LES CERCLES

DE

MORLEY, EULER, MANNHEIM ET MIQUEL

Jean-Louis AYME

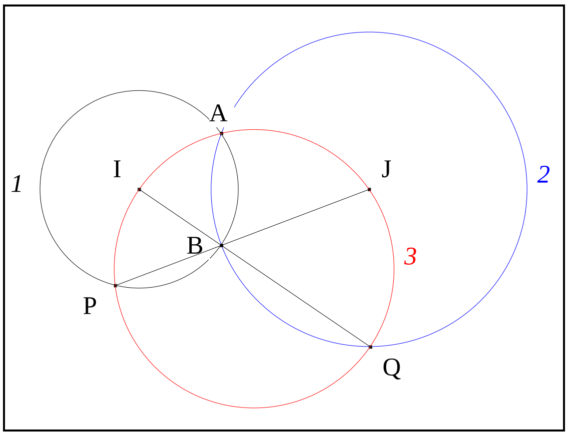
Résumé. Nous présentons quatre preuves originales et purement synthétiques concernant les cercles de Morley, Euler, Mannheim et Miquel.
Ces preuves ont pour ambition de rendre plus "transparent" ces résultats.
Tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

UN CERCLE DE MORLEY

1. Un cercle de Morley

VISION

Figure :

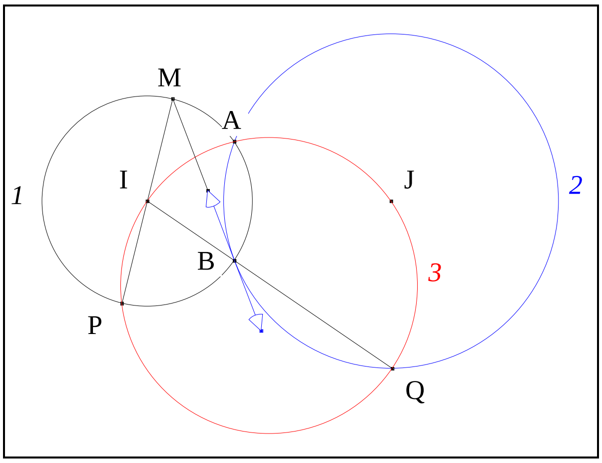


Traits :

1, 2 deux cercles sécants,
I, J les centres respectifs de 1, 2,
A, B les deux points d'intersection de *1* et *2*,
P, Q deux points resp. de *1, 2*
et *3* le cercle passant par A, P, Q.

Donné : les points I, B, Q d'une part, et J, B, P d'autre part, sont alignés
si, et seulement si,
3 passe par I et J.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons Tb la tangente à *2* en B
  et M le second point d'intersection de Tb avec *1*.

- Par définition d'une tangente, (BM) ⊥ (BPJ).

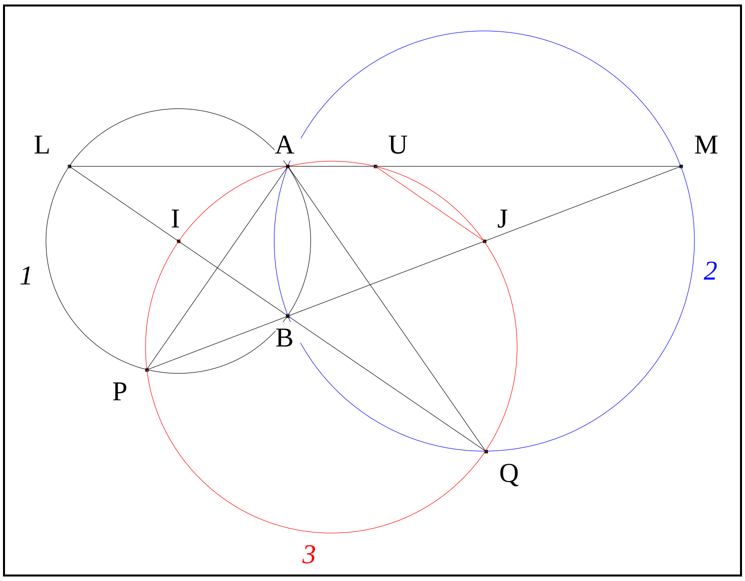
- D'après Thalès "Triangle rectangle inscrit dans un cercle", M, I et P sont alignés.

