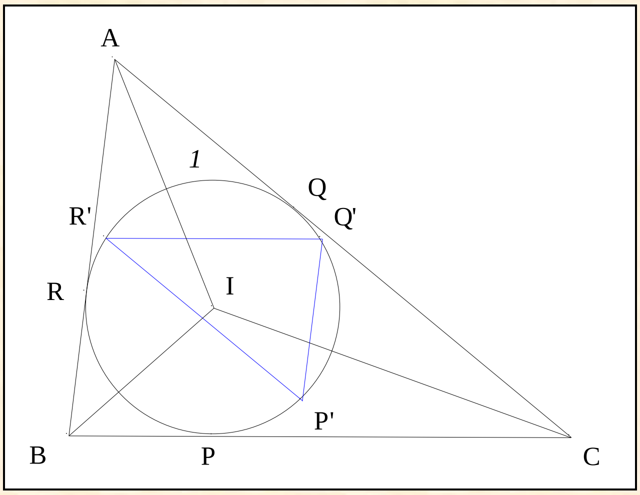
LE TRIANGLE RÉFLÉCHI

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'article présente le triangle réfléchi en relation avec les triangles de contact, orthique, médian, de A. Pelletier et I-cévien. Un résultat concernant la tangente au cercle inscrit… passant par le premier point de Schroeter… est démontré.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement

Sommaire

[1] St.-Denis, Île de la Réunion (France).

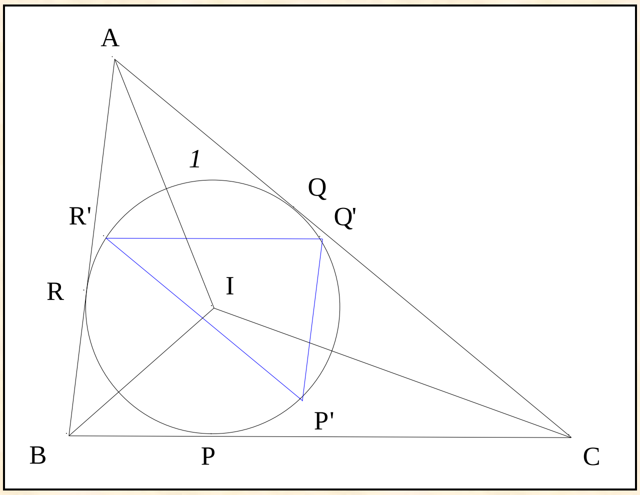
A. LE TRIANGLE RÉFLÉCHI

À PARTIR

DU TRIANGLE DE CONTACT

VISION

Figure :



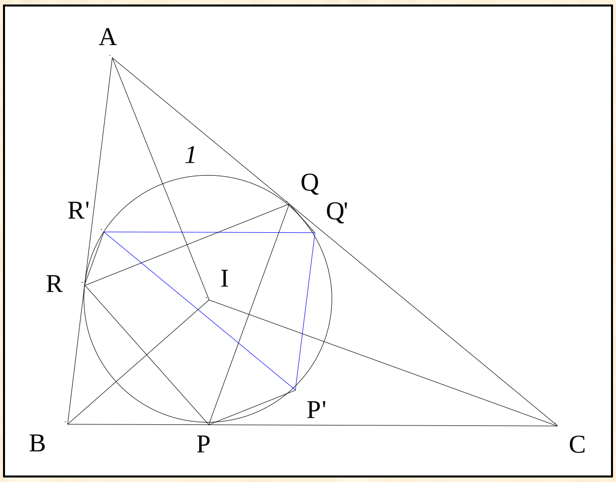
Traits : ABC un triangle non isocèle,
A', B', C' les milieux resp. de [BC], [CA], [AB],
1 le cercle inscrit de ABC,
I le centre de *1*,
PQR le triangle de contact de ABC,
et P', Q', R' les symétriques de P, Q, R resp. par rapport à (AI), (BI), (CI).

Donné : les triangles P'Q'R et ABC sont homothétiques.[2]

VISUALISATION

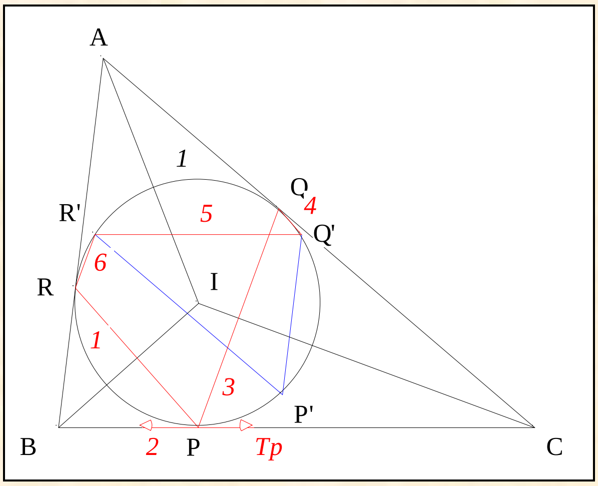
---

[2] ABC is a triangle D'E'//AC (Interesting), *Mathlinks* du 30/11/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=380345.



- Par hypothèse, (PP') ⊥ (AI) ;
  Nous savons que (AI) ⊥ (QR) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (PP') // (QR).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (QQ') // (RP)
  (RR') // (PQ).



- Notons *Tp* la tangente (BC) à *1* en P.

- D'après Carnot "Pentagramma mysticum" (CF. Annexe 1),
  la droite à l'infini est la pascale de l'hexagone dégénéré RP *Tp* QQ'R'R.

- **Conclusion partielle :** (Q'R') // (BC).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (R'P') // (CA)
  (P'Q') // (AB).

- **Conclusion :** par définition, les triangles P'Q'R' et ABC sont homothétiques.

Scolie : P'Q'R' est "le triangle réfléchi de ABC".

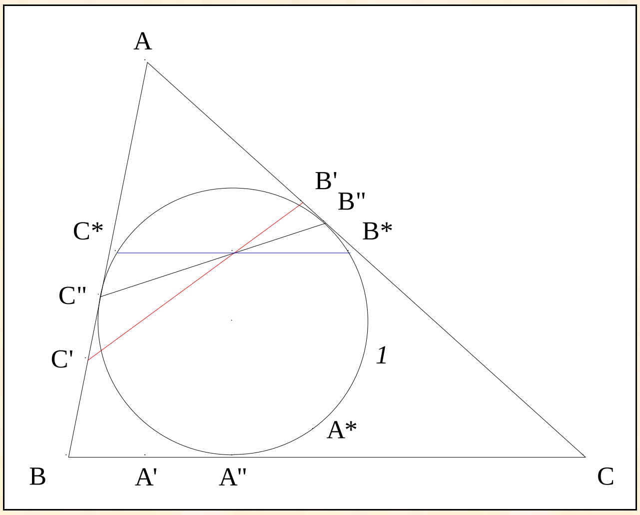
Commentaire : dans cette situation,
les sommets de P'Q'R' sont resp. les symétriques des sommets de PQR respectivement par rapport aux A, B, C-bissectrices intérieures de ABC.

Nous pouvons dire que nous sommes en présence d'une "réflexion sommitale".

