PROBLÈMES REVISITÉS

LE THÉORÉME

DE

DANIEL CHRISTIAN LUDOLPH LEHMUS

(1840)

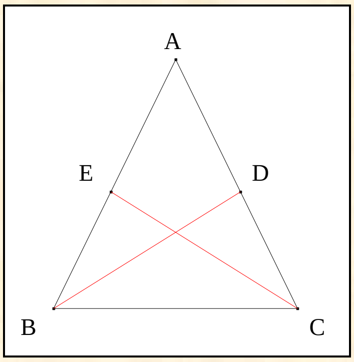
LA PREMIÈRE PREUVE SYNTHÉTIQUE

DE

CHARLES ERNEST ROUGEVIN

(1842)

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. Dans cet article, l'auteur propose de revisiter la première preuve synthétique proposée en 1842 par l'élève Charles Ernest Rougevin, concernant le théorème du professeur allemand Ludolph Lehmus datant de 1840.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. In this article, the author proposes to revisit the first synthetic proof proposed in 1842 by the pupils Charles Ernest Rougevin, concerning the German Professor Ludolph Lehmus's theorem dating from 1840.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 18/06/2022 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sommaire

A. LE THÉORÈME

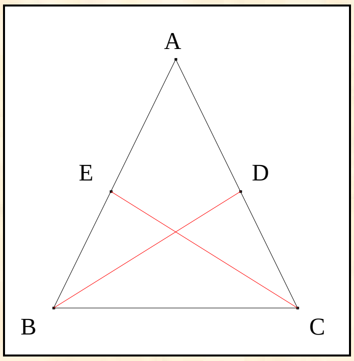
DE

DANIEL CHRISTIAN LUDOLPH LEHMUS [2]

(Berlin, Allemagne, 1840)

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle
et D, E les pieds des B, C-bissectrices intérieures de ABC.

Donné : *si*, BD = CE *alors*, ABC est A-isocèle.

[2] Ayme J.-L, Le théorème de Ludolph Lehmus, *Les-Mathematiques.net* ;

Théorème de Lehmus-Steiner, *Les-Mathematiques.net* ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,901858

B. HISTORIQUE

En 1840, le professeur Ludolph Lehmus de Berlin (Allemagne) porte son attention sur une proposition d'Euclide d'Alexandrie

si, un triangle est isocèle *alors*, deux de ses bissectrices intérieures sont égales.

La même année, il propose à Jakob Steiner (qui le trouva *very difficult*) et à Jacques Charles François Sturm [3] de chercher une solution géométrique de la réciproque de la proposition précédente i.e.

si, un triangle a deux bissectrices intérieures égales *alors*, ce triangle est isocèle.

Après en avoir parlé autour de lui, Olry Terquem [4] entend cette demande et en donne la première solution métrique en 1842 dans les *Nouvelles Annales* [5].

Donnons une chronologie non exhaustive des solutions et de leur auteur :

1842	C. E. Rougevin [6], H. Grout de Saint-Paer [7], F. G. Hesse
1843	l'astronome Rud. Wolf [8]
1844	Jacob Steiner [9]
1849	Theodor Lange [10], Grunert [11]
1850	W. Mink [12], D. Lehmus et Th. Lange [13].

La même année, le problème gagne l'Angleterre et demande une preuve directe car toutes les précédentes étaient basées sur un raisonnement par l'absurde.

1851	R. Baltzer [14]
1852	Augustus de Morgan [15]
1880	F. Descubes [16]

En 1882, Sylvester essaie de démontrer l'impossibilité d'une preuve directe, mais ne convainc pas.

1895	G. I. Hopkins [17] de Manchester.
1906	Max Simon
1917	William E. Heal [18]
1930	Victor Thébault [19]

En 1943, McBride dénombre 60 preuves et défend la démarche de Sylvester.

