LE POINT DE PRASOLOV

ET

L'ALIGNEMENT Pra – K - N

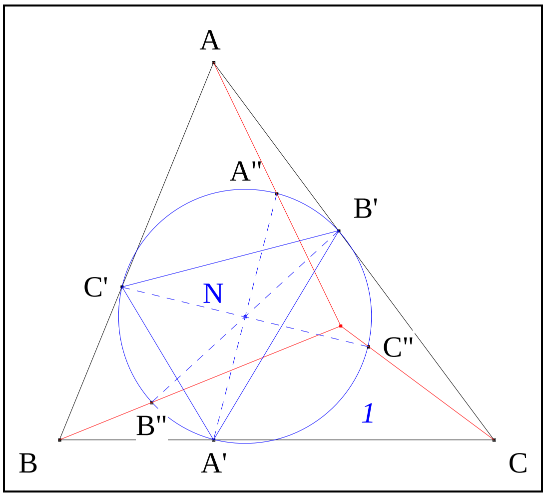
Jean - Louis AYME

Résumé. Nous présentons une preuve entièrement synthétique de l'alignement des points de Prasolov et de Lemoine d'un triangle avec le centre du cercle d'Euler de celui-ci. Cette preuve bâtie "point par point" est accompagnée de brèves notes historiques.
Tous les résultats cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

LE POINT DE PRASOLOV [1]

VISION

Figure :

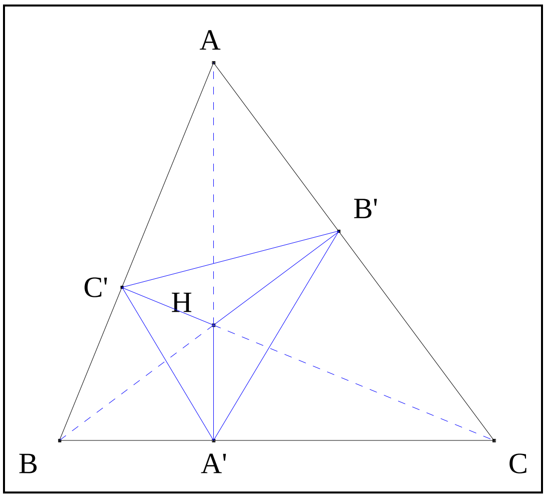


Traits : ABC un triangle,
A'B'C' le triangle orthique de ABC
1 le cercle d'Euler de ABC,
N le centre de *1*
et A", B", C" les points diamétralement opposés de A', B', C' sur *1*.

Donné : les droites (AA"), (BB") et (CC") sont concourantes.

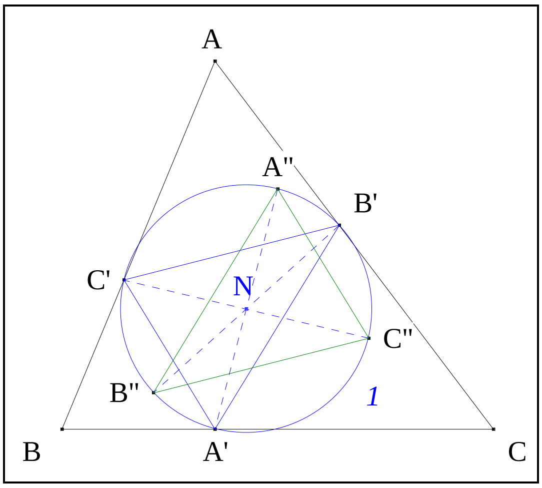
[1] Prasolov V. V., *Zadachi po planimetrii* 5, Exercice 114 (1991).

VISUALISATION

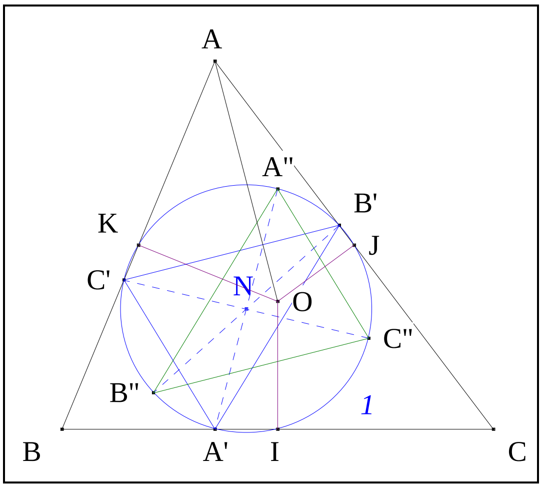


- Notons H l'orthocentre de ABC.

