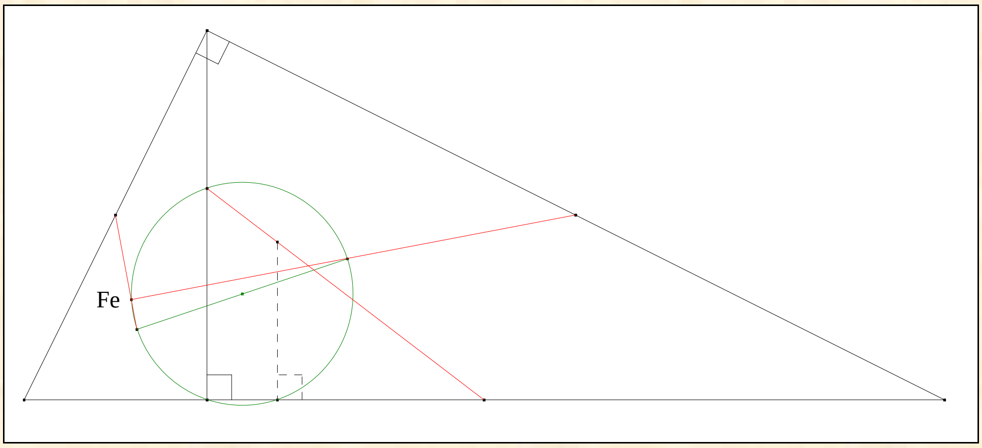
LE THÉORÈME DE FEUERBACH – AYME [1]

†

Jean-Louis AYME [2]



Résumé. Un résultat de l'auteur concernant un cercle passant par le point de Feuerbach d'un triangle rectangle est présenté ainsi qu'une preuve synthétique. Ce résultat remarquable qui aurait pu être observé par des géomètres du XIX et XX-ième siècle, s'est vu attribué le titre de cet article par le site *Les-Mathématiques.net*. Comme conséquence, des alignements ont pu être établi par l'auteur et une généralisation en a été donnée sur le site *Mathlinks*.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. A result of the author on a circle passing through the Feuerbach's point of a right triangle is presented as well as a synthetic proof. This remarkable result which could be observed by geometers of the 19th and 20th century, has been awarded the title of this article by the site *Les-Mathématiques.net*. As a consequence, alignments could be presented by the author and a generalization was given to the site of *Mathlinks*.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

---

1 Les-Mathématiques.net, Histoire, QDM n° **2** ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?17,538526.

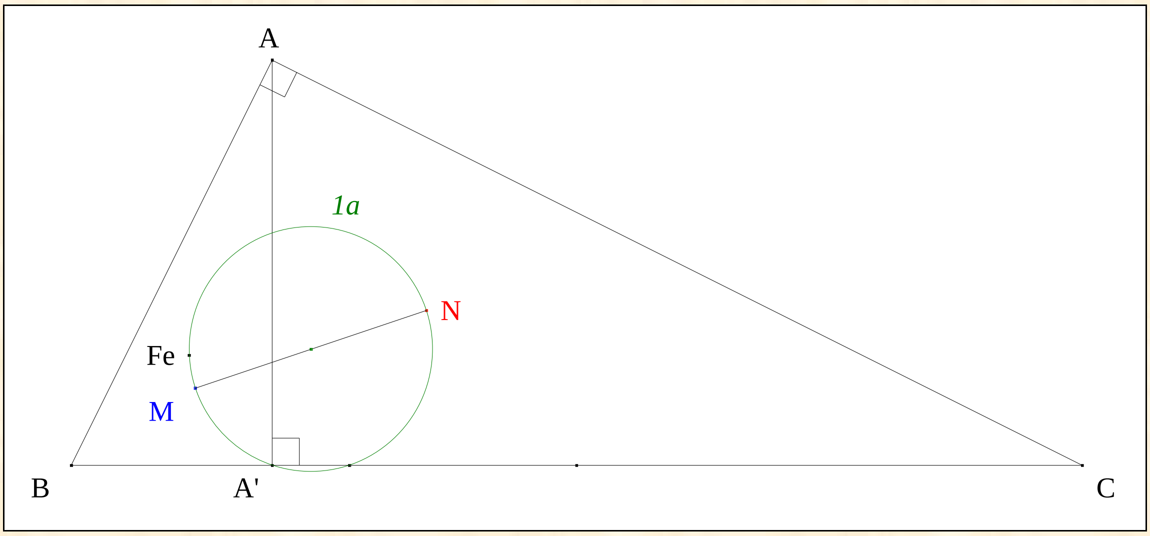
2 St.-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France)

Sommaire

A. LA VISION DE L'AUTEUR

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle A-rectangle,
Fe le point de Feuerbach de ABC,
A' le pied de la A-hauteur de ABC,
M, N les centres resp. des triangles AA'B, AA'C
et *1a* le cercle de diamètre [MN].

Donné : *1a* passe par Fe. [3]

[3] Ayme J.-L., A circle through the Feuerbach's point, *Mathlinks* du 09/09/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=300127

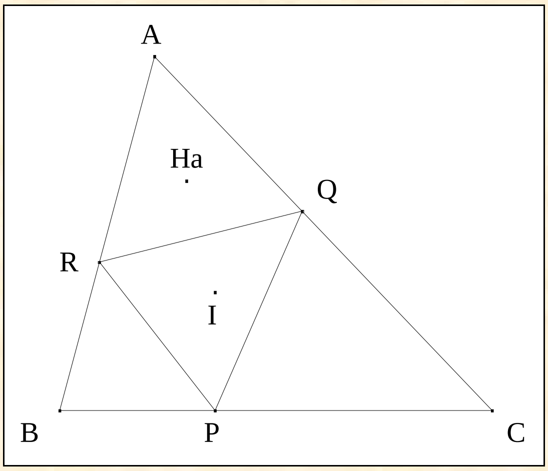
B. L'APPROCHE

I. LE PARALLÉLOGRAMME DE FEUERBACH [4]

1. Orthocentre d'un triangle I-annexe

VISION

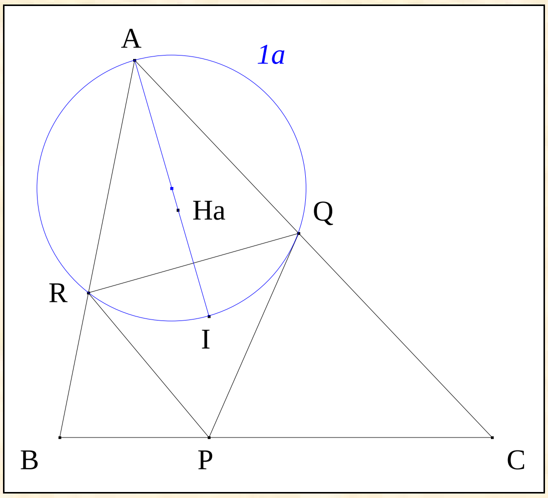
Figure :



Traits :		ABC	un triangle,
		I	le centre de ABC,
		PQR	le triangle de contact de ABC
	et	Ha	le symétrique de I par rapport à (QR).

Donné : Ha est l'orthocentre du triangle AQR. [5]

VISUALISATION



---

[4] Feuerbach K.

[5] Emelyanov L. A., Emelyanova T. L., Three mysterious points of triangle

- Notons *1a* le cercle de diamètre [AI] ; il passe par Q et R.
- Nous savons que **(1)** ARQ est A-isocèle
  (2) (AI) ⊥ (QR)
  en conséquence, A, Ha et I sont alignés.
- **Conclusion :** d'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. Annexe 1), Ha est l'orthocentre de AQR.

Scolies : **(1)** AQR est "le triangle I-annexe de ABC relativement à A".

(2) Lorsque ABC est rectangle en A, Ha se confond avec A.

Énoncé traditionnel : les symétriques du centre d'un triangle par rapport aux côtés du triangle de contact, sont les orthocentres des triangles annexes du triangle de contact.

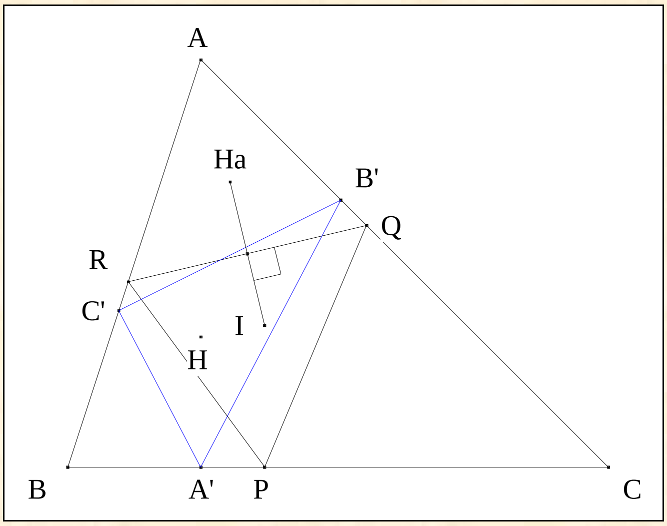
Commentaire : nous pourrions montrer que

Ha est le symétrique de I par rapport à (QR)
si, et seulement si,
Ha est l'orthocentre de ARQ.

2. Centre d'un triangle H-annexe

VISION

Figure :



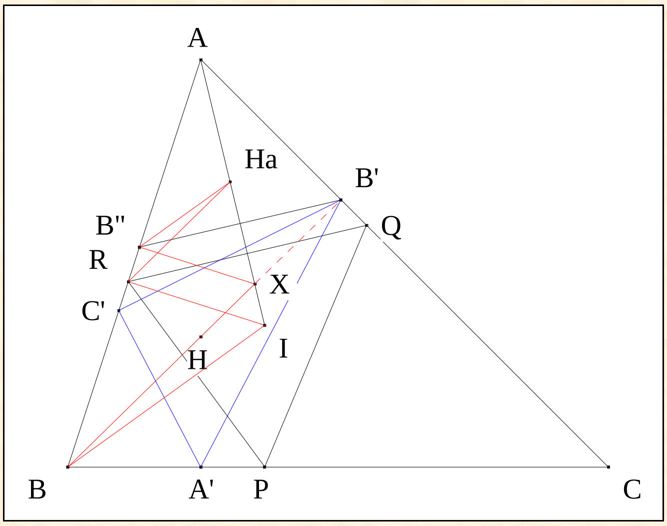
Traits :

	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	PQR	le triangle de contact de ABC,
	Ha	le symétrique de I par rapport à (QR),
	H	l'orthocentre de ABC

et A'B'C' le triangle orthique de ABC.

Donné : Ha est le centre du triangle AB'C'.[6]

VISUALISATION



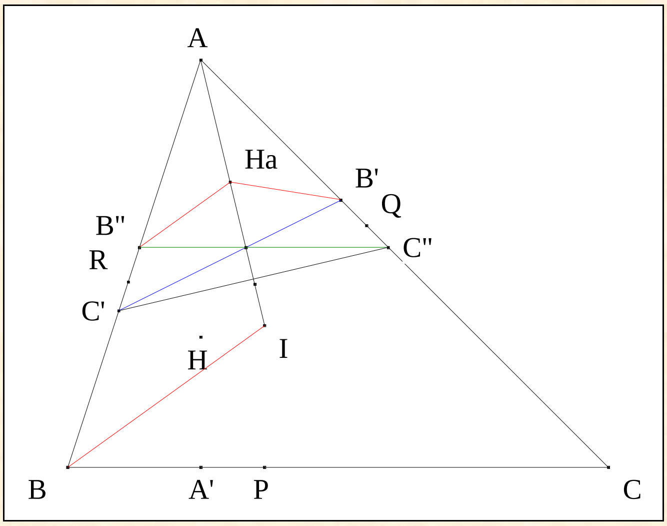
- Considérons la méthode de duplication[7].

- Notons X le point d'intersection de (BB') et (AI),
  et B" le symétrique de B' par rapport à (AI).

- Nous avons : **(1)** B" est sur (AB)
  (2) (XB") ⊥ (AB) ;
  en conséquence, (XB") // (IR).

- D'après II. 1. Orthocentre d'un triangle I-annexe, (BHX) // (RHa).

- D'après Pappus "Le petit théorème" (Cf. Annexe **2**)
  appliqué à l'hexagone BIRHaB"XB, (B"Ha) // (BI).