- **Conclusion partielle :** d'après Miquel "Le théorème du pivot" (cf. Annexe 1) appliqué au triangle MBI avec les points B sur (MB), Q sur (BI) et P sur (IM), *3* passe par I.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *3* passe par J.

- **Conclusion :** *3* passe par I et J.

Scolie : un point milieu

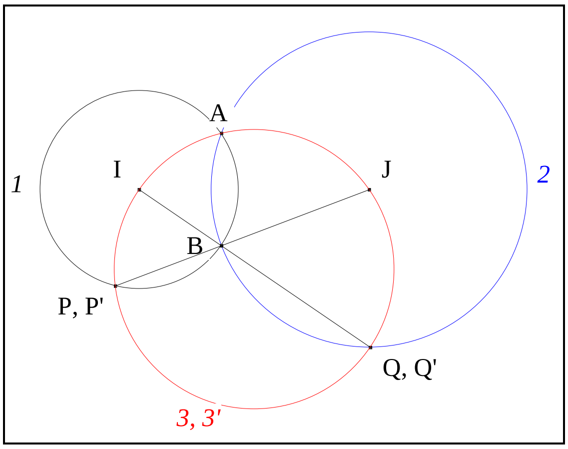


- Notons L le second point d'intersection de (IBQ) avec *1*,
  M le second point d'intersection de (JBP) avec *2*
  et U le second point d'intersection de (LAM) avec *3*.

- Les cercles *3* et *1*, les points de base P et A, les moniennes (JPB) et (UAL), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (JU) // (BL).

- **Conclusion :** d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle MLB, U est le milieu de [LM].

VISUALISATION SUFFISANTE



- **Donné :** *3* passe par I et J i.e. les points A, P, Q, I et J sont cocycliques.

- Notons P' le second point d'intersection de (BJ) avec *1*
  et Q' le second point d'intersection de (BI) avec *2*.

- D'après la visualisation nécessaire, les points A, P', Q', I et J sont cocycliques.

- Notons *3'* ce cercle.

- Les cercles *3* et *3'* ayant les trois points A, I et J en communs, sont confondus ;
  en conséquences, les points P et P' sont confondus
  les points Q et Q' sont confondus.

- **Conclusion :** les points I, B, Q d'une part et J, B, P d'autre part sont alignés.

Scolie : *3* est "le A-cercle de Morley" relativement au point d'intersection de A de *1* et *2*

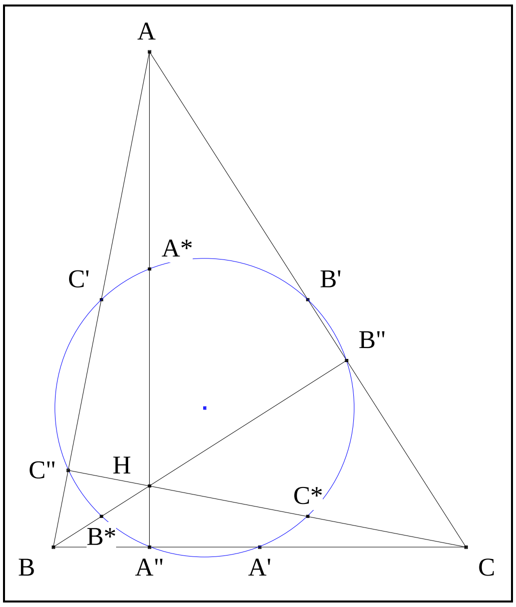
Note historique : une preuve du résultat de Frank Morley (1860-1937) a été donné par Tobias Dantzig[1] en 1916.

