Beltrami E., *Archives de Grünert* 43, p. 48

(3) (AA^*) et (AP) sont deux A-isogonales de ABC.

4. L'alignement P - Ks - N - Er

VISION

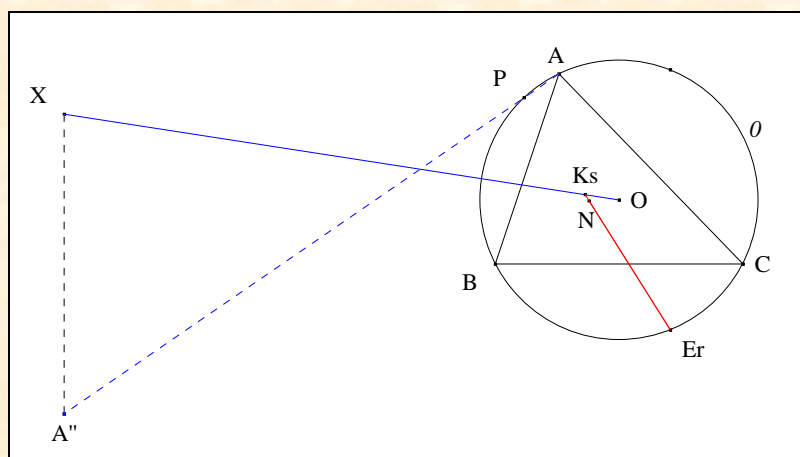
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
N le centre du cercle d'Euler.

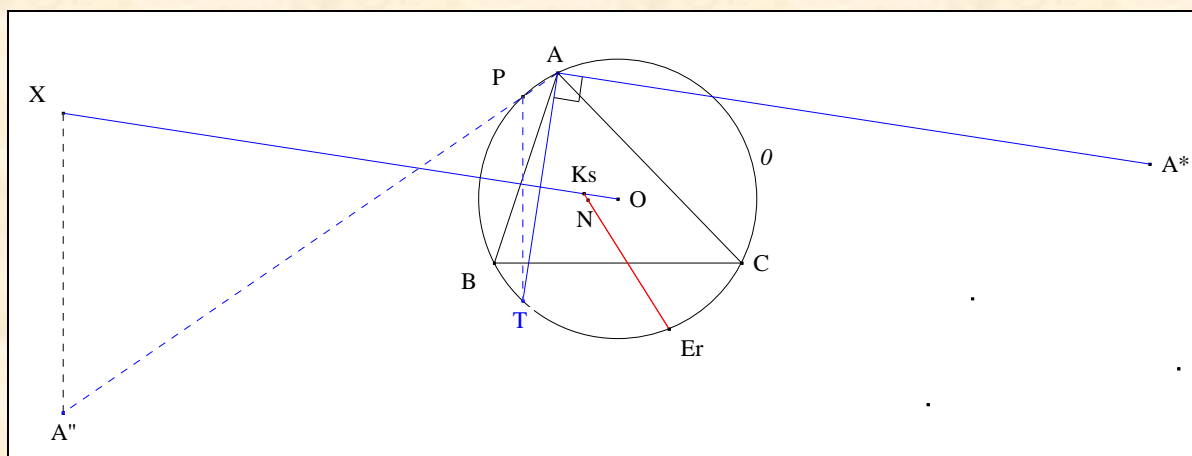
Donné : P, Ks, N et Er sont alignés.⁵⁶

VISUALISATION

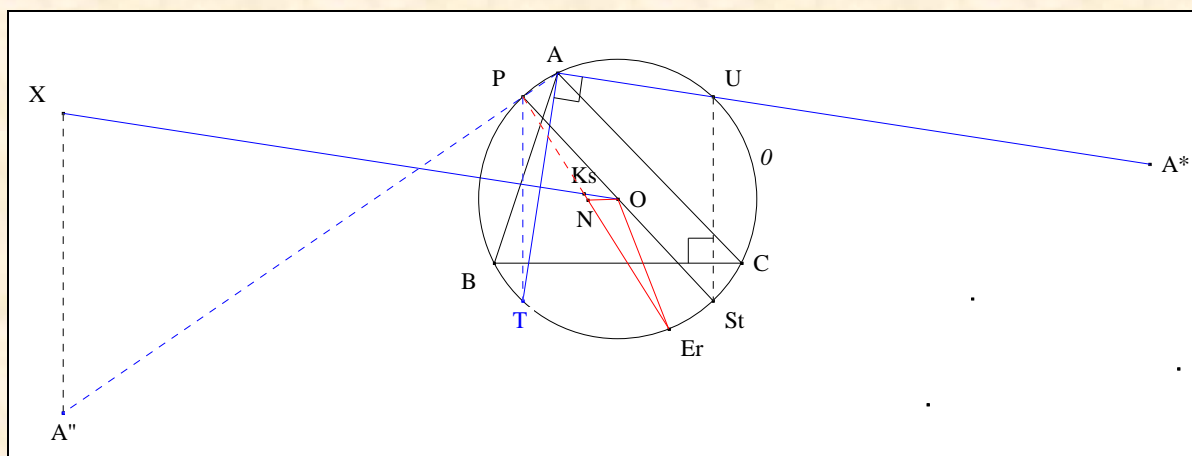


- D'après G. 1. L'alignement Ks - N - Er, Ks, N et Er sont alignés.

⁵⁶ Kosnita point, AoPS du 02/10/2007 ; <http://www.artofproblemsolving.com/community/q2h168791p937576>
Collinear with Kosnita point, AoPS du 13/04/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1227276_collinear_with_kosnita_point
Ayme J.-L., Avec le point de Kosnita, *Les-Mathematiques.net* ;
<http://www.les-mathematiques.net/phorum/list.php?8>



- Notons T le second point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) issue de P avec \mathcal{O} .
- D'après **H. 2**. Une parallèle à (OK_s) , scolies **1** et **2**,
 P est le pôle de la droite de Simson dont la direction (AT) est perpendiculaire à (OK_s) .



- Notons U le second point d'intersection de (AA^*) avec \mathcal{O}
 et St le second point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) issue de U avec \mathcal{O} .
- St est le pôle de la droite de Simson de direction (OK_s) .
- **Conclusion partielle** : les directions des droites de Simson de pôle resp. P , St étant perpendiculaires, P , O et St sont alignés.
- Une chasse angulaire :
 - * d'après "Angle de deux droites de Simson et arc liant leur pôle", $\angle ErPSt = \angle KsON$
 - * les triangles $KsON$ et $KsErO$ étant semblables ⁵⁷, $\angle KsON = \angle KsErO$
 - * par transitivité de $=$, $\angle ErPSt = \angle KsErO$
 - * d'après "Angles au centre et inscrit", P , Ks et N sont alignés.
- **Conclusion** : d'après l'axiome d'incidence **Ia**, P , Ks , N et Er sont alignés.