- Notons C" le symétrique de C' par rapport à (AI).

[6] Emelyanov L. A., Emelyanova T. L., Three mysterious points of triangle
[7] i.e. par symétrie

- D'après "Droites antiparallèles" (Cf. Annexe 3), (B"C") // (BC) ;
  en conséquence, (B"Ha) est la B"-bissectrice intérieure du triangle AB"C" ;
  par symétrie, (B'Ha) est la B'-bissectrice intérieure du triangle AC'B'.

- **Conclusion :** Ha est le centre du triangle AB'C'.

Scolies : **(1)** AB'C' est "le triangle H-annexe de ABC relativement à A".

(2) Ha est le centre de AB'C' et l'orthocentre de AQR.

Énoncé traditionnel : les symétriques du centre d'un triangle par rapport aux côtés du triangle de contact, sont les centres des triangles annexes du triangle orthique

ou encore,

le centre d'un triangle annexe du triangle orthique d'un triangle
relativement à un sommet de ce triangle
est
l'orthocentre du triangle annexe du triangle de contact du triangle
relativement à ce même sommet.

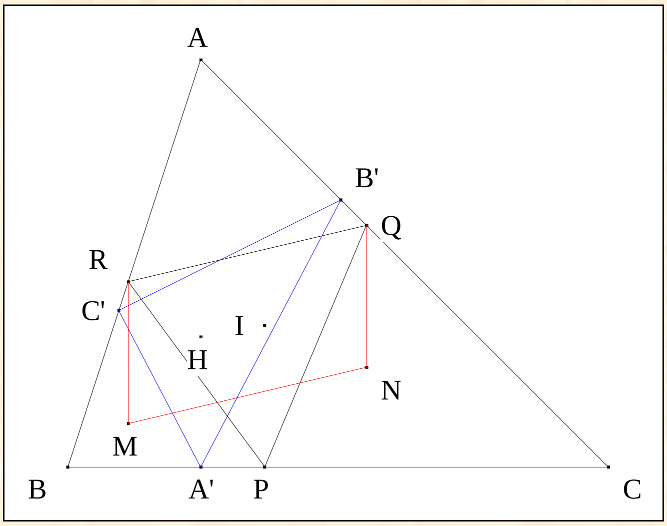
Commentaire : nous pourrions montrer que

Ha est le symétrique de I par rapport à (QR)
si, et seulement si,
Ha est le centre de AC'B'.

3. Le parallélogramme de Feuerbach

VISION

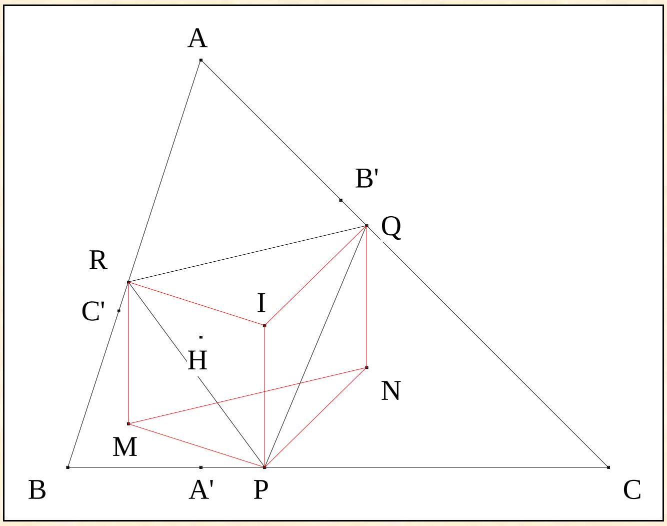
Figure :



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
A'B'C' le triangle orthique de ABC,
I le centre de ABC,
PQR le triangle de contact de ABC
et M, N les centres des triangles BC'A', CA'B'.

Donné : le quadrilatère MNQR est un parallélogramme.

VISUALISATION



- D'après II. 2. Centre d'un triangle H-annexe, **(1)** M est l'orthocentre de BRP
  (2) N est l'orthocentre de CQP.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport au milieu d'un côtés" (Cf. Annexe **1**)
  appliqué à BC'A', CA'B',
  les quadrilatères IPMR et IPNQ sont deux parallélogramme;
  en conséquences, **(1)** (RM) // (IP) et (IP) // (QN) ;
  (2) RM = IP et IP = QN.

- Par transitivité des relations // et =, **(1)** (RM) // (QN) ;
  (2) RM = QN.

- **Conclusion :** le quadrilatère MNQR ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme.

4. Une courte biographie de Karl Feuerbach


[8]

Karl Feuerbach, le frère du fameux philosophe Ludwig Feuerbach, est né à Iéna en Allemagne, le 30 mai 1800 dans une famille protestante.

Fils du professeur de droit Paul J. A. Ritter von Feuerbach et d'Éva Troster, le brillant étudiant de l'Université d'Erlangen, puis de Freiburg, obtient à l'âge de 22 ans son doctorat et commence à enseigner les mathématiques au gymnasium d'Erlangen tout en continuant à fréquenter un cercle d'étudiants de cette ville, connu pour leur débauche et leurs dettes.

En 1824, Feuerbach est arrêté et emprisonné avec 19 étudiants pour une année, à Munich, à cause de ses positions politiques. Se sentant responsable de tout, il devient dépressif et tente par deux fois, pour sauver ses compagnons, de se suicider en se coupant les veines, puis en sautant d'une fenêtre. Après sa libération, il retourne vivre dans sa famille et profite d'une intervention du roi pour retrouver un poste d'enseignant à Hof qu'il quittera suite à une nouvelle dépression. En 1828, connaissant une amélioration de santé, il enseigne de nouveau à Erlangen jusqu'au jour où dégainant une épée dans sa classe, il menace de trancher la tête des élèves qui ne savent pas résoudre l'équation qu'il a écrite au tableau. Abandonnant l'enseignement, il vivra en reclus les six dernières années de sa courte vie en se laissant pousser les cheveux, la barbe et les ongles tout en contemplant les peintures de son neveu, le peintre Anselme Feuerbach.

Ce professeur impulsif et perturbé décède à Erlangen, le 12 mars 1834.

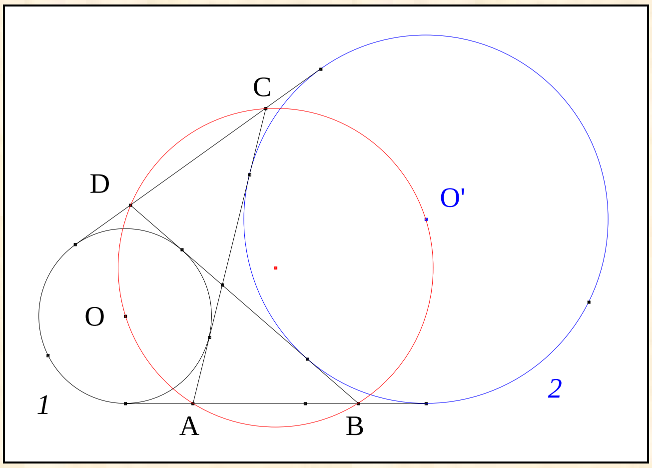
[8] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Feuerbach.html.

II. DES POINTS COCYCLIQUES

1. Six points cocycliques

VISION

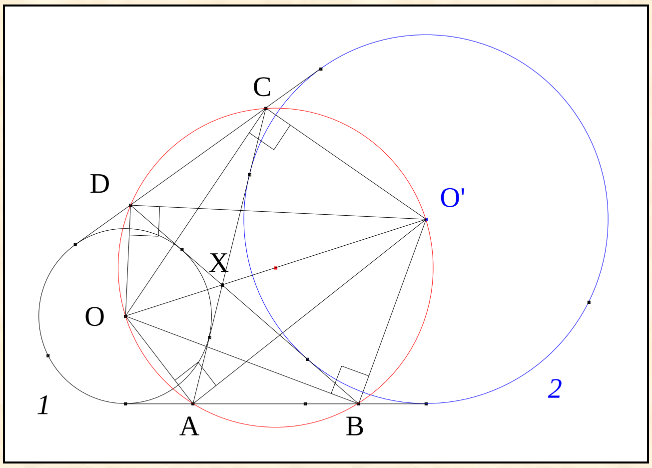
Figure :



Traits : *1*, *2* deux cercles extérieurs l'un de l'autre,
O, O' les centres resp. de *1*, *2*
et A, B, C, D les quatre points d'intersection des tangentes intérieures et extérieures comme indiqués sur la figure.

Donné : A, B, C, D, O et O' sont cocycliques.[9]

VISUALISATION



- Notons X le point d'intersection des deux tangentes intérieures.
- **Scolie :** par symétrie, O, X et O' sont alignés.

---

[9] Dupain J. Ch., Note sur les tangentes communes à deux cercles, *Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, Sér. 2, **8** (1869) 458-459 ;
http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

- (AO) et (AO') étant resp. les A-bissectrices extérieure et intérieure du triangle XAB, (AO) ⊥ (AO').

- Mutatis mutandis, nous montrerions que, (BO) ⊥ (BO')
(CO) ⊥ (CO')
(DO) ⊥ (DO').

- D'après Thalès "Triangle rectangle inscriptible dans un demi cercle",
A, B, C, D sont sur le cercle de diamètre [OO'].

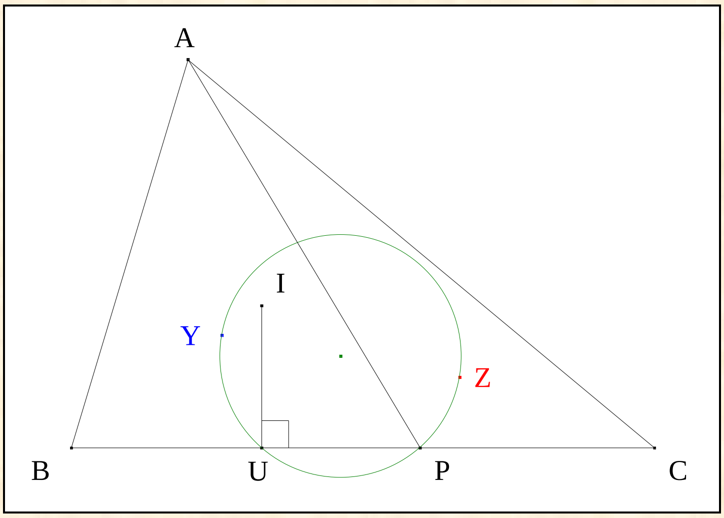
- **Conclusion :** A, B, C, D, O et O' sont cocycliques.

Note historique : ce résultat a été redécouvert en 1887 par C. Reinhardt [10].

2. Quatre points cocycliques

VISION

Figure :

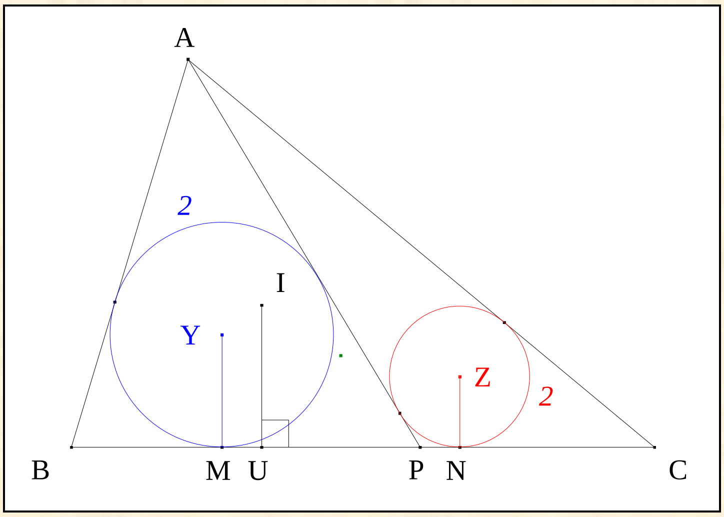


Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
P un point de [BC],
Y, Z les centres resp. des triangles APB, APC
et U le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur (BC).