2. Application au cercle des neuf points[2]

VISION

Figure :

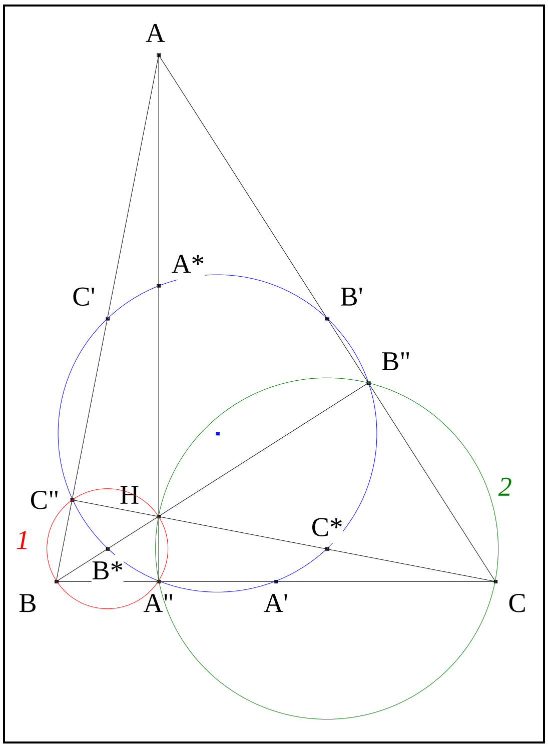
[1] Tobias Dantzig, Elementary proof of a theorem due to F. Morley, *American Mathematical Monthly*, vol. 23, 7 (1916) 246-248.
[2] Brianchon , Poncelet, *Annales* de Gergonne **11** (1820-21) 215, théorème 9.



Traits : ABC un triangle,
A', B', C' les milieux de [BC], [CA], [AB],
H l'orthocentre de ABC,
A", B", C" les pieds des A, B, C-hauteurs de ABC
et A*, B*, C* les milieux des segments [AH], [BH], [CH].

Donné : les points A', B', C', A", B", C", A*, B* et C* sont cocycliques.

VISUALISATION



- Notons *1* le cercle de diamètre [BH]
  et *2* le cercle de diamètre [CH].

- D'après **1.** "Un cercle de Morley", les points A", B", C", B*, C* et A' sont cocycliques.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que les points B", C", A", C*, A* et B' sont cocycliques
  les points C", A", B", A*, B* et C' sont cocycliques.

- **Conclusion :** les points A', B', C', A", B", C", A*, B* et C* sont cocycliques.

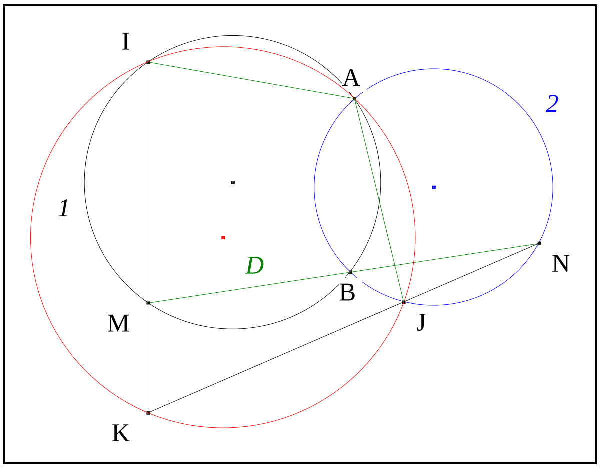
Note historique :
le cercle passant par les six points A', B', C', A", B", C" a été appelé "le cercle des six points" par John Casey en 1861. Ce cercle est appelé en France, "cercle d'Euler" à la suite de Brocard, en Allemagne, "cercle de Feuerbach" en souvenir de ce géomètre qui, en 1822, a redémontré ce résultat en précisant son centre et d'autres propriétés. D'après les recherches de l'historien anglais James Sturgeon MacKay, ce cercle n'apparaît nulle part dans l'oeuvre d'Euler. Mackay[3] dans un article de 1892, intitulé History of the Nine Point Circle, attribue ce cercle à John Whitley[4]. Une autre source attribue ce cercle à l'ingénieur civil Benjamin Bevan[5].
Les points A*, B* et C* sont appelés "points d'Euler" ou "points eulériens" par F. G.-M.[6]
Le cercle passant par les neuf points A', B', C', A", B", C", A*, B* et C* a été appelé "cercle des neuf points" par Étienne Bobillier en 1832 et par Mention[7].