1955	Archibald Henderson [20]
1961	H. G. Forder
1963	G. Gilbert et D. Mac Donnel

---

3 29/09/1803 Genève- 18/12/1855 sans doute à Paris
4 Terquem O., *Nouvelles Annales* **2** (1842) 79-87
5 http://www.numdam.org/volume/NAM_1842_1_1/
6 Rougevin P., *Nouvelles Annales* **2** (1842) 138
7 Paer ST., *Nouvelles Annales* **2** (1842) 311
8 Wolf Ru., *Grunert* **3** p. 449
9 Steiner J., *Crelle* **28** (1844) 375 ; *Gesammelte Werke* **2** p. 321
10 Lange Th., *Grunert* 14 (1849) 337
11 Grunert, *Grunert* **14** (1849) 341
12 Mink W., *Grunert* **15** (1850) 358
13 Lehmus D., Lange Th., *Grunert* **15** (1850) 223
14 Baltzer, *Grunert* **16** (1851) 201
15 de Morgan A., On Direct and Indirect Proofs, *Philosophical Magazine*, Lond. Edin. and Dub. (Dec. 1852)
16 Descubes F., F. G.-M., Exercices de Géométrie, 6th ed. (1920) Gabay reprint, Paris (1991)
17 Hopkins G. I., *American Mathematical Monthly* vol.**2**, n° **5**, p. 157-158
18 Heal W. E., *American Mathematical Monthly* vol. **24**, n° **7**, p. 344
19 Thébault V., *Mathesis* **44** (1930) 97
20 Henderson A., The Lehmus-Steiner-Terquem problem in global survey, *Scripta Mathematica*, **21** (1955) 223-232, 309-312

1970 J. V. Malesevic [21]

À ce jour, plus de 80 preuves sont connues et notons qu'un plus grand nombre de solutions erronées sont aussi connues.
Remarquons que la plupart des solutions qui semblent directes utilisent un résultat qui se démontre indirectement.

Pour terminer, citons quelques bibliographies concernant le théorème de Ludolph Lehmus

Léon Sauvé, the Steiner-Lehmus theorem, *Crux Mathematicorum* **2** (1976) 19-24

C. W. Trigg, A biblography of the Steiner-Lehmus theorem, *Crux Mathematicorum* **2** (1976) 191-193

D. C. Kay, Nearly the last comment on the Steiner-Lehmus theorem, *Crux Mathematicorum*, 3 (1977) 148-149

H. S. M. Coxeter et S. L. Greitzer, The Steiner–Lehmus Theorem, §1.5, *Geometry Revisited*, Washington, DC, Math. Assoc. Amer., p. 14–16, 1967

Dick Klingens**,** Stelling van Steiner-Lehmus ; http://www.pandd.demon.nl/steileh.htm

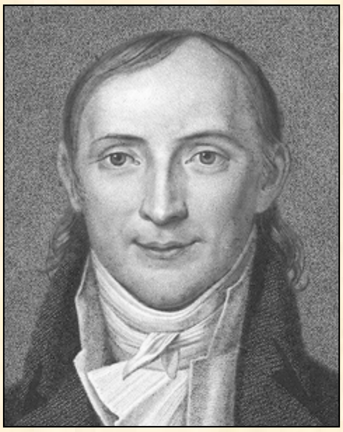
J. A. M'Bride [22], The equal internal bisectors theorem, 1840 - 1940. ... Many solutions or none? *The Edimburgh Mathematical Note* **33** (1943)…

[21] A direct proof of the Steiner-Lehmus theorem, *Mathematical Magazine* **43** (1970) 101-102
[22] James M'Bride on the equal internal bisector theoem, *Mac Tutor* ; https://mathshistory.standrews.ac.uk/Extras/McBride_equal_bisectors/

C. UNE COURTE BIOGRAPHIE

DE

DANIEL CHRISTIAN LUDOLPH LEHMUS



Petit fils du poète Johann Adam Lehmus, fils du Christian Balthasar Lehmus, proviseur du gymnasium de Soest, Daniel Christian Ludolf Lehmus y naît le 3 juillet 1780 dans cette ville de la Rhénanie-du-Nord-Westphalie en Allemagne, située à l'est de Dortmund, le long du Hellweg [23].
Après avoir reçu une éducation à la maison, son père l'envoie en 1799 à l'université de Iéna, puis à celle d'Erlangen jusqu'en 1802.
L'année suivante, après avoir donné des cours privés, il devient privatdozent à l'université de Berlin de décembre 1813 à Pâques 1815.
En 1814, il commence à enseigner à l'institut des mines et à partir de 1826 à l'École des artilleurs et des ingénieurs. Il reçoit le titre de professeur en 1827 et son travail lui vaut en 1836 de devenir membre de l'ordre de l'Aigle rouge.
Jusqu'en 1837, il donne des leçons à l'université.

En 1820, il publie une solution trigonométrique élégante du problème de Malfatti dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées* [24], mais une erreur de typographe fait que son nom y apparaît comme "Lechmütz".

Il décède à Berlin le 18 janvier 1863.

Pour la petite histoire, rappelons qu'Émilie Lehmus, première femme-médecin de Berlin, était sa nièce.