Donné : U, Y, Z et P sont cocycliques. [11]

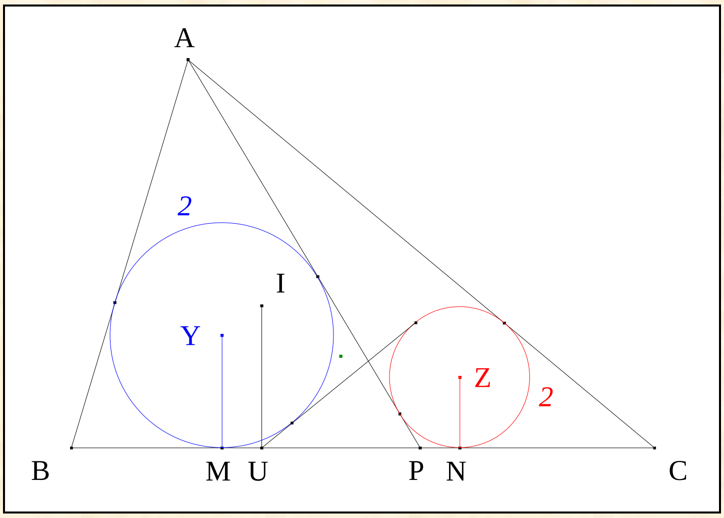
VISUALISATION

[10] Reinhardt C., *Zeitschrift für Mathematik und Physik* fondée en 1856 par O. Schlömilch **32** (1887) 183
[11] *American Mathematical Monthly*

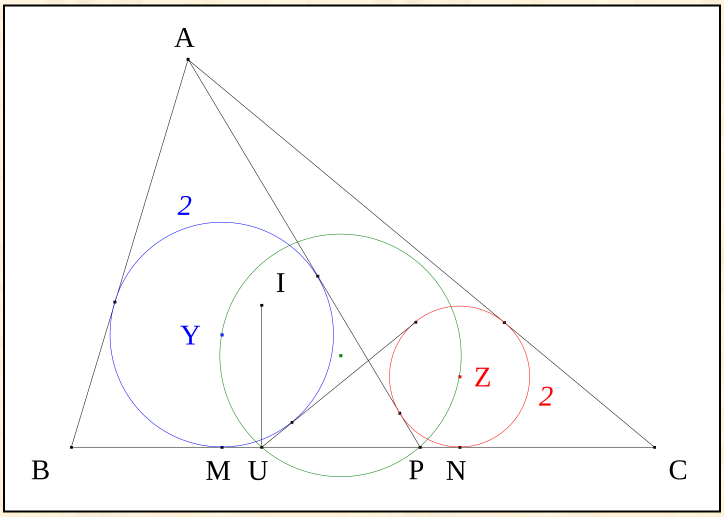


- Notons *2*, *3* les cercles inscrits resp. des triangles APB, APC
  et M, N les points de contact resp. de *2* et *3* avec (BC).

- Un chasse segmentaire : 2.MU = 2.BU - 2.BM ;
  d'après "Le théorème (p – a)" (Cf. Annexe **4**) 2.MU = [AB + BC + CA] - [AB + BP – PA] ;
  en conséquence, 2.MU = AP+ PC – CA
  i.e. 2.MU = 2.PN.



- **Conclusion partielle :** d'après Euclide "Deux tangentes égales" (Cf. Annexe **5**),
  la tangente commune intérieure de *2* et *3*, distincte de (AP), passe par U.



- **Conclusion :** d'après B. II. 1. Six points cocycliques, U, Y, Z et P sont cocycliques.

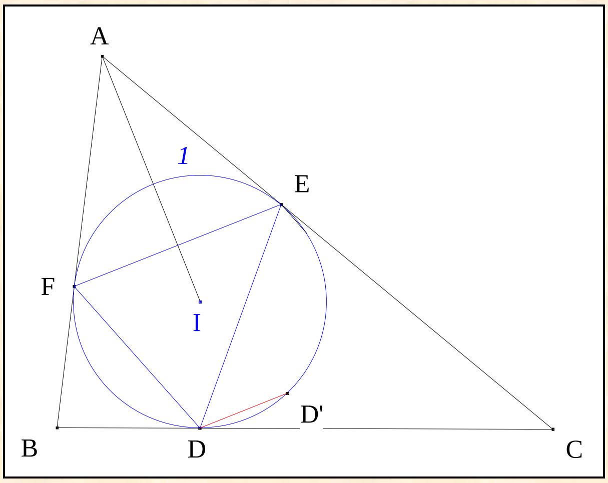
Note historique : la référence a été donnée d'une façon incomplète par le regretté Juan Carlos Salazar.

III. VERS LE POINT DE FEUERBACH

1. Deux parallèles

VISION

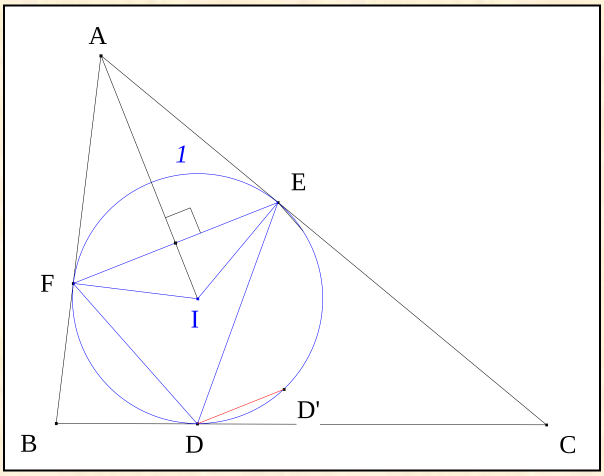
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit dans ABC,
	I	le centre de *1*,
	DEF	le triangle de contact de ABC
et	D'	le symétrique de D par rapport à (AI).

Donné : (DD') est parallèle à (EF).

VISUALISATION



- Par symétrie d'axe (AI), D' est sur *1*.

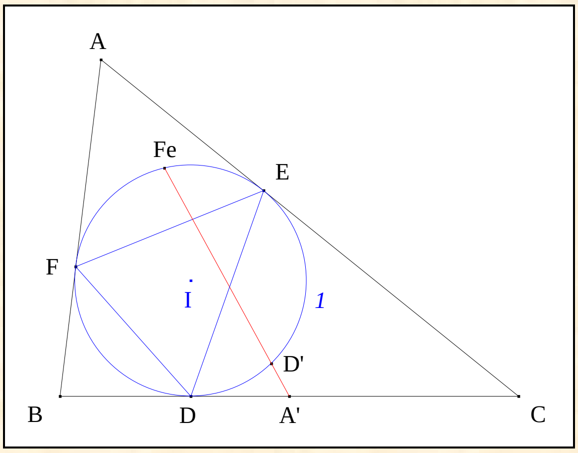
- Par hypothèse, (DD') ⊥ (AI) ;
  d'après le théorème de la médiatrice, (AI) ⊥ (EF).

- **Conclusion :** d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (DD') // (EF).

2. Deux alignés avec le point de Feuerbach

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	A'	le milieu de [BC],
	1	le cercle inscrit de ABC,
	I	le centre de *1*,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	D'	le symétrique de P par rapport à (AI),
et	Fe	le point de Feuerbach de ABC.

Donné : Fe, D' et A' sont alignés. [12]

Commentaire : une preuve plus complète i.e. mettant en œuvre un quatrième point, a été donnée par l'auteur [13].

[12] Fontené G., Sur le théorème de Feuerbach, *Nouvelles Annales*, Séries **4**, vol. **8**, 1907
[13] Ayme J.-L., Les deux points de schroeter, G.G.G. vol. 2 p. 20 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme/

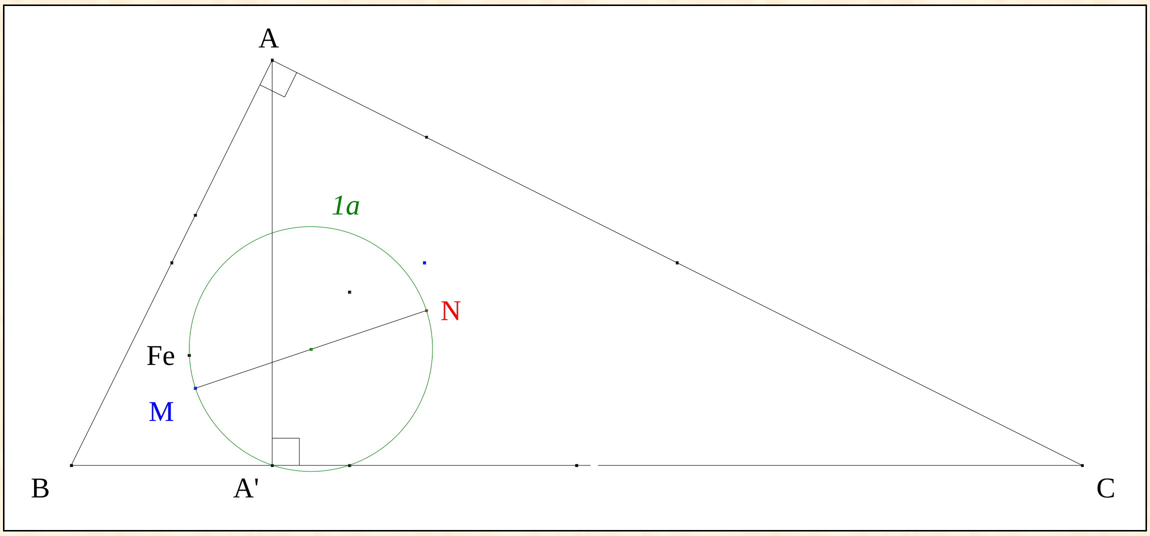
C. LA VISUALISATION

DE

L'AUTEUR

VISION

Figure :

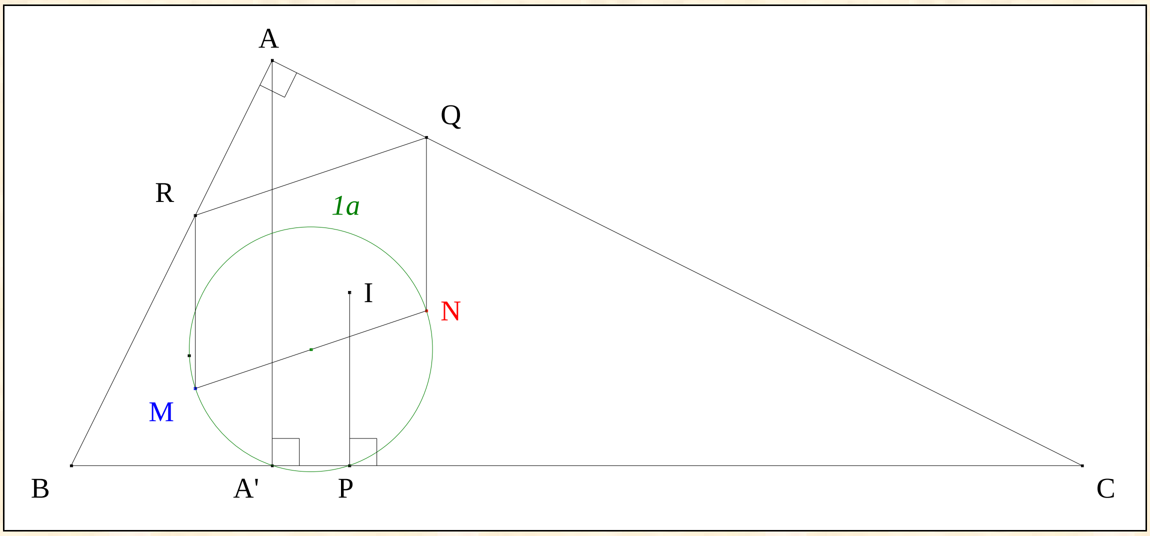


Traits : ABC un triangle A-rectangle,
Fe le point de Feuerbach de ABC,
A' le pied de la A-hauteur de ABC,
M, N les centres resp. des triangles AA'B, AA'C
et *1a* le cercle de diamètre [MN].

