LE THÉORÈME DE FEUERBACH

UNE NOUVELLE PREUVE PUREMENT SYNTHÉTIQUE [1]

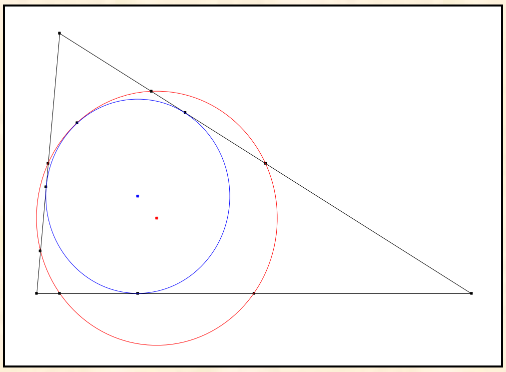
Jean-Louis AYME

Résumé. Nous présentons une nouvelle preuve entièrement synthétique du théorème de Feuerbach que nous n'avons pas rencontrée dans la littérature géométrique ainsi qu'une brève note biographique de ce géomètre allemand. Cette preuve est basée sur trois lemmes qui tous peuvent être démontrés synthétiquement.

Remerciements. Ils s'adressent tout particulièrement au professeur Ercole Suppa de Teramo (Italie) qui a relu et corrigé cet article.

1. A propos de Feuerbach

Karl Feuerbach, le frère du fameux philosophe Ludwig Feuerbach, est né à Iéna en Allemagne, le 30 mai 1800 dans une famille protestante. Fils du juriste Paul Feuerbach et d'Éva Troster, le brillant étudiant de l'Université d'Erlangen, puis de Freiburg, obtient à l'âge de 22 ans son doctorat et commence à enseigner les mathématiques au gymnasium d'Erlangen tout en continuant à fréquenter un cercle d'étudiants de cette ville, connu pour leur débauche et leurs dettes. La même année, il publie à Nuremberg, un petit livre de 62 pages au titre long et diffus [**1**] dans lequel il présente à la page 38 et démontre analytiquement "le plus beau théorème de géométrie élémentaire découvert depuis le temps d'Euclide" selon l'historien J. L. Coolidge [**2**] :



dans un triangle,
le cercle inscrit est tangent au cercle d'Euler.

En 1824, Feuerbach est arrêté et emprisonné avec 19 étudiants pour une année, à Munich, à cause de ses positions politiques. Se sentant responsable de tout, il devient dépressif et tente par deux fois, pour sauver ses compagnons, de se suicider en se coupant les veines, puis en sautant d'une fenêtre. Après sa libération, il retourne vivre dans sa famille et profite d'une intervention du roi pour retrouver un poste d'enseignant à Hof qu'il quittera suite à une nouvelle dépression. En 1828, connaissant une amélioration de santé, il enseigne de nouveau à Erlangen jusqu'au jour où dégainant une épée dans sa classe, il menace de trancher la tête des élèves qui ne savent pas résoudre l'équation qu'il a écrite au tableau. Abandonnant l'enseignement, il vivra en reclus les six dernières années de sa courte vie en se laissant pousser les cheveux, la barbe et les ongles tout en contemplant les

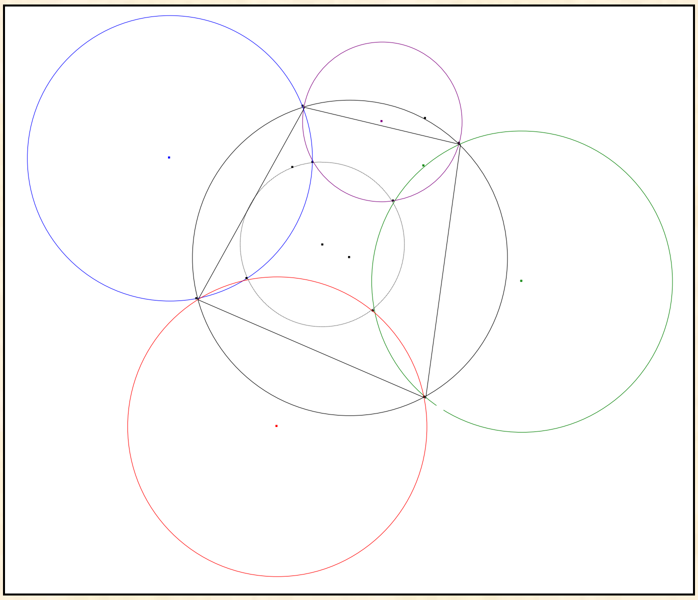
---

[1] Ayme J.-L., *Revistaoim* (Espagne) 26 (2006) ; /http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

peintures de son neveu, le peintre Anselme Feuerbach. Ce professeur impulsif et perturbé meurt à Erlangen, le 12 mars 1834.