B. LE TRIANGLE RÉFLÉCHI
À PARTIR
DU TRIANGLE ORTHIQUE
OU
LE PROBLÈME 6 DES O.I.M. DE 2000

VISION

Figure :

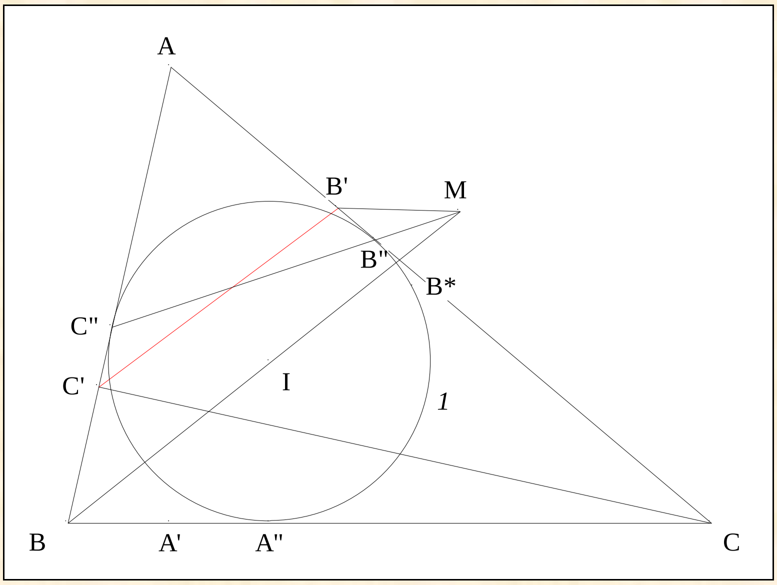


Traits :	ABC	un triangle acutangle
	A'B'C'	le triangle orthique de ABC,
	1	le cercle inscrit de ABC,
	A"B"C"	le triangle de contact de ABC
et	A*B*C*	le triangle réfléchi de ABC.

Donné : (B*C*) est symétrique de (B'C') par rapport à (B"C"). [3]

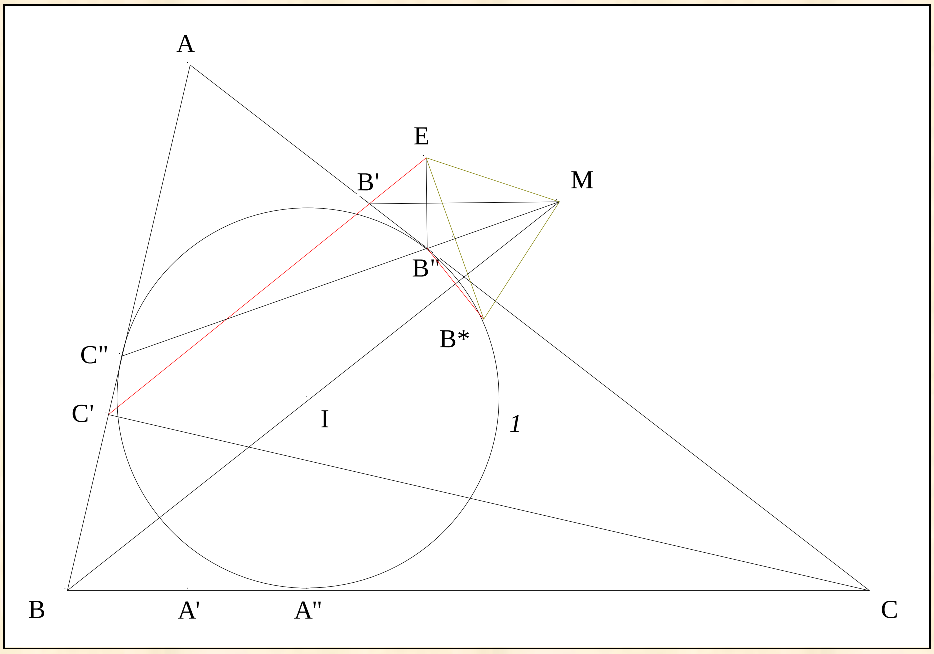
[3] Emelyanov L. and T., I.M.O. (2000), Day 2, Problem 6.
Very very nice, *Mathlinks* du 19/10/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=351094.

VISUALISATION



- Notons I le centre de *1*,
  et M le point d'intersection de (BI) et (B"C").

- **Conclusion partielle :** d'après "Une bissectrice" (Cf. Appendice 1),
  (B'M) est la B'-bissectrice extérieure du triangle B'CC'.



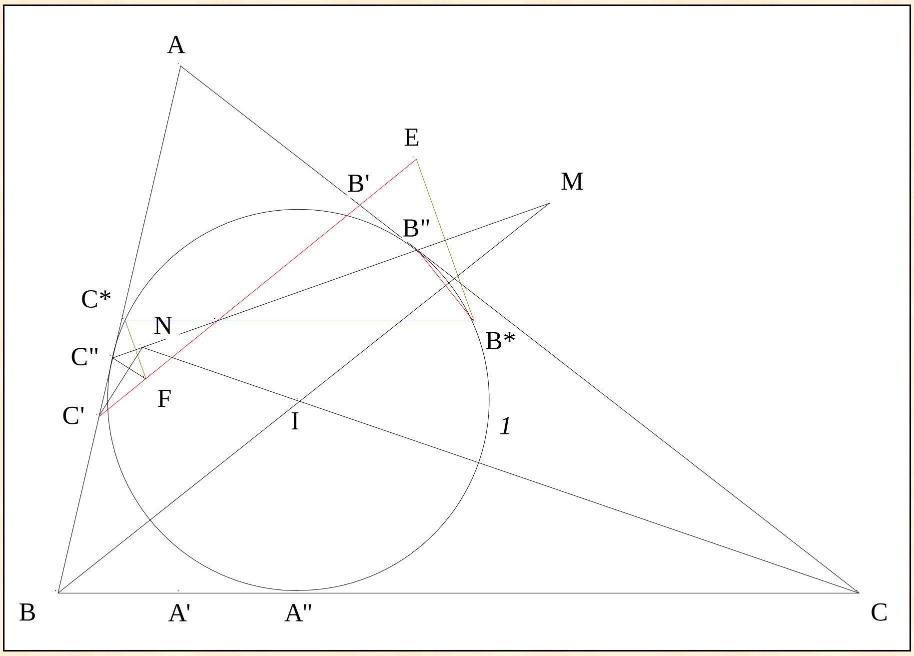
- **Scolie :** B* le symétrique de B" par rapport à (BI).

- Notons E le symétrique de B" par rapport à (B'M).

- **Scolies :**
  (1) E est sur (B'C') et B* est sur *1*
  (2) (B'M) est la médiatrice de [B"E]
  (3) ME = MB" = MEB*
  (4) le triangle MEB* est M-isocèle.

- Le triangle MEB* étant M-isocèle, (MB") est la médiatrice de [EB*].

- **Conclusion partielle :** B* est le symétrique de E par rapport à (B"C").



- **Scolie :** C* le symétrique de C" par rapport à (CI).

- Notons N le point d'intersection de (CI) et (B"C").
  et F le symétrique de C" par rapport à (C'N)

- Mutatis mutandis, nous montrerions que C* est le symétrique de F par rapport à (B"C").

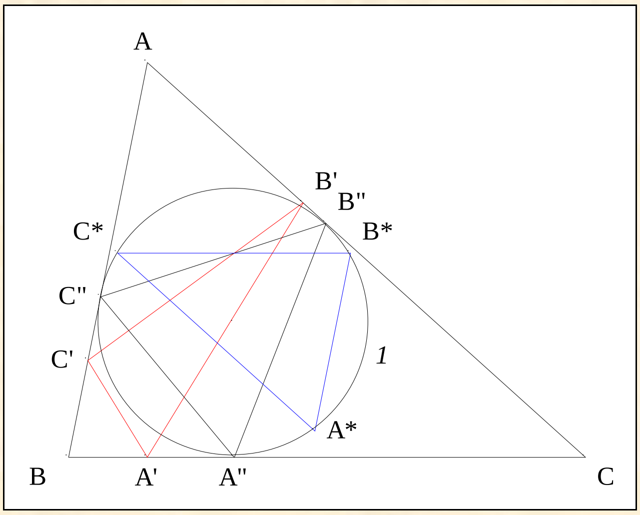
- **Conclusion :** (B*C*) est symétrique de (B'C') par rapport à (B"C").

Scolies :

(1) (B'C'), (B"C") et (B*C*) sont concourantes.

(2) Le résultat est inchangé lorsque le triangle est quelconque.

(3) Vision triangulaire



- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que (C'A'), (C"A") et (C*A*) sont concourantes
(A'B'), (A"B") et (A*B*) sont concourantes.