- **Scolie :** A'B'C' est le triangle H-pédal de ABC.



- Les triangles A'B'C' et A"B"C" sont homothétiques.



- Notons I, J, K les seconds points d'intersection de *1* avec (BC), (CA), (AB)
  et O l'isogonal de H.

- D'après Euler-Bevan "Le cercle d'…", I, J, K sont les milieux de [BC], [CA], [AB].

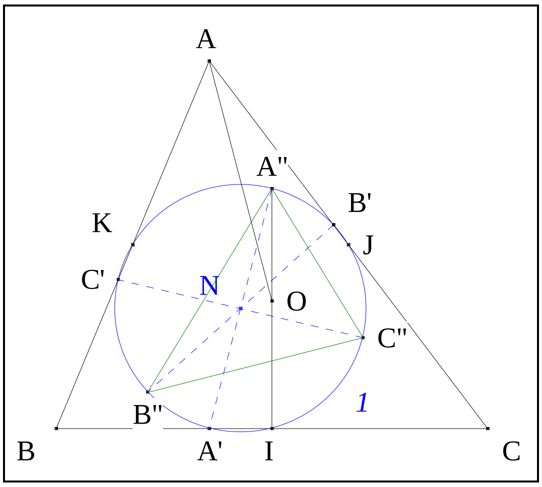
- **Scolies :** O est le centre du cercle circonscrit à ABC.

- D'après Mathieu "The pedal circle theorem", IJK est le triangle O-pédal de ABC.

- D'après Vigarié[2] "Isogonale et perpendiculaire", (AO) ⊥ (B'C') ;
  nous avons : (B'C') // (B"C") ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AO) ⊥ (B"C").

- Mutatis mutandis, nous montrerions que, (BO) ⊥ (C"A")
  (CO) ⊥ (A"B").

- **Conclusion partielle :** par définition, O est le pôle d'orthologie de ABC relativement à A"B"C".



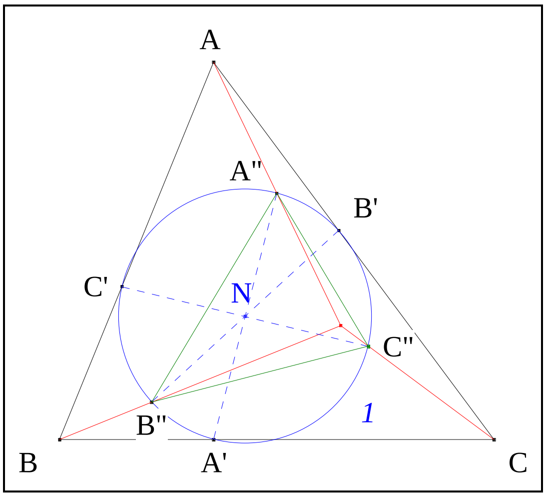
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (A"I) ⊥ (BC) ;
  nous avons : (BC) ⊥ (OI) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (A"I) // (OI) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (A"I) = (OI) ;
  en conséquence, (A"I) passe par O.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que, (B"J) passe par O
  (C"K) passe par O.

- Par définition, O est le pôle d'orthologie de A"B"C" relativement à ABC.

- **Conclusion partielle :** par définition, ABC et A"B"C" sont bilogiques.

[2] Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-?.



- D'après Sondat[3] "Le petit théorème de…", ABC et A"B"C" sont en perspective.

- **Conclusion :** par définition, les droites (AA"), (BB") et (CC") sont concourantes.

Scolies : **(1)** ce point de concours, noté Pra, est le "point de Prasolov du triangle ABC" ; il est répertorié sous X_{68} chez ETC[4].