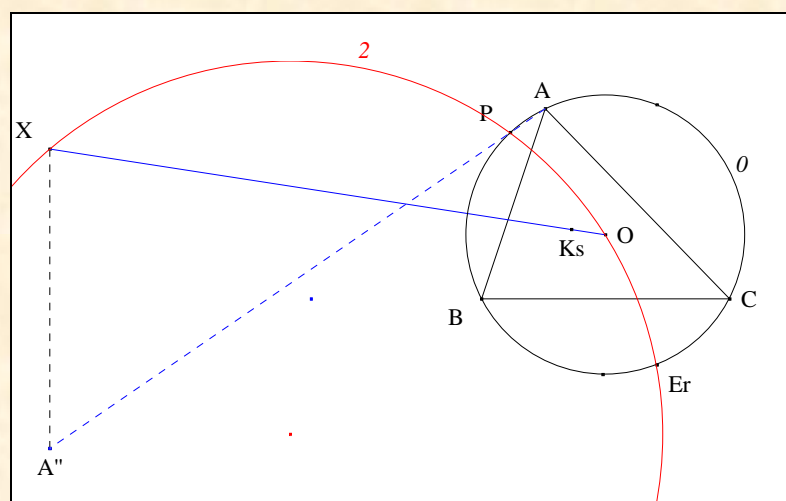
57

Ayme J.-L., Le P-cercle de Hagge, G.G.G. vol. 5, p. 42-43 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

5. Quatre points cocycliques

VISION

Figure :

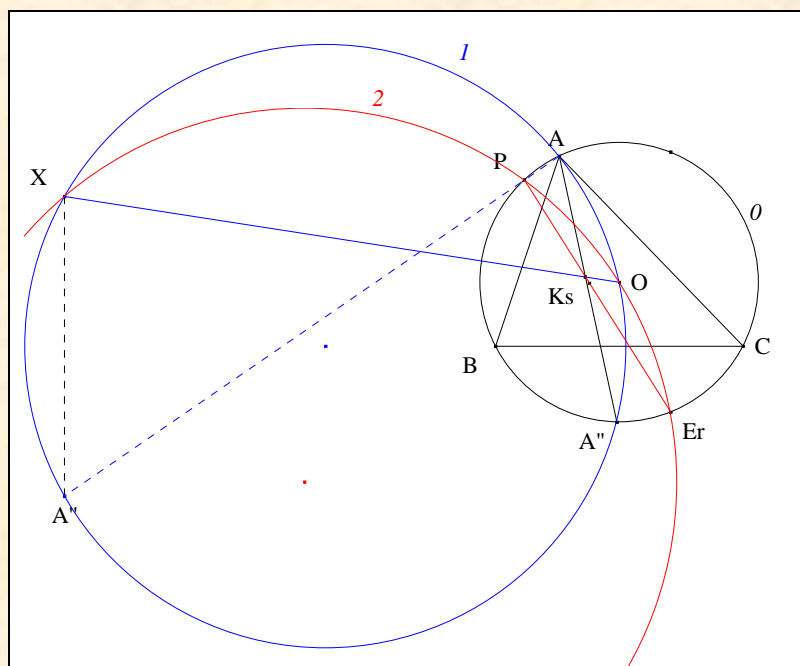


Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
 P le second point d'intersection de (AA'') avec θ ,
 Er l'antipoint d'Euler de ABC
 et 2 le cercle passant par X, P, O.

Donné : 2 passe par Er.⁵⁸

VISUALISATION

⁵⁸ Ayme J.-L. ; Four concyclic points, AoPS du 21/04/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1231293_four_concyclic_points
 Ayme J.-L., Quatre points cocycliques, Les-Mathematiques.net ;
<http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1259791>



- Notons A'' le second point d'intersection de (AK_s) avec I
et I le cercle passant par A, O, A'' .
- D'après H. 4., P, K_s et Er sont alignés.
- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes"⁵⁹
appliqué à θ, I et à la corde (PK_sEr) , 2 passe par Er .

- Scolies :**
- (1) nomenclature de ETC : $X (X_{1157}), P (X_{1141}), O (X_3), Er (X_{110})$
 - (2) ce cercle n'est pas répertorié chez ETC

I'm not aware of it being mentioned in ETC anywhere.

60

- (3) le centre de cercle n'est pas répertorié chez ETC

The center is $a^4 (b-c) (b+c) (a^2-b^2-b c-c^2) (a^2-b^2+b c-c^2) (a^4-2 a^2 b^2+b^4-2 a^2 c^2-b^2 c^2+c^4)$;
on lines $\{\{186,523\},\{526,1511\},\{900,6097\},\{1510,6150\}\} \dots$ not in ETC.
crosspoint of $X(54)$ and $X(1291)$.
 $X(i)$ -isoconjugate of $X(j)$ for these (i,j) : $\{476,2962\},\{930,2166\}$.
Your circle passes through $X\{3,110,1141,1157,2070,5961,8157\}$

61

⁵⁹ Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
⁶⁰ Moses, Peter J. C. <mows@mopar.freemove.co.uk> le 04/05/2016
⁶¹ Moses, Peter J. C. <mows@mopar.freemove.co.uk> le 04/05/2016

The circle passing through the points $X(3)$, $X(110)$, $X(1141)$ is:

$$a^2yz - (a^2b^2c^2(a^2 - b^2 - bc - c^2)(a^2 - b^2 + bc - c^2)(a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4)x(x+y+z)) / ((a-b)(a+b)(a-c)(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a+c)(a-b+c)^2(a+b+c)^2) + \dots = 0$$

It contains the triangle centers $X(3)$, $X(110)$, $X(1141)$, $X(1157)$, $X(2070)$, $X(5961)$, $X(8157)$.

And its center is:

$$(a^4(b^2 - c^2)(a^6 - 4a^6(b^2 + c^2) + a^4(6b^4 + 8b^2c^2 + 6c^4) - 4a^2(b^6 + b^4c^2 + b^2c^4 + c^6) + b^8 + b^4c^4 + c^8) : \dots : \dots),$$

with search number in ETC:

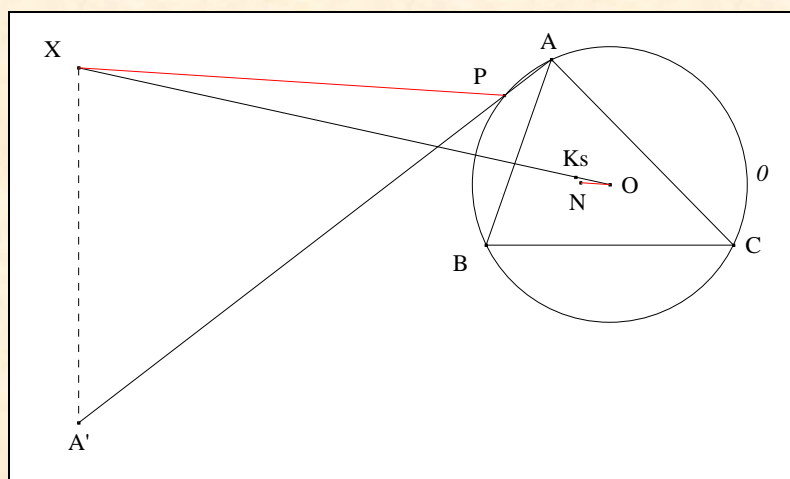
(3.23047681377330, 2.90026989811674, 0.141796023008186)

62

6. Une parallèle à la droite d'Euler

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : (PX) est parallèle à (ON) .⁶³

VISUALISATION

⁶² Angel Montesdeoca <amontes@ull.es> le 04/05/2016

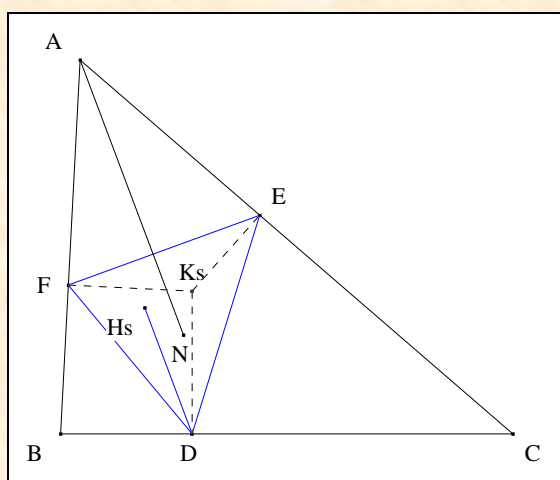
⁶³ Ayme J.-L., A new parallel to the Euler line, AoPS du 05/04/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1222785_a_new_parallel_to_the_euler_line
 Ayme J.-L., Une nouvelle parallèle à la droite d'Euler, *Les-Mathematiques.net* ;
<http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1248179>

**I. SYMÉTRIQUE DE K_s
PAR RAPPORT
A
UN CÔTE DU TRIANGLE**

1. Deux parallèles

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 K_s le point de Kosnitz de ABC,
 DEF le triangle K_s -pédal de ABC,
 N le centre du cercle d'Euler de ABC
 et Hs l'orthocentre de DEF.