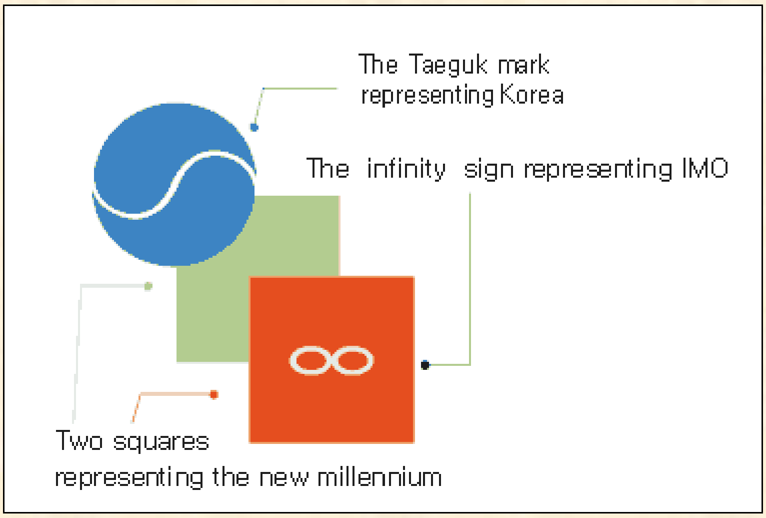
Commentaire : dans cette situation,
les "côtés" de A*B*C* sont les symétriques des "côtés" de A'B'C' par rapport aux "côtés" de A"B"C" .
Nous pouvons dire que nous sommes en présence d'une "réflexion latérale".

Note historique : ce résultat présenté par Lev et Tatiana Emelyanov de Kalouga (Russie centrale) situé à 188 km au sud-ouest de Moscou a été retenu pour le second jour comme problème 6 aux O.I.M. de 2000 qui ont eu lieu du 13 au 25 juillet à Taejon, cinquième ville de la république de Corée du Sud, situé à 150 km au sud de Séoul. Cette compétition a rassemblé 82 pays participants et 461 compétiteurs dont 31 filles.

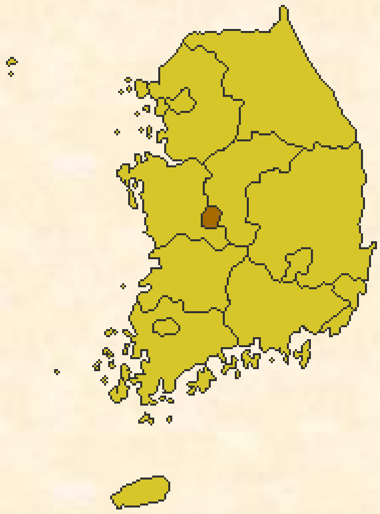
Problem 6.

A1A2A3 is an acute-angled triangle. The foot of the altitude from Ai is Ki and the incircle touches the side opposite Ai at Li. The line K1K2 is reflected in the line L1L2. Similarly, the line K2K3 is reflected in L2L3 and K3K1 is reflected in L3L1. Show that the three new lines form a triangle with vertices on the incircle.

Le logo de cette O.I.M. a été le suivant avec son explication



Situation de Taejon ou Daejeon (en hangul : 대전 en caractères chinois : 大田)
Rapplelons que Daejeon signifie *grand champ* en coréen.



C. LE TRIANGLE RÉFLÉCHI

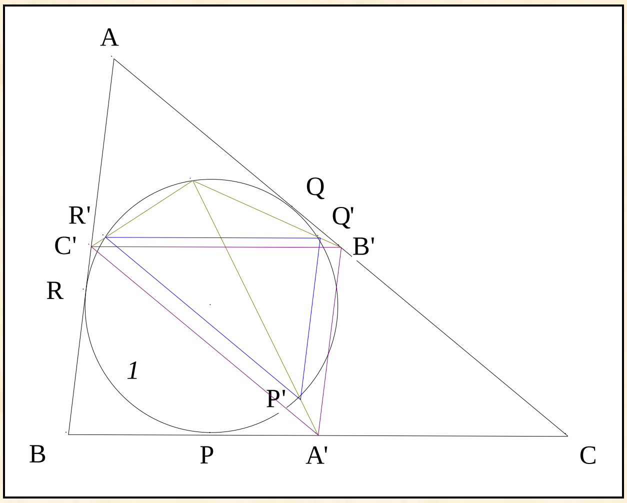
ET

LE TRIANGLE MÉDIAN

1. Le problème 2 des O.I.M. de 1982

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle non isocèle,
	A'B'C'	le triangle médian de ABC,
	1	le cercle inscrit de ABC,
	PQR	le triangle de contact de ABC
et	P'Q'R'	le triangle réfléchi de ABC.

Donné : (A'P'), (B'Q') et (C'R') sont concourantes.[4]

VISUALISATION

- **Scolie :** A'B'C' et P'Q'R' sont homothétiques et non isométriques.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème faible" de Desargues, (A'P'), (B'Q') et (C'R') sont concourantes.

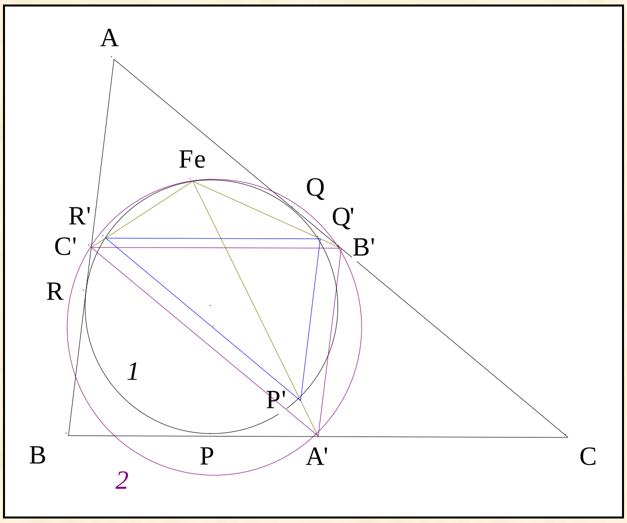
Note historique : ce résultat présenté par Jan van de Craats (Pays-Bas) a été retenu pour le premier jour comme problème 2 aux O.I.M. de 1982 qui ont eu lieu du 5 au 14 juillet à Budapest (Hongrie). Cette compétition a rassemblé 30 pays participants et 119 compétiteurs dont 2 filles.

Problem 2.

A non-isosceles triangle $A1A2A3$ is given with sides $a1; a2; a3$ (ai is the side opposite Ai). For all $i = 1; 2; 3; Mi$ is the midpoint of side ai, and Ti is the point where the incircle touches side ai. Denote by Si the reflection of Ti in the interior bisector of angle Ai. Prove that the lines $M1\ S1; M2S2$ and $M3S3$ are concurrent.

Commentaire : ce problème considérer comme le plus difficile de la compétition, ne demandait pas de préciser la nature du point de concours.

Scolie : nature du point de concours ou le résultat de Georges Fontené[5]



- Notons *2* le cercle d'Euler de ABC ; il passe par A', B' et C' ;

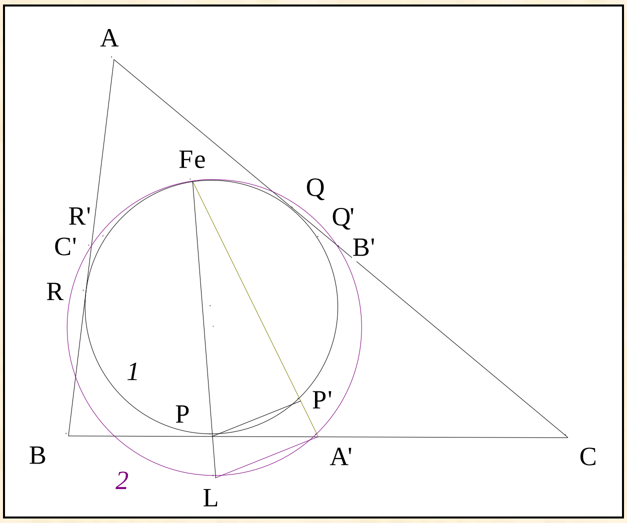
---

[4] O.I.M. (1982) Problème 2.
nice geometry (from IMO) [related to the Feuerbach point], *Mathlinks* du 18/10/2003 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=4038.