[23] divers tronçons de la Via Regia
[24] Lehmus D., Gergonne **10**, p.289

D. À PROPOS

DU

"PONT AUX ÂNES"

Le "Pont aux ânes" ou *pons asinorum* est le nom qui a été donné au Moyen-Âge à la cinquième proposition du Livre **I** des *Éléments* d'Euclide

les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux [25].

Certains ont vu dans la figure associée à cette proposition, un pont couvert comme il en existait beaucoup à cette époque, du fait que seuls les gens dépourvus d'aptitudes pour la géométrie ne pouvaient franchir d'un pas si facile. Rappelons que Christopher Clavius annotait en 1754 la cinquième proposition en écrivant que

ce théorème apparaît dur et sombre aux débutants
à cause du nombre de lignes et d'angles
auxquelles ils ne sont pas habituées.

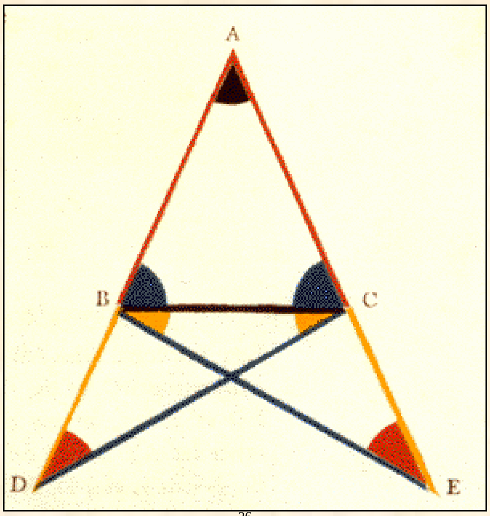
Il a identifié les étudiants aux ânes qui ne pouvaient pas ou ne voulaient pas traverser ce pont ; en traversant ce pont, on accède à un nouveau pays...

I 6 : *si*, dans un triangle deux angles sont égaux,
alors, les côtés qu'ils sou tendent sont également égaux.

Contre la tradition, le géomètre anglais H. S. M. Coxeter désigne par "Pont aux ânes" non pas le cinquième axiome mais la cinquième proposition du livre **I** des *Élements* d'Euclide :

les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux entre eux
ainsi que les angles externes entre eux formés avec celle-ci par la prolongation des côtés égaux

à cause de la figure de tête à oreilles d'âne qui illustre sa démonstration.



[26]

---

[25] la démonstration est attribuée à Thalès de Milet

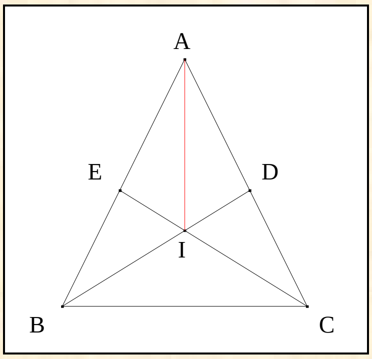
[26] https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_aux_%C3%A2nes#/media/Fichier:Byrne_Preface-15.png

E. LA PREUVE REVISITÉE

DE

L'ÉLÈVE CHARLES ERNEST ROUGEVIN

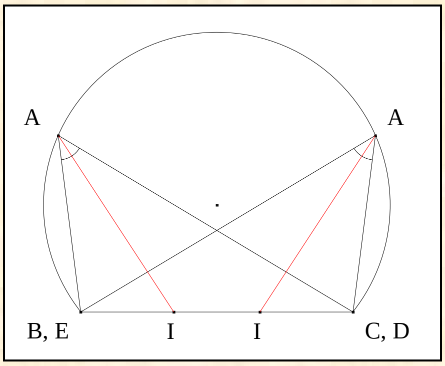
VISUALISATION [27]



- Notons I le point d'intersection de (BD) et (CE).

- D'après Pythagore de Samos, (AI) est la A-bissectrice intérieure de ABC.

Note historique : ce résultat connu de l'École pythagoricienne fera l'objet de la proposition **4** du Livre **IV** des *Éléments* d'Euclide.
I est le premier centre du triangle. [28]

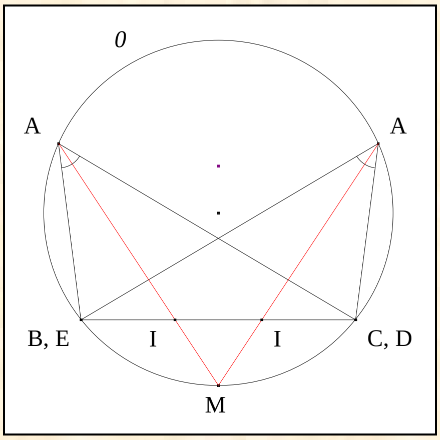


- D'après "Le théorème de l'arc capable",
les triangle ABD et AEC peuvent être déplacés de la sorte que leur côté égal (BD = CE) sous-tendent un même arc passant par leur troisième sommet A.

