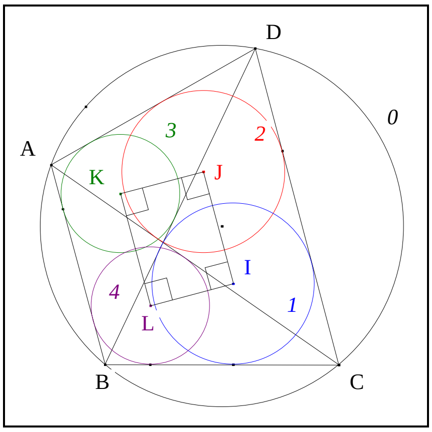
LE RECTANGLE DE RYOKAN MARUYAMA

Jean - Louis AYME



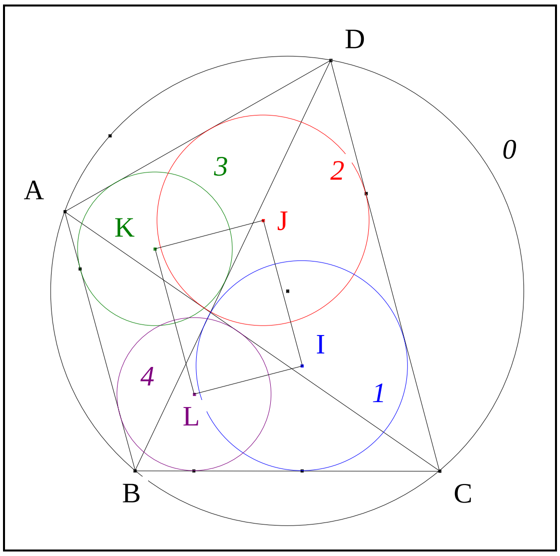
Résumé. Nous présentons sous la forme d'une équivalence la San Gaku de Ryokan Maruyama i.e. une énigme géométrique japonaise gravée sur une tablette votive, accompagnée de nombreuses notes historiques et références.
Les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Sommaire

I. L'ÉQUIVALENCE DE RYOKAN MARUYAMA

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un quadrilatère convexe,	
	1, 2, 3, 4	les cercles inscrits resp. dans les triangles BCD, CDA, DAB, ABC,	
et	I, J, K, L	les centres de *1*, *2*, *3* et *4*.	
Donné :	ABCD est cyclique	*si, et seulement si,*	le quadrilatère IJKL est un rectangle.

Note historique : au Japon, une San Gaku est une tablette commémorative en bois offerte dans les sanctuaires Shinto afin de remercier les dieux de la découverte d'un théorème. Les San Gaku comportent des problèmes de géométrie euclidienne typiquement japonais qui impliquent en général de nombreux cercles. La preuve des problèmes proposés est rarement donnée.

Les San Gaku les plus anciennes datent du XVIIème siècle. Les San Gaku, au nombre de 900 environs ont été publiées pour la première fois en 1869 par Hidetoshi Fukagawa[1], un professeur de mathématiques de Lycée et par Daniel Pedoe[2] dans un livre intitulé *Japanese Temple Geometry Problems*. Rappelons que les San Gaku présentent des figures simples où l'esthétique des formes est déterminante dans le choix des problèmes.

La figure[3] présentée dans cet article a été tracée en 1800 par Ryokan Maruyama **(**1757 **-** 1816**)** sur une tablette pour être suspendu à l'entrée du temple shintoïste Sannosha de la ville de Tsuruoka qui dépend de la préfecture de Yamagata. Cette tablette qui a rapidement disparu, est citée par Kagen Fujita dans son livre intitulé *Zoku Specki Sanpo* écrit en 1807 et dans lequel apparaît la solution de T. Yosida. Ces dernières informations ont été communiquées par le professeur H. Fukagawa au professeur Francisco Bellot Rosado qui s'en est fait l'écho dans la revue canadienne *Crux Mathematicorun*.

Rappelons que Fukagawa est l'auteur de la condition nécessaire.

II. SIX LEMMES

1. Un résultat de J. Mention[4]

---

1 Fukagawa H., Rothman A., *Sacred Geometry* : *Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press (2008).

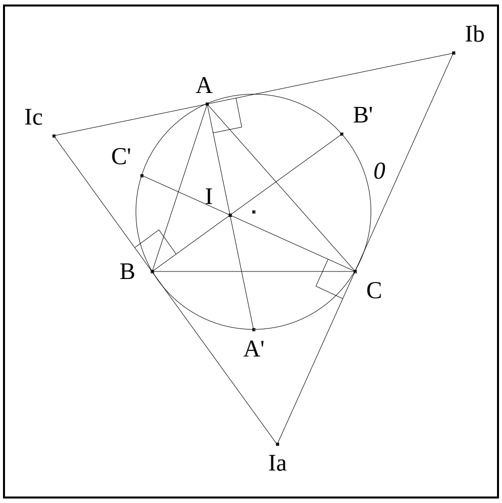
2 Fukagawa H., Pedoe D., *Japanese Temple Geometry Problems*, The Charles Babbage Research Center, Winnipeg (1989). The Charles Babbage Research Center, P.O. Box 272, St. Norbert Postal Station, Winnipeg (MB) Canada R3V 1L6.

3 Fukagawa H., Pedoe D., *Japanese Temple Geometry Problems*, Example 3.5 (1).

4 Mention J., *Nouvelles Annales* (1850) 324; *The Mathematical Monthly* (1859).

VISION

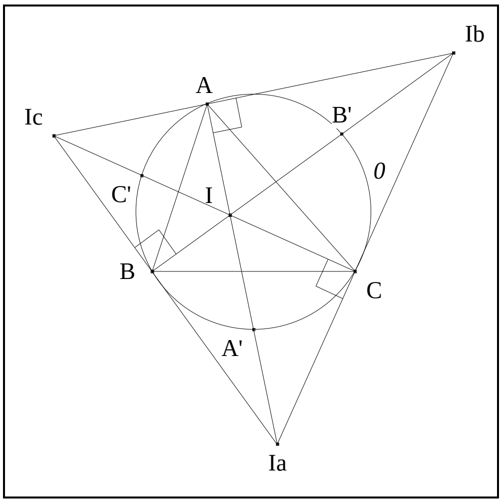
Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
I le centre de ABC,
IaIbIc le triangle excentral de ABC,
et A', B', C' les seconds points d'intersection resp. de (IA), (IB), (IC) avec *0*.