2. Trois lemmes

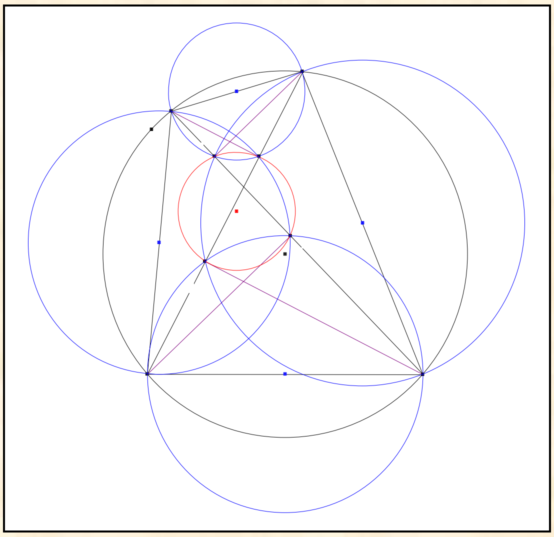
Le géomètre français Auguste Miquel s'était déjà fait connaître en 1836 alors qu'il était encore élève de l'institution Barbet à Paris, en publiant dans l'éphémère journal mathématique *Le Géomètre* fondé par Guillard, des démonstrations d'un théorème non démontré de Steiner. En 1844, il publie dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de Liouville, le théorème des six cercles [**3**] :



Lemme 1 où le théorème des six cercles : *les cercles qui ont pour cordes les côtés d'un quadrilatère cyclique se recoupent en quatre points cocycliques.*

Notons qu'Isaac Moisevitch Yaglom [**4**] considère que cet "assez élégant théorème ne paraît pas particulièrement fécond"; cependant, il ajoute que "les conséquences de ce simple théorème comme il y en a beaucoup en géométrie, peuvent, sans exagération, être qualifiées de remarquables".

Du lemme 1, nous pouvons en déduire le cas particulier suivant :



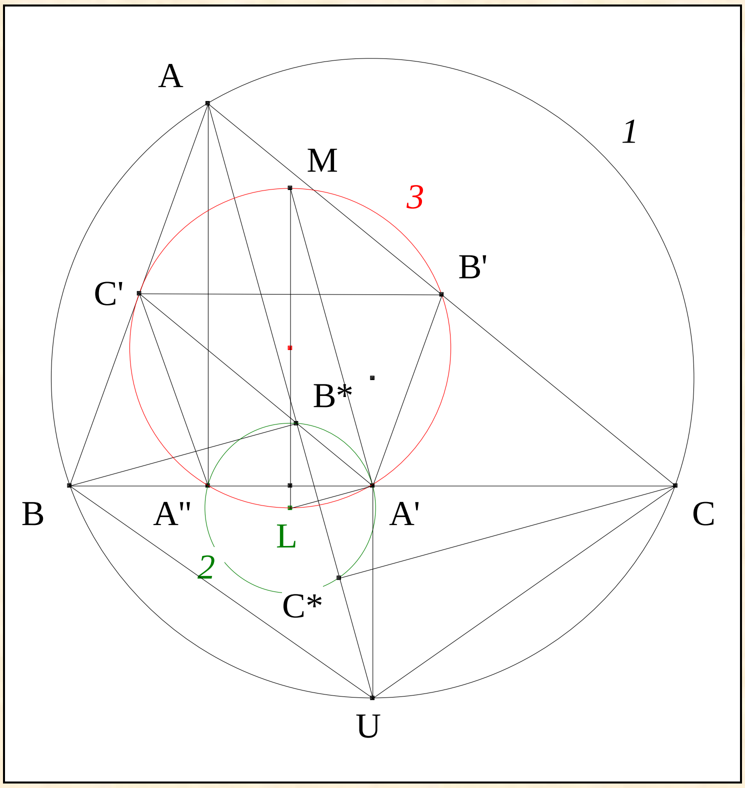
les cercles qui ont pour diamètres les côtés d'un quadrilatère cyclique *conduisent par leur intersection à un quadrilatère cyclique*

ou encore

les quatre projections des sommets d'un quadrilatère cyclique sur les diagonales conduisent à un quadrilatère cyclique

Nous allons maintenant étudier deux exemples de ce cas particulier dans la géométrie du triangle.