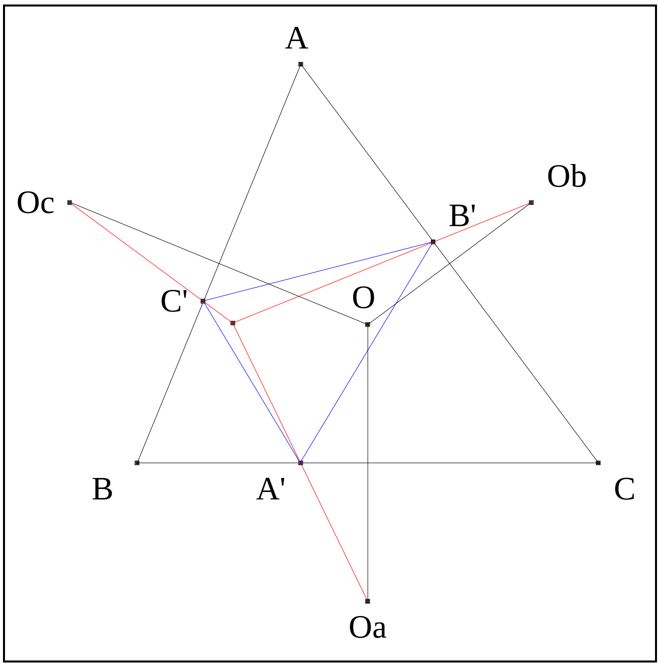
(2) Le nom de ce point a été proposé par Darij Grinberg[5].

Commentaires : la solution métrique proposée par Victor Vasil'evich Prasolov dans *Plane Geometry*, a recours au théorème de Céva dans sa version trigonométrique.
La visualisation purement synthétique présentée par l'auteur n'a pas été rencontrée dans la littérature géométrique.

THE HEXYL POINT

Figure :

[3] Ayme J.-L., Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica (Espagne) 27 (2007).
[4] http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.
[5] Grinberg D., Prasolov Point X(68), Message *Hyacinthos* # 6302 du 09/01/2003.

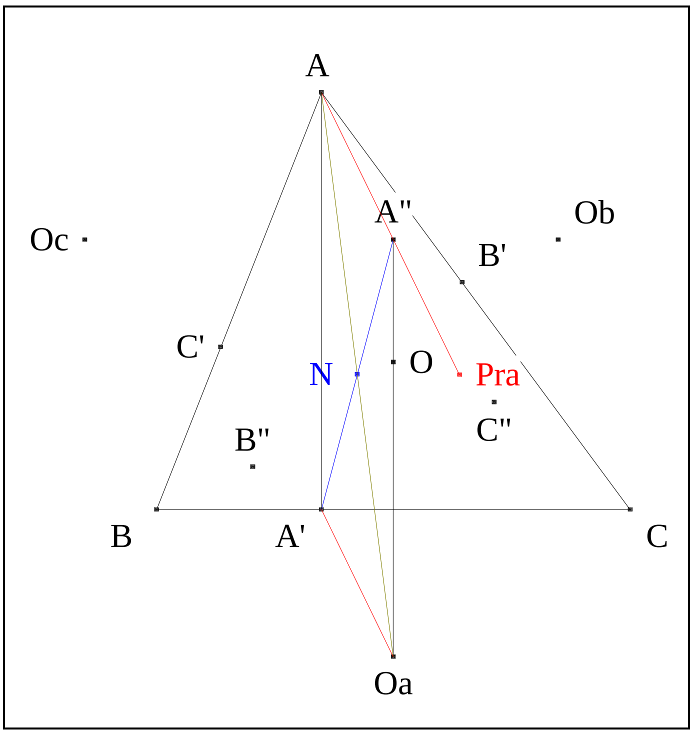


Traits :	ABC	un triangle,
	A'B'C'	le triangle orthique de ABC,
	O	le centre du cercle circonscrit de ABC
et	Oa, Ob, Oc	les symétriques de O par rapport à (BC), (CA), (AB).

Donné : les droites (OaA'), (ObB') et (OcC') sont concourantes.