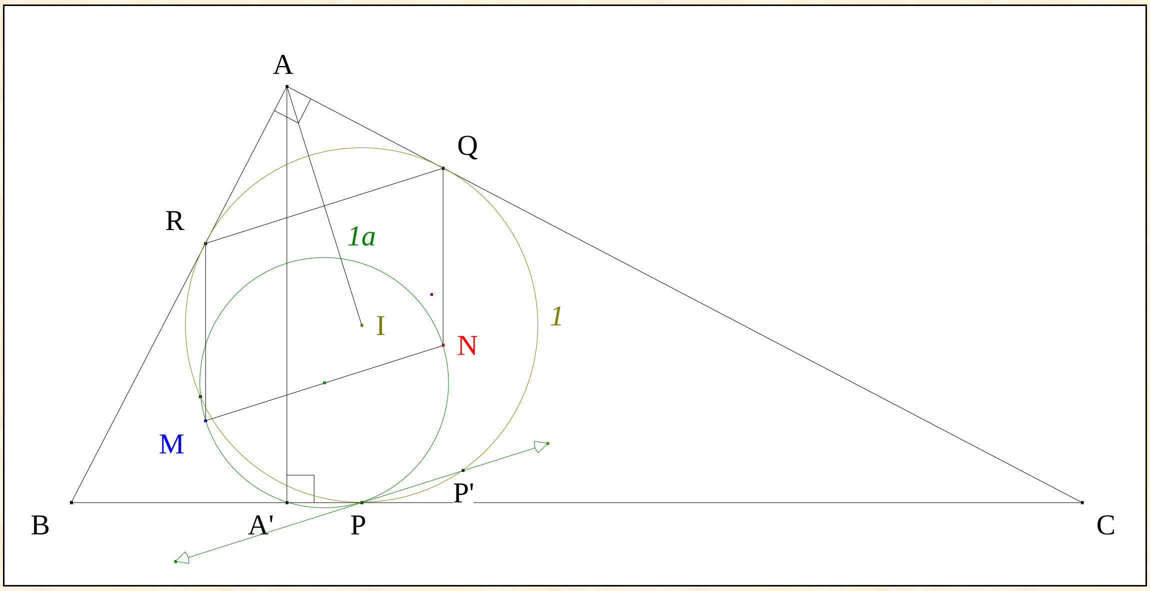
Donné : *1a* passe par Fe. [14]

VISUALISATION

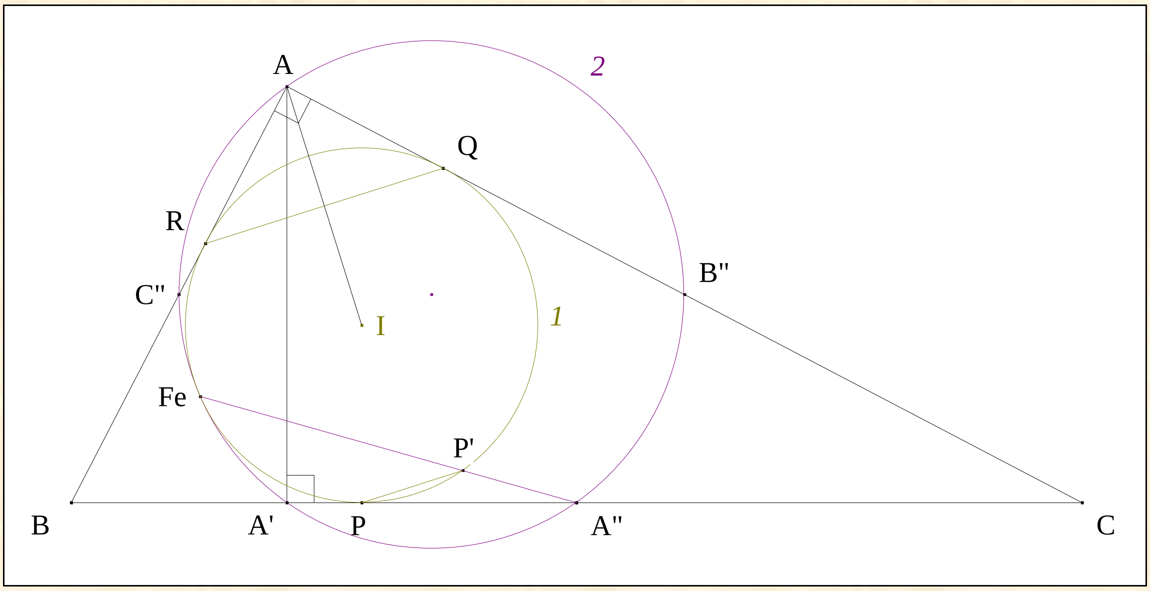
[14] Ayme J.-L., A circle through the Feuerbach's point, *Mathlinks* du 09/09/2009 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=300127 ;
Les-Mathématiques.net, Histoire, QDM n° **2** ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?17,538526



- Notons PQR le triangle de contact de ABC.
- D'après **B. I. 3.** Le parallélogramme de Feuerbach, (MN) // (QR).
- D'après **B. II. 2.** Quatre points cocycliques, *1a* passe par A' et P.



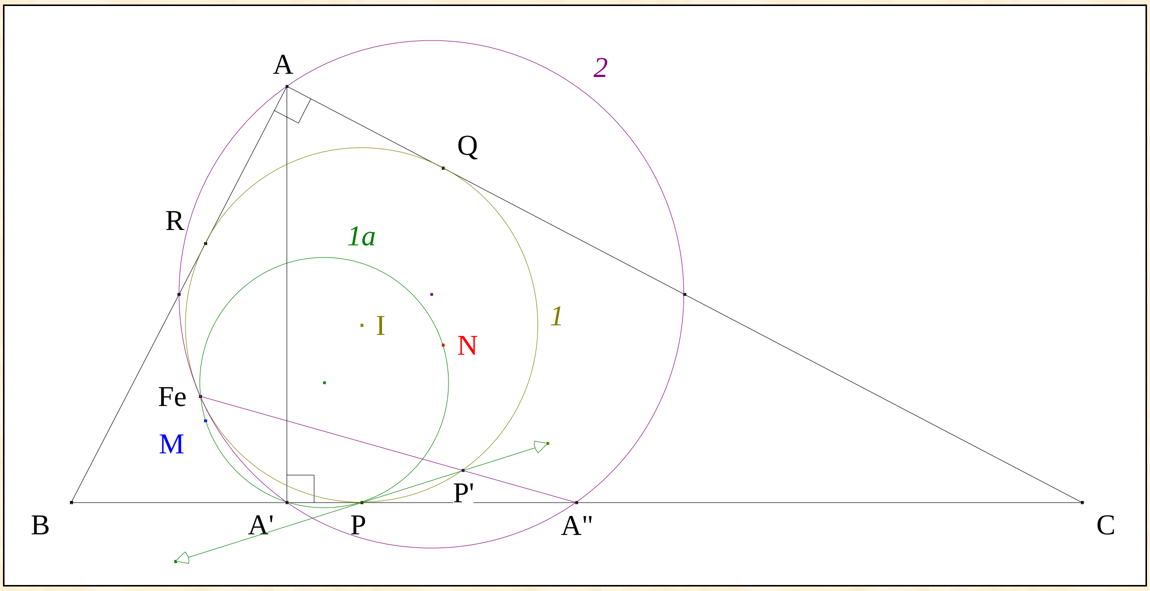
- Notons *1* le cercle inscrit de ABC ; il passe par P, Q, R ;
  et P' le symétrique de P par rapport à (AI).
- **Scolie :** P' est sur *1*.
- D'après **B. III. 1.** Deux parallèles, (QR) // (PP') ;
  par transitivité de la relation //, (MN) // (PP').
- (PP') étant parallèle à la droite diamétrale (MN) de *1a*, (PP') est la tangente à *1a* en P.



- Notons A"B"C" le triangle médian de ABC
  et *2* le cercle d'Euler de ABC ; il passe par A", B", C".

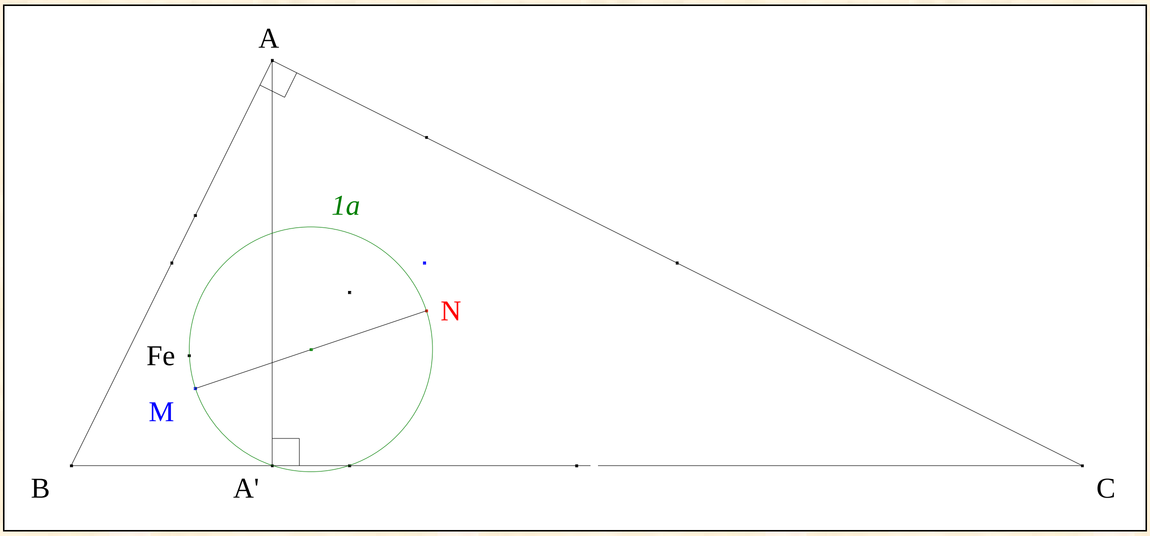
- D'après "Le théorème de Feuerbach" [15], *1* et *2* sont tangents en Fe.

- D'après **B. III. 2.** Deux points alignés avec le point de Feuerbach, Fe, P' et A" sont alignés.



- D'après Miquel "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe **6**)
  appliqué au triangle PA"P' avec A' sur (PA"), Fe sur (A"Fe) et P sur (PP'),
  les cercles *2*, *1* et *1a* sont concourants en Fe.

[15] Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach, G.G.G. vol. **1** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme/



- **Conclusion :** *1a* passe par Fe.

Note historique : Une solution par inversion a été proposée par Luis[16] sur le site *Mathlinks*.
Une application d'une généralisation trouvée par Vladimir Zajic [17] plus connu sous le pseudonyme de "Yetti" sur le site *Mathlinks*, lui a permis de démontrer le résultat de l'auteur.
Norbert Verdier et Bernard Schott[18] ont convenu d'appeler ce résultat "Le théorème de Feuerbach-Ayme" dans "La question du Mardi n° **2**" que propose le site *Les-Mathématiques.net* dans le rubrique "Histoire des maths".

---

16 http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=300127

17 Zajic V., 3 circles concurrent at Feuerbach point, *Mathlinks* du 14/08/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=301033

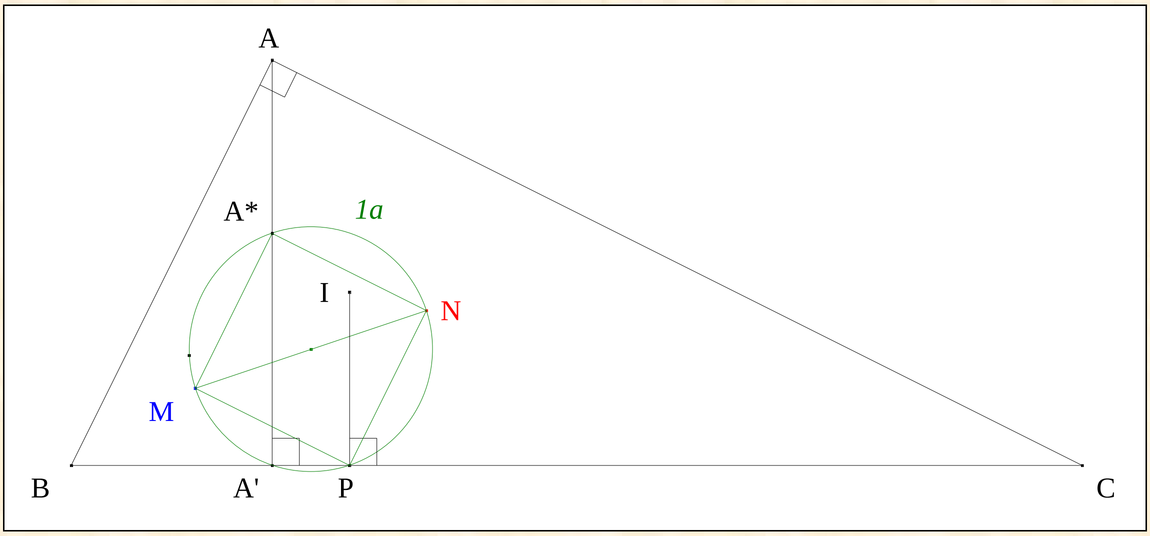
18 Les-Mathématiques.net, Histoire, QDM n° **2** ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?17,538526.