[5] Fontené G., Sur le théorème de Feuerbach, *Nouvelles Annales*, Séries 4, t. **7** (avril 1907) 158-163 ;
http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.

et Fe le point de Feuerbach.

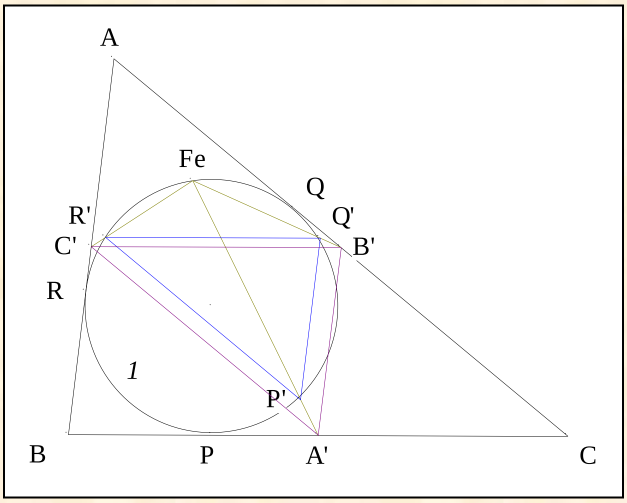
- D'après "Le théorème de Feuerbach" [6], *1* et *2* sont tangent en Fe.



- Notons A" le pied de la A-hauteur de ABC
  et L le second point d'intersection de (FeP) avec *2*.

- L étant le milieu de l'arc A'A" ne contenant pas B',
  d'après "Le théorème de Feuerbach" [7], (PP') // (LA').

- Les cercles tangents *1* et *2*, le point de base Fe, la monienne (PFeL), les parallèles (PP') et (LA'), conduisent au théorème **7** de Reim ; en conséquence, P', Fe et A' sont alignés.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que Q', Fe et B' sont alignés
  R', Fe et C' sont alignés.

- **Conclusion :** Fe est le point de concours de (A'P'), (B'Q') et (C'R').

2. Une courte biographie de Georges Fontené

[6] Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach, G.G.G. vol. **1** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
[7] Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach, G.G.G. vol. **1**, p. 3 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

Georges Fontené est né le 23 septembre en 1848 à Rousies (Nord, France).
Cinquième fils de Louise Fontené née vers 1815, Georges Fontené est agrégé de mathématiques en 1875, puis enseigne successivement à Belfort, Douai, Rouen et à Paris au collège Rollin[8], actuellement lycée Jacques Decour. En 1903, il est promu Inspecteur d'Académie à Paris et prend sa retraite en 1918 avec le grade d'Inspecteur général honoraire. L'année suivante, il est attaché à la rédaction des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.
Doué d'une grande conscience professionnelle, Georges Fontené est un homme cordial, modeste et bon envers ses élèves, ses collègues et ses subordonnés. Le mépris des "choses fortuites", l'ignorance des "bassesses", faisaient partis des matériaux de son âme…
Il décède le 7 avril 1923 à Paris (France).

D. LE TRIANGLE RÉFLÉCHI

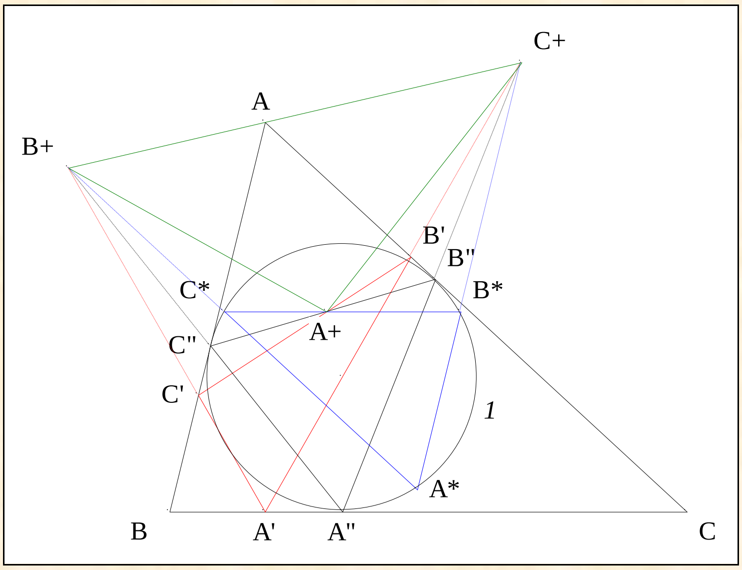
ET

LE TRIANGLE DE PELLETIER

1. Le triangle de Pelletier

VISION

Figure :



Finition : ABC un triangle acutangle

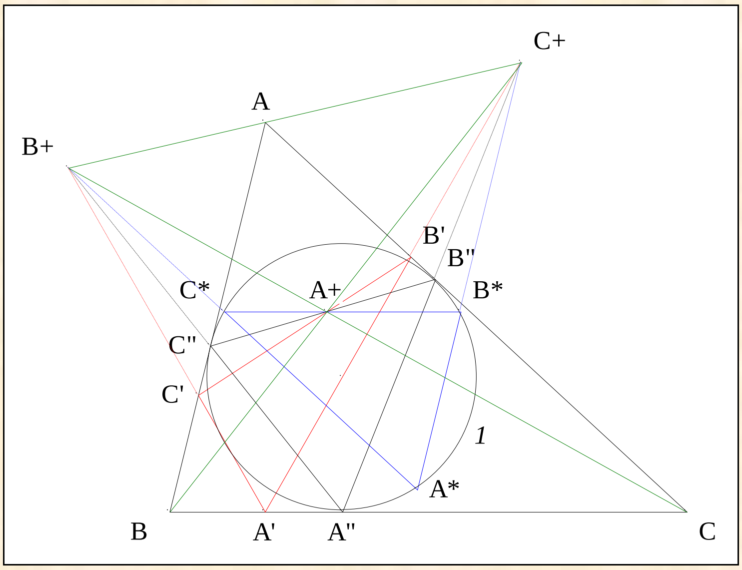
8 Le collège Rollin est situé au 12 avenue Trudaine à Paris (France).

	A'B'C'	le triangle orthique de ABC,
	1	le cercle inscrit de ABC,
	A"B"C"	le triangle de contact de ABC,
	A*B*C*	le triangle réfléchi de ABC
et	A+, B+, C+	les points de concours de (B'C'), (B"C") et (B*C*), de (C'A'), (C"A") et (C*A*), de (A'B'), (A"B") et (A*B*).

Définitions : **(1)** A+B+C+ est "le triangle de Pelletier de ABC"
(2) A+ est le "A-point de Pelletier de ABC".

Note historique : il ne faut pas confondre A. Pelletier avec un commentateur du XVI-ème siècle d'Euclide, Jacques Peletier du Mans ou Pelletier connu encore sous le nom latinisé de Peletarius.
Rappelons que Joseph Neuberg a proposé le résultat concernant la "concourance" de (B'C'), (B"C") et (B*C*).[9]
Par manque de référence historique, les géomètres modernes ont associés le nom de "Pelletier" au triangle A+B+C+ bien qu'il ait été découvert bien avant par Joseph Neuberg en 1881 et au paravent par Jules Alexandre Mention en 1850 comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

Scolie : des alignements



- **Conclusion :** d'après "Les deux points de Schroeter"[10] B+, A et C+ sont alignés
C+, B et A+ sont alignés
A+, C et B+ sont alignés.