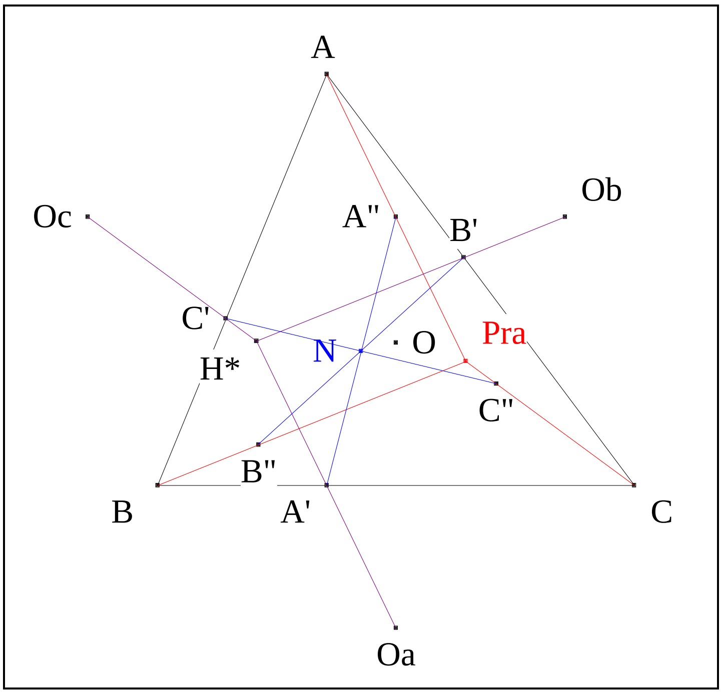
VISUALISATION

- Repartons de la figure suivante avec les mêmes notations que précédemment.



- **Scolies :** **(1)** par hypothèse, N est le milieu de [A'A"]
  (2) nous savons que N est le milieu de [AOa].

- Le quadrilatère AA'OaO ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (OaA') // (AA").

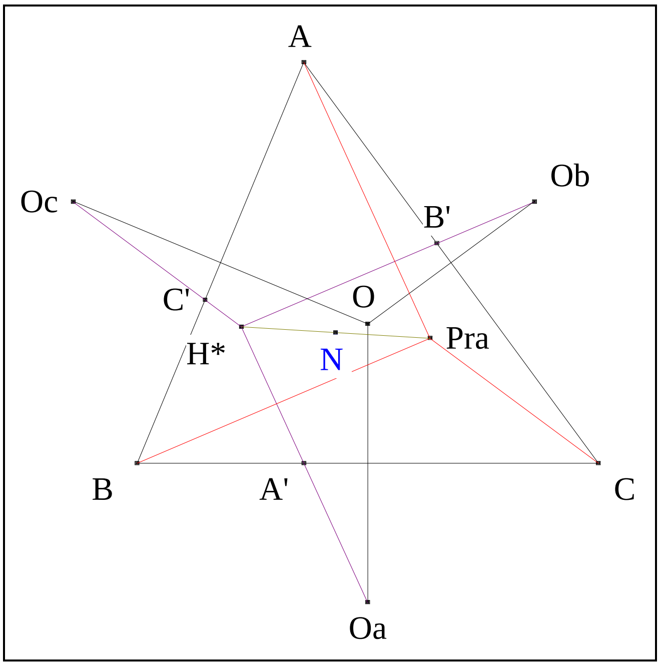


- Mutatis mutandis, nous montrerions que (ObB') // (BB")
  (OcC') // (CC").

- **Conclusion :** (AA"), (BB") et (CC") étant concourantes en Pra,
  par symétrie de centre N,
  (OaA'), (ObB') et (OcC') sont concourantes.

- Notons H* ce point de concours.