D. UNE RÉCOLTE

1. Deux carrés égaux

VISION

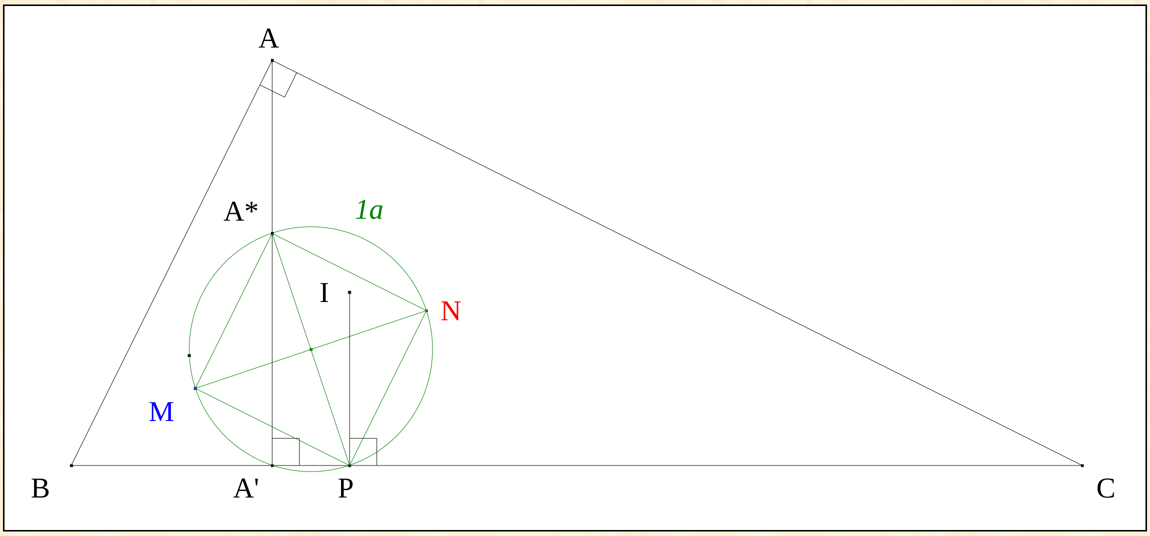
Figure :



Traits :	ABC	un triangle A-rectangle,
	I	le centre de ABC,
	A'	le pied de la A-hauteur de ABC,
	M, N	les centres resp. des triangles AA'B, AA'C,
	1a	le cercle de diamètre [MN],
	A*	le second point d'intersection de (AA') avec *1a*
et	P	le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur (BC).

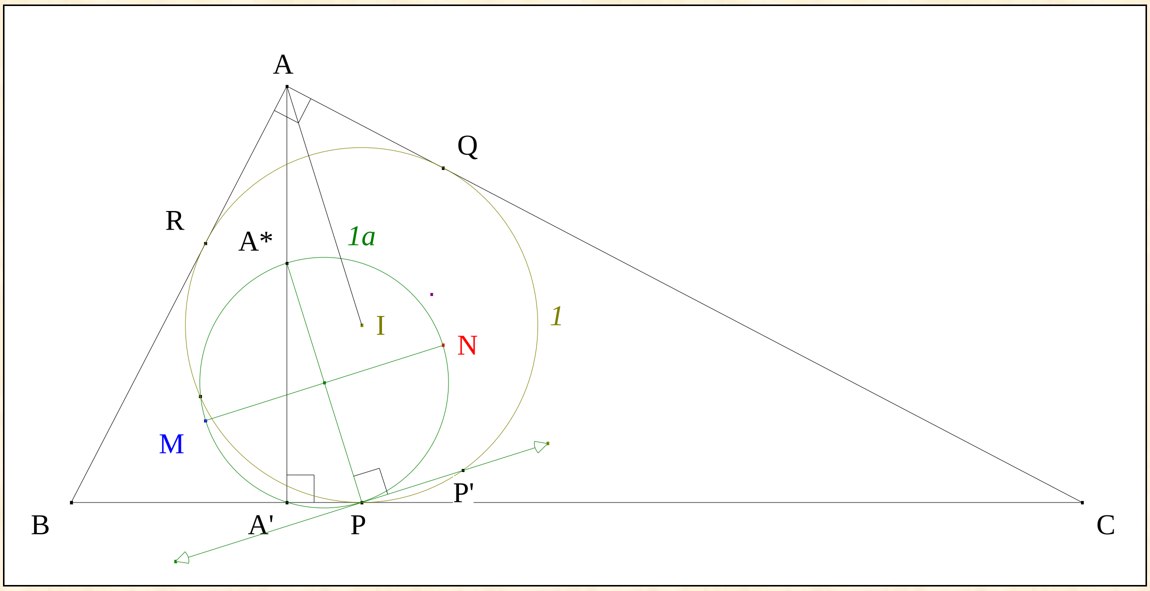
Donné : le quadrilatère MPNA* est un carré.

VISUALISATION



- **Scolie :** *1a* passe par A' et P.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", [PA*] est un diamètre de *1a*.



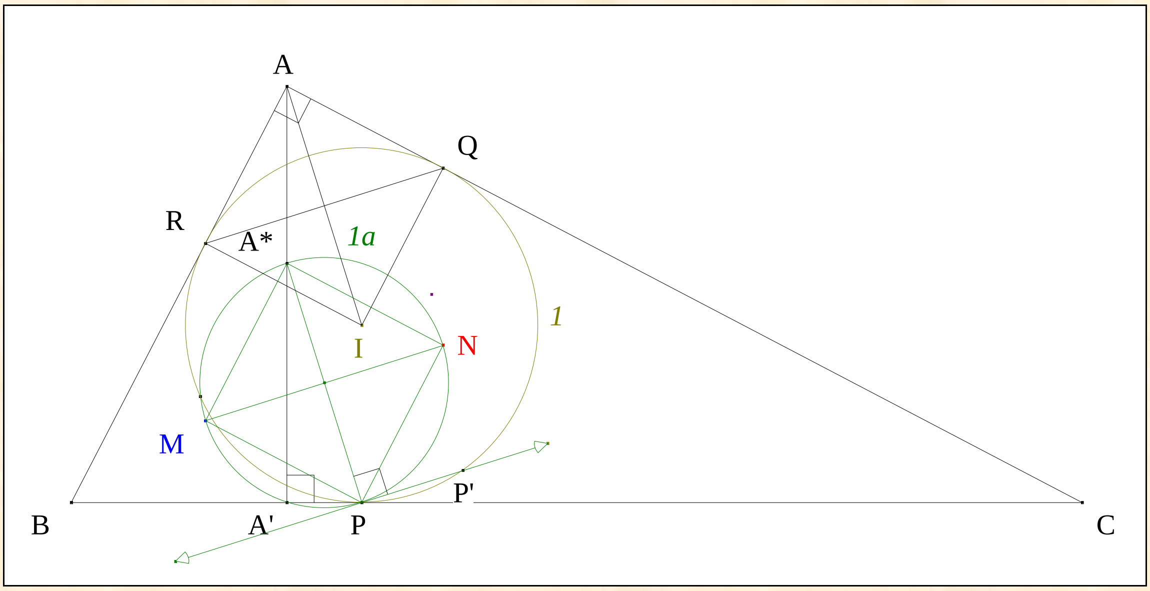
- Notons *1* le cercle inscrit de ABC ; il passe par P, Q, R ;
  et P' le symétrique de P par rapport à (AI).

- **Scolie :** P' est sur *1*.

- D'après **C.** La visualisation de l'auteur, (PP') est la tangente à *1a* en P ;
  en conséquence, (PA*) ⊥ (PP') ;
  d'après **B. III. 1.** Deux parallèles (PP') // (MN) ;
  d'après l'axiome **IVa** des parallèles, (PA*) ⊥ (MN).

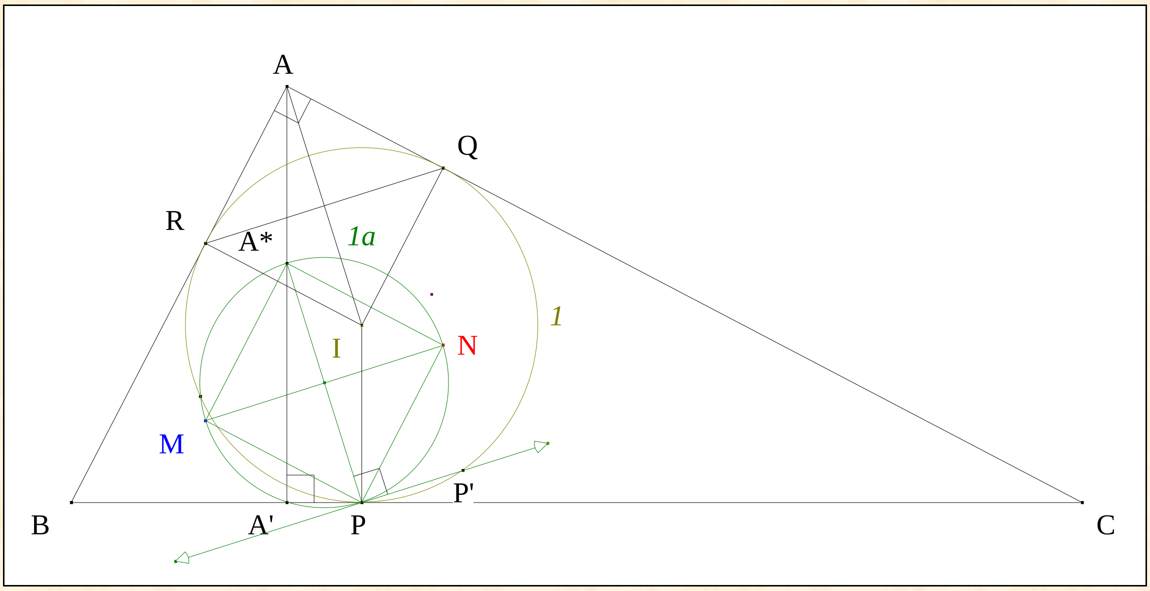
- **Conclusion :** le quadrilatère MPNA* est un carré.

Scolies : **(1)** un second carré



- **Conclusion :** nous savons que le quadrilatère RIQA est un carré.

(2) Deux carrés égaux



- Nous savons que (PA*) ⊥ (PP') ;
  par hypothèse, (PP') ⊥ (AI) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (PA*) // (AI).

- D'après **B. I. 3.** Le parallélogramme de Feuerbach, (MN) // (QR).

- Les carrés MPNA* et RIQA ayant leurs diagonales parallèles sont homothétiques.

- Par hypothèse, (AA') ⊥ (BC) ;
  (BC) ⊥ (IP) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (AA') // (IP).

- Le quadrilatère AA*PI ayant ses côtés opposés parallèles, est un parallélogramme ;
  en conséquence, AA* = IP (i.e. le rayon de *1*).

- **Conclusion :** les carrés homothétiques MPNA* et RIQA ayant leurs diagonales égales, sont égaux.

(3) Deux perpendicularités

- **Conclusion :** MPNA* et RIQA étant homothétiques, (PM) // (AC) et (PN) // (AB). [19]

(4) (PA*) est la P-hauteur du triangle de contact PQR de ABC.

