LE THÉORÈME DE SONDAT

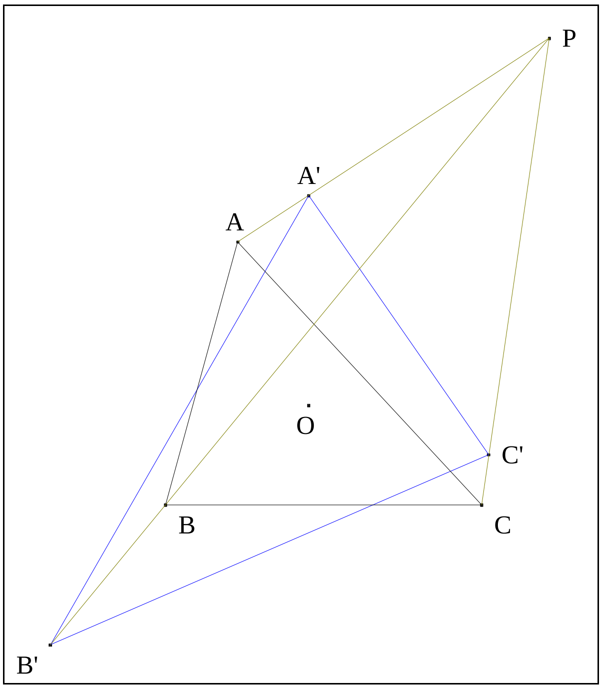
UNE PREUVE SIMPLE ET PUREMENT SYNTHÉTIQUE [1]

Jean - Louis AYME

Résumé. Nous présentons une preuve entièrement synthétique du théorème de Pierre Sondat ainsi qu'une brève note historique. Cette preuve simple est basée sur deux lemmes qui conduisent, en premier, au petit théorème de Sondat et, en second, au théorème de Sondat. Tous les résultats cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

LE SCHÉMA DE DÉMONSTRATION

1. Lemme 1



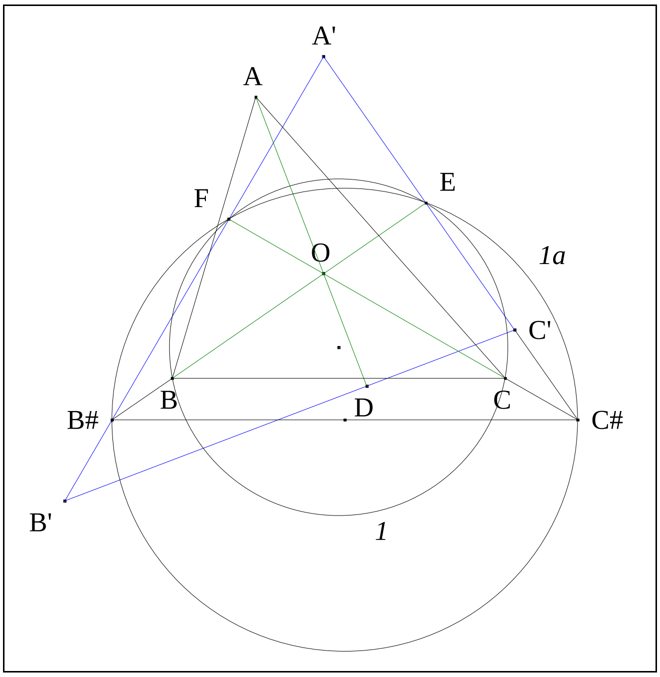
Hypothèses : ABC, A'B'C' deux triangles bilogiques (cf. Annexe 6) en position générale,
O le centre commun d'orthologie de ABC et A'B'C'
et P le point d'intersection des droites (AA') et (BB').

Conclusion : la droite (CC') passe par P.

Preuve :

---

[1] Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica* (Espagne) 27 (2007).



- Notons D, E, F les points d'intersection de (AO) et (B'C'), de (BO) et (C'A'), de (CO) et (A'B').

- Scolie : par hypothèse,

(AOD) ⊥ (B'C')	et	(A'O) ⊥ (BC)
(BOE) ⊥ (C'A')	et	(B'O) ⊥ (CA)
(COF) ⊥ (A'B')	et	(C'O) ⊥ (AB).

- Notons B#, C# les points d'intersection de (BE) et (A'B'), de (CF) et (A'C').

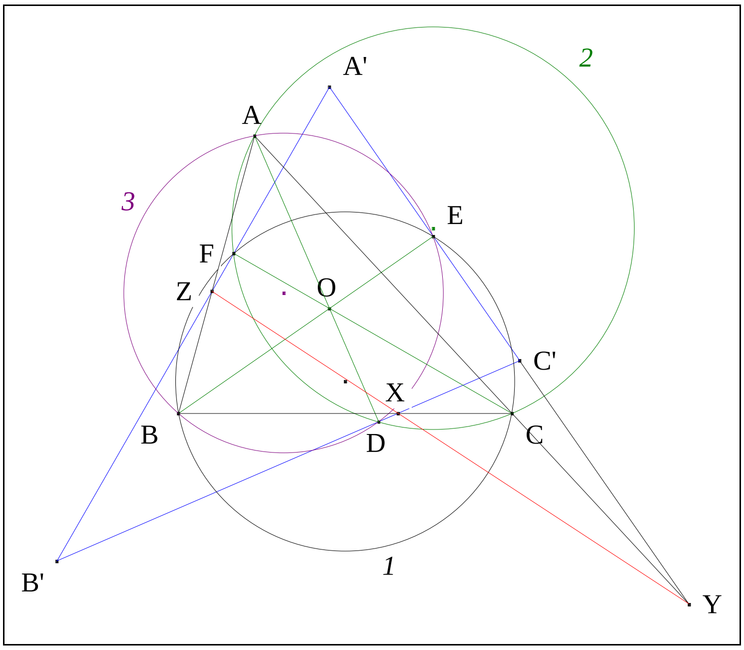
- Nous avons : O est l'orthocentre du triangle A'B#C# ;
  en conséquence, (B#C#) ⊥ (A'O) ;
  par hypothèse, (A'O) ⊥ (BC) ;
  il s'en suit que, (B#C#) // (BC).

- Scolie : le cercle de diamètre [B#C#] passe par E et F.

- Notons *1*a ce cercle.

- Conclusion partielle : par une réciproque du théorème de Reim (cf. Annexe 2) appliquée à *1*a, les points B, C, E et F sont cocycliques.

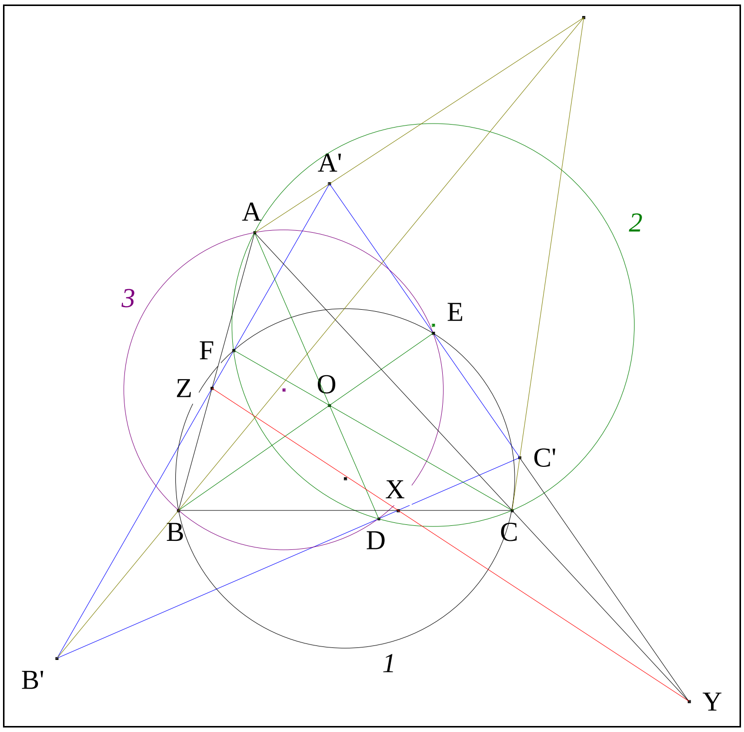
- Notons *1* ce cercle.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que les points C, A, F et D sont cocycliques
  les points A, B, D et E sont cocycliques.