Donné : A', B', C' sont les milieux resp. de [IIa], [IIb] et [IIc].

VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** A, I, A' et A* sont alignés
  (2) B, I, B' et B* sont alignés
  (3) C, I, C' et C* sont alignés
  (4) I est l'orthocentre de A*B*C*.

- D'après Euler-Bevan "Le cercle des six points"[5], *0* est le cercle d'Euler-Bevan de A*B*C*.

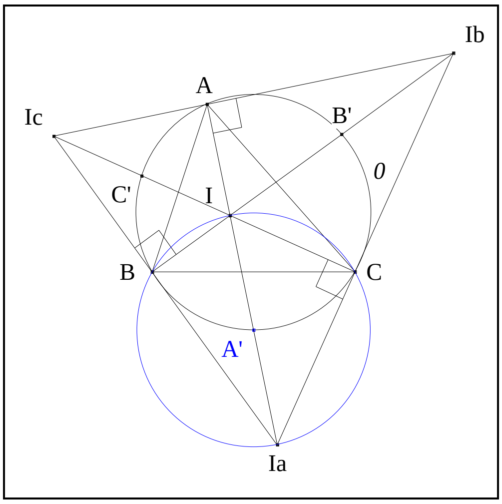
[5] Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim et Miquel, G.G.G. vol. 1.

- **Conclusion :** d'après Poncelet "Le cercle des neuf points"[6],
  A', B', C' sont les milieux resp. de [IIa], [IIb] et [IIc].

Note historique : Christian Heinrich von Nagel en 1836 et Carl Adams en 1846, ont approché ce résultat ainsi qu'Eugenio Beltrami quelques années plus tard.

Scolies : **(1)** A', B', C' sont les seconds A, B, C-perpoints de ABC.

(2) Le cercle de diamètre [IIa] ou le A-cercle de Mention de ABC

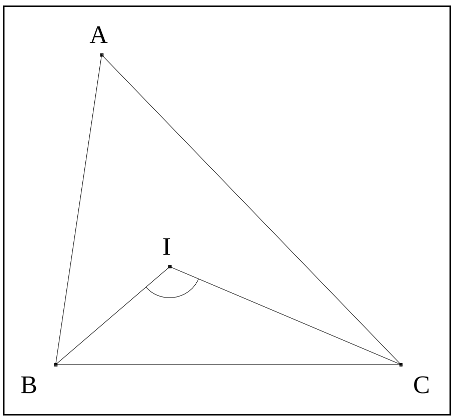


- **Conclusion :** le cercle de diamètre [IIa] passe par B et C.

2. L'angle I

VISION

Figure :

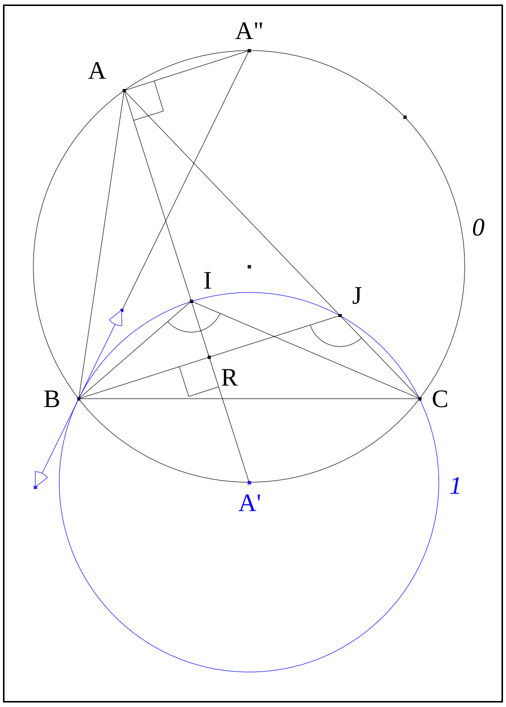


[6] Ayme J.-L., Du cercle des huit points au cercle des neuf point, G.G.G. vol. 4.

Traits : ABC un triangle,
et I le centre de ABC.

Donné : <BIC = 1.d + 1/2.<BAC.

VISUALISATION



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  A' le second A-perpoint de ABC,
  1 le A-cercle de Mention de ABC,
  A" l'antipole de A' relativement à *0*.
  J le second point d'intersection de (AC) avec *1*
  et R le point d'intersection de (AI) et (BJ).

- **Scolies :** **(1)** (AI) est la A-bissectrice de ABC
  (2) (AI) passe par A'
  (3) *1* de centre A' passe par I.

- Les cercles *1* et *0*, les points de base B et C, les moniennes (BBA") et (JCA),
  conduisent au théorème **2** de Reim ; il s'en suit que (BJ) // (A"A) ;
  d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (A"A) ⊥ (AIA') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (BJ) ⊥ (AIA').

- **Conclusion partielle :** le triangle RJA est R-rectangle.

- D'après le théorème de l'angle inscrit, <BIC = <BJC ;
  nous avons : <BJC = 1.d + 1/2.<BAC.

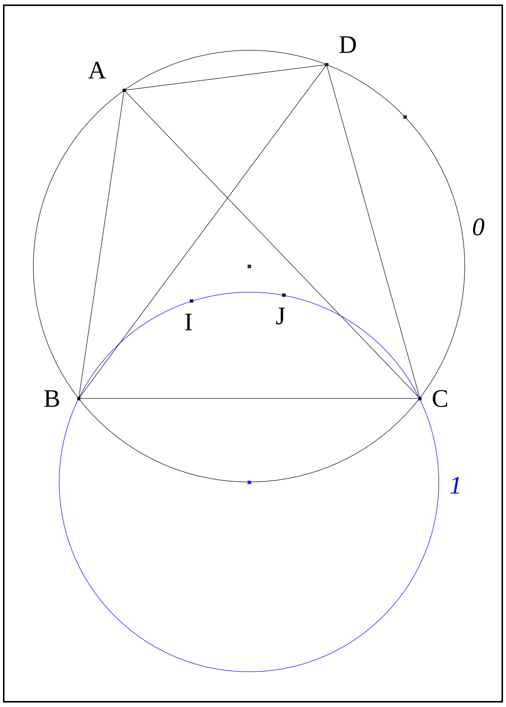
- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, <BIC = 1.d + 1/2.<BAC.