---

[27] Rougevin P., *Nouvelles Annales* **2**, 1842, p. 138 ; http://www.numdam.org/volume/NAM_1842_1_1/
cité par Bottema O., *Verscheidenheden*, Ned. Verg. van Wiskundeleraren (Wolters-Noordhoff) 1977

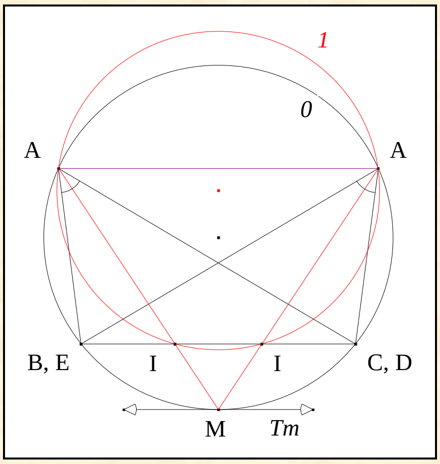
[28] Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* (ETC) ; https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html



- Notons 0 le cercle circonscrit de ABD et AEC,
  et M le point d'intersection des A-bissectrices de ABD et AEC.

- **Scolies :** **(1)** M est sur *0*

  (2) M est le milieu de l'arc BD ou CE ne contenant par A.



- Notons *Ti* la tangente à *0* en M.

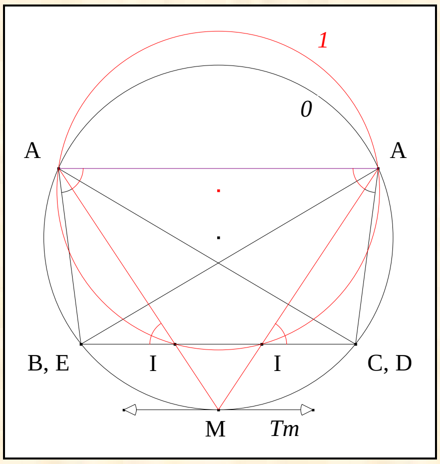
- **Scolie :** *Ti* est parallèle à (BD).

- Le cercle *0*, les points de base A et A, les moniennes naissantes (IAM) et (IAM), les parallèles (II) et *Ti*, conduisent au théorème **0''** de Reim ; en conséquence, A, I, I et A sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle.

Note historique : ce résultat a été proposé par Adrien Marie Legendre [29] (1752-1833) ou Marie Parfait Alphonse Blanchet(1813-18..).

[29] Legendre A. M. revu par Blanchet A., *Éléments de Géométrie* **44**e édition, Problème **17** à démontrer, p. 146



- AI étant égal à AI, le quadrilatère cyclique AIIA est un trapèze isocèle.
- D'après le théorème "a.c.a." [30] appliqué aux triangles ABI et ACI, AB = AC.
- **Conclusion :** ABC est A-isocèle.

Énoncé traditionnel : *un triangle ayant deux bissectrices intérieures égales est isocèle.*

Archive :

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 (page 57).

PAR M. ROUGEVIN,
Élève de la classe de Mathématiques élémentaires du collége Louis-le-Grand.
(Institution Loriol).

—

Soient AD, BE, CF (*fig.* 34), les bissectrices des angles du triangle ABC : si AD=CF, on aura BC=BA.

Les deux triangles FBC, ABD, ont des bases FC, AD, égales entre elles, par hypothèse ; l'angle FBC opposé à la base FC, dans le premier triangle, est le même que l'angle ABD opposé à la base AD du second triangle ; la bissectrice BO de l'angle FBC, est aussi la bissectrice de l'angle ABD. On en peut conclure que les triangles FBC, ABD, sont égaux entre eux.