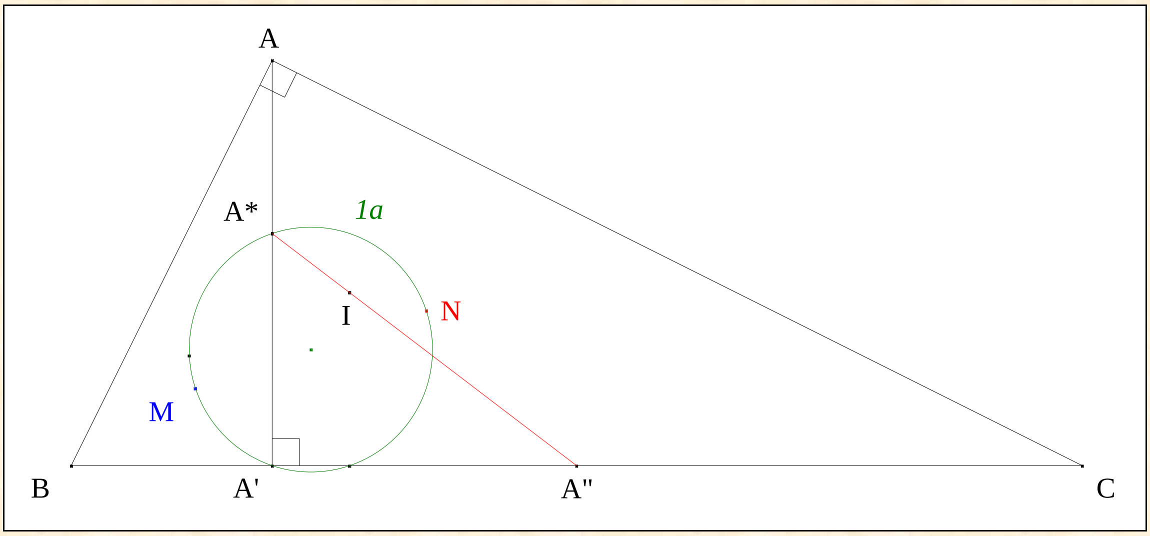
---

[19] Stergiu, Incircles and parallel segments, *Mathlinks* du 06/09/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=299708

2. La droite (A*I)

VISION

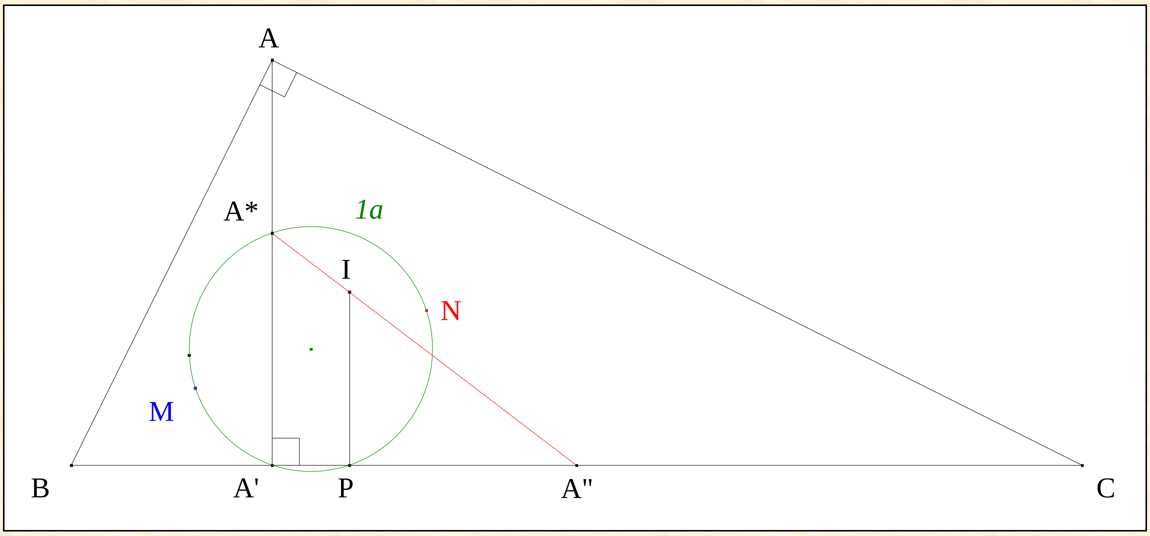
Figure :



Traits :	ABC	un triangle A-rectangle,
	I	le centre de ABC,
	A'	le pied de la A-hauteur de ABC,
	M, N	les centres resp. des triangles AA'B, AA'C,
	1a	le cercle de diamètre [MN],
	A*	le second point d'intersection de (AA') avec *1a*
et	A"	le milieu de [BC].

Donné : (A*I) passe par A".

VISUALISATION



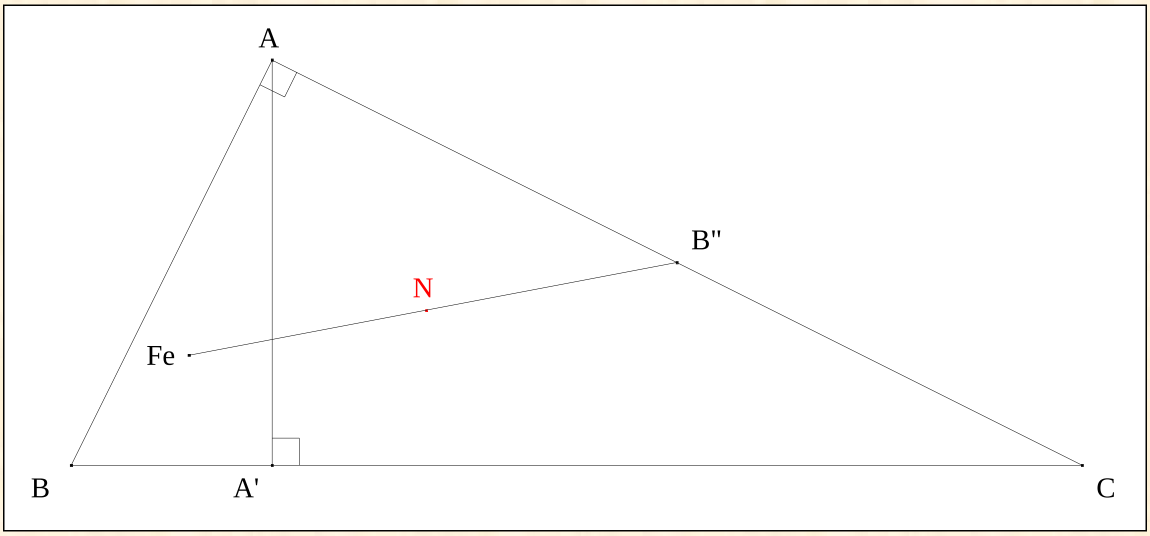
- Notons P le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur (BC).
- D'après **D. 1.** Deux carrés égaux, scolie 2, AA* = IP (i.e. le rayon de *1*).

- **Conclusion :** d'après Poncelet "Rayon du cercle inscrit" (Cf. Annexe **7**), (A*I) passe par A".

3. Un alignement avec le point de Feuerbach

VISION

Figure :

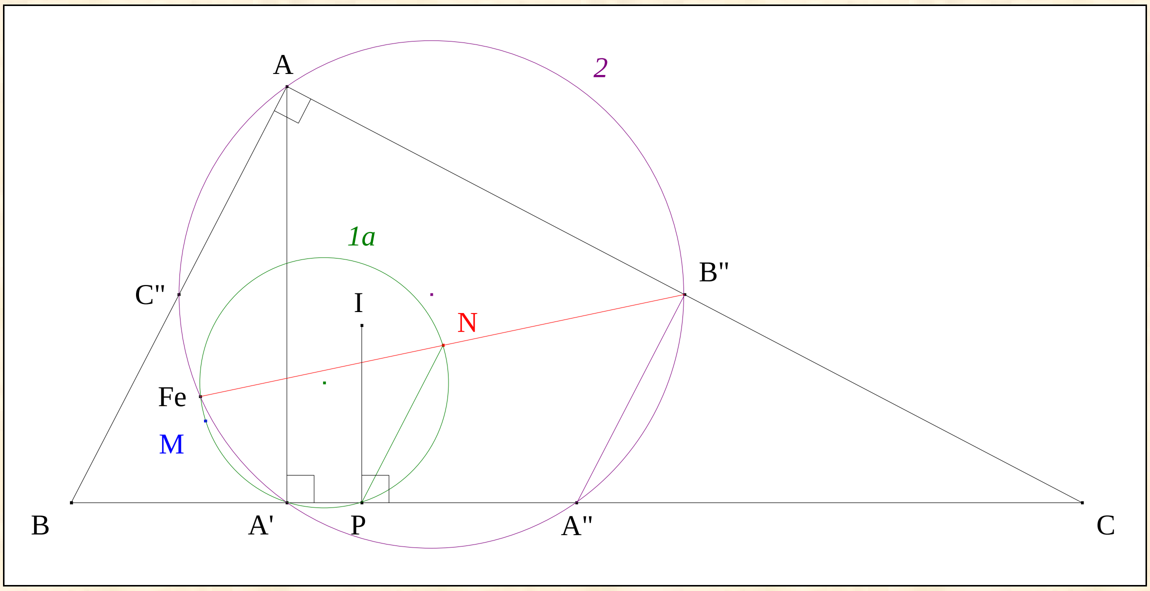


Traits :	ABC	un triangle A-rectangle,
	B"	le milieu de [AC],
	A'	le pied de la A-hauteur de ABC,
	N	le centre du triangle AA'C,
et	Fe	le point de Feuerbach de ABC

Donné : Fe, N et B" sont alignés. [20]

VISUALISATION

[20] Ayme J.-L., Two points collinear with the Feuerbach's points, *Mathlinks* du 13/09/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=300812

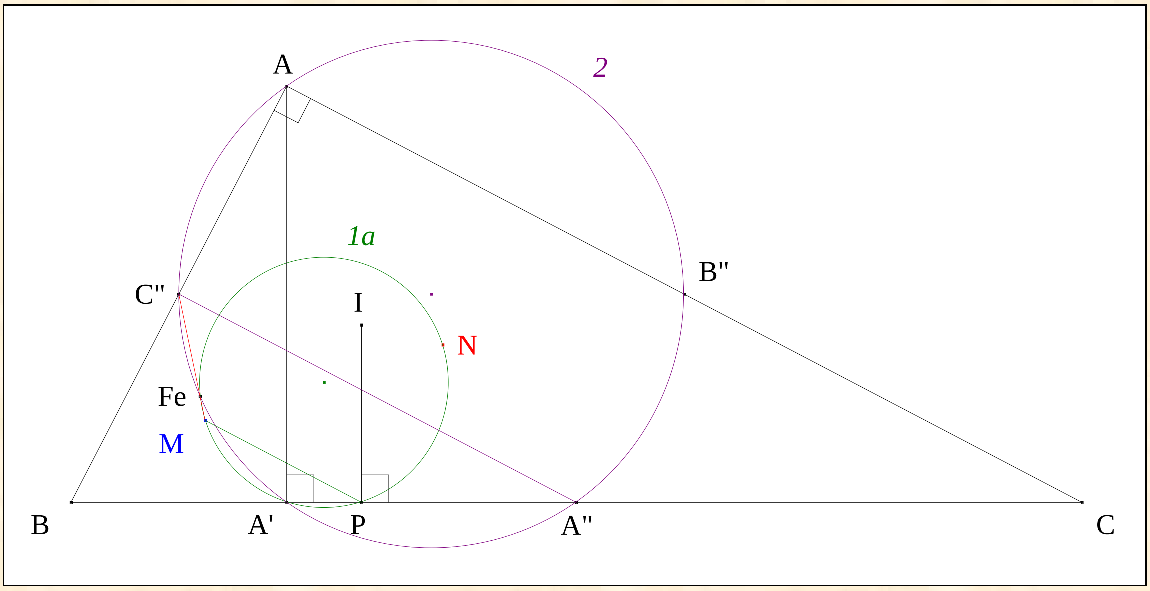


- Notons I le centre de ABC
  P le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur (BC),
  M le centre du triangles AA'B,
  1a le cercle de diamètre [MN],
  A"B"C" le triangle médian de ABC
  et *2* le cercle d'Euler de ABC.

- D'après **D. 1.** Deux carrés égaux, scolie 3, (PN) // (AB) ;
  nous avons : (AB) // (A"B") ;
  par transitivité de la relation //, (PN) // (A"B").