Scolie : A" est le premier A-perpoint de ABC.

3. Deux centres

VISION

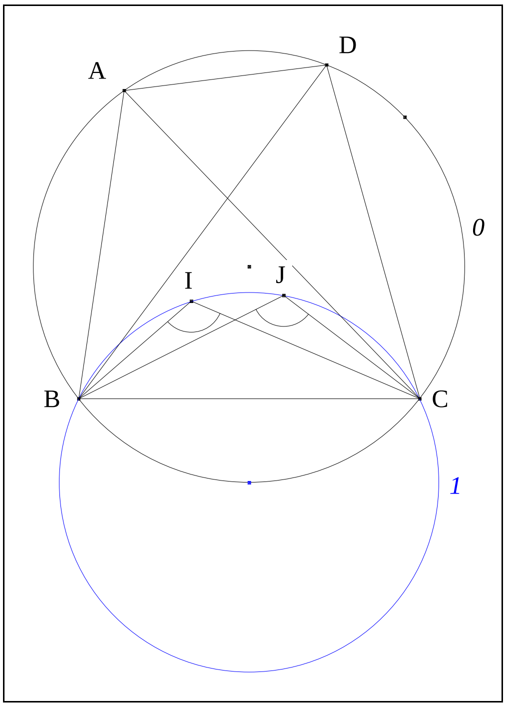
Figure :



Traits : *0* un cercle,
ABCD un quadrilatère convexe, inscrit dans *0*,
I, J les centres resp. des triangles ABC, DBC
et *1* le A-cercle de Mention de ABC.

Donné : *1* passe par J.

VISUALISATION



- D'après II. 2. L'angle I, appliqué à **(1)** ABC, <BIC = 1.d + 1/2.<BAC
  (2) DBC, <BJC = 1.d + 1/2.<BDC.

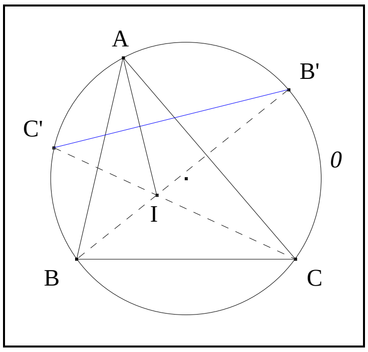
- D'après le théorème de l'angle inscrit, <BAC = <BDC ;
  en conséquence, <BIC = <BJC.

- **Conclusion :** d'après le théorème de l'arc capable, *1* passe par J.

4. Une perpendiculaire à (AI)[7]

VISION

Figure :



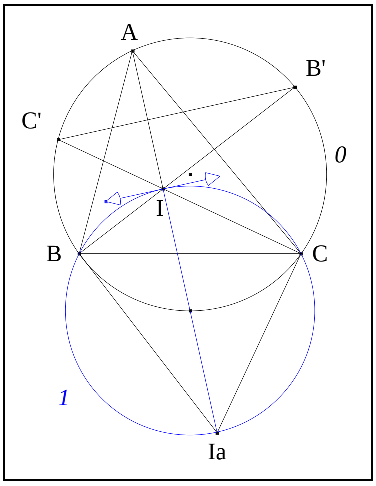
Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
I le centre de ABC

[7] Olympiades Mathématiques du Canada (1991).

et B', C' les seconds B, C-perpoints de ABC.

Donné : (B'C') est perpendiculaire à (AI).

VISUALISATION



- Notons JIa le A-excentre de ABC,
  1 le cercle de diamètre [IJ] ; il passe par B et C ;
  et Ti la tangente à *1* en I.

- **Scolie :** A, I et Ia sont alignés.

- Les cercles *0* et *1*, les points de base B et C, les moniennes (B'BI) et (C'CI),
  conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (B'C') // Ti ;
  par définition d'une tangente, Ti ⊥ (IIa) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (B'C') ⊥ (AIIa).

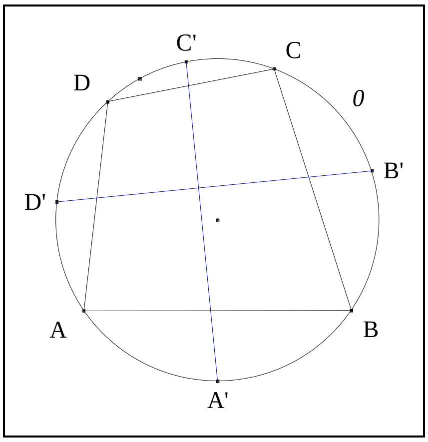
- **Conclusion :** (B'C') est perpendiculaire à (AI).

5. Deux cordes perpendiculaires[8]

VISION

Figure :

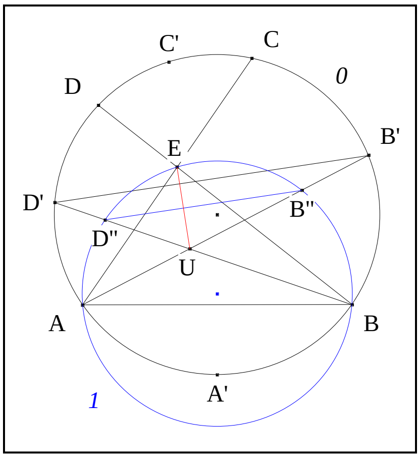
[8] Steiner J., *Journal* de Crelle 2 (1827) 96.



Traits : *0* un cercle,
ABCD un quadrilatère convexe inscrit dans *0*
et A', B', C', D' les milieux des arcs comme indiqués sur la figure.

Donné : (A'C') est perpendiculaire à (B'D').