- Notons *2*, *3* ces deux derniers cercles
  et X, Y, Z les points d'intersection de (B'C') et (BC), de (C'A') et (CA), de (A'B') et (AB).

- D'après un théorème de Dergiades (cf. Annexe 3), les points X, Y et Z sont alignés.

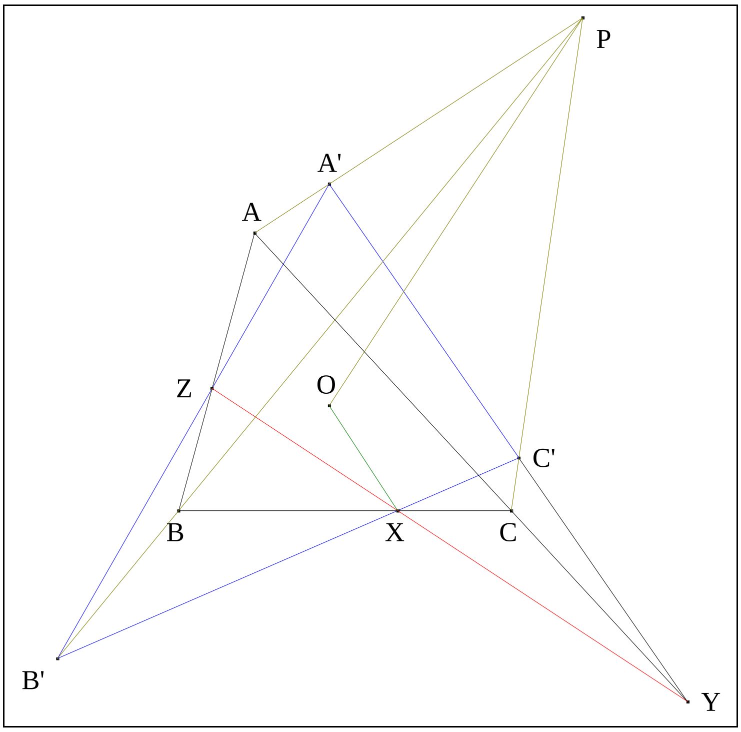


- D'après Le théorème des deux triangles de Desargues (cf. Annexe 4),
  (XYZ) étant l'axe de perspective de ABC et A'B'C', P est le centre de perspective de ABC et A'B'C'.

- Conclusion : la droite (CC') passe par P.

Énoncé traditionnel :	deux triangles bilogiques sont perspectifs.
Le résultat à retenir :	étant donné deux triangles bilogiques en situation générale, deux sommets de l'un et leurs projetés sur les côtés correspondants de l'autre, sont cocycliques.

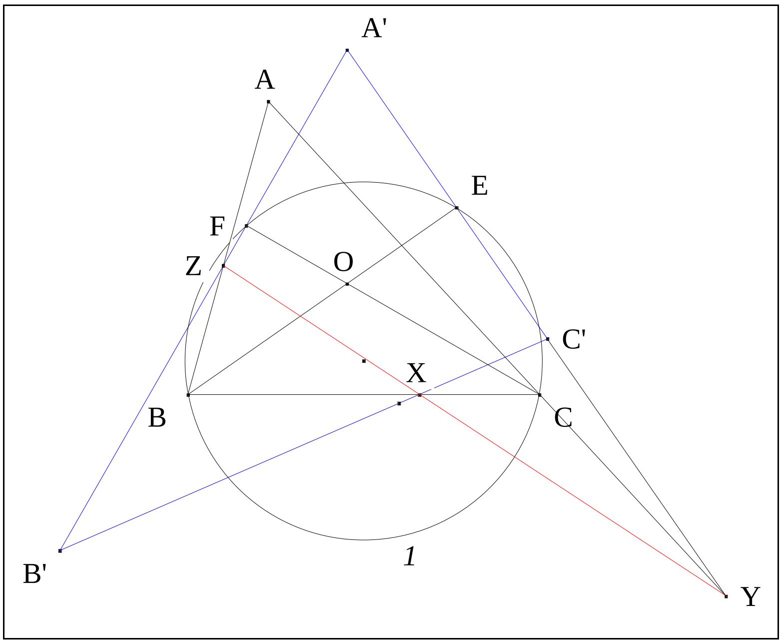
2. Lemme 2



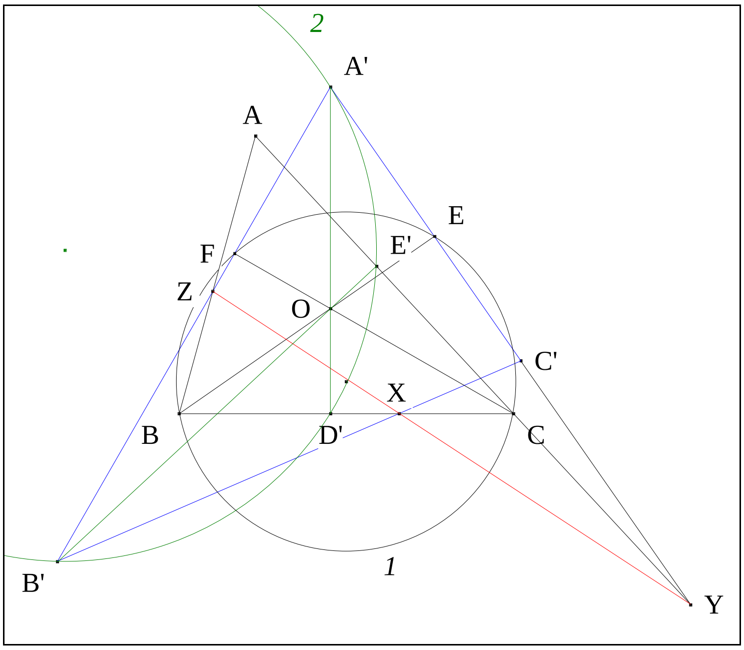
Hypothèses :	ABC, A'B'C'	deux triangles bilogiques en position générale,
	O	le centre commun d'orthologie de ABC et A'B'C',
	P	le centre de perspective de ABC et A'B'C',
et	(XYZ)	l'axe de perspective de ABC et A'B'C'.

Conclusion : les droites (OX) et (AA'P) sont perpendiculaires.

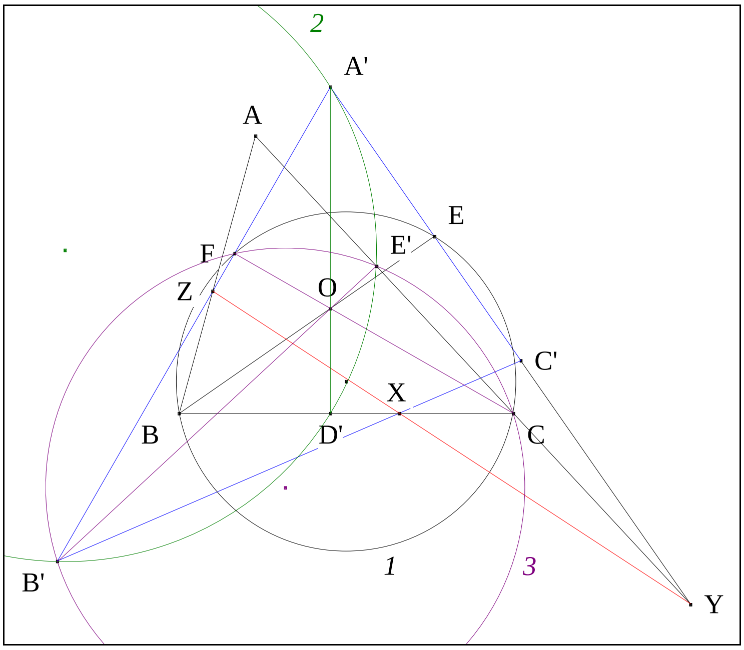
Preuve :



- Notons E, F les points d'intersection de (BO) et (C'A'), de (CO) et (A'B').
- D'après le lemme 1, les points B, C, E et F sont cocycliques.
- Notons *1* ce cercle.