Donné : (DH_s) est parallèle à (AN) ⁶⁵.

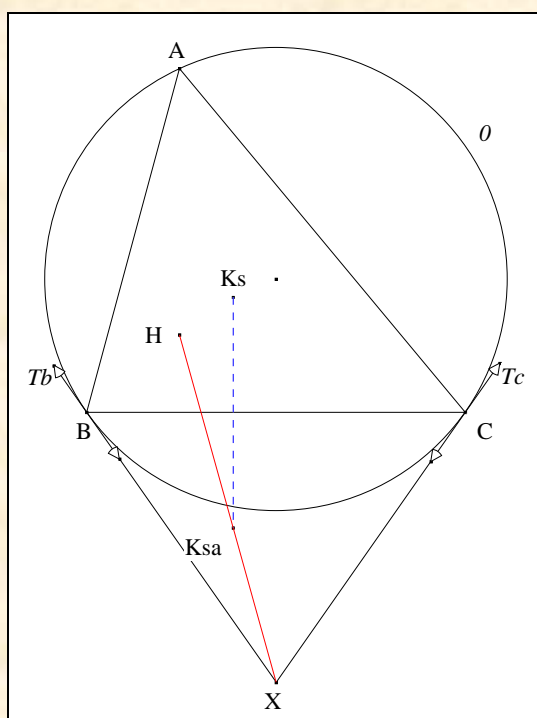
Commentaire : la preuve est immédiate.

2. Une cévienne du triangle tangentiel

VISION

Figure :

⁶⁵ HK passes through the circumcenter, AoPS du 05/08/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1125044_hk_passes_through_the_circumcenter

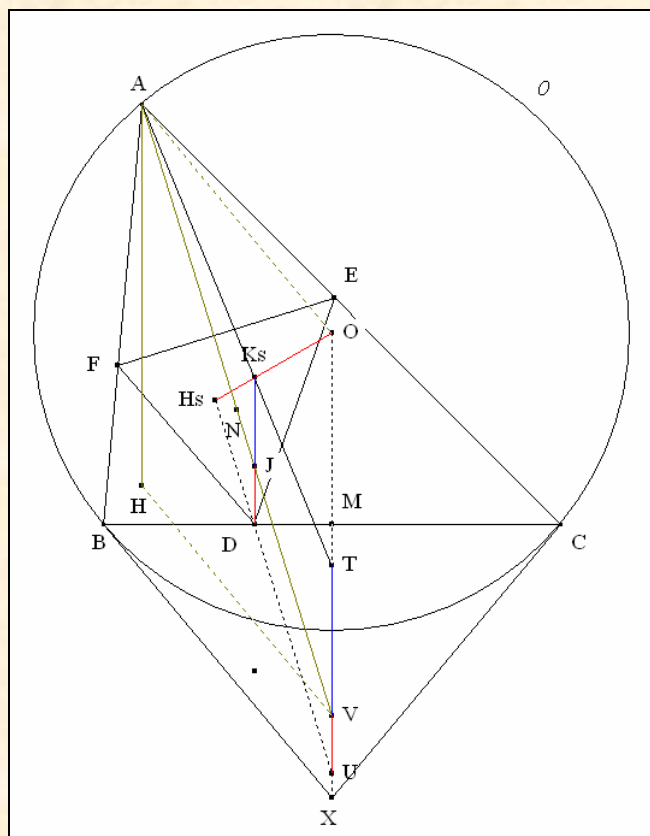


Traits :	ABC	un triangle,
	O	le cercle circonscrit à ABC,
	H	l'orthocentre de ABC,
	K_s	le point de Kosnitzer de ABC,
	K_{sa}	le symétrique de K_s par rapport à (BC),
	T_b, T_c	les tangentes à O resp. en B, C
et	X	le point d'intersection de T_b et T_c .

Donné : H, K_{sa} et X sont alignés. ⁶⁶

VISUALISATION

⁶⁶ H, K_1, D are collinear, AoPS du 09/08/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1127104_hk_1d_are_collinear



- Notons N le centre du cercle d'Euler de ABC ,
- V le point d'intersection de (AN) et (OM) ,
- J le point d'intersection de (DKs) et (AV) ,
- et T le point d'intersection de (AKs) et (OM) .

- **Scolies :**
 - (1) V est le symétrique de O par rapport à (BC)
 - (2) T est le milieu de $[OX]$.

- V étant le symétrique de O par rapport à (BC) .
d'après la relation de Carnot,

$$\begin{aligned} AH &= OV \\ OV &= TO + TV \\ TO + TV &= TX + TV. \end{aligned}$$

- **Conclusion partielle :** $TV = AH - TX$.

- Nous avons :

$$\begin{aligned} 3.DKs &= OU \\ OU &= OV + VU \\ OV + VU &= AH + DJ. \end{aligned}$$

- **Conclusion partielle :** $3.DKs = AH + DJ$

- D'après **H. 1.** Deux parallèles,

$$(QD) // (PN).$$

- Le quadrilatère $JDUV$ étant un parallélogramme,

$$UV = DJ.$$

- Les triangles $AJKs$ et AVT étant homothétiques,

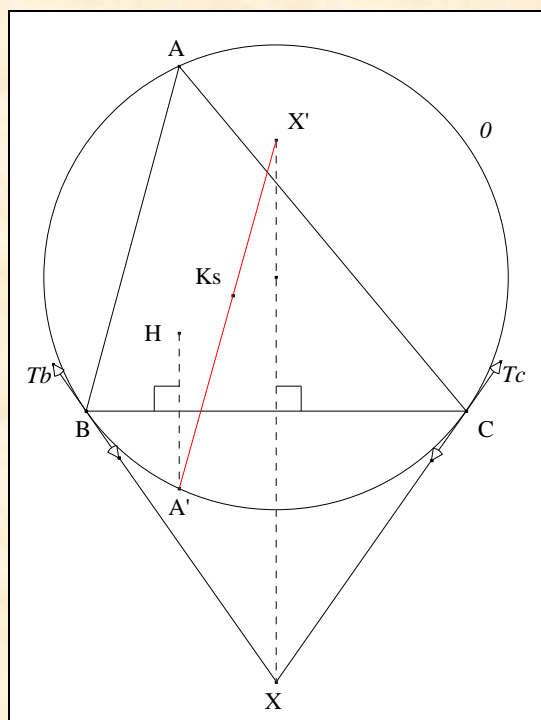
$$AKs/AT = KsJ/TV.$$

- **Conclusion partielle :** $KsA.TV = KsJ.AT$.

3. Une variante de l'auteur

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
 A' la circumtrace de (AH)
 et X' le symétrique de X par rapport à (BC) .