LE CERCLE DE MANNHEIM[8]

1. Une monienne brisée

VISION

Figure :



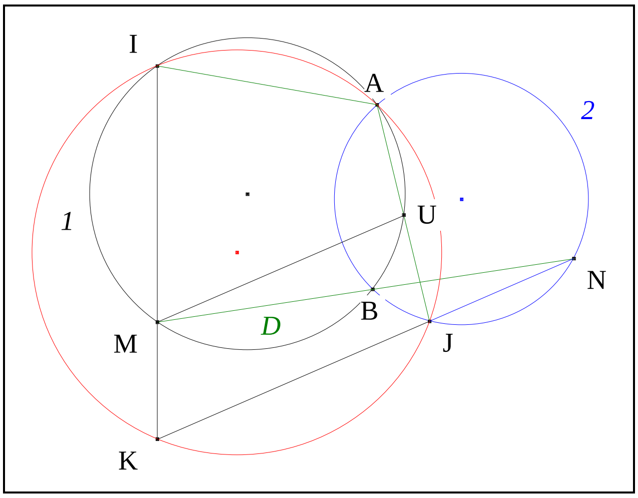
Traits : *1*, *2* deux cercles sécants
A, B les points d'intersection de *1*et *2*,
D une monienne passant par B,
M, N les points d'intersection de *D* resp. avec *1*, *2*,
I, J deux points resp. de *1*, *2* tels que (IAJ) soit une monienne brisée en A,
et K le point d'intersection des droites (IM) et (JN)

---

[3] MacKay J. S., *Plane Geometry* (1904).
[4] Whitley J., *Gentleman's Mathematical Companion* (1808) 133.
[5] Bevan B., *Mathematical Repository* de Leybourn I (1804) 18.
[6] F. G.-M., *Exercices de Géométrie*, 2-ième édition (1882) n° 721.
[7] Mention, *Nouvelles Annales* **9** (1850).
[8] Mannheim A., *Educational Time* **52** (1890)
et Question 1594, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1890) 239.

Donné : les points I, A, J et K sont cocycliques.

VISUALISATION



- Notons U le second point d'intersection de (AJ) avec *1*.

- Les cercles *1*, *2*, les points de base A et B, les moniennes (UAJ) et (MBN), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (UM) // (KJN) .

- **Conclusion :** le cercle *1*, les points de base I et A, les moniennes naissantes (MIK) et (UAJ), les parallèles (MU) et (KJ), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, les points I, A, J et K sont cocycliques.

Scolie : le résultat reste vrai lorsque

(1) les droites (IM) et (JN) sont des tangentes

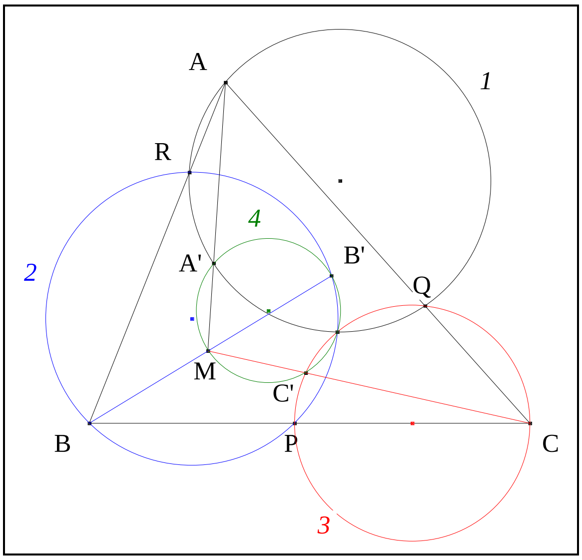
(2) les cercles sont tangents.