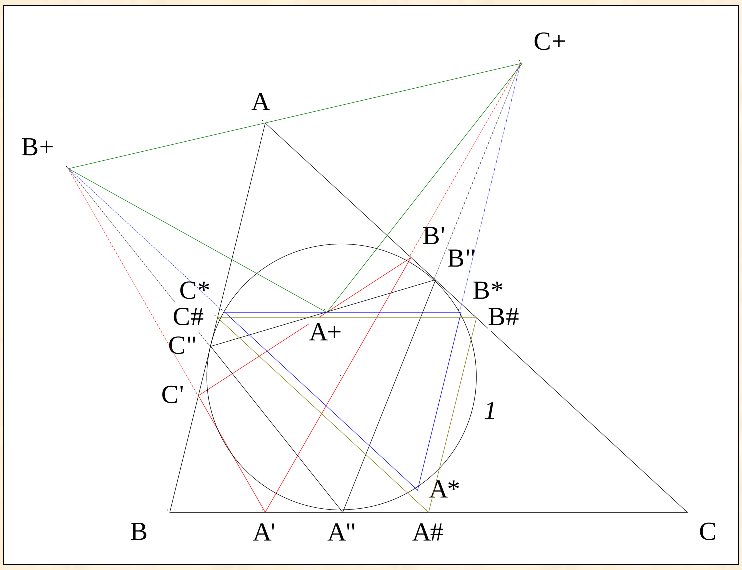
2. Les triangles réfléchi et de Pelletier sont perspectifs

VISION

Figure :

---

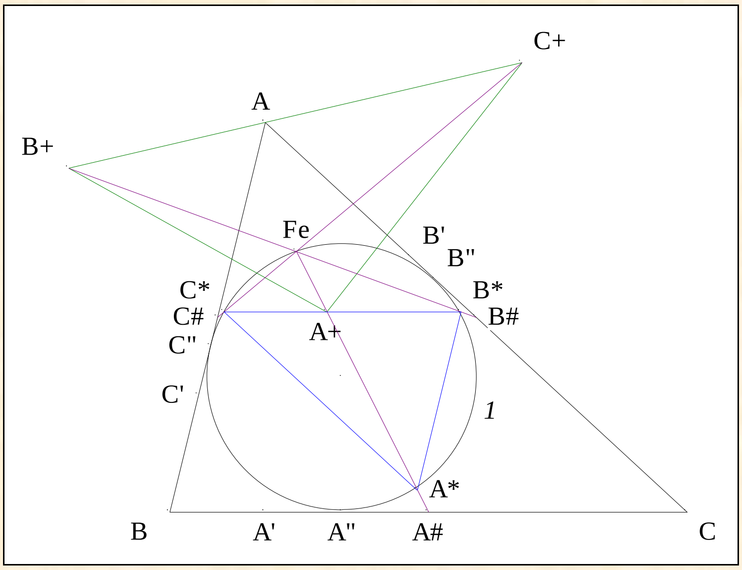
9 Neuberg J., *Mathesis* (1881) 83 ; solution de Liénard E. *Mathesis* (1882) 89.
10 Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. **2**, p. 8-11 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.



Traits : ABC un triangle acutangle
A'B'C' le triangle orthique de ABC,
1 le cercle inscrit de ABC,
A"B"C" le triangle de contact de ABC,
A*B*C* le triangle réfléchi de ABC,
A+B+C+ le triangle de Pelletier de ABC
et A#B#C# le triangle médian de ABC.

Donné : A+B+C+ et A#B#C# sont perspectifs.

VISUALISATION



- Notons Fe le point de Feuerbach de ABC.

- D'après "Les deux points de Schroeter"[11], A#, A*, A+ et Fe sont alignés
B#, B*, B+ et Fe sont alignés
C#, C*, C+ et Fe sont alignés.

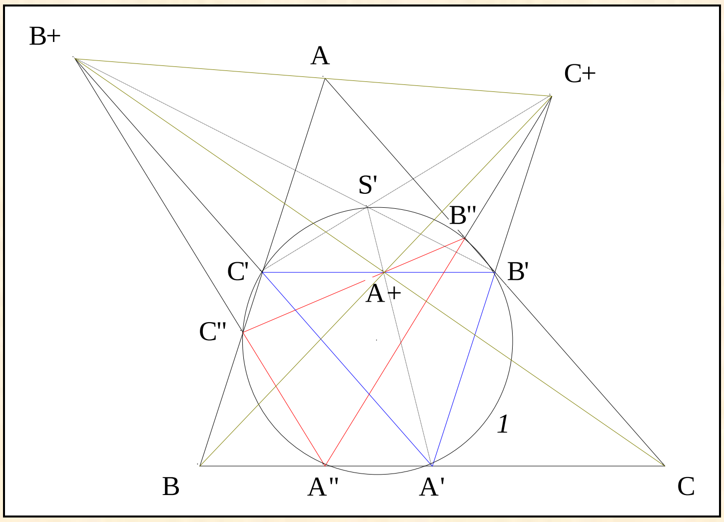
[11] Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. **2**, p. 15-21 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

- **Conclusion :** par définition, A+B+C+ et A#B#C# sont perspectifs de centre Fe.

3. L'arguésienne d'un triangle et de son triangle de Pelletier

VISION

Figure 1 :



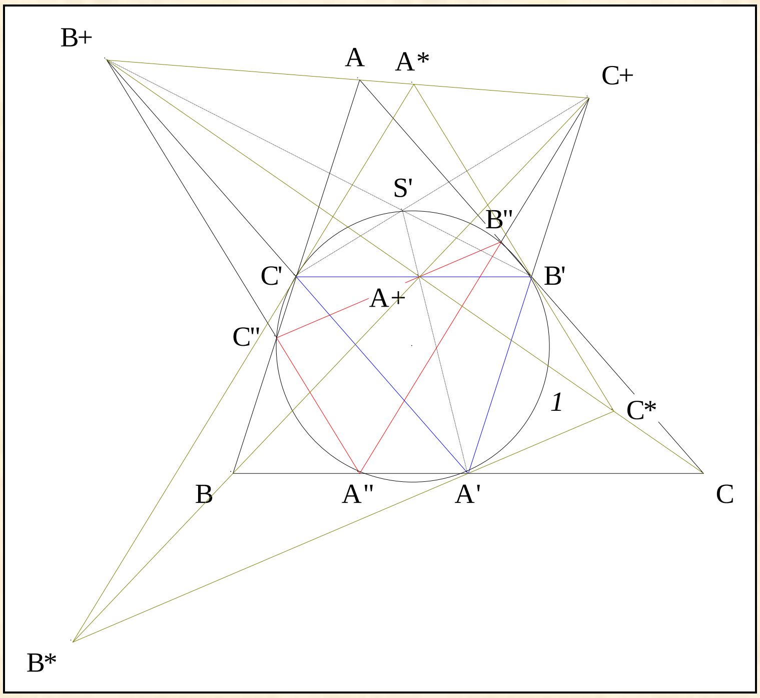
Traits :	ABC	un triangle,
	A'B'C'	le triangle médian de ABC,
	A"B"C"	le triangle orthique de ABC,
	A+B+C+	le triangle de Schroeter de ABC,
	S'	le premier point de Schroeter de ABC
et	*1*	le cercle d'Euler de ABC.

Commentaire : le lecteur pourra se référer à l'article "Les deux points de Schroeter"[12].

Figure 2 :

---

12 Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. **2**, p. 15-21 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
A*B*C* le triangle tangentiel de A'B'C'.

Donné : A*B*C* et A+B+C+ sont perspectifs.