Donné : A' , Ks et X' sont alignés. ⁶⁷

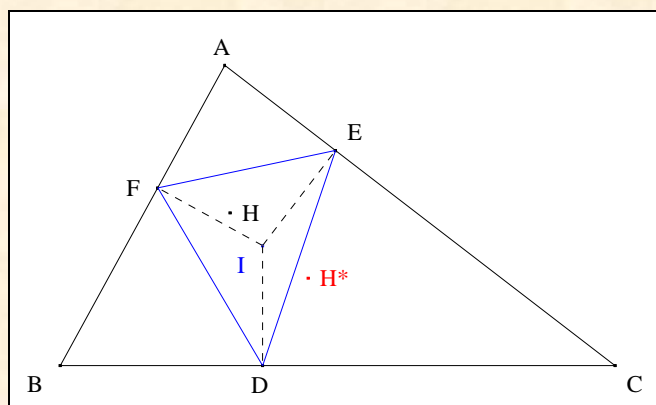
⁶⁷ Ayme J.-L., With the Kosnita's point, AoPS du 04/09/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1138223_with_the_kosnitas_point

J. UNE PERPENDICULAIRE À (HKs)

1. Le point de Schiffler du triangle tangential

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 I le centre de ABC,
 DEF le triangle de contact de ABC,
 H l'orthocentre de DEF
 et H* l'isogonal de H par rapport à ABC.

Donné : H* est le point de Schiffler de ABC. ⁶⁸

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. ⁶⁹

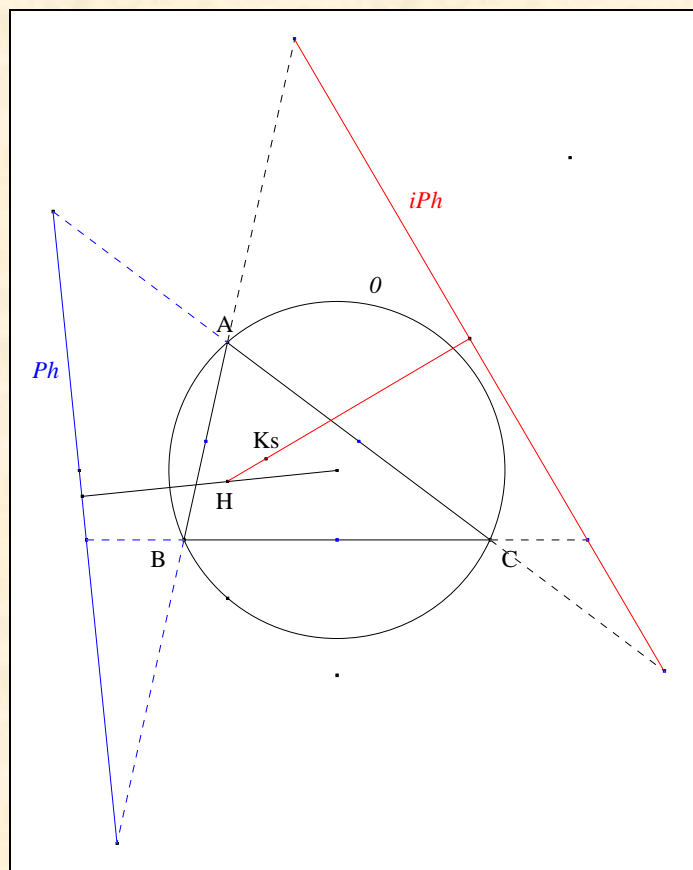
2. Isotomique de la polaire de l'orthocentre

VISION

Figure :

⁶⁸ Concurrence of 4 Euler lines [Schiffler point], AoPS du 29/08/2006
<http://artofproblemsolving.com/community/c6h108577>

⁶⁹ Ayme J.-L., Le point de Schiffler..., G.G.G. vol. 9, p. 24-25 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>



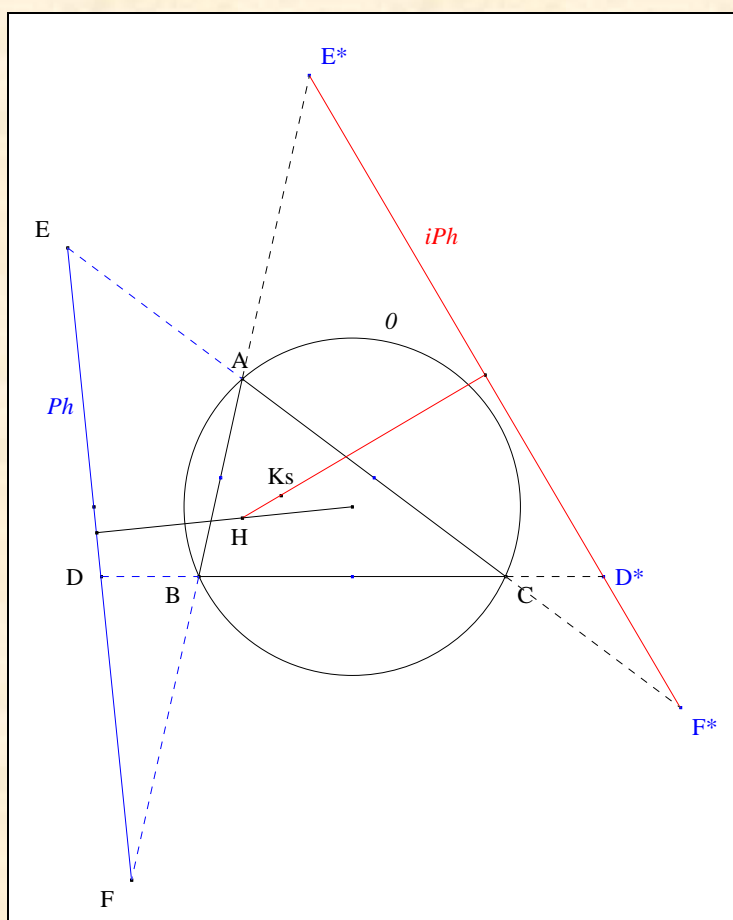
Traits : ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC ,
 H l'orthocentre de ABC ,
 Ph la polaire de H relativement à O ,
 iPh l'isotomique ⁷⁰ de Ph relativement à ABC
 et K_s le point de Kosnita de ABC .

Donné : (HK_s) est perpendiculaire à iPh . ⁷¹

VISUALISATION

⁷⁰ ou transversale réciproque

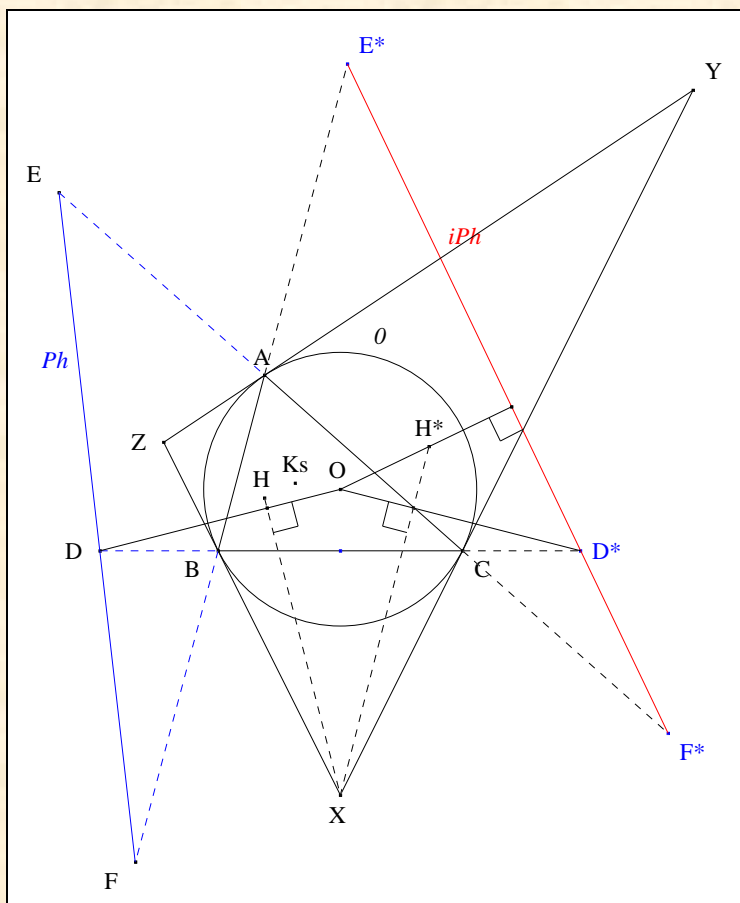
⁷¹ With the Kosnita point, Problem 445, AoPS du 25/03/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1217571_with_the_kosnita_point