2. Le cercle de Mannheim

VISION

Figure[9] **:**

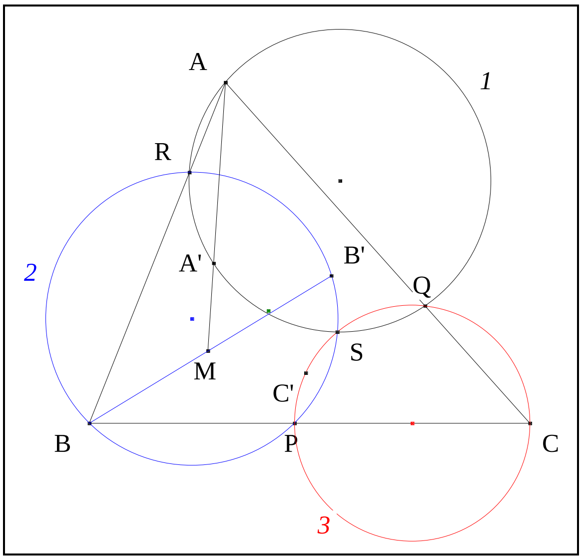
[9] Sharygin I. a choisi cette figure pour la jaquette de son livre *Problemas de geometria*, Editions Mir., 1986, Moscou.



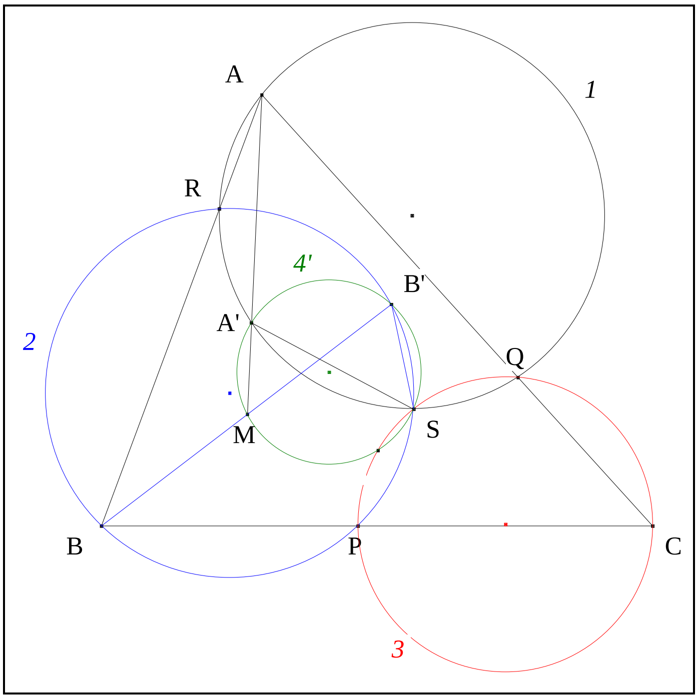
Traits :	ABC	un triangle,
	P, Q, R	trois points de [BC], [CA], [AB],
	1, *2*, *3*	les cercles circonscrits aux triangles ARQ, BPR, CQP,
	A', B', C'	trois points resp. de *1*, *2*, *3*,
	4	le cercle passant par A', B', C'
et	M	le point d'intersection de (AA') et (BB')

Donné : (CC') passe par M *si, et seulement si,* *4* passe par M.

VISUALISATION NÉCESSAIRE

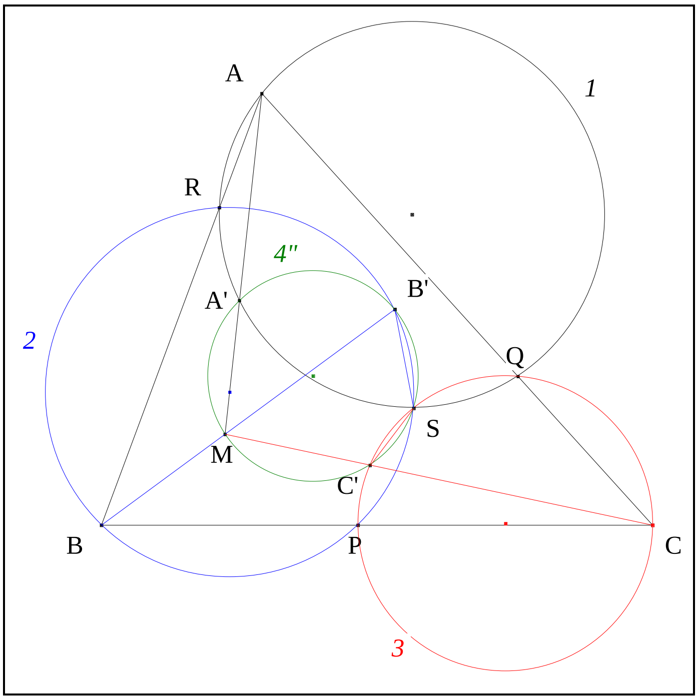


- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (cf. Annexe 1) appliqué à ABC avec R sur (AB), P sur (BC), Q sur (CA), *1*, *2*, *3* sont concourants.
- Notons S ce point de concours.