VISUALISATION

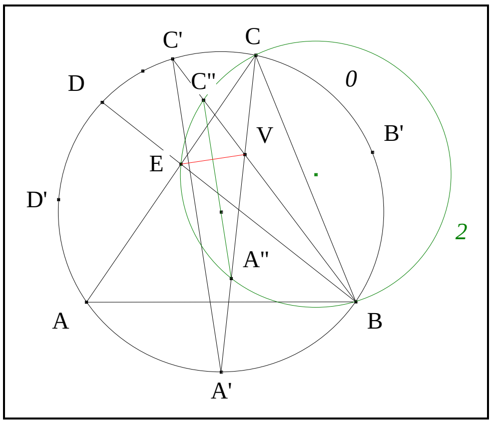


- Notons E le point d'intersection de (AC) et (BD),
  U le point d'intersection de (AB') et (BD'),
  1 le cercle passant par A, B, E,
  et B", D" les seconds points d'intersection resp. de (AB'), (BD') avec *1*.

- **Scolie :** U est le centre du triangle EAB.

- D'après II. 1. Une droite perpendiculaire à (AI), (EU) ⊥ (B"D").

- Les cercles *1* et *0*, les points de base A et B, les moniennes (B"AB') et (D"BD'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (B"D") // (B'D') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (EU) ⊥ (B'D').



- Notons V le point d'intersection de (BC') et (CA'),
  2 le cercle passant par B, C, E
  et C", A" les seconds points d'intersection resp. de (BC'), (CA') avec *2*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (EV) ⊥ (A'C').

- Les bissectrices de deux angles adjacents et supplémentaires étant perpendiculaires, (EU) ⊥ (EV).

- **Conclusion :** (A'C') est perpendiculaire à (B'D').

Scolie : (EU) et (EV) sont resp. parallèles à (A'C') et (B'D').

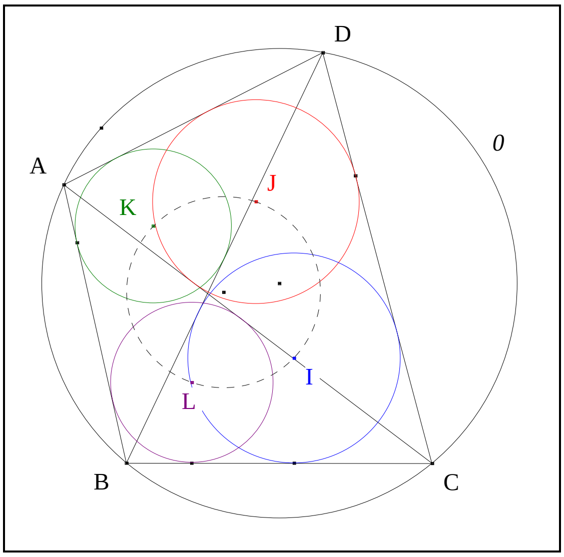
Note historique : ce résultat de Jacob Steiner a été résolu par Remy[9] dans le *Journal* de Crelle et aussi par Franz Heinen[10] dans la même revue. Il a été redécouvert par Nathan Altshiller-Court[11] en 1918, et proposé à la 7-ième O.M. du Canada en 1975.

6. Le cercle des centres ou le cercle de Louis P. Puissant[12]

VISION

Figure :

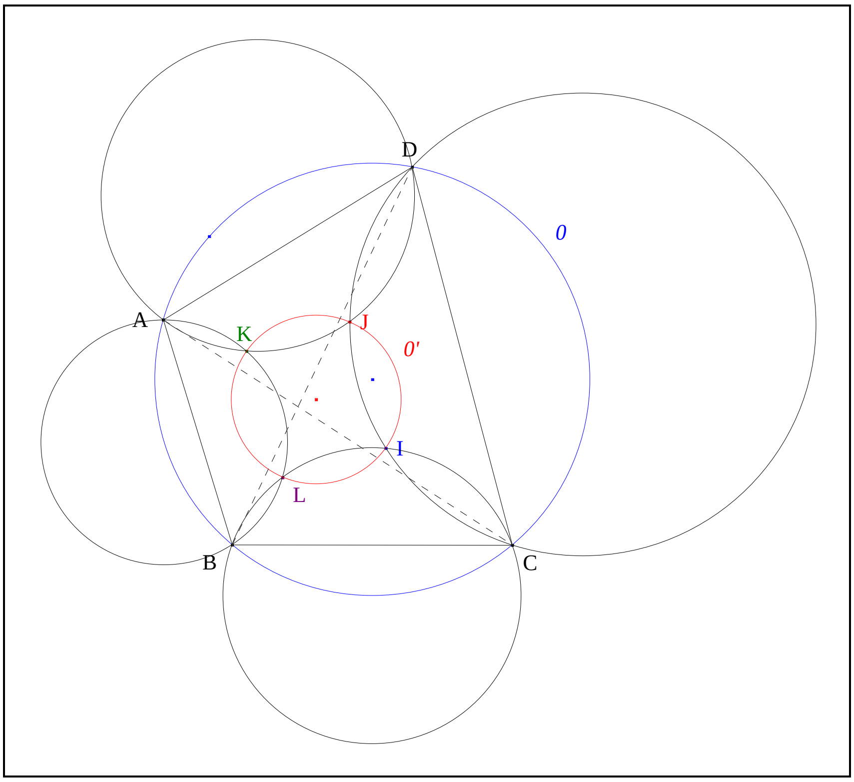
[9] Remy, *Journal* de Crelle 3, p.84.
[10] Heinen F., *Journal* de Crelle 3, p. 288.
[11] Altshiller-Court N., On the I-centers of a triangle, *American Mathematicam Monthly* **25** (1918) 241-246.
[12] Puissant L. P., *Correspondance sur l'École Polytechnique*, Tome 1, (1806) 193.



Traits : 0 un cercle,
ABCD un quadrilatère convexe inscrit dans 0,
et I, J, K, L les centres des cercles inscrits des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

Donné : I, J, K et L sont cocycliques.

VISUALISATION



- **Scolies :** d'après II. 1. Un résultat de Mention, scolie 2

(1) B, C, I, L sont cocycliques
(2) C, D, J, I sont cocycliques
(3) D, A, K, J sont cocycliques
(4) A, B, L, K sont cocycliques.

- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème des six cercles"[13], I, J, K et L sont cocycliques.
- Notons *0'* ce cercle.

Scolies : **(1)** d'après Frank Morley, *0'* est "le cercle des centres de ABCD".

(2) Le centre d'un cercle étant unique, le centre de *0'* est "le centre de ABCD".

Note historique : le résultat de Louis Puissant sera repris en 1828 sous la forme d'une question proposée par Jacob Steiner[14] dans les *Annales de Mathématiques* de Gergonne ; la première solution sera donnée par J. Mention[15] en 1862 dans la même revue.

Note biographique : Louis P. Puissant est né en France, le 22 septembre 1769.
Professeur à l'École militaire de Fontainebleau entre 1798 et 1802, il publie un traité de *Géométrie analytique* inspiré par les séminaires de l'École polytechnique dirigés Monge, comme l'ont fait durant cette période, Sylvestre Lacroix, Jean-Baptiste Biot et François Français.
En 1806, il découvre un cercle qui aujourd'hui porte son nom et que Jean Hachette mentionne dans la *Correspondance sur l'École polytechnique* 1.
Nommé Directeur de l'École de Géographie de Paris en 1809, il devient par la suite membre de l'Académie des sciences, publie dans les *Annales de Gergonne* et écrit en 1820, un *Traité de Géodésie*.
Ce chef de bataillon au corps des ingénieurs géographes, attaché au dépôt de la guerre, est connu pour avoir inventé un nouveau mode de projection pour la réalisation de la carte de France et participé à sa production.
L'article *Aperçu historique* publié dans les *Nouvelles Annales* de 1842, mentionne au passage que Louis Puissant à la suite de Robert Simson, a résolu le "problème du billard circulaire" connu aussi sous le nom de "problème d'Alhazen" :

"on donne un cercle et deux points A et B ; trouver le point brillant du cercle, dans le cas d'un point lumineux A, l'observateur étant placé en B"

en langage moderne :

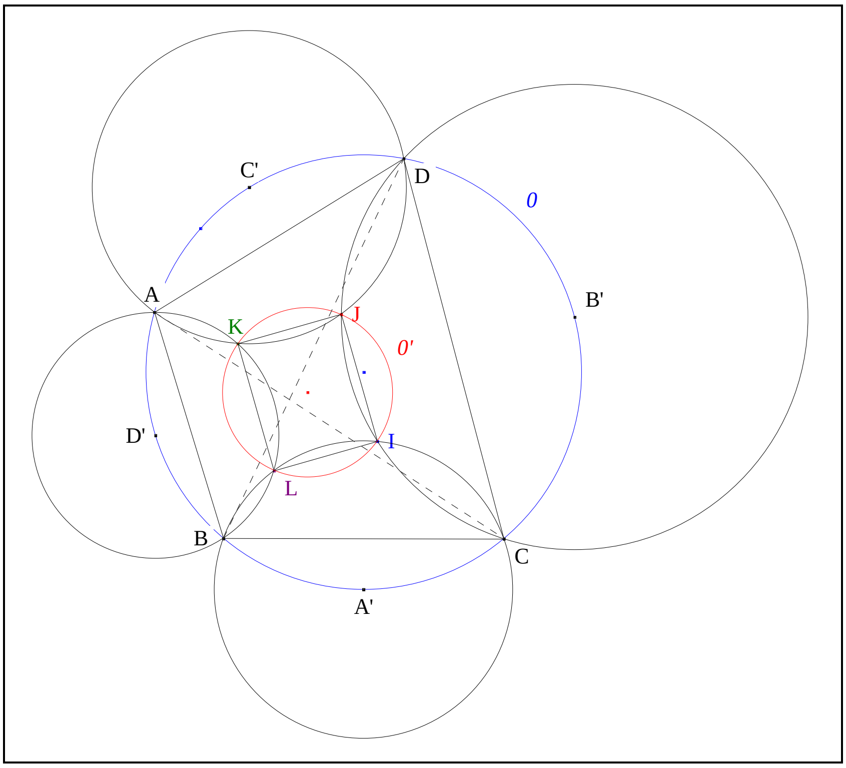
"déterminer un point C d'un cercle , tel que la somme AC + CB soit extrémale".

Il quitte l'École de Géographie en 1833 et décède le 10 janvier 1843.

III. LA VISUALISATION NÉCESSAIRE

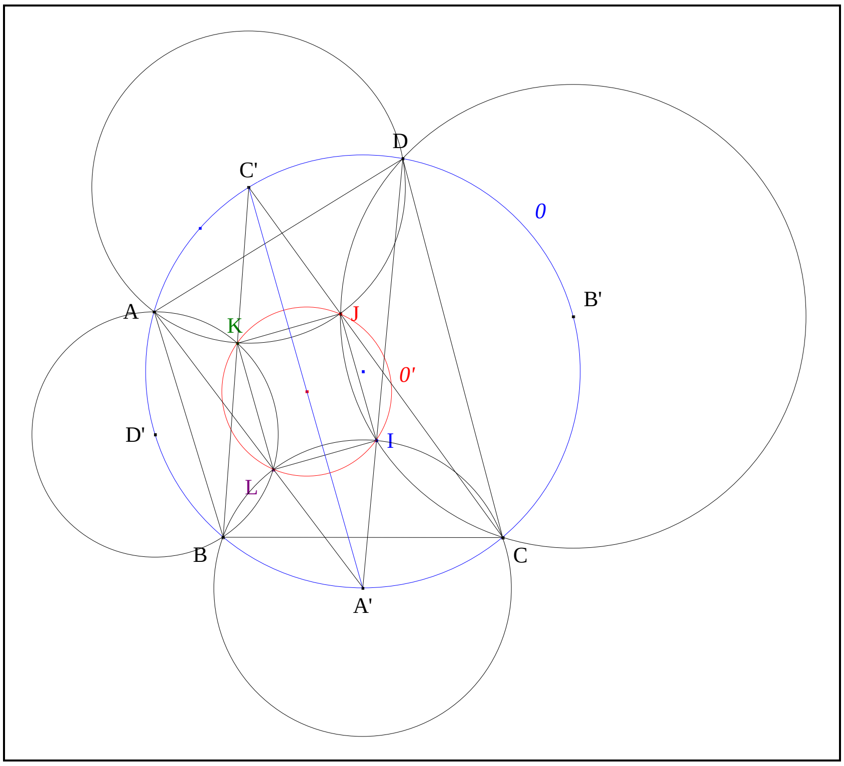
---

13 Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles, G.G.G. vol. 2.
14 Steiner J., *Annales de Mathématiques* de Gergonne, 18 (1828) 302.
15 Mention J., *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 21 (1862) 16f.