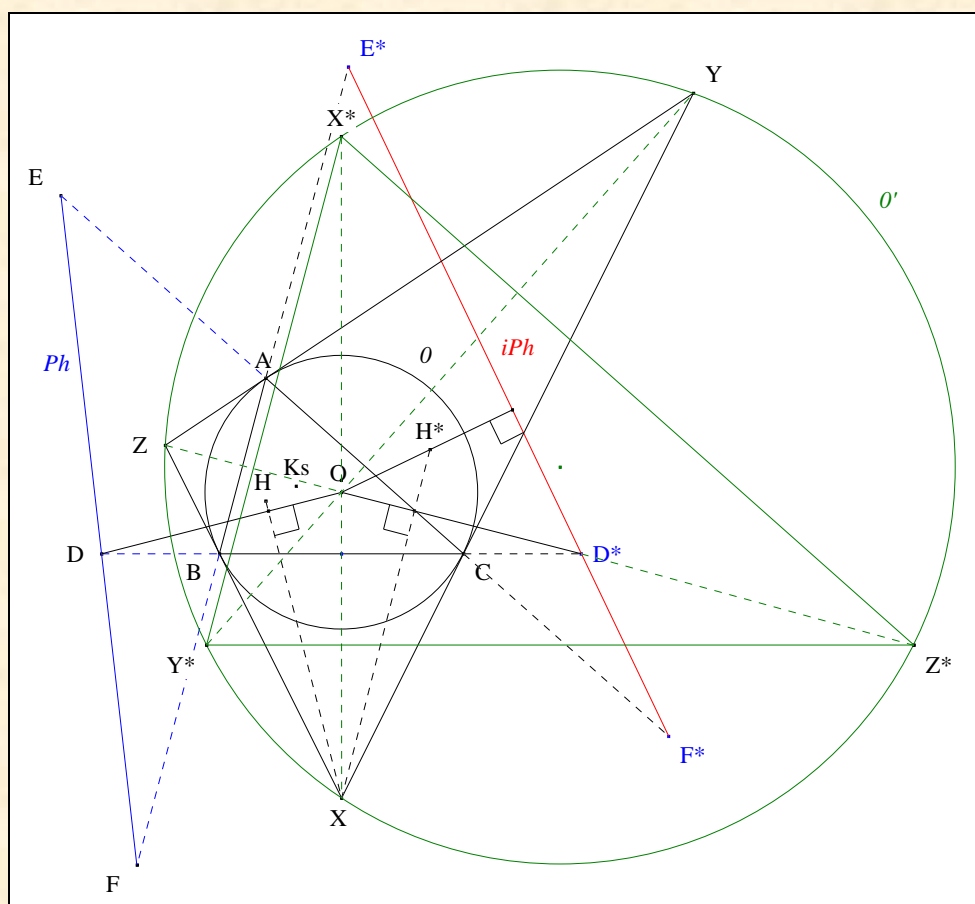
- Notons D, E, F les points d'intersection de Ph resp. avec $(BC), (CA), (AB)$
 et D^*, E^*, F^* les isotomes de D, E, F resp. par rapport à $[BC], [CA], [AB]$.
- **Scolies :**
 - (1) Ph est l'axe de perspective des triangles perspectifs ABC et H -circumcévien
 - (2) D^* est le symétrique de D par rapport au milieu de $[BC]$ (et circulairement...)
- D'après Gohierre de Longchamps ⁷², D^*, E^*, F^* sont sur l'isotomique iPh de Ph relativement à ABC .

⁷²

Ayme J.-L., Gohierre de Longchamps dans les Journaux scientifiques, G.G.G. vol. 5, p. 6-10 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>



- Notons XYZ le triangle tangential de ABC
et H^* l'isogonal de H relativement à XYZ .
- D'après **J. 1**. Le point de Schiffler du triangle tangential, H^* est le point de Schiffler de XYZ .
- (HX) étant la polaire de D relativement à O ,
par symétrie d'axe (OX) ,
en conséquence, $(OD) \perp (HX)$;
 $(OD^*) \perp (H^*X)$;
 D^* est sur la polaire de H^* relativement à O .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que E^* est sur la polaire de H^* relativement à O
 F^* est sur la polaire de H^* relativement à O .
- **Conclusions partielles :**
 - (1) H^* est le pôle de iPh
 - (2) $(OH^*) \perp iPh$.



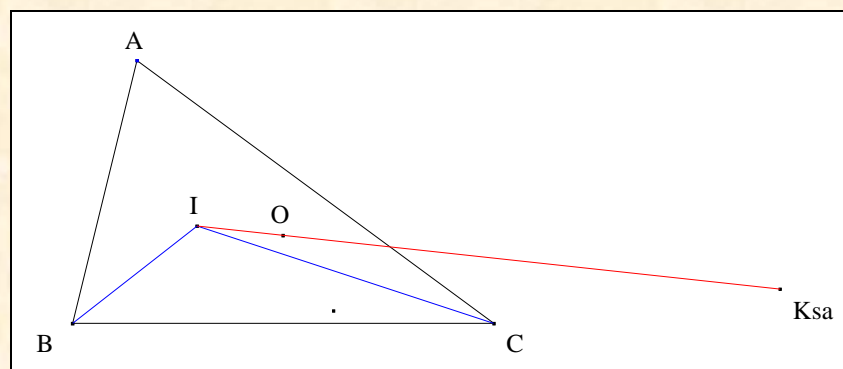
- Notons O' le cercle circonscrit à XYZ
 et $X^*Y^*Z^*$ le triangle O -circomcévien de XYZ .
- O étant le centre de XYZ , $X^*Y^*Z^*$ est le second triangle circomperp de $X^*Y^*Z^*$.
- D'après **F. 3**. Les points de Schiffler et Kosnitza, H^* est le point de Kosnitza de $X^*Y^*Z^*$.
- **Scolies :**
 - (1) O est l'orthocentre de $X^*Y^*Z^*$
 - (2) ABC est homothétique à $X^*Y^*Z^*$
 - (3) H, K_s ont pour homologues resp. O, H^*
 - (4) $(HK_s) // (OH^*)$ et $(OH^*) \perp iPh$.
- **Conclusion :** (HK_s) est perpendiculaire à iPh .