- D'après **1.** "Une monienne brisée" appliquée à *1* et *2*, à la monienne (ARB) et à la monienne brisée (A'SB'), les points S, A', B' et M sont cocycliques.

- Notons *4'* ce cercle.



- D'après **1.** "Une monienne brisée" appliquée à *2* et *3*, à la monienne (BPC) et à la monienne brisée (B'SC'), les points S, B', C' et M sont cocycliques.

- Notons *4"* ce cercle.

- Les cercles *4'* et *4"* ayant les trois points B', S et M en communs, sont confondus ; en conséquence, les points A', B', C', M et S sont cocycliques.

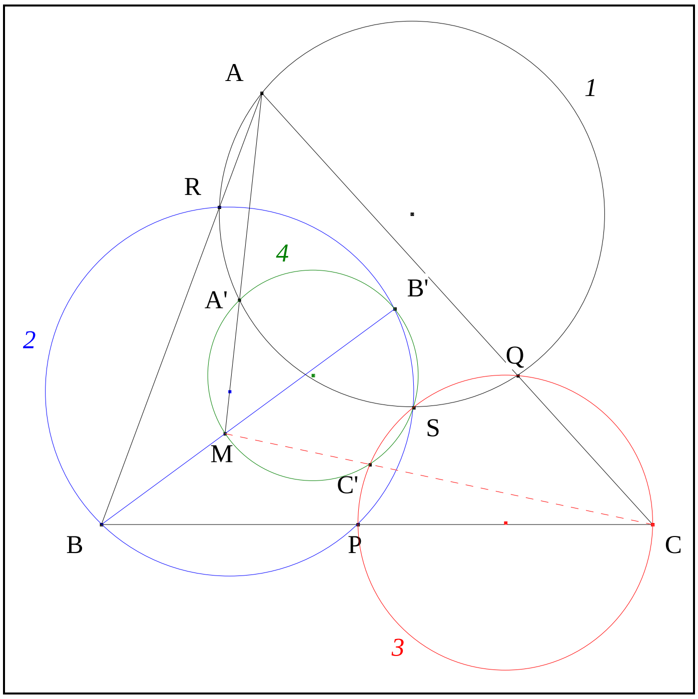
- Les cercles *4* et *4'* ayant les trois points A', B' et C'en communs, sont confondus.

- **Conclusion :** *4* passe par M.

Scolies : **(1)** *4* est le M-cercle de Mannheim

(2) *4* passe par le pivot S.

VISUALISATION SUFFISANTE[10]



- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (cf. Annexe 1) appliqué à ABC avec R sur (AB), P sur (BC), Q sur (CA), *1*, *2*, *3* sont concourants.

- Notons S ce point de concours.

- D'après Miquel "Le théorème du pivot" appliqué au triangle MAB avec A' sur (MA), R sur (AB), B' sur (BM), *1*, *2* et *4* sont concourants ; en conséquence, *4* passe par S.

- D'après Miquel "Le théorème du pivot" (cf. Annexe 1) appliqué au triangle MAC avec A' sur (MA), Q sur (AC), les cercles *4*, *1* et *3* étant concourants en S, C' est sur (CM).