Exemple 1.
L'historien allemand Max Simon [**5**] attribue au lieutenant d'artillerie Calabre et au professeur R. Malloizel [**6**] de l'École Sainte-Barbe à Paris, le résultat suivant :



dans un triangle ABC, *les projetés* B* *et* C* *des deux sommets* B *et* C *sur la* A-*bissectrice, le milieu* A' *de* [BC] *et le pied* A" *de la* A-*hauteur, sont quatre points cocycliques; le centre de ce cercle est le milieu* L *de l'arc* A'A" *du cercle d'Euler qui ne contient pas C'.*

- Notons U le second point d'intersection de la A-bissectrice avec *1*.

- La première partie est une application directe du cas particulier précédent au quadrilatère ABUC.

- Pour la seconde partie,
  notons *1* le cercle circonscrit de ABC,
  B', C' les milieux des côtés [AC], [AB],
  2 le cercle passant par B*, C*, A' et A",
  3 le cercle d'Euler de ABC ; il passe par A', B', C' et A" ;
  et L, M les points d'intersection de la médiatrice de [A'A"] avec *3*.

- La droite (B'C') joignant les milieux des côtés [AC] et [AB] de ABC est parallèle à (BC).

- Le quadrilatère cyclique A"A'B'C' ayant deux côtés opposés parallèles, est un trapèze isocèle ;
  en conséquences, **(1)** (LM) est la médiatrice de [B'C']
  (2) [LM] est un diamètre de *3*.

• (LM) étant la médiatrice de [B'C'], M est le milieu de l'arc B'C' ne contenant pas A' ;
il s'en suit que (A'M) est la bissectrice de <C'A'B'.

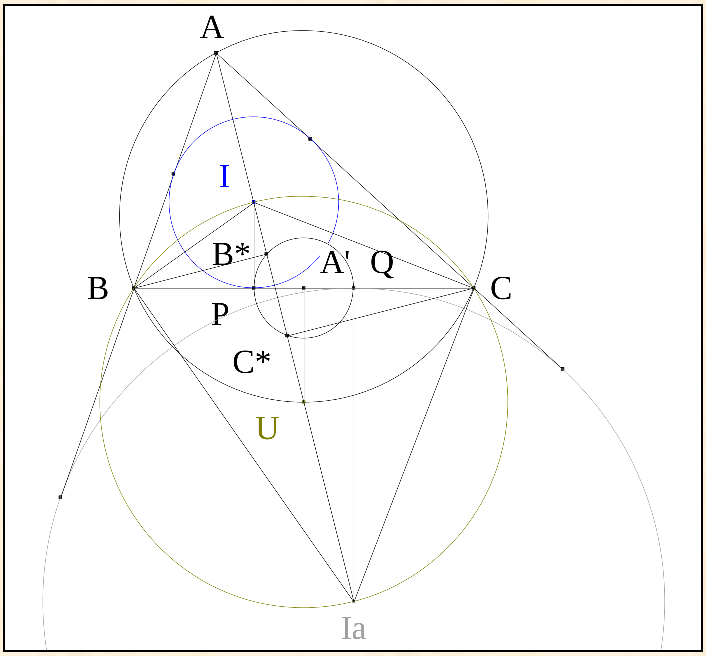
• Le quadrilatère A'B'AC' étant un parallélogramme, les bissectrices (A'M) et (AU) des deux angles opposés <C'A'B' et <B'AC' sont parallèles.

• Le triangle A'ML étant inscriptible dans un demi-cercle, (A'L) ⊥ (A'M) ;
en conséquence, (A'L) ⊥ (AU) ;
par hypothèses, (AU) ⊥ (BB*) et (AU) ⊥ (CC*) ;
il s'en suit que (A'L), (BB*) et (CC*) sont parallèles entre elles.