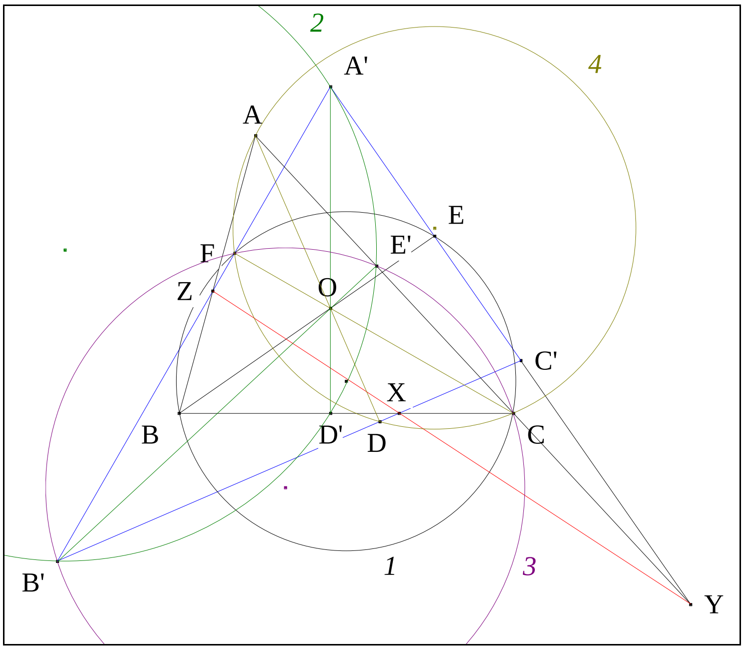


- Notons D', E' les points d'intersection de (A'O) et (BC), de (B'O) et (CA).
- D'après le lemme 1, les points A', B', D' et E' sont cocycliques.
- Notons *2* ce cercle.
- Puissance du point O par rapport au cercle *2*, $\overline{OA'}.\overline{OD'} = \overline{OB'}.\overline{OE'}$.



- Notons $\quad 3 \quad$ le cercle de diamètre [B'C] ; il passe par F et E'.

- Puissance du point O par rapport au cercle *3*, $\quad \overline{OB'}.\overline{OE'} = \overline{OC}.\overline{OF}$.

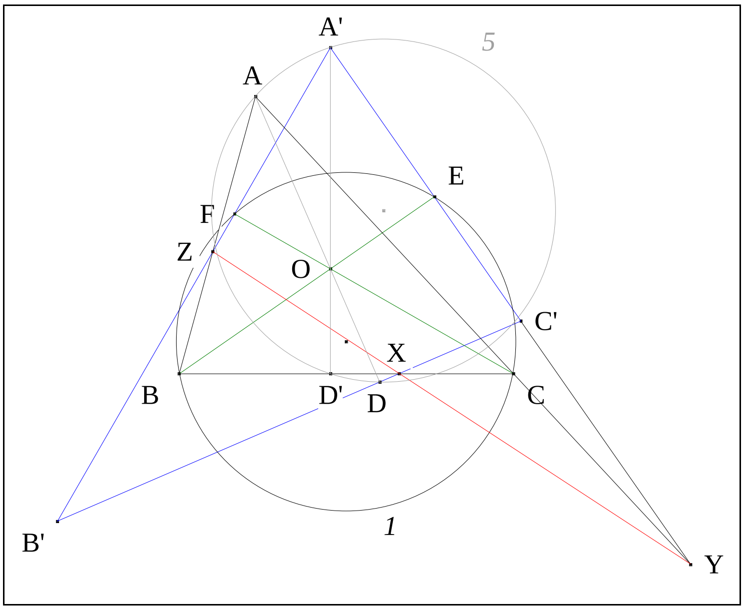


- Notons $\quad$ D $\quad$ le point d'intersection de (AO) et (B'C')

- D'après le lemme 1, $\quad$ les points A, C, F et D sont cocycliques.

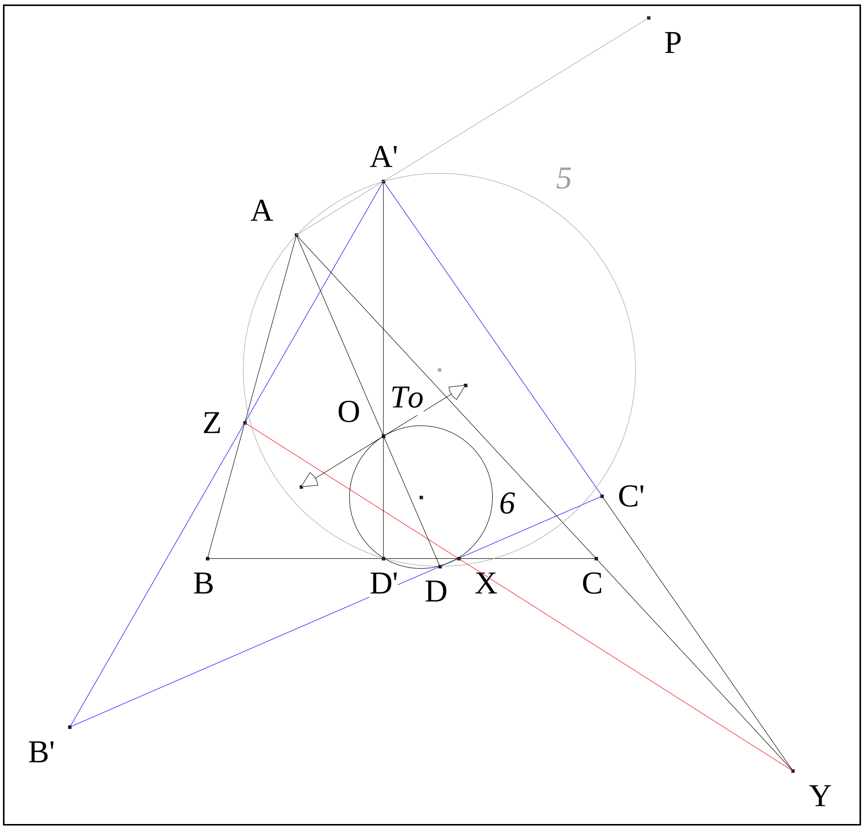
- Notons $\quad 4 \quad$ ce cercle.

- Puissance du point O par rapport au cercle *4*, $\quad \overline{OC}.\overline{OF} = \overline{OA}.\overline{OD}$;
  par transitivité de la relation =, $\quad \overline{OA'}.\overline{OD'} = \overline{OA}.\overline{OD}$.



- Conclusion partielle : les points A, A', D et D' sont cocycliques.

- Notons *5* ce cercle.



- Scolie : le cercle de diamètre [OX] passe par D et D'.

- Notons *6* ce cercle
  et To la tangente à *6* en O.