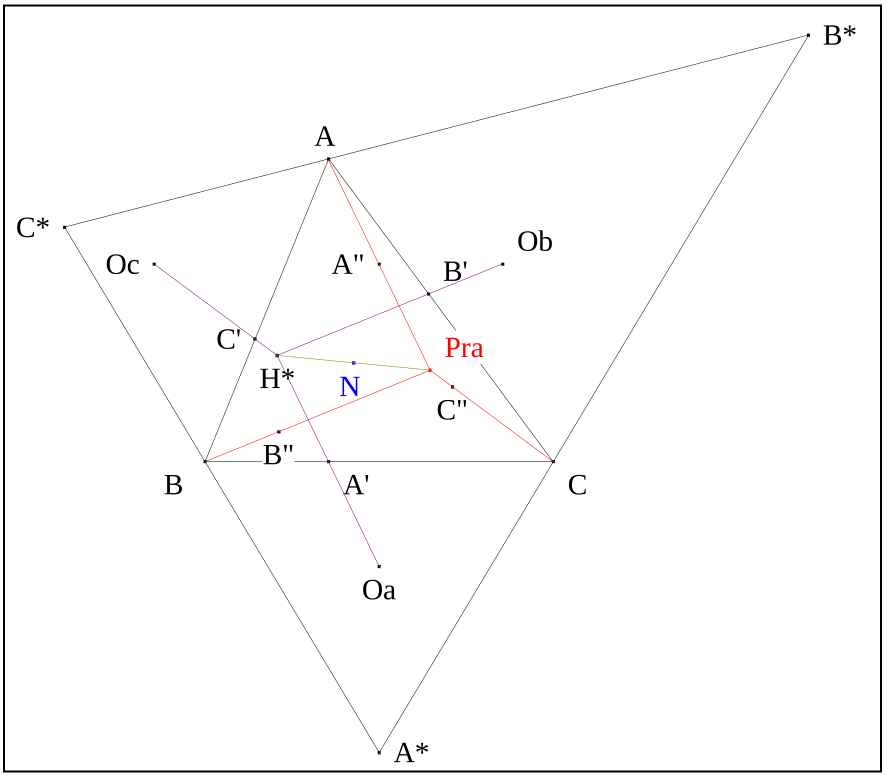
Scolie : **(1)** trois points alignés



- Par symétrie de centre N,   N est milieu de [H*Pra].
- **Conclusion :** les points H*, N et Pra sont alignés.

(2) H* est "The hexyl point of ABC" et est répertorié sous X_{84} chez ETC.

(3) Nature de H*



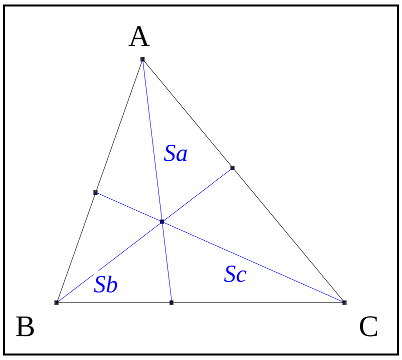
- Notons   A*B*C*   le triangle tangentiel de ABC.

- **Conclusion :** d'après Emelyanov[6], H* est l'orthocentre de A*B*C*.

LE POINT DE LEMOINE

VISION

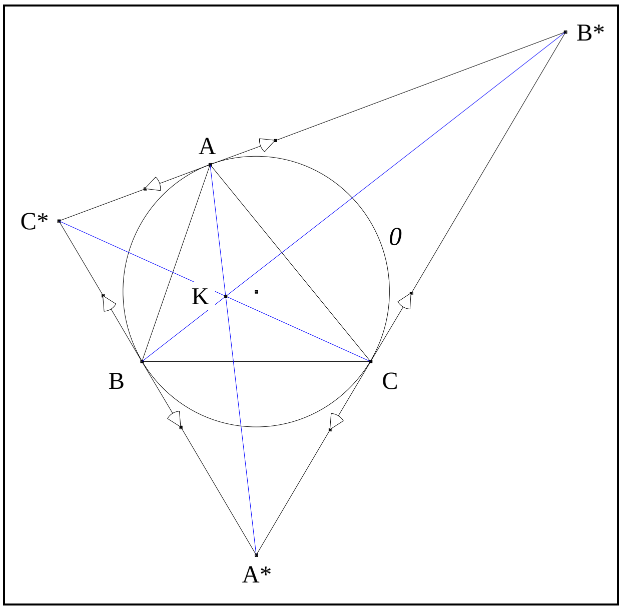
Figure :



Traits : ABC un triangle
et *S*a, *S*b, *S*c les A, B, C-symédianes de ABC.

Donné : *S*a, *S*b et *S*c sont concourantes.

VISUALISATION



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC
et A*B*C* le triangle tangentiel de ABC.

[6] Emelyanov L. A., Emelyanova T. L., XIV Tournement Towns Conference,Beloresk (2002).

- **Scolies :** **(1)** *S*a, *S*b et *S*c passent respectivement par A*, B*, C*
  (2) *1* est le cercle inscrit du triangle tangentiel A*B*C*
  (3) *S*a, *S*b et *S*c sont les A*, B*, C*-gergoniennes de A*B*C*.