K. AVEC DES POINTS DE KOSNITZA

1. Les triangles IBC

VISION

Figure :

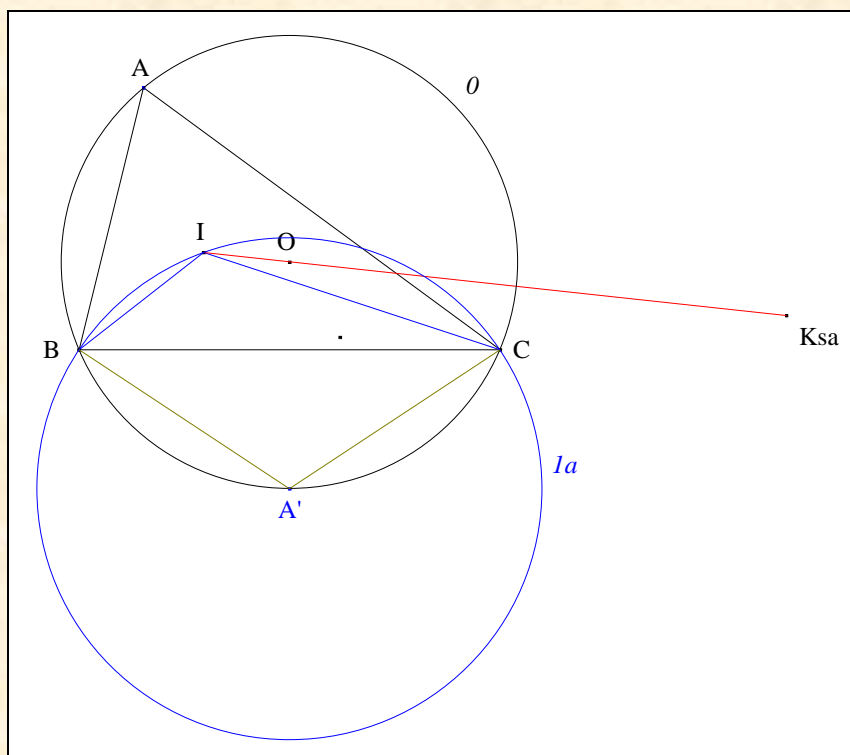


Traits : ABC un triangle,
 I le centre de ABC,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC
 et Ksa le point de Kosnita du triangle IBC.

Donné : Ksa est sur (IO).⁷³

VISUALISATION

⁷³ Hung dit buratinogigle sur AoPS, Kosnita points lies on OI line, AoPS du 21/04/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1231298_kosnita_points_lies_on_oi_line



- Notons O le cercle circonscrit à ABC ,
 Ia le A-cercle de Menthon de ABC
 et A' le premier A-perpoint de ABC .
- **Scolies :** (1) A' est le centre de Ia
 (2) O est le centre du cercle circonscrit au triangle $A'BC$.
- **Conclusion :** par définition, Ksa est sur (IO) .

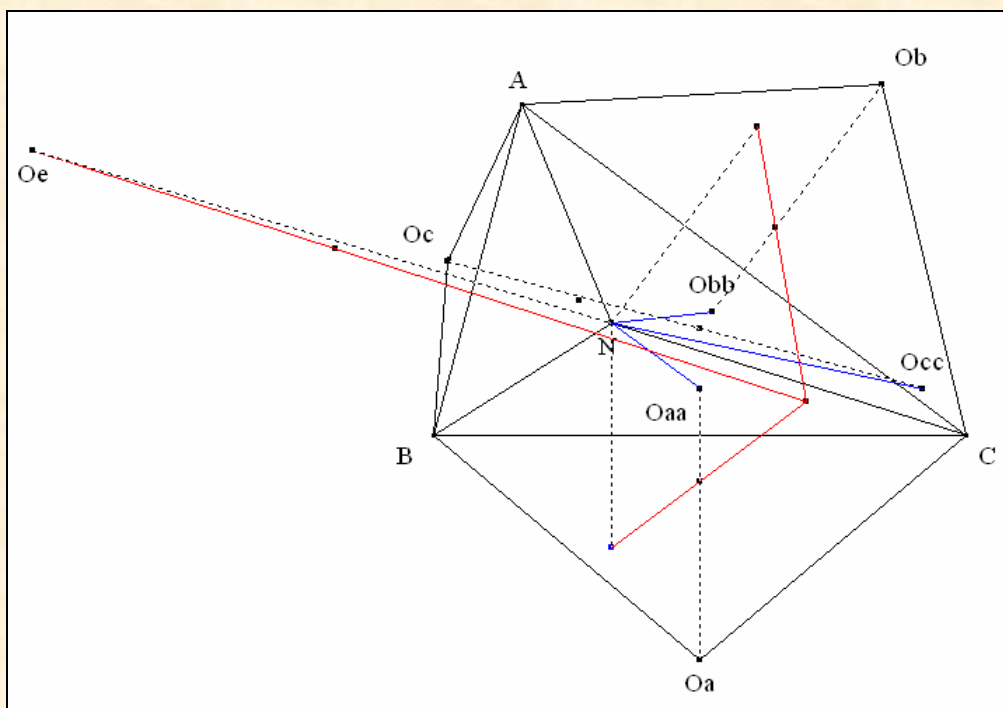
Enoncé traditionnel :

*I étant le centre d'un triangle ABC ,
 les points de Kosnitza resp. des triangles IBC , ICA , IAB
 sont
 sur la droite d'Euler du triangle de contact de ABC .*

2. Les triangles NBC

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 N le centre du cercle d'Euler de ABC,
 Oa, Ob, Oc les centres des cercles circonscrits reps. aux triangles NBC, NBA, NAB,
 et Oaa, Obb, Occ le centre des cercles circonscrits resp. aux triangles OaBC, ObCA, OcAB.

Donné : les symétriques de (NOaa), (NObb), (NOcc) resp. par rapport à (BC), (CA) (AB) sont concourantes.⁷⁴

Commentaire : (NOaa) passe par le point de Kosnita de NBC et circulairement.

Indication :

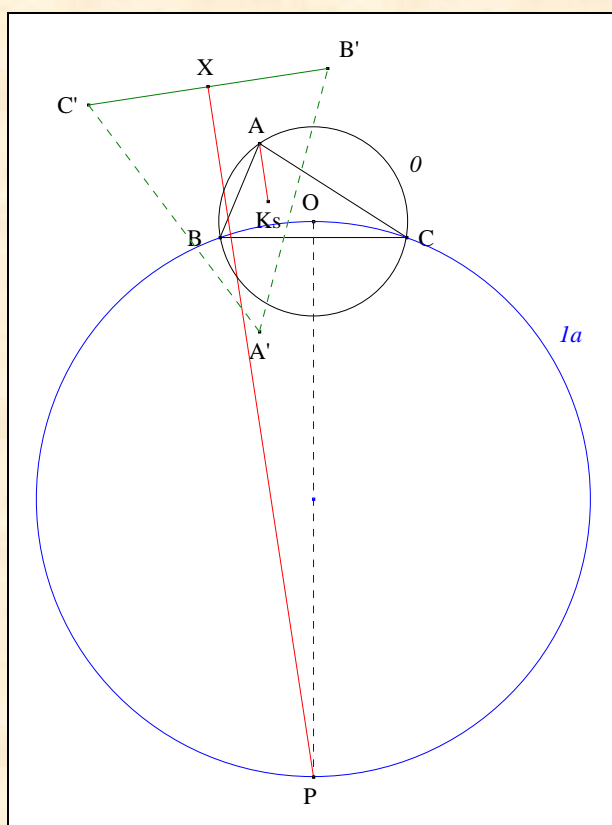
⁷⁴ Hung dit *buratinogigle*, NPC and Kosnita points, AoPS du 27/01/2015 ; <http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h622641p3724306>

L. UNE PARALLÈLE
À
UNE A-DROITE DE KOSNITZA

1. Le résultat de François Rideau

VISION

Figure :



Traits :