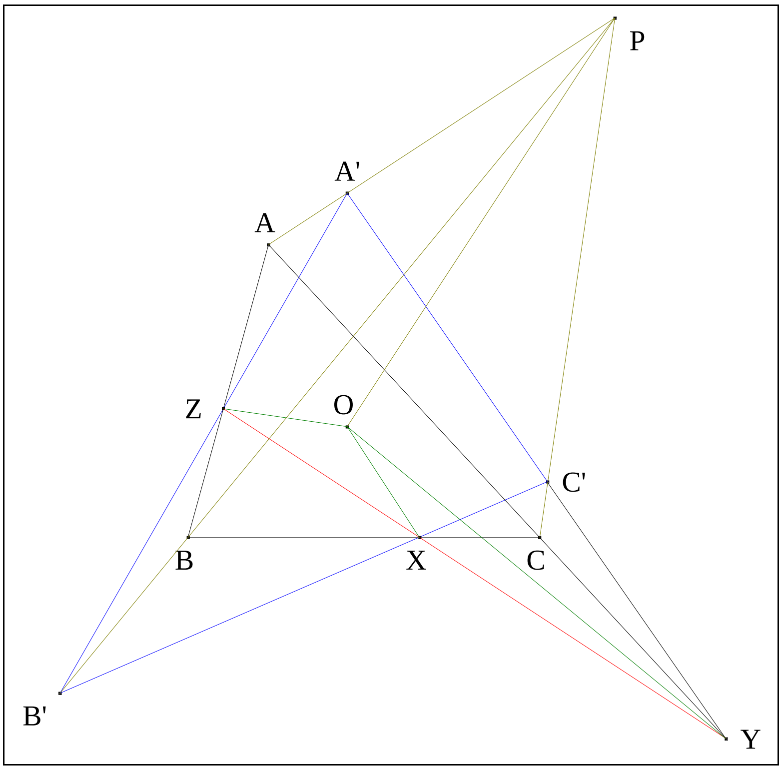
- Par définition d'une tangente, (OX) ⊥ To.

- Dans un cas particulier du théorème de Reim (cf. Annexe 1) appliqué à *5* et *6*, To // (AA') ;

en conséquence, (OX) ⊥ (AA').

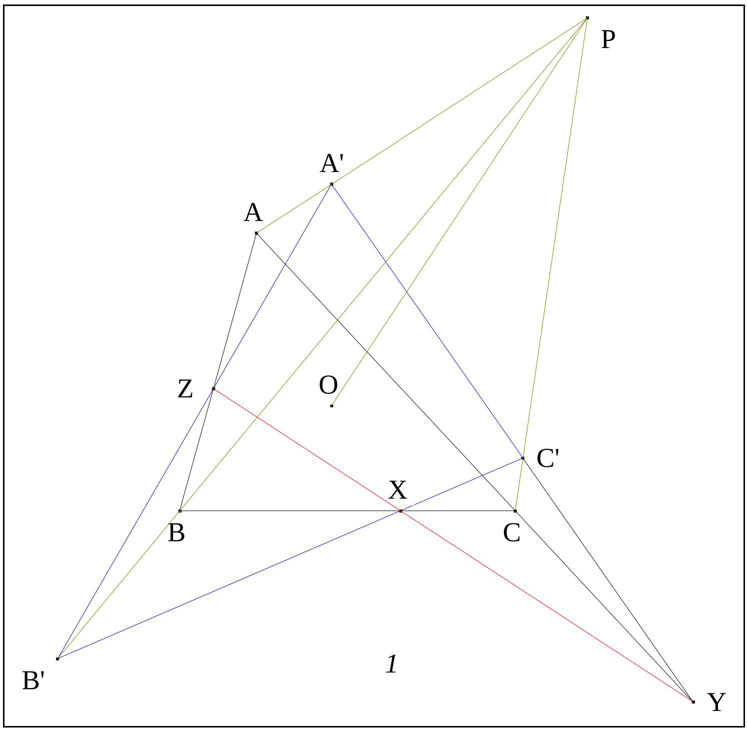
- Conclusion : les droites (OX) et (AA'P) sont perpendiculaires.

Scolie : deux autres perpendicularités



- Mutatis mutandis, nous montrerions que les droites (OY) et (BB'P) sont perpendiculaires
les droites (OZ) et (CC'P) sont perpendiculaires.

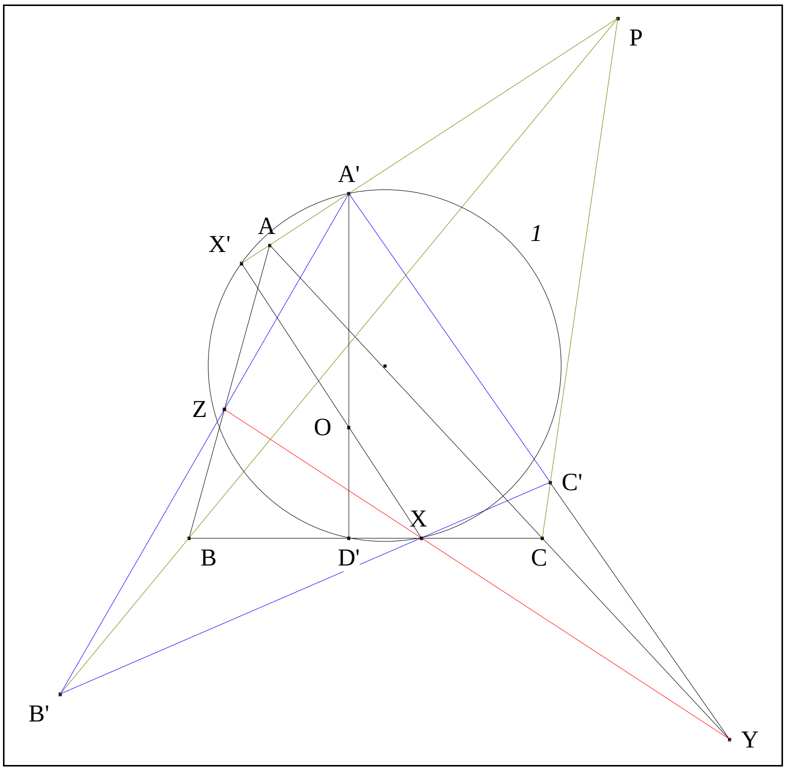
3. Le petit théorème de Sondat



Hypothèses :	ABC, A'B'C'	deux triangles bilogiques en position générale,
	O	le centre commun d'orthologie de ABC et A'B'C',
	P	le centre de perspective de ABC et A'B'C',
et	(XYZ)	l'axe de perspective de ABC et A'B'C'.

Conclusion : les droites (OP) et (XYZ) sont perpendiculaires.

Preuve :

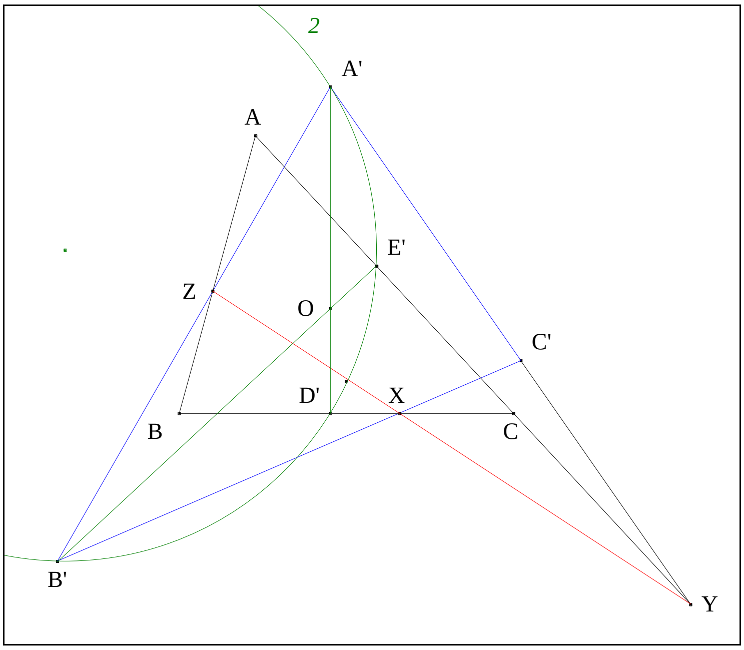


- Notons D' le point d'intersection de (A'O) et (BC),
  et X' le point d'intersection de (OX) et (PAA').

- Scolie : le cercle de diamètre [A'X] passe par D' et X'.

- Notons *1* ce cercle.

- Puissance du point O par rapport au cercle *1*, $\overline{OX}.\overline{OX'} = \overline{OA'}.\overline{OD'}$.