- D'après II. 6. Le cercle de Puissant, I, J, K et L sont cocycliques.

- Notons A', B', C', D' les milieux des arcs comme indiqués sur la figure.



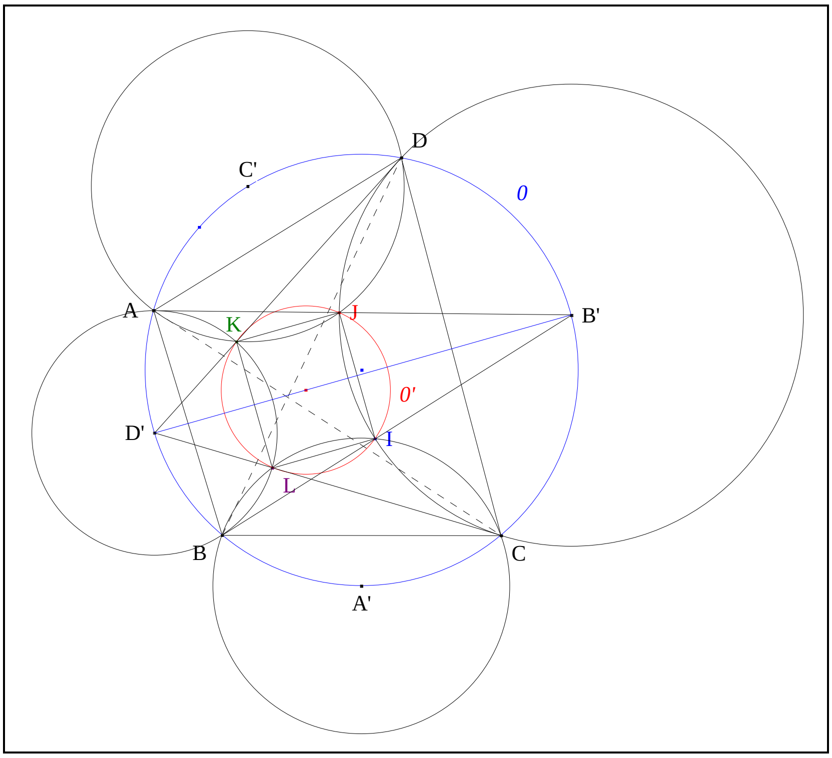
- **Scolies :** **(1)** A, L, A' sont alignés
  (2) B, K, C' sont alignés
  (3) C, J, C' sont alignés
  (4) D, I, A' sont alignés.

- Notons *2* les cercles passant par C, I, D ; il passe par J ;
  et *4* les cercles passant par A, K, B ; il passe par L.

- Les cercles *4* et *0'*, les points de base A et B, les moniennes (LAA') et (KBC'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (LK) // (A'C').

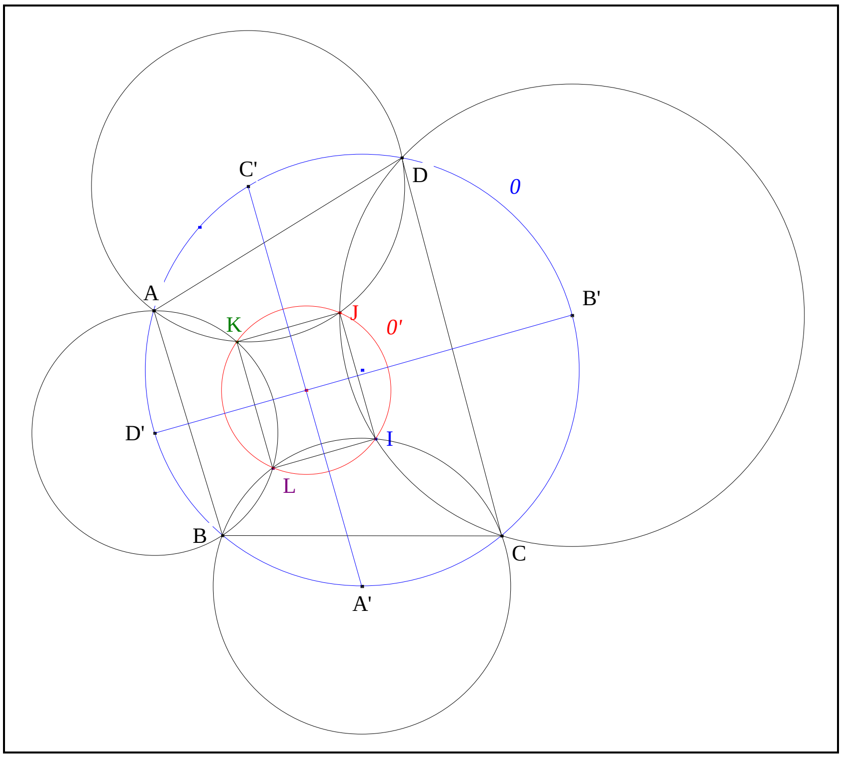
- Les cercles *0'* et *2*, les points de base D et C les moniennes (A'DI) et (C'CJ), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (A'C') // (IJ).

- **Conclusion partielle :** par transitivité de la relation //, (LK) // (IJ).



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (IL) // (JK).

- **Conclusion partielle :** le quadrilatère IJKL ayant ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme.



- D'après II. 5. Deux cordes perpendiculaires, (A'C') ⊥ (B'D') ;
  nous avons : (A'C') // (IJ) et (B'D') // (IL) ;
  la relation ⊥ étant compatible avec la relation //, (IJ) ⊥ (IL).

- **Conclusion :** le parallélogramme IJKL est un rectangle.

Énoncé traditionnel : les centres des cercles inscrits des quatre triangles dont les sommets sont pris parmi quatre points cocycliques, déterminent un rectangle.