VISUALISATION

- Nous avons : A+B+C+ est inscrit dans A'B'C', A'B'C' est inscrit dans A*B*C* ;
  A+B+C+ est en perspective avec A'B'C' [13], A'B'C' est en perspective avec A*B*C* [14];

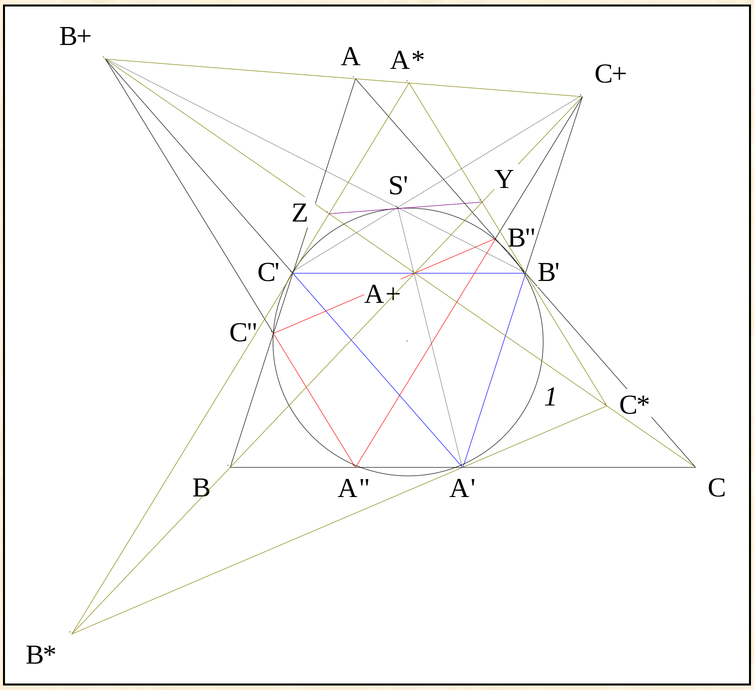
- **Conclusion :** d'après Döttl "The cevian nests theorem"[15], A+B+C+ est en perspective avec A*B*C*.

Scolies : **(1)** le triangle orthique A"B"C" de ABC est le triangle réfléchi de A*B*C*.

(2) A+B+C+ est le triangle de pelletier de A*B*C*.

(3) L'arguésienne de A+B+C+ et A*B*C* [16]

[13] De centre S'.
[14] De centre le point de Gergonne de A*B*C*.
[15] Ayme J.-L., The cevians nests theorem, G.G.G. vol. 3 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
[16] Ayme J.-L., Pelletier's triangle, *Mathlinks* du 05/12/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=380947 ;
Marc Tudosi, Pelletier triangle, *Mathlinks* du 05/12/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=26000.



- Notons Y, Z les points d'intersection resp. de (A+B+) et (A*B*), de (C+A+) et (C*B*).

- **Conclusion :** d'après "Le théorème de Newton" (Cf. Annexe 2) appliqué au quadrilatère B*C*YZ, (YZ) est tangente à *1* en S'.

Énoncé traditionnel : l'axe de perspective entre un triangle et son triangle de Pelletier est tangent au cercle inscrit du premier triangle.

(3) S' est "Le sixième point de Stevanovic de A*B*C*" et est répertorié sous X_{3022}. chez E.T.C.[17].

E. LE TRIANGLE RÉFLÉCHI

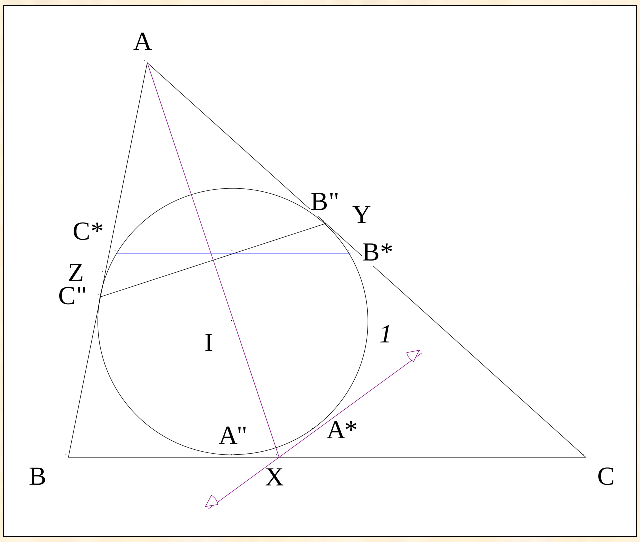
ET

LE TRIANGLE I-CÉVIEN

VISION

Figure :

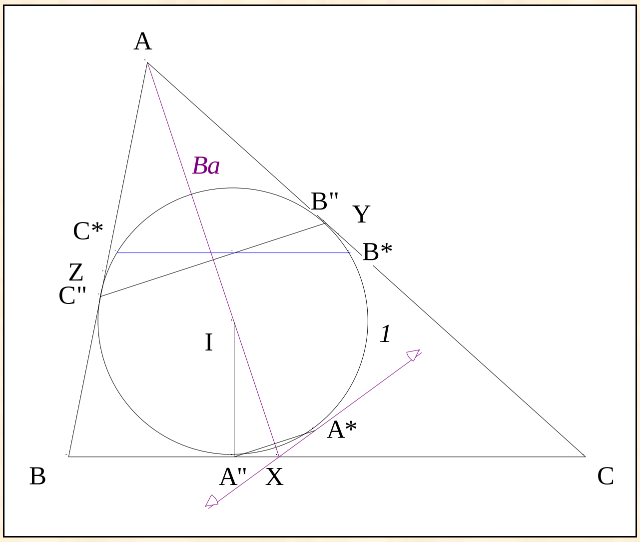
[17] Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.



Traits : ABC un triangle acutangle,
1 le cercle inscrit de ABC,
I le centre de *1*,
A"B"C" le triangle de contact de ABC,
A*B*C* le triangle réfléchi de ABC
et XYZ le triangle I-cévien de ABC.

Donné : (XA*) est tangente à *1* en A*.