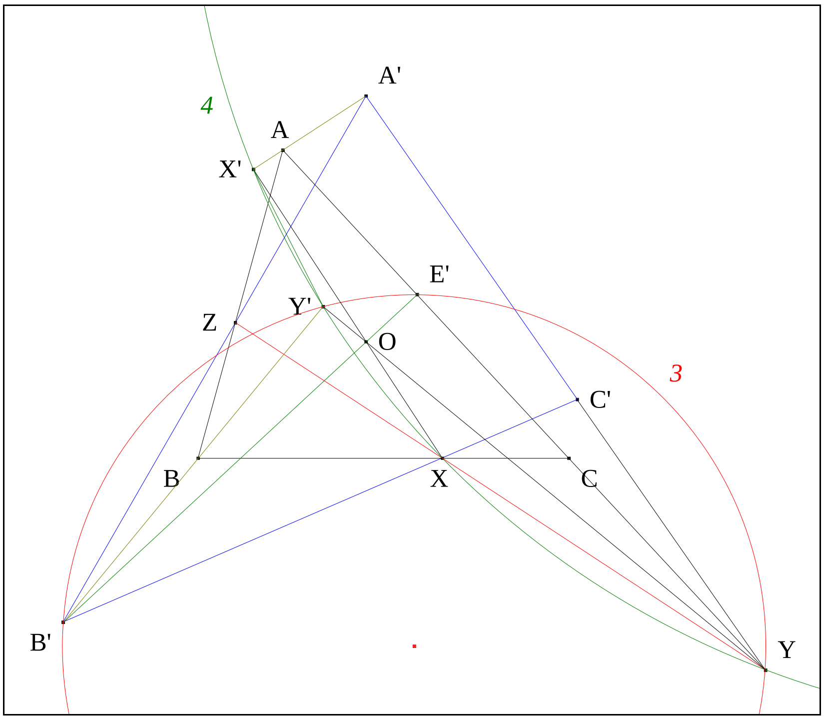


- Notons E' le point d'intersection de (B'O) et (CA).

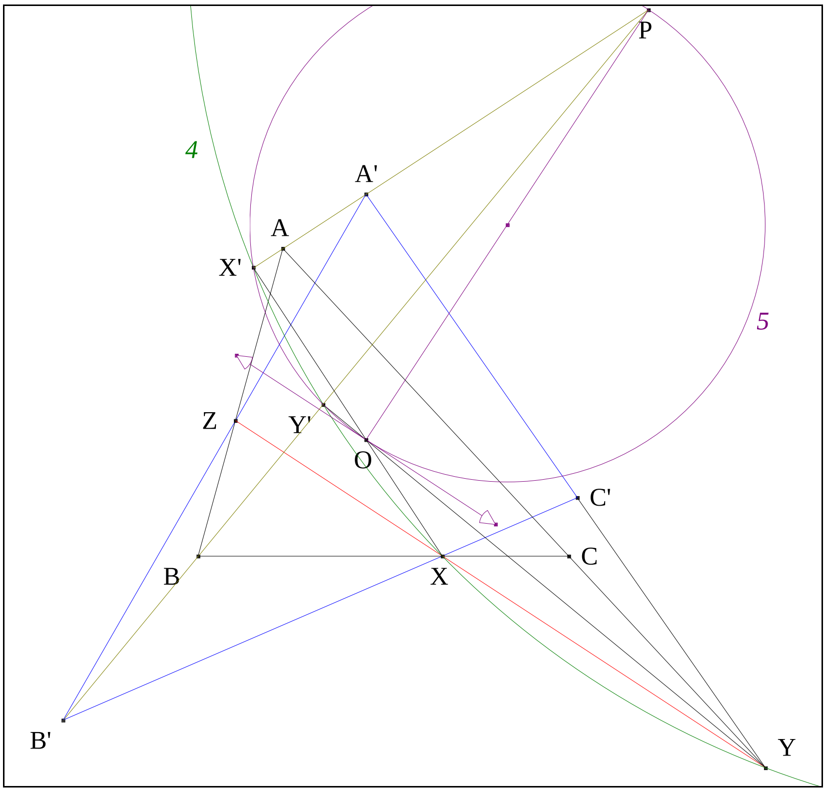
- D'après le lemme 1, les points A', B', D' et E' sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle.

- Puissance du point O par rapport au cercle *2*, $\overline{OA'}.\overline{OD'} = \overline{OB'}.\overline{OE'}$.



- Notons Y' le point d'intersection de (OY) et (BB').
- Scolie : le cercle de diamètre [B'Y] passe par E' et Y'.
- Notons *3* ce cercle.
- Puissance du point O par rapport au cercle *3*, $\overline{OB'}.\overline{OE'} = \overline{OY'}.\overline{OY'}$;
  par transitivité de la relation =, $\overline{OX}.\overline{OX'} = \overline{OY}.\overline{OY'}$.
- Conclusion partielle : les points X, X', Y et Y' sont cocycliques.
- Notons *4* ce cercle.



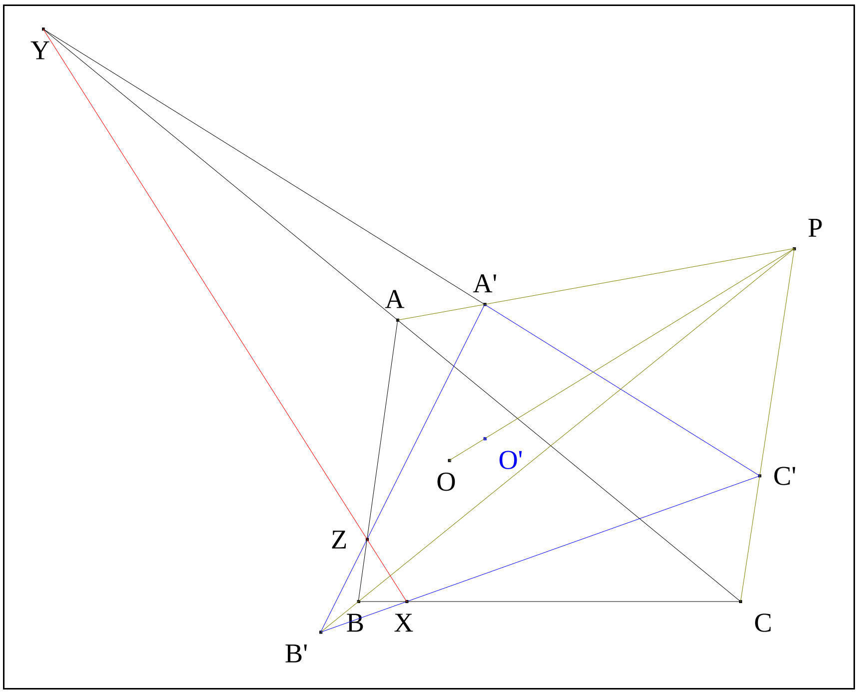
- Notons *5* le cercle de diamètre [OP] ; il passe par X' et Y' ;
  et To la tangente à *5* en O.

- Dans un cas particulier du théorème de Reim (cf. Annexe 1) appliqué à *4* et *5*, (XY) // To.

- Par définition d'une tangente, To ⊥ (OP) ;
  en conséquence, (XY) ⊥ (OP).

- Conclusion : les droites (OP) et (XYZ) sont perpendiculaires.