Scolie : IJKL est "le rectangle de Maruyama de ABCD".

Note historique : en 1874, Joseph Neuberg[16] reprend cette situation comme question posée dans la *Nouvelle correspondance mathématique* et précise que celle-ci, sans preuve, est extraite de *Archiv der Mathematik und Physik*[17].
Une première réponse apparaît en 1875 dans la *Nouvelle correspondance mathématique*[18], puis en 1906 dans *Mathesis*[19]. Ce résultat se retrouve dans le livre d'Eugène Catalan[20] en 1879. Ce résultat est redécouvert en 1914 par Frank V. Morley dont le père, le professeur Frank Morley, en donnera plusieurs démonstrations. Suite au développement de l'*American Mathematical Monthly* à partir de 1916, celui-ci publie ce résultat comme problème en mars 1917. Les extensions et la solution de F. V. Morley sont publiées la même année dans le *Monthly*[21] et ainsi que dans son livre[22].
Nathan Altshiller-Court apporte à son tour sa contribution en 1918 dans le *Monthly*[23] et dans son livre[24] en 1954.

---

16 Neuberg J., question 34, *Nouvelle correspondance mathématique* **1** (1874) 96, 198.
17 *Archiv der Mathematik und Physik*, (1842) 328.
18 *Nouvelle correspondance mathématique* **1** (1875) 198-200.
19 Neuberg J., *Mathesis* (1906) 14-17.
20 Catalan E., *Théorèmes et Problemes de Géométrie Élémentaire*, sixième édition, Dunod, Paris (1879) 50.
21 Morley F. V., *American Mathematical Monthly* 24 (1917) 429-430.
22 Morley F. and Morley F.V., *Inversive Geometry*, Chelsea, New York (1954) 194.
23 Altshiller-Court N., *American Mathematical Monthly* **25** (1918) 241-246 ; **26** (1919) 65-66.
24 Altshiller-Court N., *College Geometry*, Second Edition, Barnes & Noble, New York (1952) 133.

En 1960, Roger Arthur Johnson[25] en donne une preuve analytique en utilisant les complexes.
En 1965, D. P. Ambrose redécouvre ce résultat et le propose au *Monthly*[26].
Rappelons que cette question a été posée en France comme exercice à l'oral du CAPES entre 1973 et 1977.
En 1979, l'anglais Stanley Collings[27] de l'Open University, Milton Keynes (Grande Bretagne) propose ce problème dans la revue canadienne *Crux Mathematicorum*. Une réponse est donnée en 1980 par Ngo Tan[28], âgé de 15 ans et élève au J. F. Kennedy High School, situé dans le Bronx, à New York.
En 1996, une preuve angulaire est présentée dans la revue de Hong-Kong *Mathematical Excalibur*[29] qui rappelle au passage que cette question avait été posée au concours de l'APMO de la même année. Une preuve de même nature se trouve dans les livres d'Igor Federovitch Sharygin[30] et de Viktor Vasil'evich Prasolov[31] datant de 1986 et dans la revue bulgare *Matematika and Informatica*[32] de 1987.

Remerciements : la plupart de ces informations m'ont été communiquées par le professeur Francisco Bellot Rosado, véritable mémoire de la Géométrie du Triangle et rédacteur en chef de la revue espagnole *Revistaoim*, que je tiens à remercier tout particulièrement.

IV. LA VISUALISATION SUFFISANTE

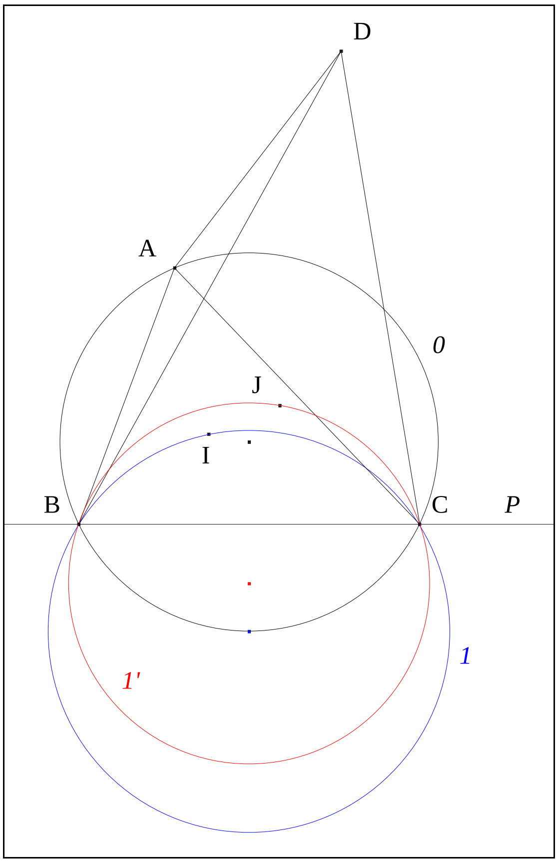
OU

UNE REDÉCOUVERTE DE L'AUTEUR

1. Deux cercles de Mention

Figure :