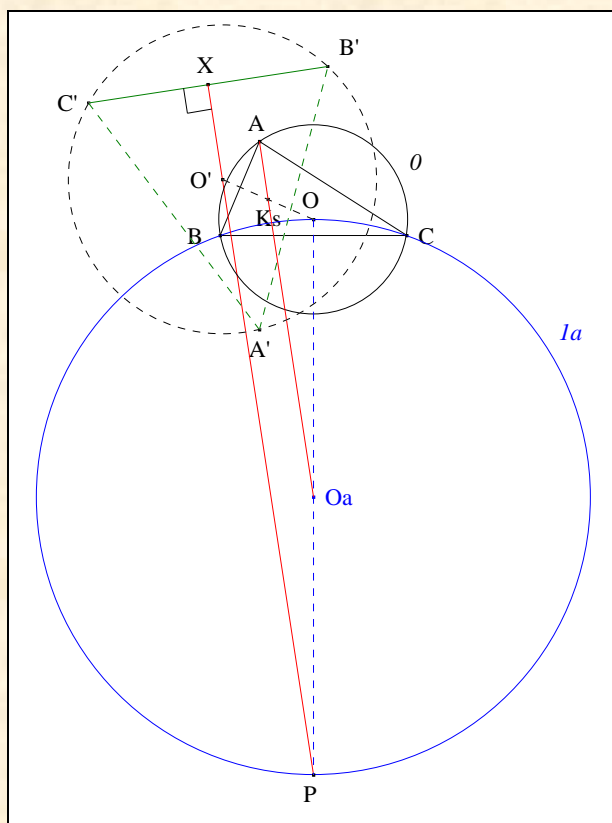
ABC	un triangle,
O	le cercle circonscrit à ABC,
O	le centre de O ,
$A'B'C'$	le triangle symétrique de ABC,
X	le milieu de $[B'C']$,
Ia	le cercle circonscrit au triangle OBC,
et P	l'antipôle de O par rapport à Ia .

Donné : (PX) est parallèle à (AKs) .⁷⁵

VISUALISATION

⁷⁵

With the symmetric triangle, AoPS du 04/04/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1222208_with_the_symmetric_triangle
 Deux perpendiculaires, *Les-Mathematiques.net* ; <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1231423>



- Notons O' le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$
et O_a le centre du cercle circonscrit à OBC .
- D'après **A.** Le point de Kosnitza, (AK_s) passe par O_a .
- D'après **E. 2.** O' est le symétrique de O par rapport à K_s .
- D'après Thalès "Rapports", (PO') // (O_aK_s) .
- D'après **C. 3.** $(AO_aK_s) \perp (B'C')$;
en conséquences, (1) $(PO') \perp (B'C')$
(2) (PO') passe par X .
- **Conclusion :** (PX) est parallèle à (AK_s) .

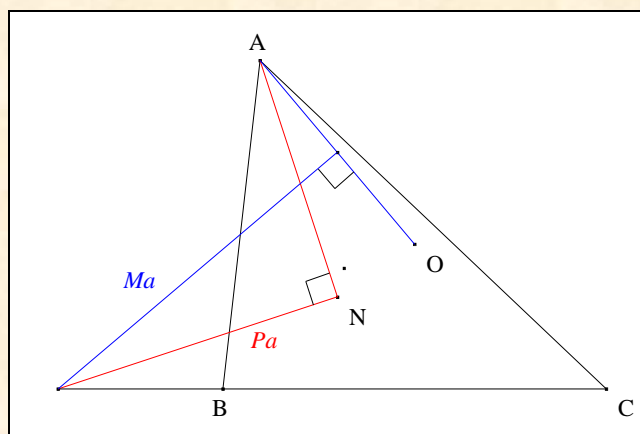
Solie : trois points alignés

U. APPENDICE

1. Un lemme

VISION

Figure :



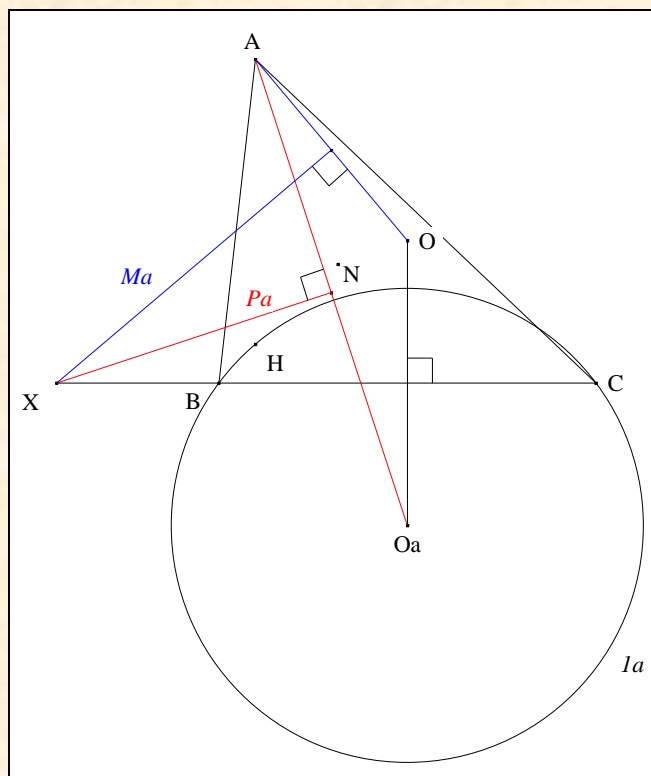
Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 Ma la médiatrice de $[AO]$,
 N le centre d'Euler à ABC,
 Ks le point de Kosnitza de ABC
 et Pa la perpendiculaire à $[NA]$ en N.

Donné : Pa , Ma et (BC) sont concourantes.⁷⁶

VISUALISATION

⁷⁶

Three concurrent lines, AoPS du 09/03/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1209383_three_concurrent_lines

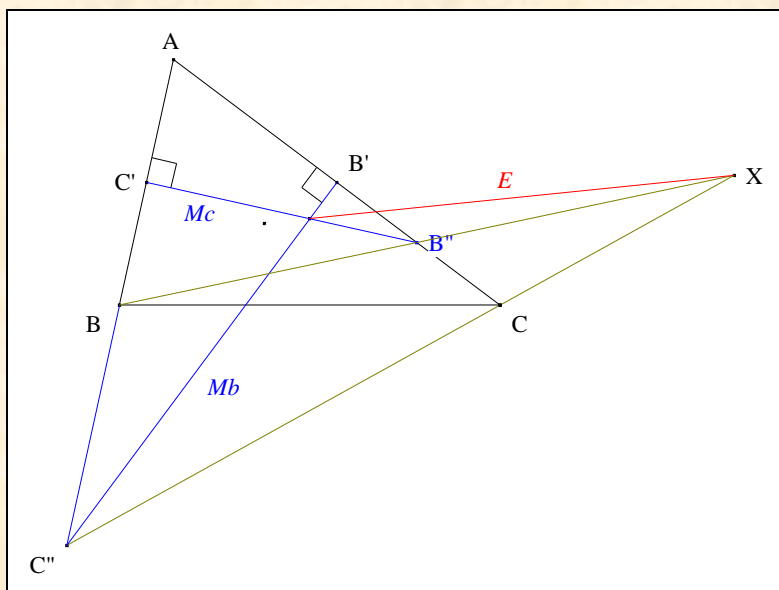


- Notons H l'orthocentre de ABC ,
et Ia le cercle circonscrit au triangle BHC
 Oa le centre de Ia .
- **Scolies :** (1) Pa est la médiatrice de $[AOa]$
(2) (BC) est la médiatrice de $[OOa]$.
- **Conclusion :** Pa, Ma et (BC) sont concourantes.
- Notons X ce point de concours.