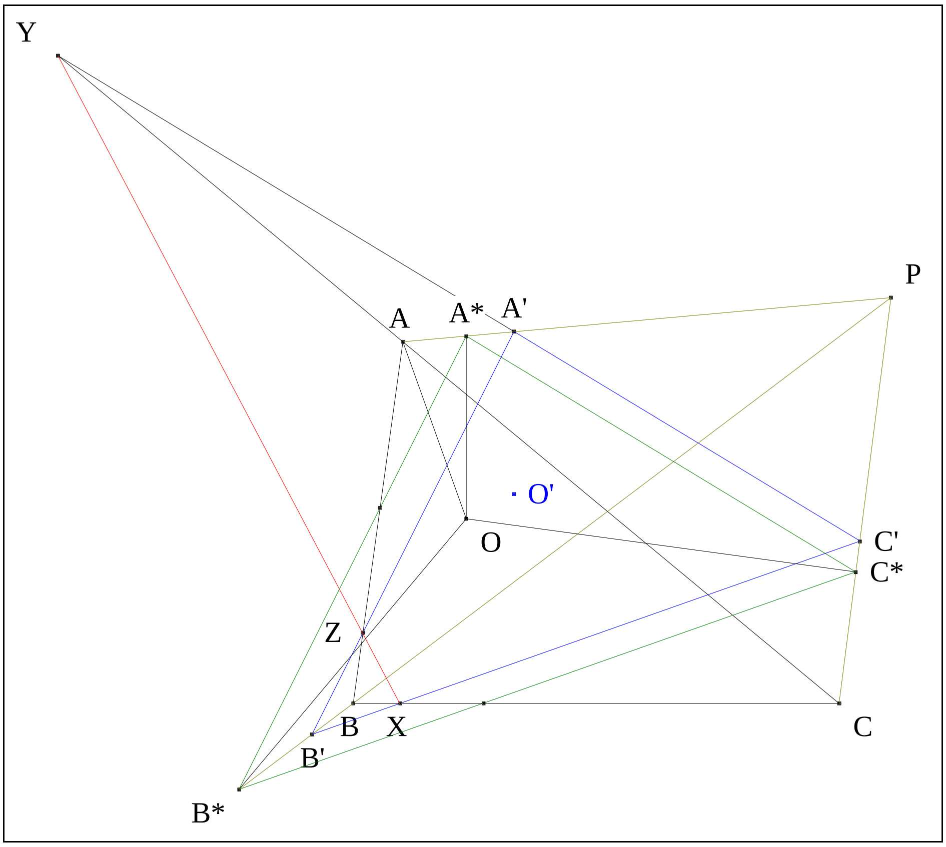
4. Le théorème de Sondat [1]



Hypothèses :	ABC, A'B'C'	deux triangles orthologiques et perspectifs en position générale,
	O	le centre d'orthologie de ABC relativement à A'B'C',
	O'	le centre d'orthologie de A'B'C' relativement à ABC,
	P	le centre de perspective de ABC et A'B'C',
et	(XYZ)	l'axe de perspective de ABC et A'B'C'.

Conclusion : la droite (OO') passe par P et est perpendiculaire à (XYZ).

Preuve :



- Scolie : les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en P.

- Partons du triangle ABC.

- Notons A* le point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) passant par O avec (PAA'),
  B* le point d'intersection de la parallèle à (A'B') passant par A* avec (PBB')
  et C* le point d'intersection de la parallèle à (B'C') passant par B* avec (PCC').

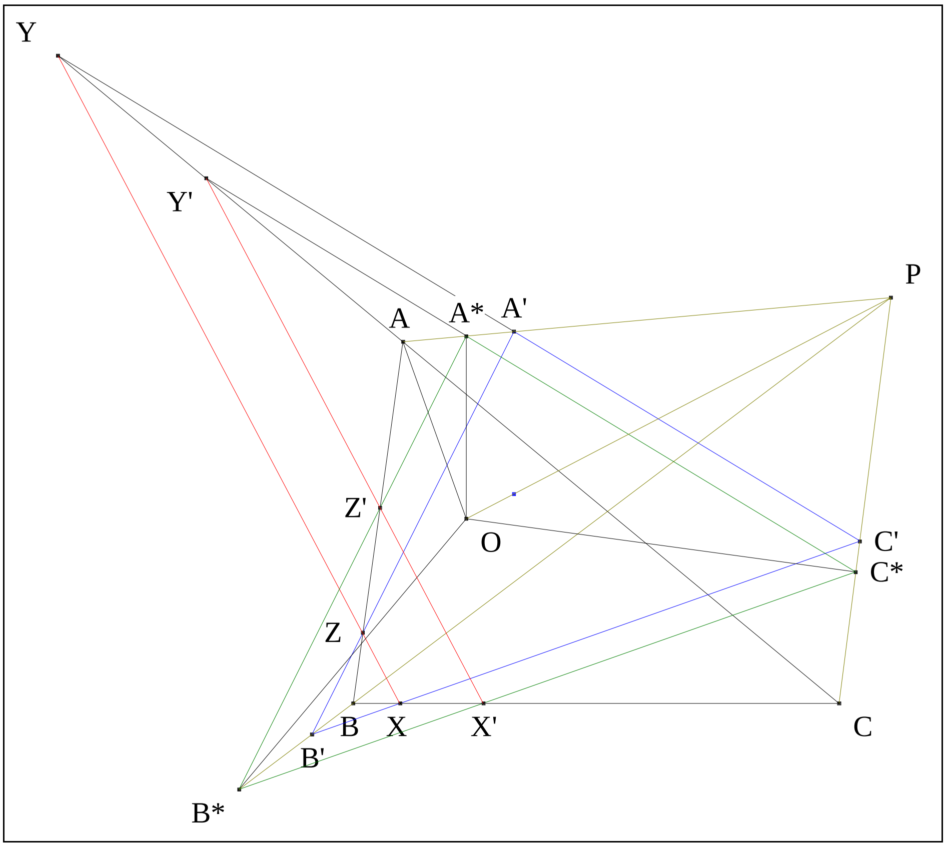
- D'après le théorème faible de Desargues appliqué aux triangles A*B*C* et A'B'C' en perspective de centre P, les droites (A*C*) et (A'C') sont parallèles. (cf Annexe 5)

- Scolie : A*B*C* et A'B'C' sont homothétiques et P est leur centre d'homothétie.

- Par hypothèse, (AO) $\perp$ (B'C') ;
  nous avons : (B'C') // (B*C*) ;
  en conséquence, (AO) $\perp$ (B*C*).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BO) $\perp$ (C*A*)
  (CO) $\perp$ (A*B*).

- Conclusion partielle : A*B*C* et ABC sont bilogiques et O est leur centre commun d'orthologie.

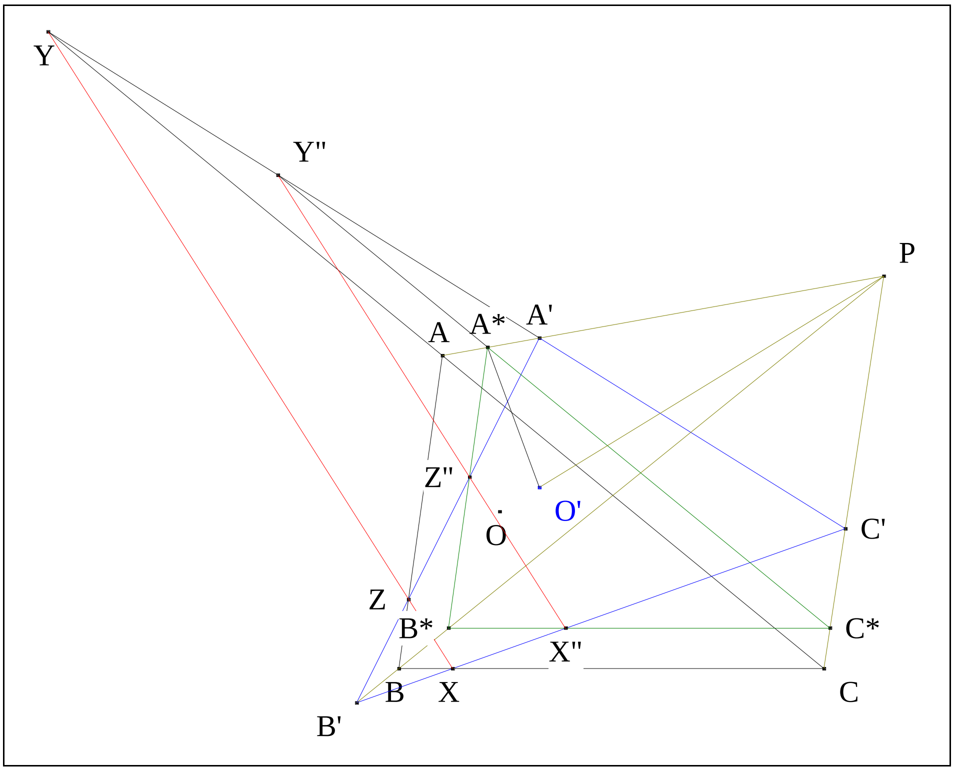


- Notons X', Y', Z' les points d'intersection de (B*C*) et (BC), de (C*A*) et (CA), de (A*B*) et (AB).