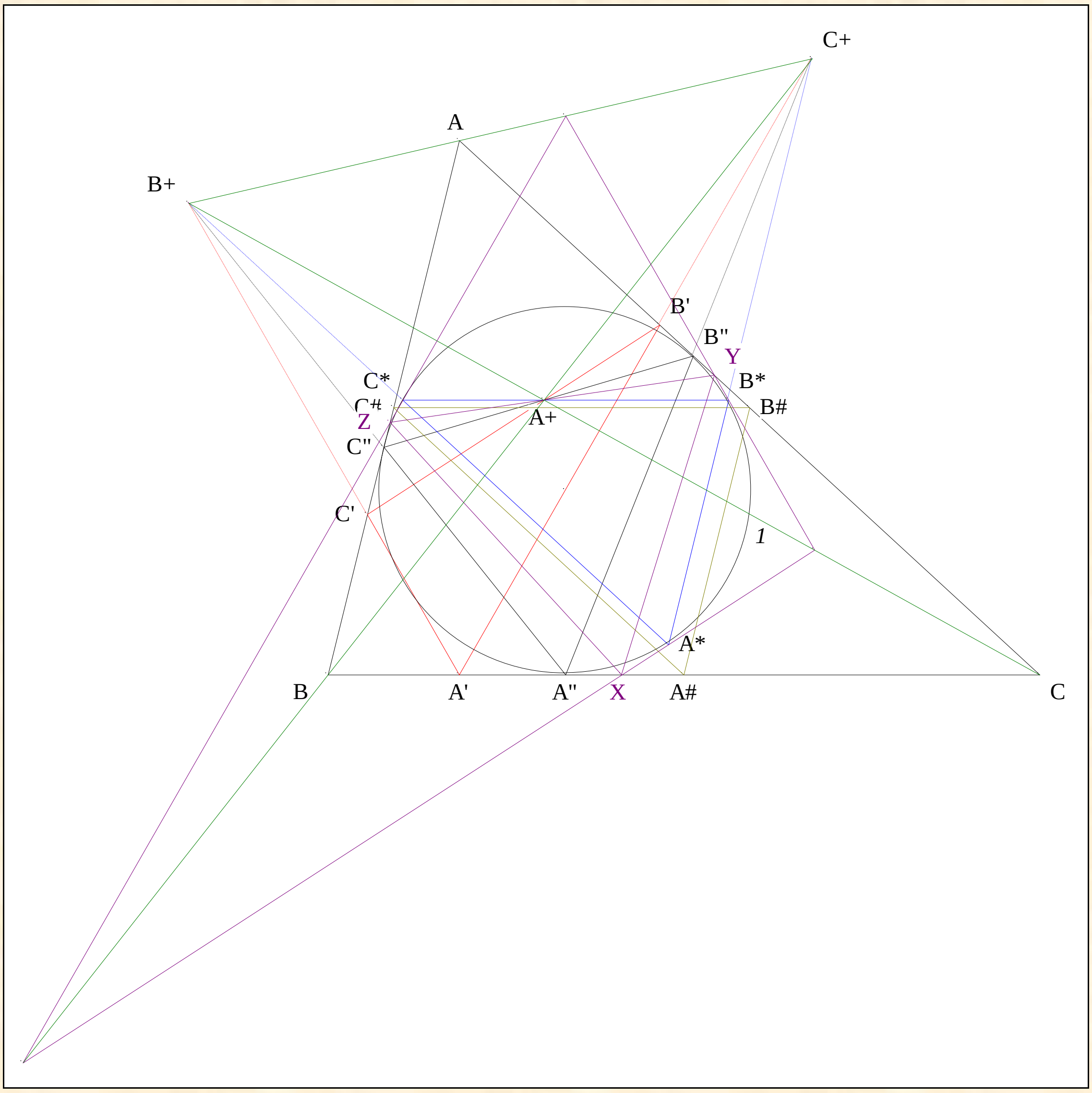
VISUALISATION



- Notons *Ba* la A-bissectrice intérieure de ABC.

- **Conclusion :** *Ba* étant la médiatrice de [A"A*], (XA*) est tangente à *1* en A*.

Scolies : **(1)** vision triangulaire



(2) Le lecteur pourra se reporter à l'article "Les deux points de Schroeter" [18].

(3) Le résultat de Jules Alexandre Mention[19] de la page 327 : (YZ) passe par A*
(ZX) passe par B*
(XY) passe par C*.

Note historique : ce résultat sera proposé en 1930 par A. Pelletier, M. M. Young and G. A. Yanosik.[20] Par manque de référence historique, les géomètres modernes ont associés le nom de "Pelletier" au triangle A*B*C* bien qu'il ait été découvert par Jules Alexandre Mention en 1850.

---

[18] Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. **2**, p. 15-21 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

[19] Mention J. A., Note sur le triangle rectiligne, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1850) 324-327 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.

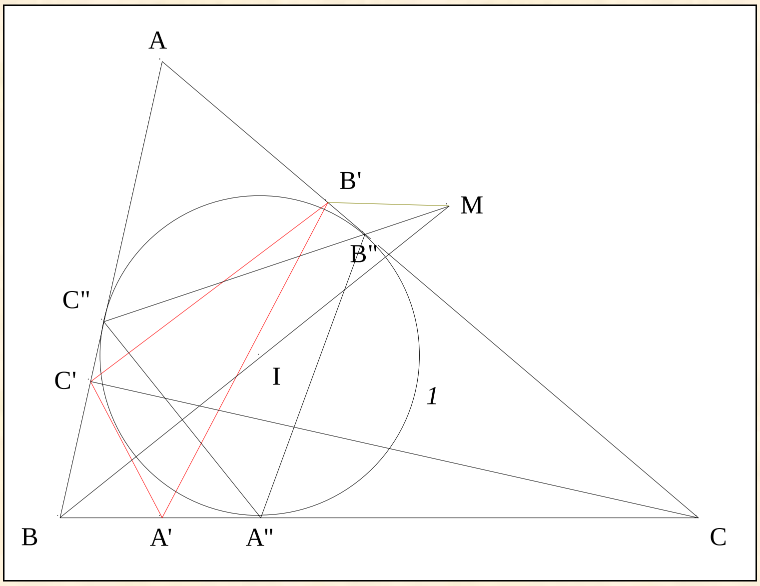
[20] A. Pelletier, M. M. Young and G. A. Yanosik, Problem 3440, *Amer. Math. Monthly*, 37 (1930) 316 ; solution, 38 (1931) 177–178.

F. APPENDICE

1. Une bissectrice

VISION

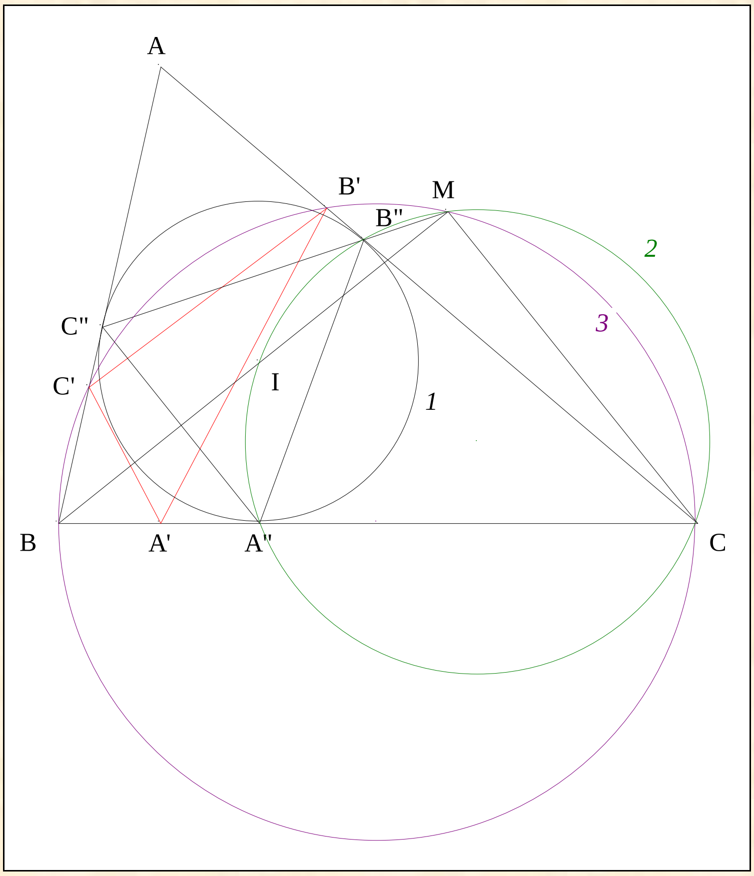
Figure :



Traits :	ABC	un triangle acutangle
	A'B'C'	le triangle orthique de ABC,
	1	le cercle inscrit de ABC,
	I	le centre de *1*,
	A"B"C"	le triangle de contact de ABC
et	M	le point d'intersection de (BI) et (B"C").

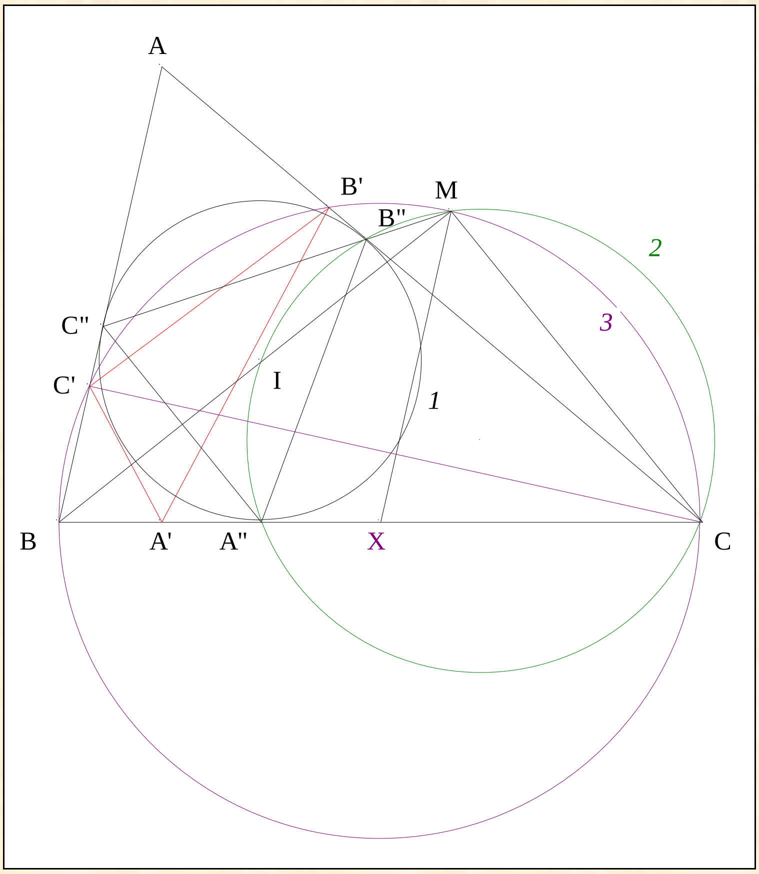
Donné : (B'M) est la B'-bissectrice extérieure du triangle B'CC'.