En effet, supposons qu'on ait placé la base CF, sur DA, de manière que le point C coïncide avec D, et le point F avec A ; puis, décrivons sur la base commune DA, un segment AHD (*fig.* 35) capable de l'angle ABD (*fig.* 34), les deux triangles ABD, FBC, (*fig.* 34), seront inscrits dans le segment AHD. Le sommet B, du premier, tombera en un point B′ de l'arc AHD, et le sommet B du triangle FBC tombera en un autre point B″ de l'arc AHD ; car la corde AB″ est moindre que AB′, puisqu'on a BF<BA. Les bissectrices B′O′, B″O″, des angles B′, B″ passeront par le milieu M de l'arc AMD, et de plus elles couperont la droite AD en des points O′, O″, tels qu'on aura B′O′=B″O″, puisque chacune des droites B′O′, B″O″, est égale à BO (*fig.* 34). Il est maintenant facile de reconnaître que les deux droites MB′, MB″, doivent faire des angles égaux avec le diamètre MIH, perpendiculaire sur le milieu I de la corde AD. Car si

[30] a.c.a. i.e. angle.côté.angle

— 139 —

l'angle $B'MH$ était, par exemple, plus grand que $B''MH$, les deux triangles $B'MH$, $B''MH$, ayant l'hypoténuse MH commune, il faudrait qu'on eût $MB' < MB''$; d'ailleurs, les deux triangles rectangles MIO', MIO'', donneraient $MO' > MO''$; et de ces deux inégalités, on conclurait $B'O' < B''O''$, ce qui est contraire à l'hypothèse. L'égalité des angles $B'MH$, $B''MH$, montre que les arcs HB', HB'', sont égaux entre eux; on en conclut l'égalité des arcs $B'D$, $B''A$, et celle des arcs $B''D$, $B'A$; il en résulte que les cordes $B'D$, $B''A$, sont égales entre elles, et il en est de même des cordes $B''D$, $B'A$. Donc, les deux triangles $AB'D$, $AB''D$, ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

Puisque les cordes $B'A$, $B''D$, sont égales, le côté AB, du triangle ABD (*fig.* 34), est égal au côté CB du triangle CBF. C'est ce qu'il fallait démontrer.

[31]

Une très courte biographie de Charles Ernest Rougevin

Charles Ernest Rougevi est né à Paris (France), le samedi 16 décembre 1826.
Second fils de l'architecte Jean Joseph Rougevin [32] (1782-1840) et de Françoise Fanny Bâville (1800-1860), il est élève de la classe de Mathématiques élémentaires du collège Louis- le-Grand (institution Loriol) en 1842.
L'année suivante, il intègre comme demi boursier l'Ecole polytechnique, puis démissionne le 19 juin 1844 sans motif connu à ce jour.

[31] Rougevin P., *Nouvelles Annales* **2**, 1842, p. 138 ; http://www.numdam.org/volume/NAM_1842_1_1/
cité par Bottema O., *Verscheidenheden*, Ned. Verg. van Wiskundeleraren (Wolters-Noordhoff) 1977

[32] Architecte de la Villa Napoléon, avenue Montaigne à Paris

F. LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A	
aligné	collinear
annexe	annex
axiome	axiom
appendice	appendix
adjoint	associate
a propos	by the way btw
acutangle	acute angle
axiome	axiom
B	
bissectrice	bisector
bande	strip
C	
centre	incenter
centre du cercle circonscrit	circumcenter
cercle circonscrit	circumcircle
cévienne	cevian
colinéaire	collinear
concourance	concurrence
coincide	coincide
confondu	coincident
côté	side
par conséquence	consequently
commentaire	comment
D	
d'après	according to
donc	therefore
droite	line
d'où	hence
distinct de	different from
E	
extérieur	external
F	
figure	figure
H	
hauteur	altitude
hypothèse	hypothesis
I	
intérieur	internal
identique	identical
i.e.	namely
incidence	incidence
L	
lemme	lemma
lisibilité	legibility
M	
mediane	median
médiatrice	perpendicular bissector
milieu	midpoint
N	
Notons	name
nécessaire	necessary
note historique	historic note
O	
orthocentre	orthocenter
ou encore	otherwise
P	
parallèle	parallel
parallèles entre elles	parallel to each other
parallélogramme	parallelogram
pédal	pedal
perpendiculaire	perpendicular
pied	foot
point de vue	point of view
postulat	postulate
point	point
pour tout	for any
Q	
quadrilatère	quadrilateral
R	
remerciements	thanks
reconnaissance	acknowledgement
respectivement	respectively
rapport	ratio
répertorier	to index
S	
semblable	similar
sens	clockwise in this
order	
segment	segment
Sommaire	summary
symédiane	symmedian
suffisante	sufficient
sommet (s)	vertex (vertice)
T	
trapèze	trapezium
tel que	such as
théorème	theorem
triangle	triangle
triangle de contact	contact triangle
triangle rectangle	right-angle triangle