- D'après Gergonne "Le point de ...", *S*a, *S*b et *S*c concourent au point de Gergonne de A*B*C*.

- **Conclusion :** *S*a, *S*b et *S*c sont concourantes.

- Notons K ce point de concours.

Énoncé traditionnel : le point de Lemoine d'un triangle est le point de Gergonne de son triangle tangentiel et inversement,
le point de Gergonne d'un triangle est le point de Lemoine de son triangle de contact.

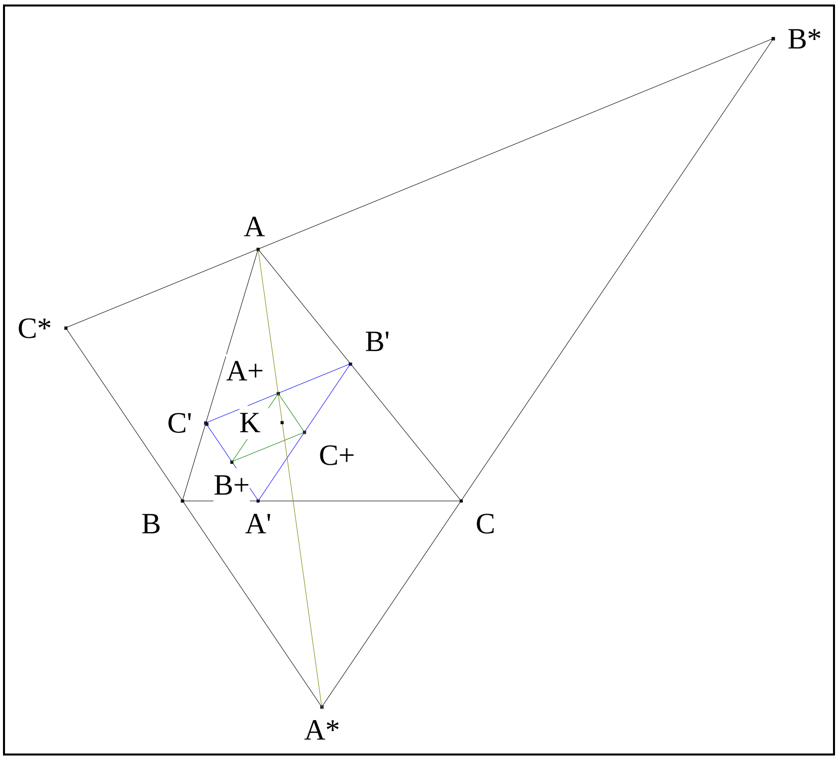
Note historique : c'est au congrès de Lyon en 1873 qu'Émile Lemoine, dans un papier intitulé *Sur un point remarquable du triangle*, a présenté ce résultat sans démonstration.
Nathan Altshiller-Court dans son livre[7] dit que Lemoine "may be said to have laid the foudation... of the modern geometry of the triangle as a whole". Quant à Ross Honsberger, il ajoute que le point symédian peut être considéré comme "a crown jewel of modern geometry"[8].

Scolies : **(1)** K est "le point de Lemoine de ABC" depuis que Joseph Neuberg l'a proposé en 1884 ;
il est aussi connu sous le nom de "point symédian de ABC".
Il est répertorié sous X_6 chez ETC.

(2) Le triangle médian du triangle orthique de ABC

- Repartons de la figure suivante avec les mêmes notations que précédemment.