2. Un point sur la droite d'Euler

VISION

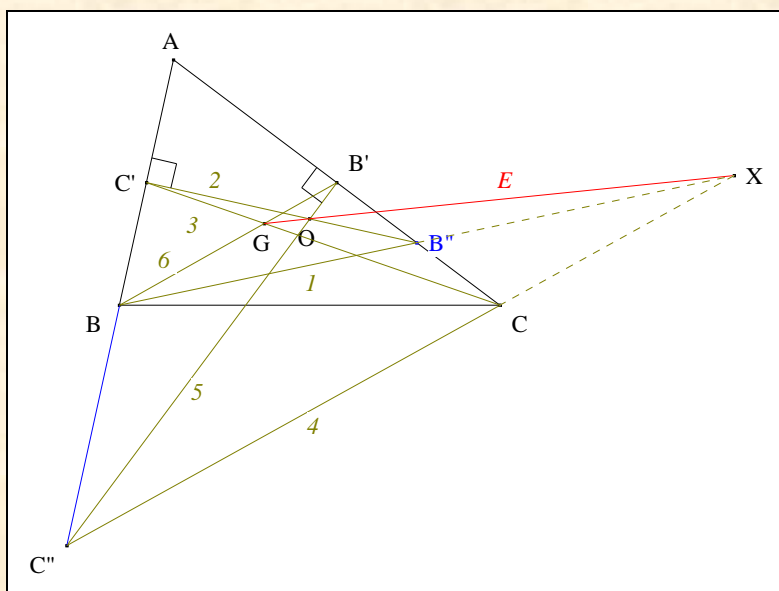
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	B', C'	les milieux resp. de $[AC], [AB]$,
	Mb, Mc	les médiatrices resp. de $[AC], [AB]$,
	B'', C''	les points d'intersection de Mb, Mc resp. avec $(AC), (AB)$,
	E	la droite d'Euler à ABC,
et	X	le point d'intersection de (BB'') et (CC'') .

Donné : X est sur E .⁷⁷

VISUALISATION



- Notons O, G les points d'intersection resp. de Mb et Mc , (BB'') et (CC'') .
- **Scolies :**
 - (1) O est le centre du cercle circonscrit à ABC
 - (2) G est le point médian de ABC

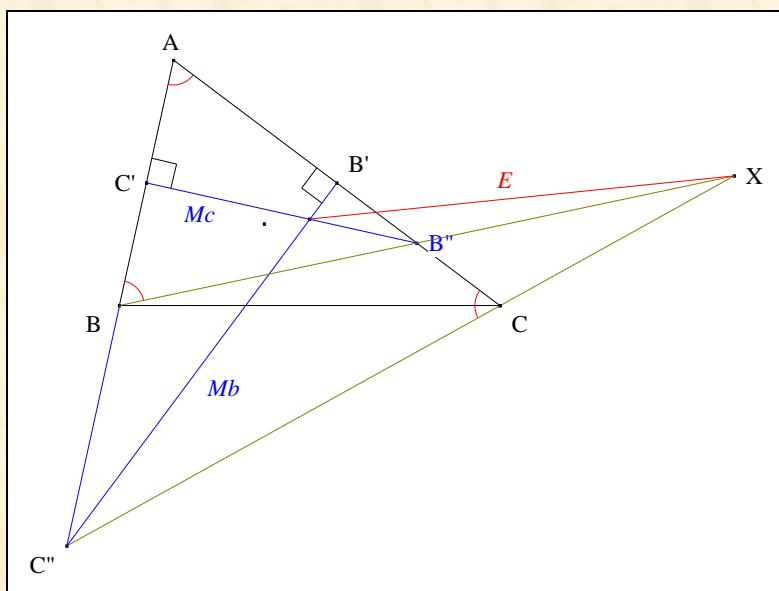
⁷⁷ Three concurrent lines, AoPS du 09/03/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1209383_three_concurrent_lines

(3) $(OG) = E$.

- D'après Pappus "La proposition 139"⁷⁸
 (XOG) est la pappusienne de l'hexagone sectoriel $BB''C''C''B''B$.

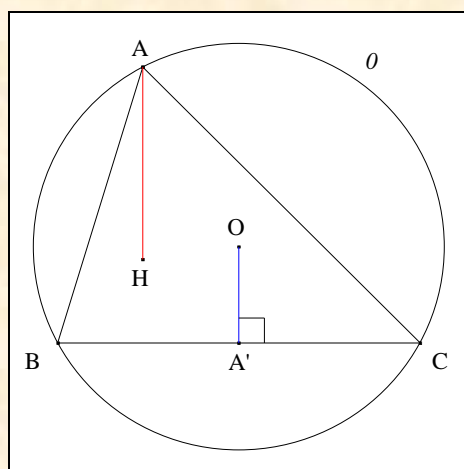
- **Conclusion :** X est sur E .

Solie : vision angulaire



V. ANNEXE

1. Une relation⁷⁹



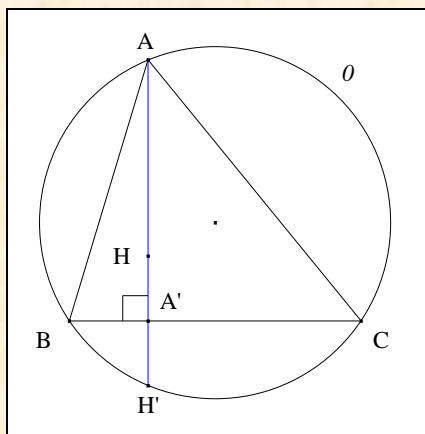
Traits : ABC un triangle,

⁷⁸ Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. 7, p. 10-14 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
⁷⁹ Carnot L., *Géométrie de position* (1803)

H l'orthocentre de ABC
 O le cercle circonscrit à ABC,
 O le centre de O
 et A' le milieu de [BC],

Donné : AH = 2.OA'.

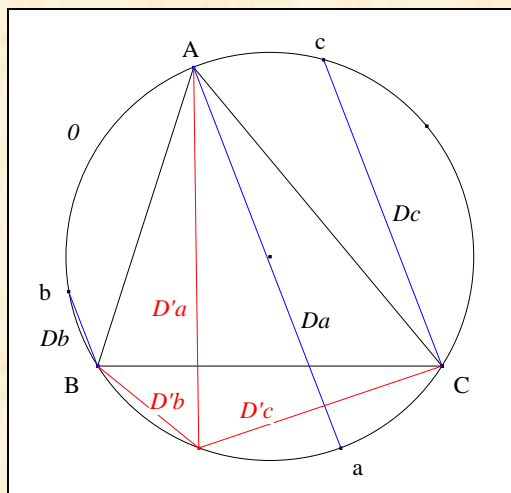
2. Symétrie de l'orthocentre par rapport à un côté⁸⁰



Traits : ABC un triangle acutangle,
 H l'orthocentre du triangle,
 A' le pied de la hauteur de ABC en A,
 O le cercle circonscrit à ABC
 et H' le pied de la hauteur de ABC en A sur O.

Donné : A' est le milieu de [HH'].

3. Le théorème de Beltrami⁸¹



Traits: ABC un triangle,
 O le cercle circonscrit à ABC,
 Da, Db, Dc trois céviennes passant par A, B, C,
 a, b, c les seconds points d'intersection de Da, Db, Dc avec O

⁸⁰ Carnot, n° 142, *De la corrélation des figures géométriques* (1801) 101
⁸¹ Beltrami E., *Archives de Grünert* 43, p. 48

et $D'a, D'b, D'c$ les isogonales de Da, Db, Dc .

Donné : Da, Db, Dc sont parallèles si, et seulement si, $D'a, D'b, D'c$ sont concourantes sur θ .