- **Conclusion :** les cercles *1a* et *2*, les points de base A' et Fe, la monienne (PA'A"), les parallèles (PN) et (A"B"), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, Fe, N et B" sont alignés.

Scolie : un second alignement avec le point de Feuerbach

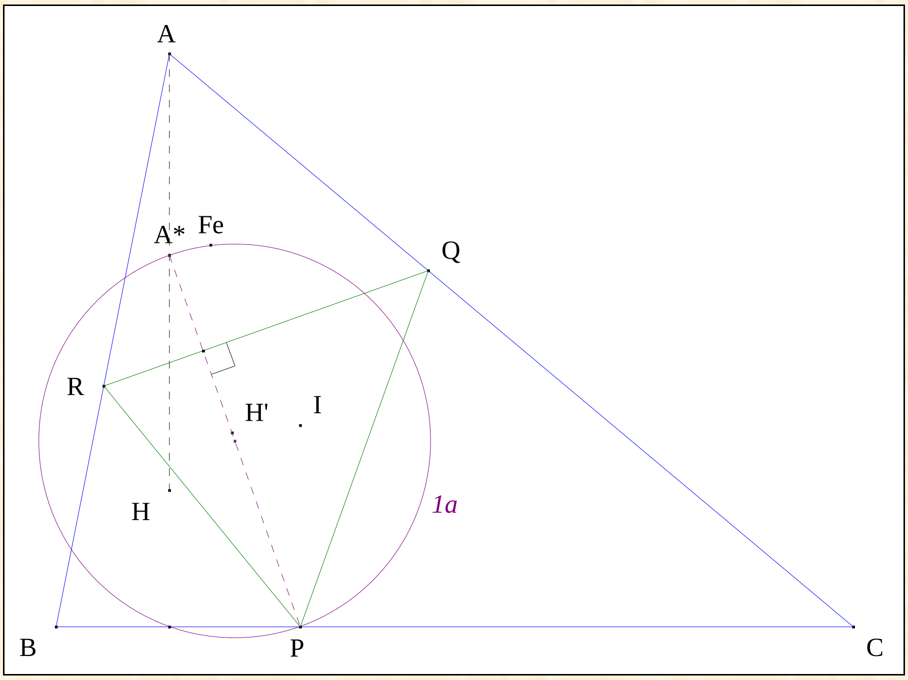


- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que Fe, M et C" sont alignés.

E. LA GÉNÉRALISATION DE VLADIMIR ZAJIC

VISION

Figure :

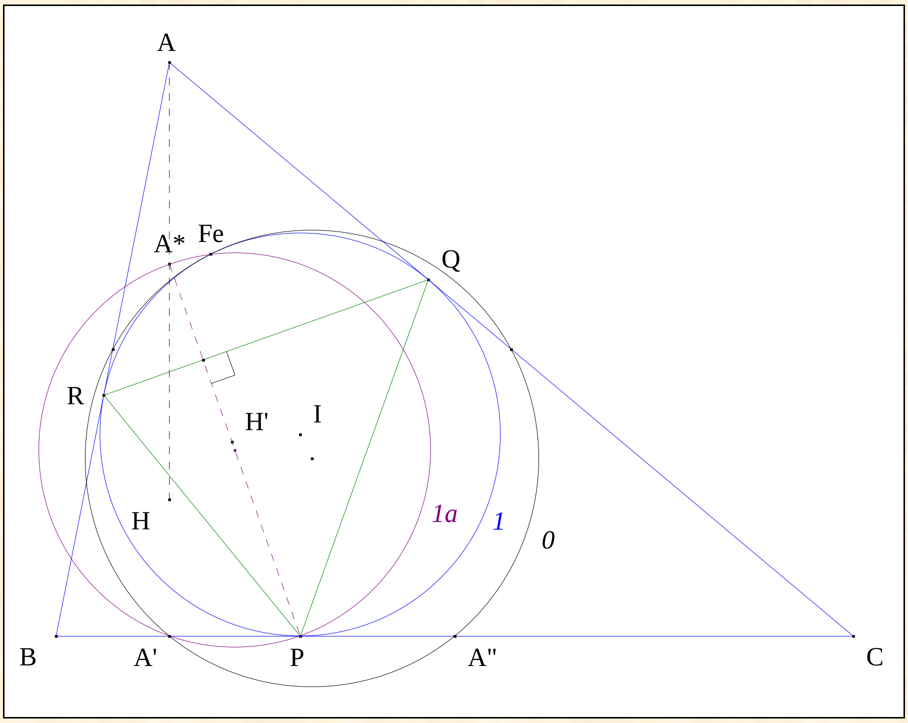


Traits : ABC un triangle,
PQR le triangle de contact de ABC,
H' l'orthocentre de PQR,
H l'orthocentre de ABC,
A* le point d'intersection de (PH') et (AH),
1a le cercle de diamètre [PA*]
et Fe le point de Feuerbach de ABC.

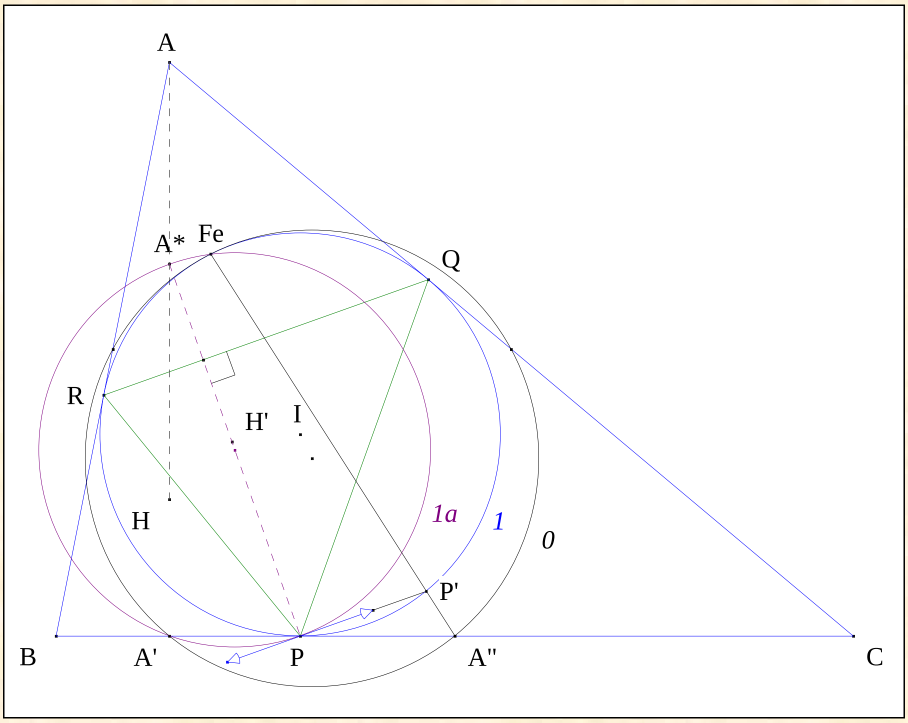
Donné : *1a* passe par Fe. [21]

VISUALISATION

[21] Zajic V., 3 circles concurrent at Feuerbach point, *Mathlinks* du 14/09/2009 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=1631082#1631082



- Notons A' le pied de la A-hauteur de ABC,
  A" le milieu de [BC],
  0 le cercle d'Euler de ABC ; il passe par A', A" et Fe ;
  et *1* le cercle inscrit de ABC ; il passe par P et Fe.



- Notons P' le second point d'intersection de (FeA") avec *1*.

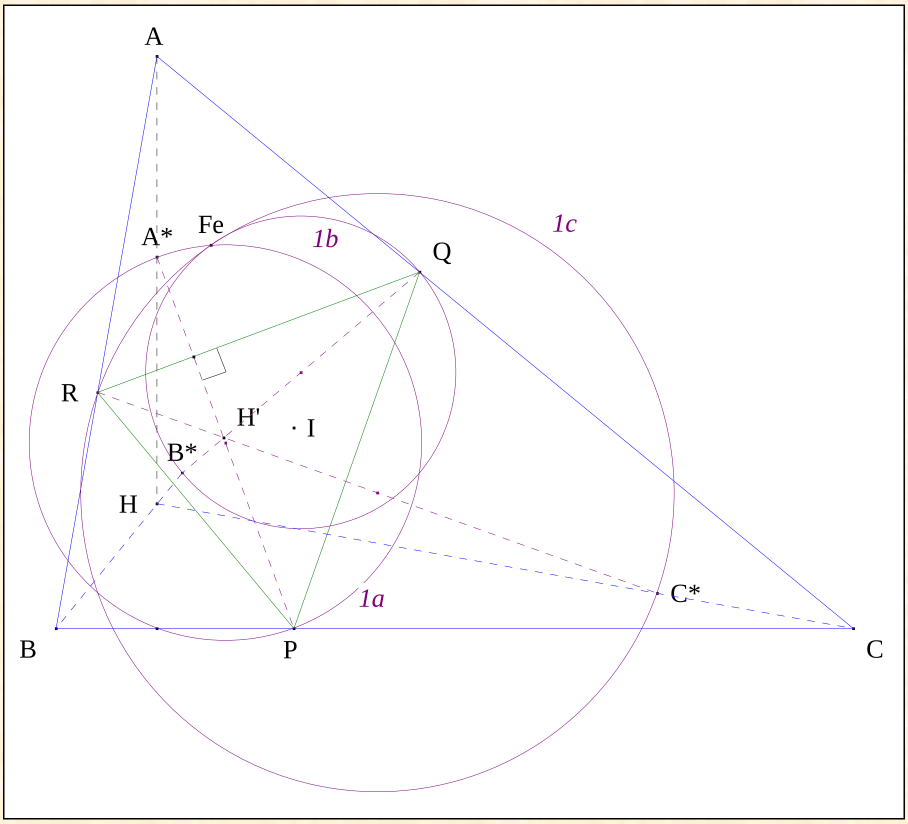
- D'après "Symétrique de OI…" [22], P' est le symétrique de P par rapport à (AI) ;
  en conséquence, (PP') ⊥ (AI) ;
  nous savons que (AI) ⊥ (QR) ;

[22] Ayme J.-L., Symétrique de OI…, G.G.G. vol. **4** p. 10-11 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/

d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires,	(PP') // (QR) ;
par hypothèse,	(QR) ⊥ (PH') ;
d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires,	(PP') ⊥ (PH') ;
(A'H' étant une droite diamétrale de *1a*,	(PP') est la tangente à *1a* en P.

- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe **8**) appliqué au triangle PA"P' avec A' sur (PA"), Fe sur (A"P') et P sur (PP'), *1a* passe par Fe.

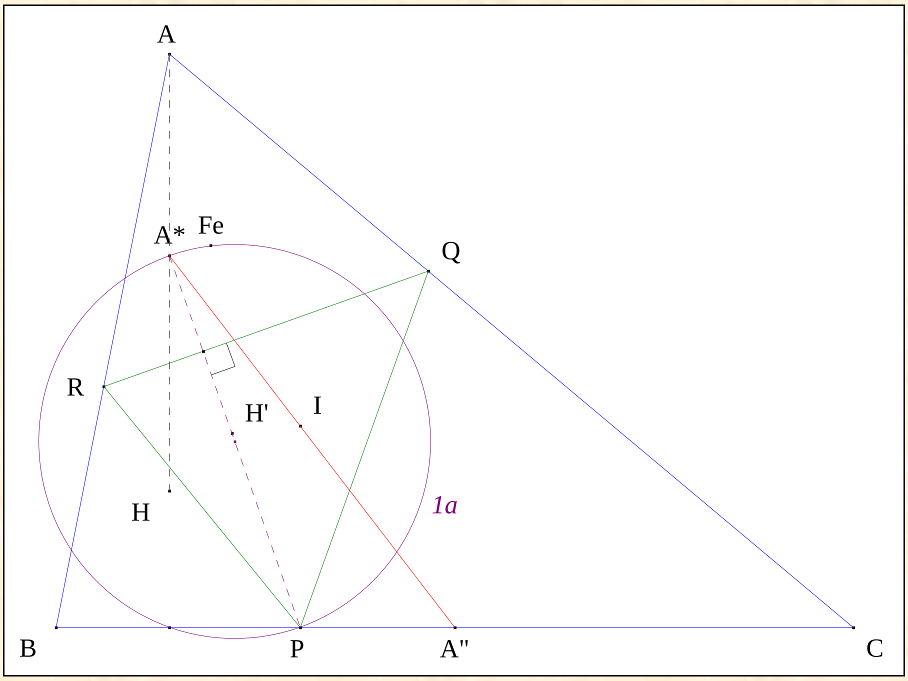
Scolies : **(1)** deux autres cercles passant par Fe



- Notons B*, C* les points d'intersection resp. de (QH') et (BH), de (RH') et (CH),
  et *1b*, *1c* les cercles de diamètre resp. [QB*], [RC*].