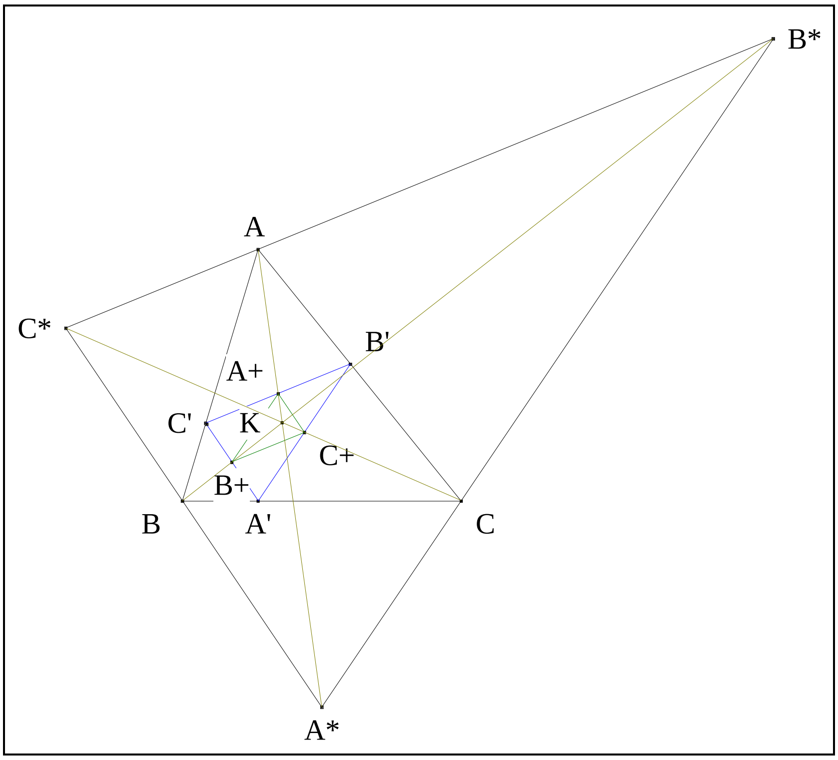
[7] Altshiller-Court N., *College Geometry*, Barnes & Noble, Richmond (1923) 304.
[8] Honsberger R., *Episodes of 19th and 20th Century Euclidean Geometry*, Math. Assoc. America (1995) 53.



- Notons A+B+C+ le triangle médian de A'B'C'.

- Les triangles A+B+C+ et A*B*C* sont homothétiques.

- (B'C') étant antiparallèle à (BC) relativement à (AB) et (AC),
  le milieu A+ de [B'C'] est sur la A-symédiane (AA*) de ABC ;
  en conséquence, les points A, A+, K et A* sont alignés.

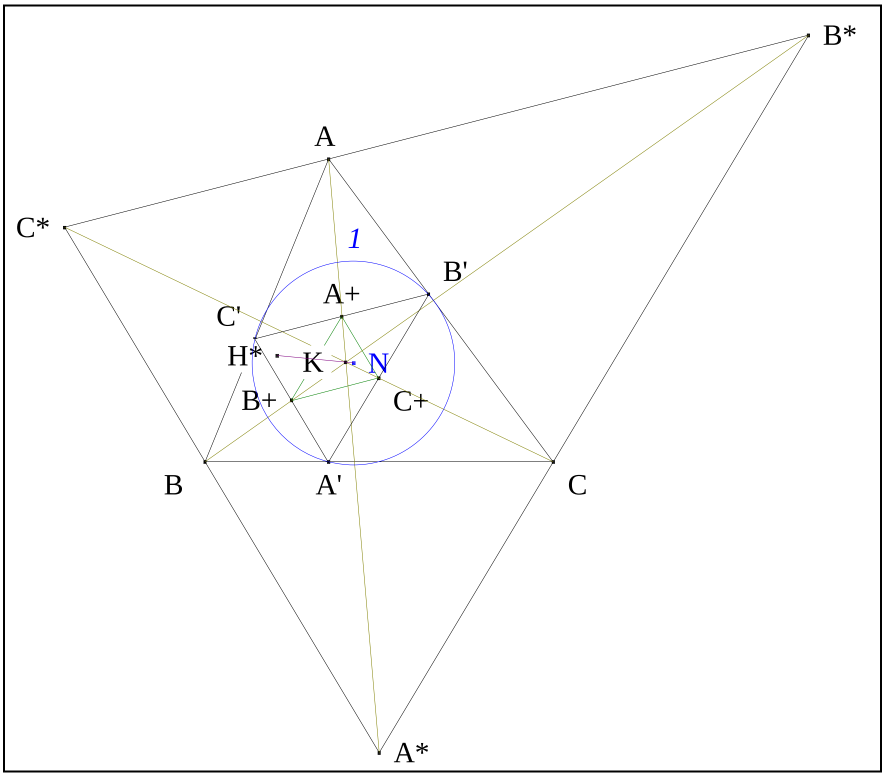


- Mutatis mutandis, nous montrerions que les points B, B+, K et B* sont alignés les points C, C+, K et C* sont alignés.