- D'après le théorème des deux triangles de Desargues (cf. Annexe 5),
  (X'Y'Z') est l'axe de perspective de A*B*C* et ABC.

- D'après "Le petit théorème de Sondat", (OP) ⊥ (X'Y'Z') ;
  d'après le résultat "Une parallèle à un axe de perspective" (cf. Annexe 7), (XYZ) // (X'Y'Z') ;
  en conséquence, (OP) ⊥ (XYZ).

- Conclusion partielle : les droites (OP) et (XYZ) sont perpendiculaires.



- Partons du triangle A'B'C'.

- Notons A* le point d'intersection de la perpendiculaire à (B'C') passant par O' avec (PAA'),
  B* le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par A* avec (PBB')
  et C* le point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par B* avec (PCC').

- Scolie : A*B*C* et ABC sont homothétiques et P est leur centre d'homothétie.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (1) A*B*C* et ABC sont bilogiques
  (2) O est leur centre commun d'orthologie.

- Notons X", Y", Z" les points d'intersection
  de (B*C*) et (B'C'), de (C*A*) et (C'A'), de (A*B*) et (A'B').

- D'après le théorème des deux triangles de Desargues (cf. Annexe 5),
  (X"Y"Z") est l'axe de perspective de A*B*C* et A'B'C'.

- D'après "Le petit théorème de Sondat", (O'P) ⊥ (X"Y"Z") ;
  d'après le résultat "Une parallèle à un axe de perspective" (cf. Annexe 7), (X"Y"Z") // (XYZ) ;
  en conséquence, (O'P) ⊥ (XYZ).

- Les droites (OP) et (O'P) étant perpendiculaires à la droite (XYZ), (OP) // (O'P).

- Conclusion partielle : d'après le postulat d'Euclide, les points O, O' et P sont alignés.

- Conclusion : la droite (OO') passe par P et est perpendiculaire à (XYZ).

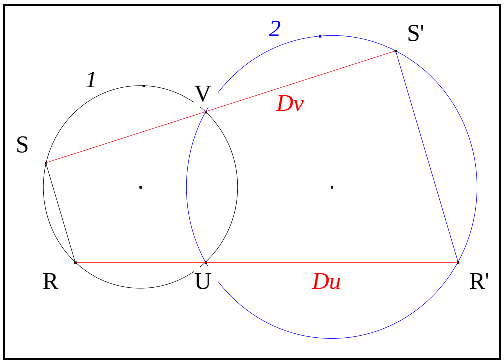
NOTE HISTORIQUE

Pierre Sondat a été professeur à Annecy (France) et est connu pour avoir publiés quelques articles remarquables dans les *Nouvelles Annales* de 1875 à 1880.

En 1894, il propose dans *L'intermédiaire des mathématiciens*, une conjecture qui, par la suite, deviendra le "théorème de Sondat". L'année suivante, dans la même revue, R. Sollertinsky [2] en donne une preuve projective difficile à comprendre.
Une preuve de ce résultat se trouverait aussi dans le livre *Parmi les plus belles figures de Géométrie dans l'espace* de Victor Thébault dans lequel il n'y a aucune figure.
En 1922, dans la revue *Mathesis*, Joseph Neuberg [3] donne une autre référence [4] du théorème de Sondat et présente une preuve projective de ce théorème qu'il attribue à Servais [5].
En 1924, Victor Thébault [6] généralise le théorème aux tétraèdres. En 1952, Thébault [7] en présente une preuve métrique du théorème de Sondat en recourant aux théorèmes de Ménélaüs et de Stewart, ainsi qu'une preuve de sa généralisation.
En 1994, Rina et Marius Mitrea [8] proposent à leur tour une solution purement vectorielle ainsi qu'Alexei Zaslavsky [9].

ANNEXE

1. Le théorème de Reim [10]

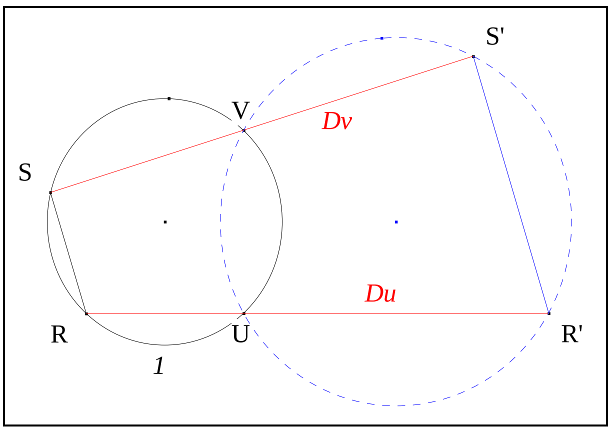


Hypothèses :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	U, V	les points d'intersection de *1* et *2*,
	*D*u	une droite passant par U,
	R, R'	les seconds points d'intersection de *D*u avec *1*, *2*,
	*D*v	une droite passant par V
et	S, S'	les seconds points d'intersection de *D*v avec *1*, *2*.

Conclusion : les droites (RS) et (R'S') sont parallèles.

Scolie : si, les points R et S coïncident alors, la tangente à *1* en R et (R'S') sont parallèles.

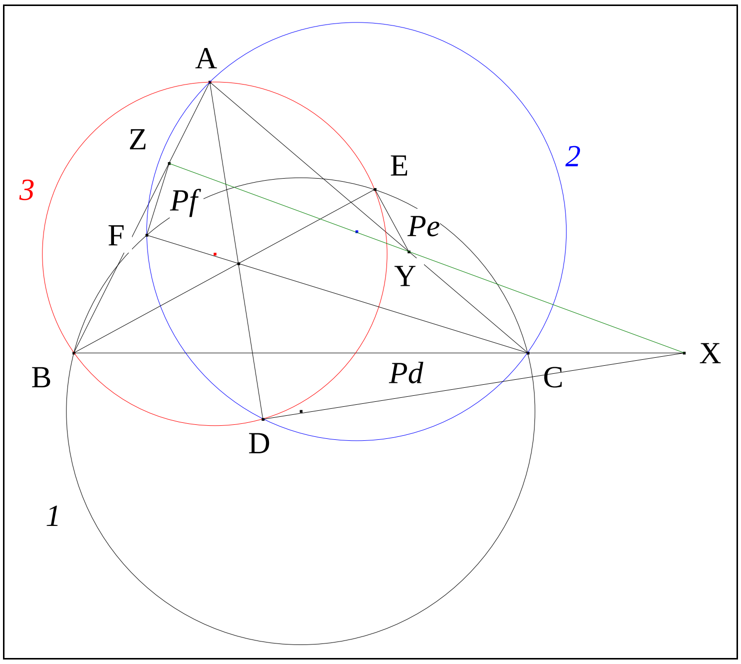
2. Une réciproque du théorème de Reim



Hypothèses :	*1*	un cercle sécant,
	U, V	deux points de *1*,
	*D*u, *D*v	deux droites passant par U, par V,
	R, S	les seconds points d'intersection de *D*u, *D*v avec *1*,
et	R', S'	deux points de *D*u, *D*v tels que (R'S') soit parallèle à (RS)

Conclusion : les points U, V, R' et S' sont cocycliques.