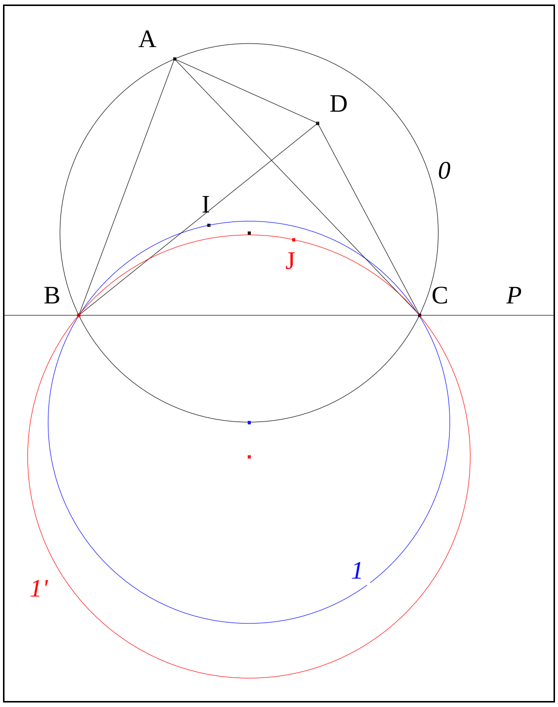
[25] Johnson R. A., *Modern Geometry,* Houghton Mifflin Co., 1929
(reprinted as *Advanced Euclidean Geometry,* Dover, New York, 1960), p. 255.
[26] Ambrose D. P., Problem E 1739, *American Mathematical Monthly*,72 (November 1965) 1025-1026.
[27] Collings S., problem 483, *Crux Mathematicorum* (1979) 265.
[28] Ngo Tan, problem 483, *Crux Mathematicorum* (1980) 226-230.
[29] *Mathematical Excalibur*, vol. 2, n° 2, (mars-avril 1996) problème 27 p. 3 ; http://www.math.ust.hk/excalibur/.
8-ième Asian Pacific Mathematical Olympiad (19 mars 1996) problem 3.
[30] Sharygin I. F., *Problemas de geometria*, Editions Mir, Moscou (1986) problema II.232 p.117.
[31] Prasolov V., *Plane Geometry*, Nauka, Moscou (1986) problème 6.13.
[32] *Matematika and Informatica* (1987).



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	D	un point situé à l'extérieur de *0* tel que le quadrilatère ABCD soit convexe,
	I, J	les centres resp. des triangles ABC, DBC,
	1, *1'*	les A, D-cercles de Mention resp. de ABC, ADC
et	*P*	le demi plan de frontière (BC) contenant A.

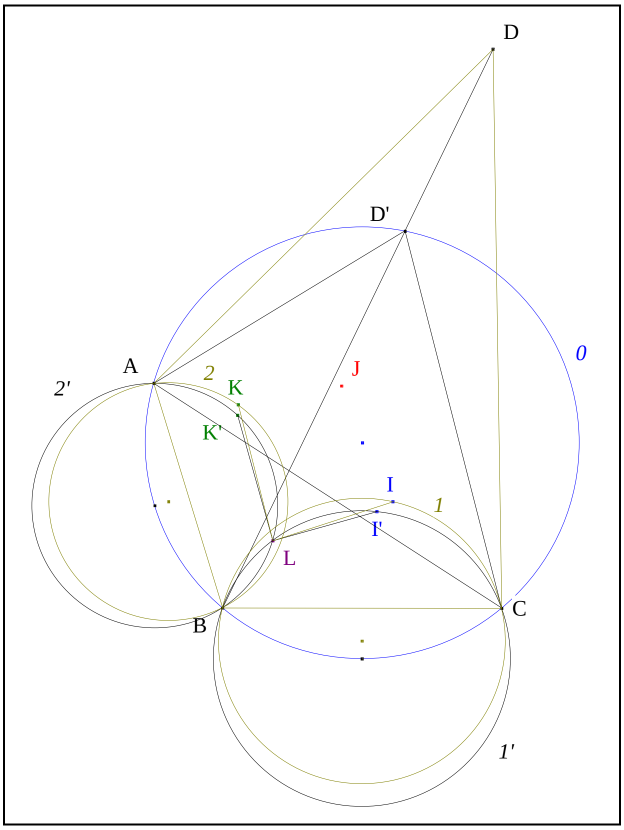
Donné : dans *P*, *1'* est au-dessus de *1*.

Scolie : D est un point situé à l'intérieur de *0* tel que le quadrilatère ABCD soit convexe



- **Conclusion :** dans *P*, *1'* est au-dessous de *1*.

2. La visualisation suffisante



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  et I, J, K, L les centres resp. des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

- Raisonnons par l'absurde
  en affirmant que le quadrilatère IJKL est un rectangle et que ABCD convexe n'est pas cyclique.

Premier cas : D est à l'extérieur de *0*.

- Notons D' le second point d'intersection de (BD) avec *0*,
  I', K' les centres resp. des triangles BCD', D'AB,
  1', *4'* les A, C-cercles de Mention de ABC ; ils passent resp. par L et I', par L et K' ;
  et *1*, *4* les D'-cercles de Mention resp. de D'BC, D'AB.

- **Scolies :** **(1)** B, I et I' sont alignés
  (2) B, K et K' sont alignés.

- D'après la visualisation nécessaire, ABCD' étant convexe et cyclique, <I'LK' est droit ;
  par hypothèse, <IKL est droit ;
  en conséquences, **(1)** L, I et I' sont alignés
  (2) L, K et K' sont alignés.

- D'après l'axiome d'incidence Ia, B, L, I, I', K et K' sont alignés, ce qui est absurde.

- **Conclusion partielle :** ABCD est cyclique.

Second cas : D est à l'intérieur de *0*.

- **Conclusion partielle :** mutatis mutandis, nous montrerions que ABCD est cyclique.

- **Conclusion :** ABCD est cyclique.

Note historique : ce résultat[33] a été proposé en 2008 par "Plane Geometry" (Chine) sur le site *Mathlinks*. Une première solution métrique est donnée par le vietnamien Trung plus connu sous le pseudonyme de "Mr Danh" qui se base sur un résultat de Suweijie (Chine) résolu métriquement et sans simplicité par Vladimir Zajic du Brookhaven National Laboratory (États-unis) et plus connu sous le pseudonyme de "Yetti"[34].
Après avoir contacté le Professeur Francisco Bellot Rosado, celui-ci m'a signalé qu'en 1979, Stanley Collings a été le premier à proposer cette réciproque dans *Crux Mathematicorum*[35] et qu'une preuve identique à celle que je viens de présenter, a été trouvée en 1980 par un élève de 15 ans, Ngo Tan[36] que nous avons déjà cité.

Remerciements : je tiens à remercier tout particulièrement le professeur Francisco Bellot Rosado, pour son aide précieuse dans la bibliographie de cet article.

33 Plane Geometry, Incenters make a rectangle (27/08/2008) ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=222958
34 Suweijie, A very difficult one (29/04/2005) ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=39268.
35 Collings S., problem 483, *Crux Mathematicorum* (1979) 265.
36 Ngo Tan, problem 483, *Crux Mathematicorum* (1980) 226-230.