• A' étant le milieu de [BC], les droites (BB*) et (CC*) étant parallèles, (A'L) est la médiatrice de [B*C*].

• **Conclusion :** les points B*, C*, A' et A" étant cocycliques, L est le centre de *2* et le milieu de l'arc A'A" ne contenant pas B'.

Exemple 2.
Le géomètre américain Nathan Altshiller-Court [**7**] attribue à Eugène Catalan les deux résultats suivants :



(a) I *étant le centre du cercle inscrit et* Ia *le centre du cercle exinscrit en* A *d'un triangle* ABC, *le cercle de diamètre* [IIa] *passe par les sommets* B *et* C, *et a son centre* U *sur le cercle circonscrit de* ABC. [**8**]

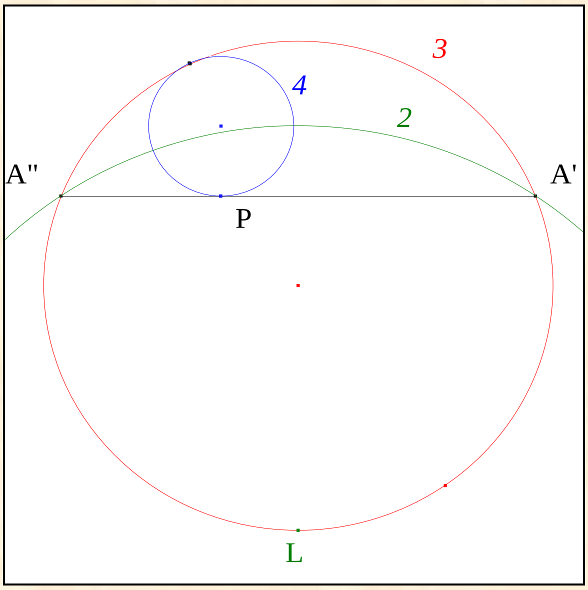
(b) *Les points de contact* P *et* Q *de la droite latérale* (BC) *avec les cercles inscrit et exinscrit relatif à ce côté, sont deux points isotomiques de ce côté.* [**9**]

En 1813, Louis Gaultier de Tours [**10**] écrit, durant ses études à l'École Polytechnique, un mémoire intitulé "Les contacts des cercles" dans le *Journal de l'École Polytechnique* dans lequel il dégage une remarquable propriété de l'axe radical i.e. de la corde commune deux cercles sécants :

Lemme 2. **(a)** *un cercle orthogonal à deux cercles sécants a son centre sur l'axe radical de ces deux cercles.*
(b) *Si un cercle a son centre sur l'axe radical de deux cercles sécants et est orthogonal à l'un d'eux alors, il est orthogonal à l'autre.*

Au début du XX-ième siècle, le *Leybourn's Mathematical repository* propose un théorème [**12**] à partir duquel nous présentons une réciproque.

Lemme 3.

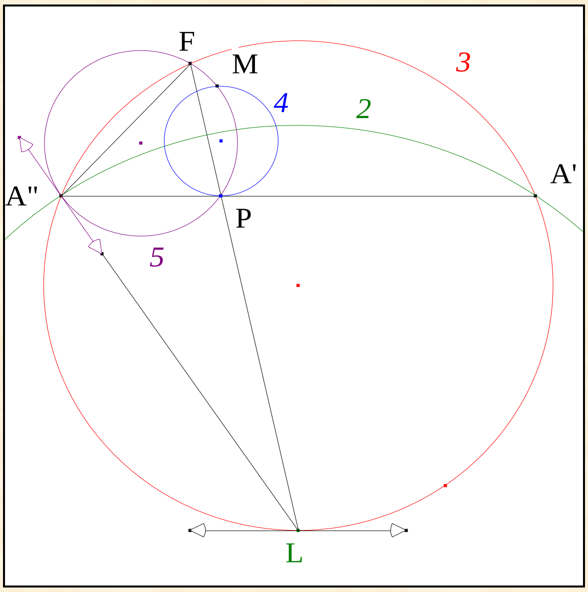


Hypothèses : *3* un cercle,
[A"A'] une corde horizontale de *3*,
L le pôle sud de *3*,
2 le cercle de centre L passant par A", A',
P un point de [A"A']
et *4* un cercle nordique, tangent à (A"A') en P et orthogonal à *2*.