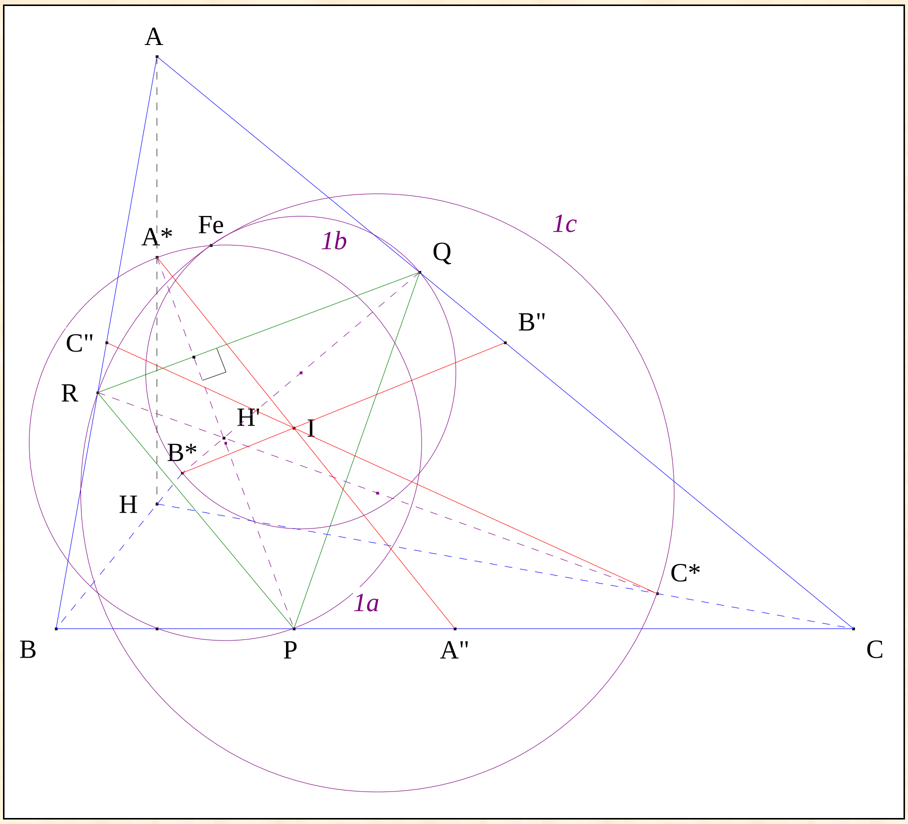
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que *1b* et *1c* passent par Fe.

(2) La droite (A*I) passe par A"



- La preuve est identique à celle présentée en **D. 2.** La droite (A*I).

- **Conclusion :** la droite (A*I) passe par A".



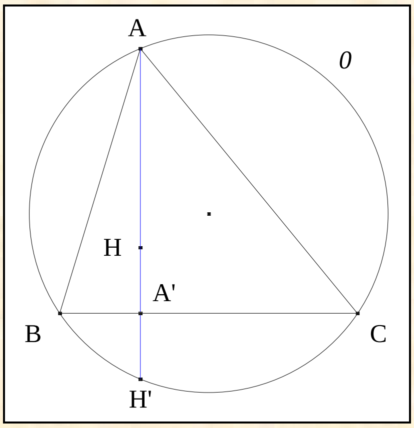
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B*I) passe par B"
  (C*I) passe par C".

Note historique : cette généralisation a été présentée par Vladimir Zajic [23] sur le site *Mathlinks*.

Commentaire : ce résultat peut être aussi considéré comme une généralisation des cercles de Michel Garitte. [24]

F. ANNEXE

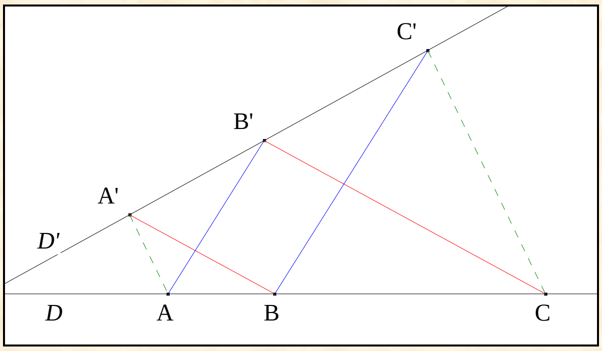
1. Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté [25]



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre du triangle,
A' le pied de la A-hauteur de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC
et H' le pied de la A-hauteur de ABC sur *0*.

Donné : A' est le milieu de [HH'].

2. Le petit théorème de Pappus [26]



Traits : *D*, *D'* deux droites,
A, B, C trois points pris dans cet ordre sur *D*,
B' un point

---

[23] Zajic V., 3 circles concurrent at Feuerbach point (generalization from right triangle), *Mathlinks* du 14/09/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?p=1631082#1631082

[24] Ayme J.-L., Symétrique de (OI)…, G.G.G. vol. 4, p. 14 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

[25] Carnot, n° **142**, *De la corrélation des figures géométriques* (1801) 101

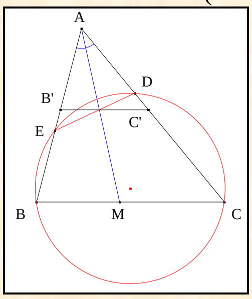
[26] Pappus, *Collections* Livre **VII**

et A', C' deux points de *D'* tels que (AB') // (BC') et (A'B) // (B'C).

Donné : B' est sur *D'* *si, et seulement si,* (AA') et (CC') sont parallèles.

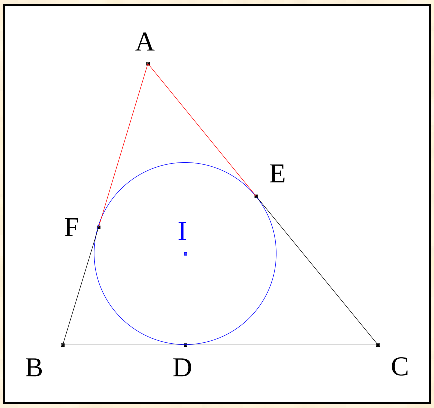
3. Droites antiparallèles

(ED) est la symétrique de (B'C')
par rapport à la bissectrice (AM) de <A



(ED) est antiparallèle à (BC)
relativement à (AB) et (AC)

4. Le théorème (p – a)

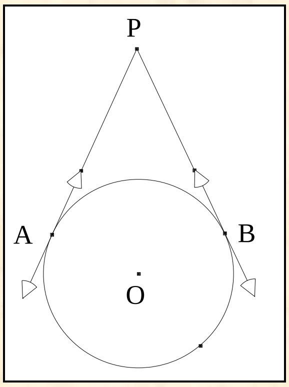


Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit de ABC,
DEF le triangle de contact de ABC,
a, b, c les longueurs resp. de BC, CA, AB
et 2.p le périmètre de ABC.

Donné : AF = **(**p – a).

5. Deux tangentes égales [27]

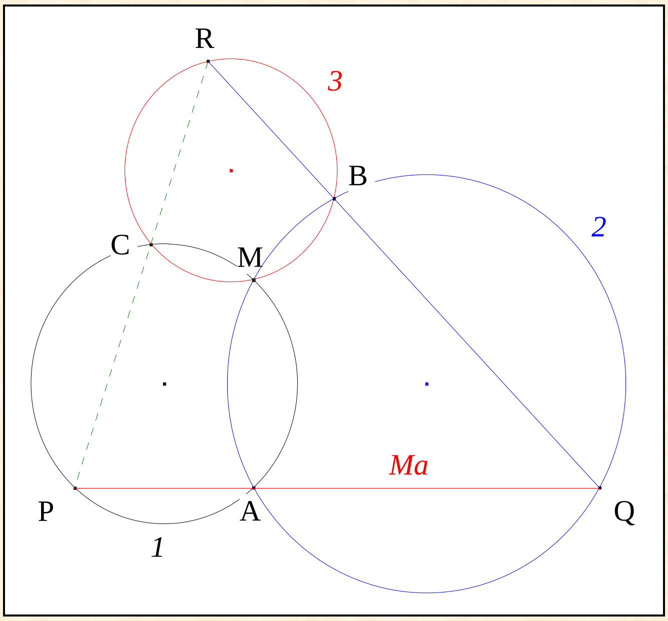
[27] Conséquence de la proposition **36** du Livre **III** des *Éléments*



Traits : *0* un cercle,
O le centre de *0*,
P un point extérieur à *0*,
et A, B les points de contact des deux tangentes à *0* menées à partir de P.

Donné : le triangle PAB est P-isocèle.

6. Le théorème des trois cercles



Traits : *1*, *2*, *3* trois cercles concourants,
M le point de concours de *1*, *2*, *3*,
A le second point d'intersection de *1* et *2*,
*M*a une A-monienne de *1* et *2*,
P, Q les seconds points d'intersection de *M*a resp. avec *1*, *2*,
B, C les seconds points d'intersection de *3* resp. avec *2*, *1*
et R un point de *3*.

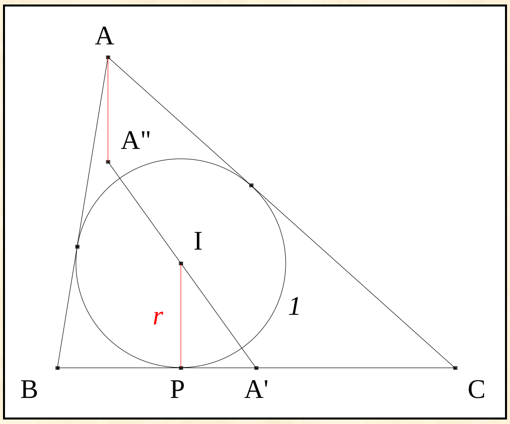
Donné : (QBR) est une monienne de *2* et *3*
si, et seulement si,
(PCR) est une C-monienne de *1* et *3*.

Commentaire : ce résultat est une réciproque du pivot de Miquel [28].

[28] Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. **1**, **3** (1838) 485-487

Il reste vrai dans les cas de tangence des droites ou de deux cercles.

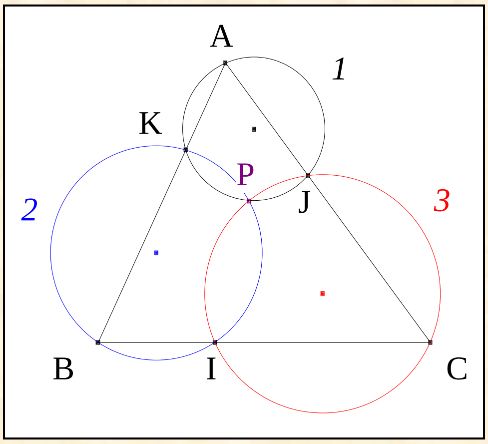
7. Rayon du cercle inscrit [29]



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
I le centre de *1*,
r le rayon de *1*,
P le point de contact de *1* avec (BC),
A' le milieu de [BC]
et A" le point d'intersection de (A'I) avec la A-hauteur de ABC.

Donné : AA"= IP (= r).

8. Le théorème du pivot [30]



Traits : *1, 2, 3* trois cercles sécants deux à deux,
K, P les points d'intersection de *1* et *2*,
I l'un des points d'intersection de *2* et *3*,
J l'un des points d'intersection de *3* et *1*,
A un point de *1*,
B le second point d'intersection de la monienne (AK) avec *2*
et C le second point d'intersection de la monienne (BI) avec *3*.

Donné : (CJA) est une monienne de *3* et *1* *si, et seulement si,* *3* passe par P.

---

[29] Poncelet J.-V.
[30] Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. **1**, **3** (1838) 485-487