VISUALISATION



- Par définition, (IB") ⊥ (CB").
- D'après "An unlikely concurrence…"[21], (BIM) ⊥ (CM).
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", I, C, M et B" sont cocycliques.
- Notons *2* ce cercle de diamètre [IC].
- Par définition, (BB') ⊥ (CB') et (CC') ⊥ (BC').
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", B, C, M, B' et C' sont cocycliques.
- Notons *3* ce cercle de diamètre [BC].

[21] Ayme J.-L., An unlikely concurrence, revisited and generalized, G.G.G. vol. **4** p. 5 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.



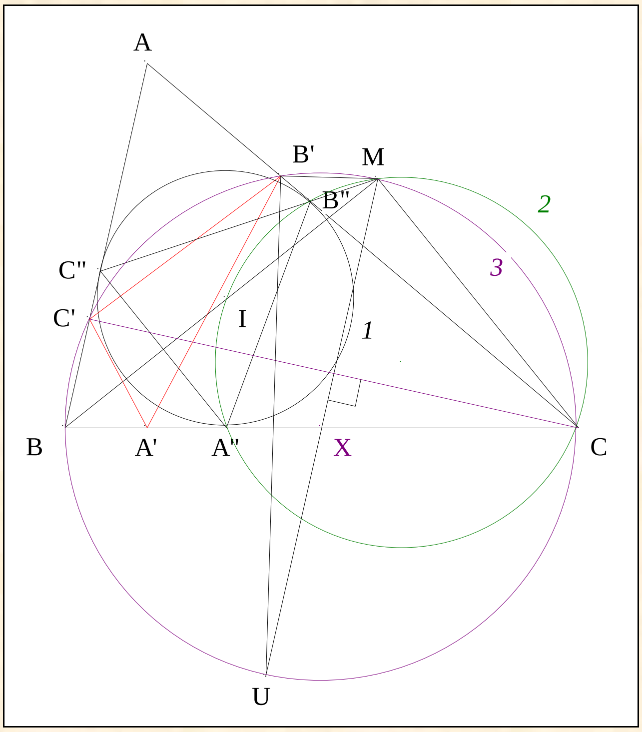
- Notons X le milieu de [BC].

- D'après Lascases "An unlikely concurrence…"[22], (MX) // (AC'B).

- **Scolie :** X est le centre de *3*.

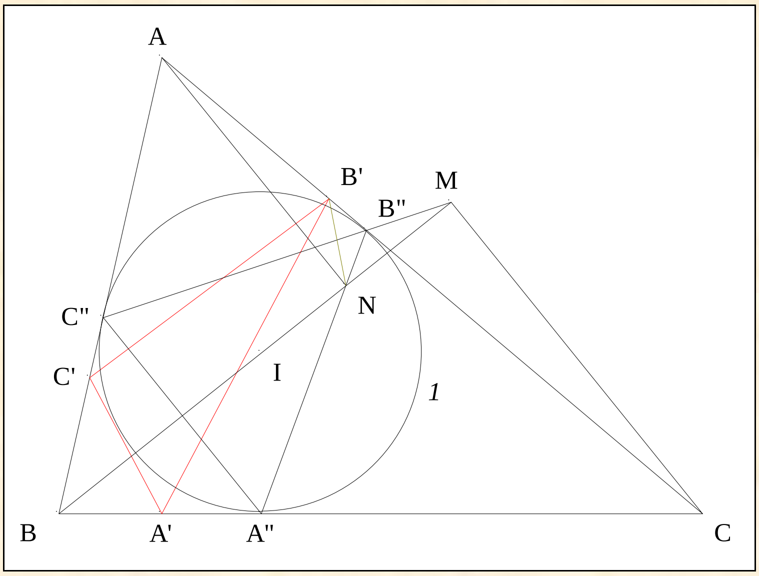
- Nous avons : (AC'B) ⊥ (CC') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (MX) ⊥ (CC').

[22] Ayme J.-L., An unlikely concurrence, revisited and generalized, G.G.G. vol. **4** p. 5 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.



- Notons U le second B'-perpoint du triangle B'CC'.
- Par définition, (B'U) est la B'-bissectrice de B'CC'.
- **Scolie :** M et U sont deux points diamétraux de *3*.
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (B'M) ⊥ (B'U).
- **Conclusion :** (B'M) est la B'-bissectrice extérieure de C'B'C.

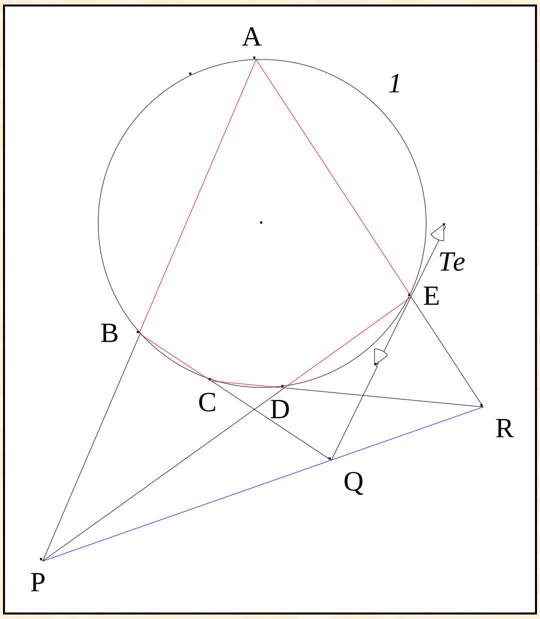
Scolie : une autre bissectrice



- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que
(B'N) est la B'-bissectrice intérieure du triangle B'CA'.

G. ANNEXE

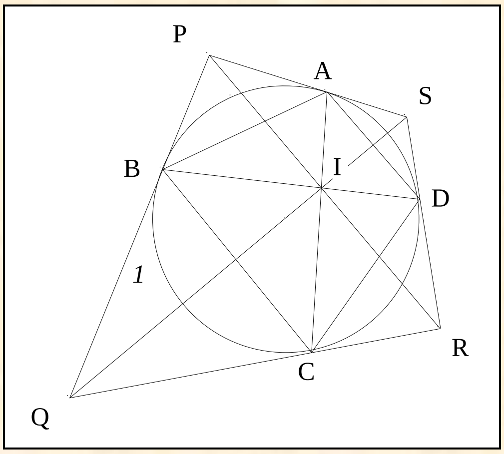
1. Pentagramma mysticum[23]



Traits :	*1*	un cercle,
	ABCDEA	un pentagone tels que A, B, C, E soient sur *1*,
	Te	la tangente à *1* en E
et	P, Q, R	les points d'intersection de (AB) et (DE), de (BC) et Te, de (CD) et (EA).

Donné : D est sur *1* *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

2. Le théorème de Newton[24]



Traits :	*1*	un cercle,
	ABCD	un quadrilatère inscrit dans *1*
et	PQRS	le quadrilatère tangentiel de ABCD.

Donné : les diagonales [PR], [SQ], [AC] et [BD] sont concourantes.

---

23 Carnot, *De la corrélation des figures de Géométrie* (1801) 455-456.

24 Newton I., *Principes* 1686, corollaire II du lemme XXIV; il est aussi appelé théorème faible de Brianchon.