Conclusion : *4* est tangent à *3*.

Schéma de démonstration.

- Les notations et les couleurs des cercles correspondent à celles introduites précédemment.



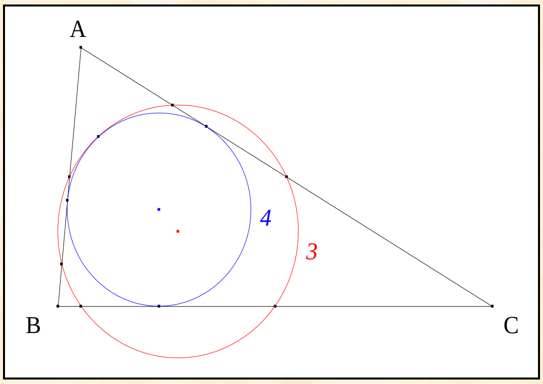
- Notons F le second point d'intersection de la droite (PL) avec *3*
  5 le cercle passant par les points A", P et F;
  et M le second point d'intersection des cercles *5* et *4*.

- D'après le théorème de Reim (cf. Appendice) appliqué aux cercles *3* et *5*, comme (PA") est parallèle à la tangente à *3* en L, la droite (A"L) est tangente à *5* en A" ;
  en conséquence, la tangente à *2* en A" étant un diamètre de *5*, *2* est orthogonal à *5*.

- D'après le lemme 2-a, *2* étant orthogonal à *5*, le centre L de *2* est sur l'axe radical (PM) de *4* et *5* ;
  en conséquence, M coïncide avec F i.e. *3* et *4* passent par F.

- Conclusion : les tangentes à *4* en P et à *3* en L étant parallèles, *4* est tangent à *3* en F.

3. La nouvelle preuve du théorème de Feuerbach

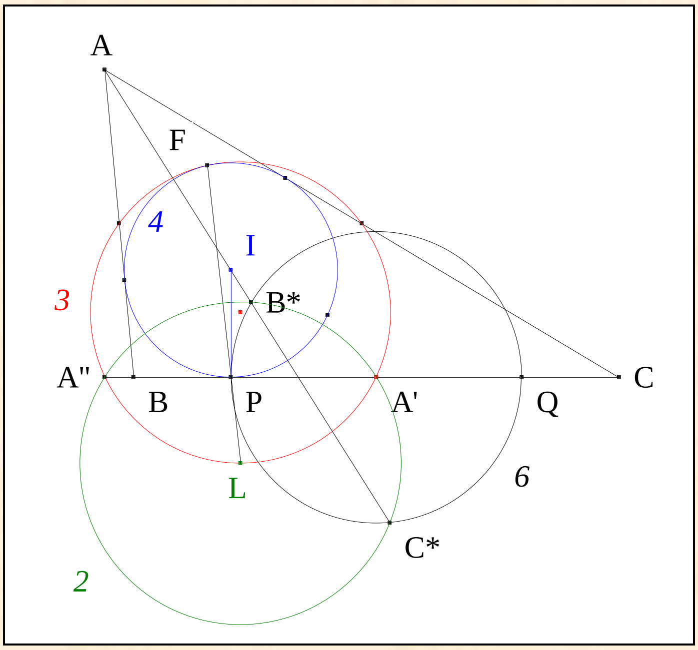


Hypothèses : ABC un triangle
3 le cercle d'Euler de ABC
et *4* le cercle inscrit dans ABC.

Conclusion : *4* est tangent à *3*.

Schéma de démonstration.

- Les notations et les couleurs des cercles correspondent à celles introduites précédemment.