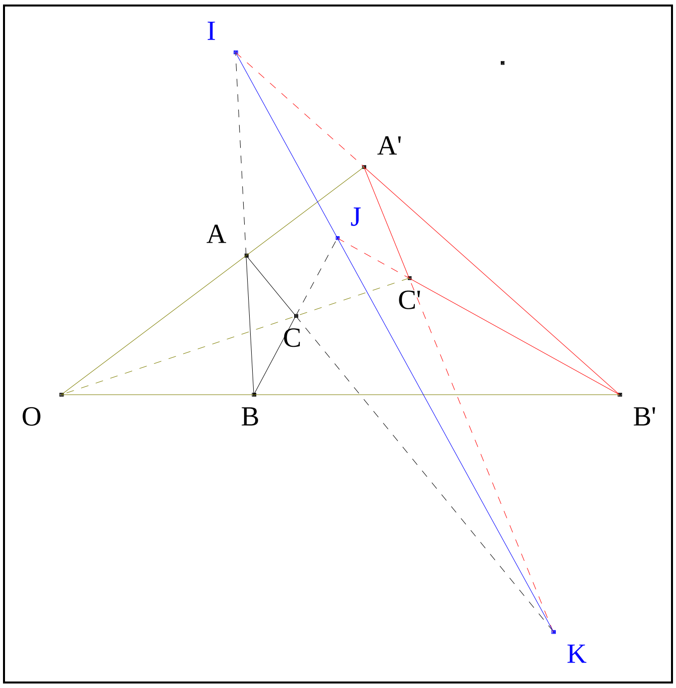
3. Un théorème de Dergiades [11] reformulé par l'auteur



Hypothèses :	ABC	un triangle,
	1, *2*, *3*	trois cercles passant par B et C, par C et A, par A et B,
	D, E, F	les seconds points d'intersection de *2* et *3*, de *3* et *1*, de *1* et *2*,
	*P*d , *P*e , *P*f	les perpendiculaires aux droites (AD), (BE), (CF) en D, E, F,
et	X, Y, Z	les points d'intersection de *P*d et (BC), de *P*e et (CA), de *P*f et (AB).

Conclusion : les points X, Y et Z sont alignés.

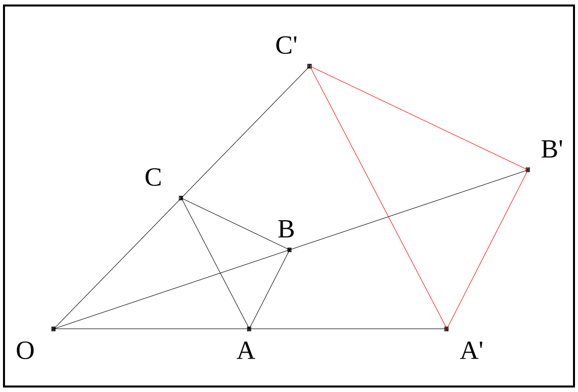
5. Le théorème des deux triangles de Desargues



Hypothèses : ABC un triangle,
A'B'C' un triangle tel que les droites (AA') et (BB') soient concourantes,
O le point de concours de (AA') et (BB'),
et I, J, K le point d'intersection de (AB) et (A'B'), de (BC) et (B'C'), de (CA) et (C'A').

Conclusion : (CC') passe par O *si, et seulement si*, les points I, J et K sont alignés.

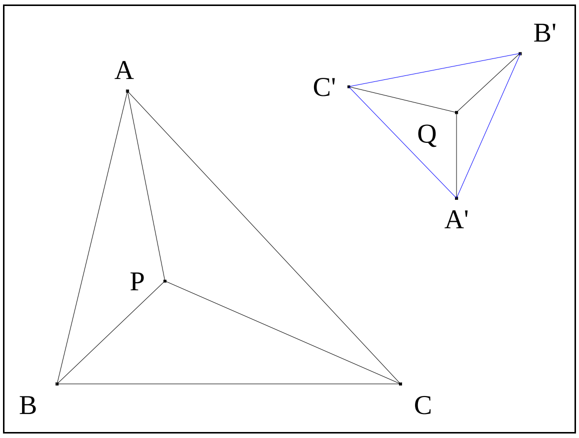
5. Le théorème faible de Desargues



Hypothèses : ABC un triangle,
et A'B'C' un triangle tel que (1) (AA') et (BB') soient concourantes en O
(2) (AB) soit parallèle à (A'B')
(3) (BC) soit parallèle à (B'C')

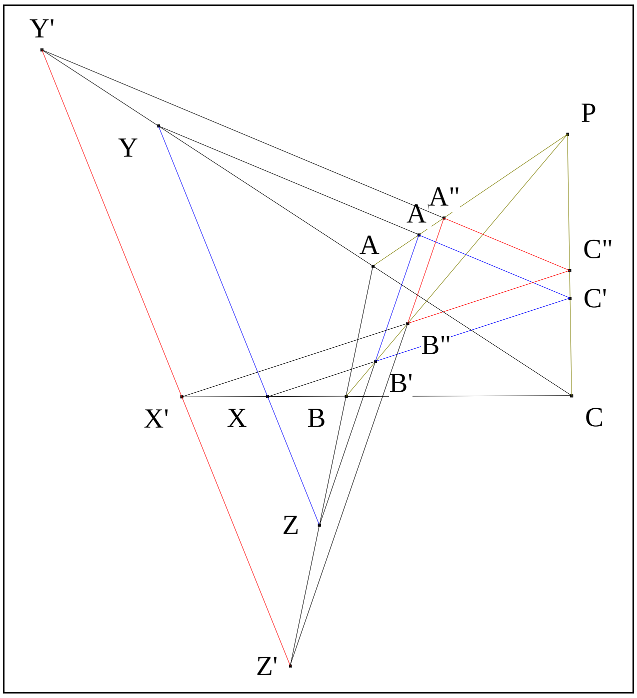
Conclusion : (CC') passe par O *si, et seulement si*, (AC) est parallèle à (A'C').

6. Deux triangles orthologiques



Définitions :	le triangle ABC est orthologique au triangle A'B'C' si les perpendiculaires issues des sommets de ABC sur les côtés correspondants de A'B'C' sont concourantes. Ce point de concours, noté P, est le centre d'orthologie de ABC relativement à A'B'C'. La relation "est orthologique à" étant symétrique, les perpendiculaires issues des sommets de A'B'C' sur les côtés correspondants de ABC sont aussi concourantes. Ce point de concours, noté Q, est le centre d'orthologie de A'B'C' relativement à ABC. D'une façon générale, nous dirons que ABC et A'B'C' sont orthologiques. Lorsque les deux centres d'orthologie sont confondus, nous dirons que les triangles sont bilogiques.

7. Une parallèle à un axe de perspective



Hypothèses :	ABC, A'B'C'	deux triangles perspectifs en position générale,
	P	le centre de perspective de A'B'C' et ABC,
	(XYZ)	l'axe de perspective de A'B'C' et ABC,
	A"B"C"	un triangle homothétique et en perspective de centre P avec A'B'C'
et	(X'Y'Z')	l'axe de perspective de A"B"C" et ABC.

Conclusion : (X'Y'Z') est parallèle à (XYZ).

RÉFÉRENCES

[1] Sondat P., Question 38, *L'intermédiaire des mathématiciens* (1894) 10.
[2] Sollertinsky R., *L'intermédiaire des mathématiciens* (1895) 94 ou 44.
[3] Neuberg J., Bibliographie du triangle et du tétraèdre, *Mathesis* (1922) 163.
[4] Fuhrmann, Dissertation, Königsberg (1902).
[5] Servais Cl., *Nouvelles Annales* (1919) 260.
[6] Thébault V., *Bulletin* de l'Académie royale de Belgique (1921) 57.
[7] Thébault V., Perspective and orthologic triangles and tetrahedrons, *Monthly*, 59, vol. 1 (1952) 24-28.
[8] Mitrea D. and M., A Generalization of a Theorem of Euler, *Monthly*, 101, vol. 1 (1994) 55-58.
[9] Zaslavsky A., http://garciacapitan/auna.com/
[10] F. G.-M., Théorème 124, *Exercices de Géométrie*, 6-ième éd. (1920), Rééd. J. Gabay, Paris (1991) 283.
[11] Dergiades N., Othogonal colinearity theorem, Message *Hyacinthos* # 6466 du 02/02/2003.