- **Conclusion :** par définition, les triangles A*B*C* et A+B+C+ sont homothétiques de centre K.

(4) Trois points alignés

- Repartons de la figure suivante avec les mêmes notations que précédemment.



- N étant le centre de *1*, N est le pôle d'orthologie de A+B+C+ par rapport à A*B*C* ;
  H* étant l'orthocentre de A*B*C*, H* est le pôle d'orthologie de A*B*C* par rapport à A+B+C+ ;
  par définition, A*B*C* et A+B+C+ sont orthologiques.

- **Conclusion :** d'après Sondat[9] "Le théorème de…" appliqué aux triangles orthologiques et homothétiques A*B*C* et A+B+C+, K, N et H* sont alignés.

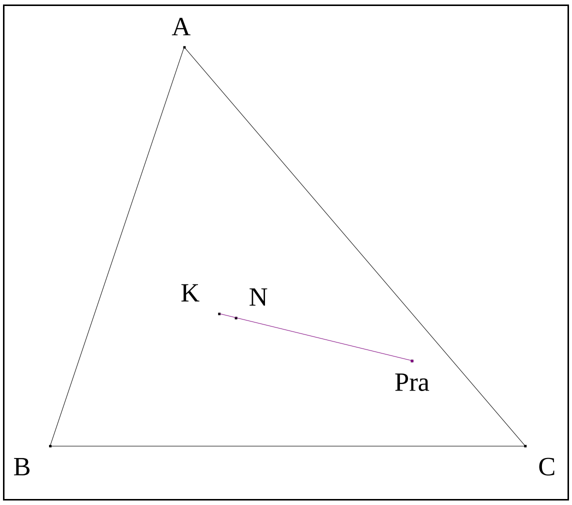
L'ALIGNEMENT Pra – K - N

VISION

Figure :

---

9 Ayme J.-L., Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica (Espagne) 27 (2007).

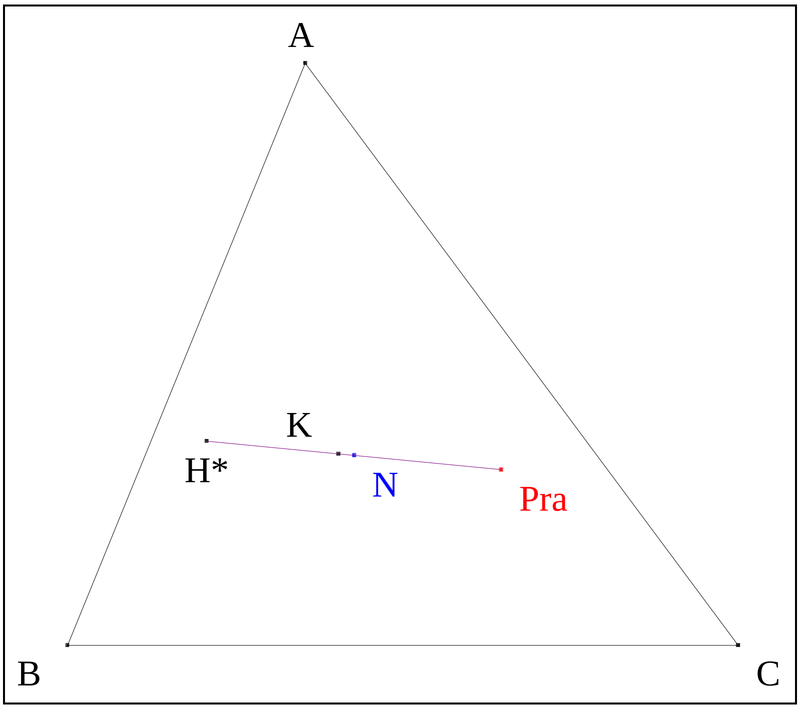


Traits : ABC un triangle,
K le point de Lemoine de ABC,
N le centre du cercle d'Euler de ABC
et Pra le point de Prasolov de ABC.

Donné : les points K, N et Pra sont alignés.

VISUALISATION

- Repartons de la figure suivante avec les mêmes notations que précédemment.



- **Scolies :** **(1)** les points H*, N et Pra sont alignés
  (2) les points K, N et H* sont alignés.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, les points K, N et Pra sont alignés.