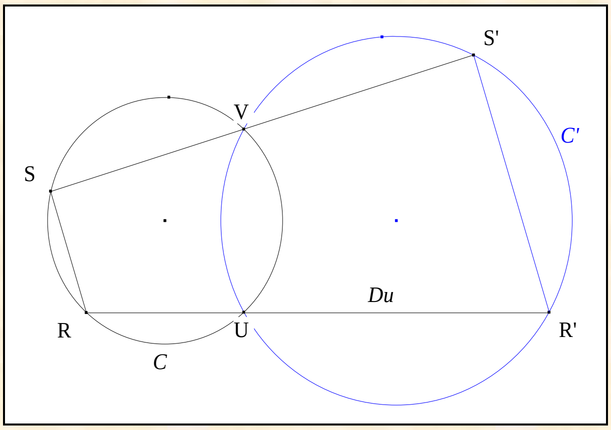
- D'après le lemme 1-exemple 2, les points P, B*, Q et C* sont cocycliques.
- Notons *6* ce cercle.
- Par définition, *6* est orthogonal à *4*.
- D'après le lemme 1-exemple 2 et le lemme 2-b, les points B*, C*, A' et A" sont cocycliques.
- D'après le lemme 2-b, *4* est orthogonal à *2*.
- **Conclusion :** P étant un point de la corde [A"A'] du cercle *3*, d'après le lemme 3, *4* est tangent à *3*.

Scolies : **(1)** le point de contact de *4* et *3*, noté F, est le point de Feuerbach de ABC ; il est répertorié sous X_{11} chez ETC [**13**].

(2) F est le second point d'intersection de la droite (PL) avec le cercle *3* ou *4*.

4. Appendice

Au début du XX-ième siècle, le Frère Gabriel-Marie, de son vrai nom Edmond Brunhes, présente dans ses *Exercices de Géométrie*, le résultat d'Anton Reim [**11**] à partir duquel nous proposons une réciproque.



Hypothèses :	*C*, *C'*	deux cercles sécants,
	U, V	les points d'intersection de *C* et *C'*,
	Du	une droite passant par U,
	R, R'	les seconds points d'intersection de Du avec *C* et *C'*,
	S	un point de *C*
et	S'	un point de *C'* tel que (R'S') soit parallèle à (RS).

Conclusion : les points S, V et S' sont alignés.

Scolie : si les points S et V coïncident alors, la droite (SVS') est la tangente à *C* en V.

5. Références (historiques et académiques)

[1] Feuerbach, *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren.*
R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York (1960) 200-205.
[2] Coolidge, The Heroic Age of Geometry, *Bulletin of the American Mathematical Society* **35**, 1229.
[3] Miquel A., Mémoire de Géométrie, *Journal de Liouville*, vol. X (1844) 347.
F. G.-M., Théorème 142, *Exercices de Géométrie* 6-ième édition, Rééditions J. Gabay, Paris (1991) 298.
[4] I. M. Yaglom , *Géométrie des nombres complexes*, Éditions Mir, Moscou (1973) 35.
[5] M. Simon, *Über die Entwicklung der Elementar Geometrie im XIX-Jahrhundert*, Leipzig, Teubner (1906) 128.
[6] R. Malloizel, *Journal de Mathématiques Élémentaires* de Bourget (1878) 97.
T. Lalesco, *La Géométrie du Triangle*, Rééditions Jacques Gabay, Paris (1987) 7.
Problem # 11006, *Amer. Math. Montly* **110** (2003) 340.
[7] N. Altshiller-Court, Theorem 453, *College Geometry*, Richmond (1936) 75-77.
E. Catalan, Théorème 21, *Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaire*, Dunod, Paris (1879) 46.
[8] E. Catalan, Théorème 20, *Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaire*, Dunod, Paris (1879) 44.
N. Altshiller-Court, Theorem 160, *College Geometry*, Richmond (1936) 88-89.
[9] L. Gaultier (de Tours), Les contacts des cercles, *Journal de l'École Polytechnique Cahier* **16** (1812) 124-214.
N. Altshiller-Court, Theorem 453, *College Geometry*, Richmond (1936) 205.
[10] Voir référence 9.
[11] F. G.-M., Théorème 124, *Exercices de Géométrie*, sixième édition (1920), Rééditions Jacques Gabay, Paris (1991) 283.
[12] *Leybourn's Mathematical repository* (New series) **6** tome I, p. 209.
Shirali Shailesh, On the generalized Ptolemy theorem, *Crux Mathematicorum*, **2**, vol. 22 (1996) 48-53.
[13] Kimberling Clark, Triangle Centers and Central Triangles, *Congressus Numerantium*, 129 (1988) 1-285.
http://faculty.evansville.edu/ck6/.