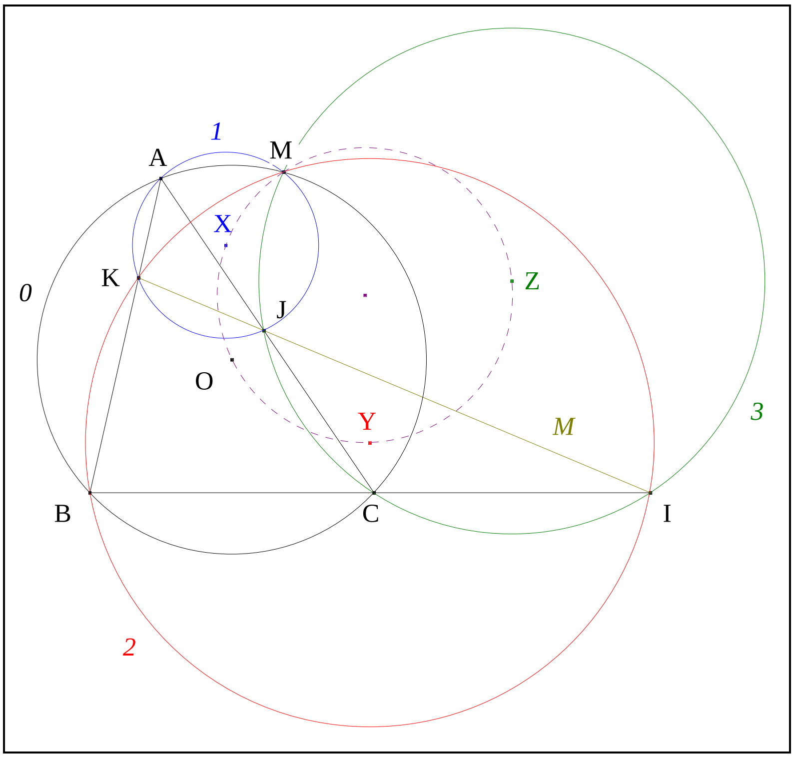
- **Conclusion :** (CC') passe par M.

LE CERCLE DE MIQUEL[11]

[10] Johnson R. A, Théorème 209, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York (1960) 144.
[11] Miquel A., *Le Géomètre* (1836).

VISION

Figure :

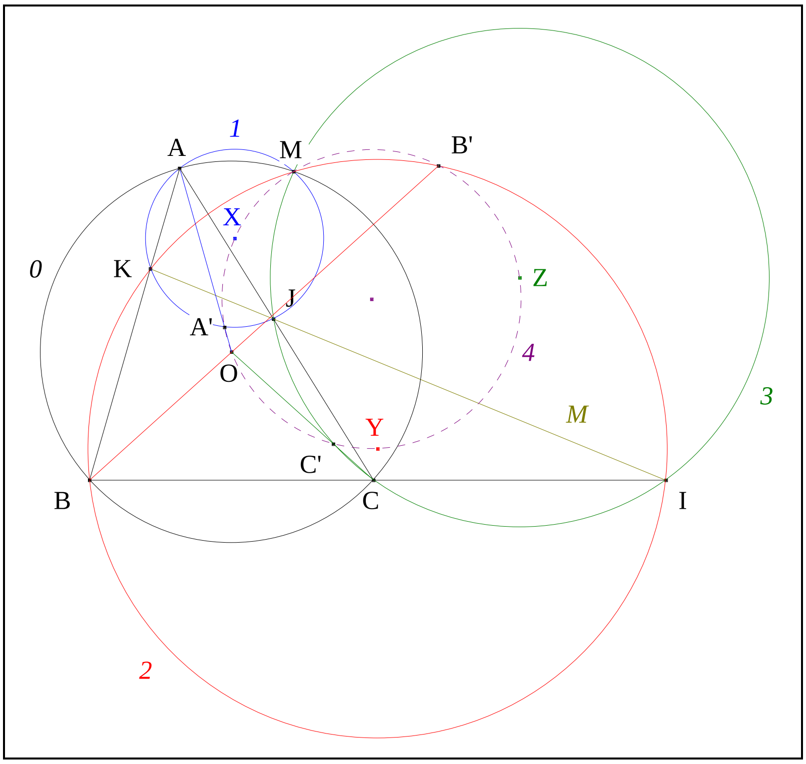


Traits :	ABC	un triangle,
	M	une ménélienne de ABC
	I, J, K	les points d'intersection de *M* avec (BC), (CA), (AB),
	0, *1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits aux triangles ABC, AKJ, BIK, CJI,
	O, X, Y, Z	les centres de *0*, *1*, *2*, *3*
et	M	le point de Miquel relativement à ABC et *M*.

Donné : les points M, O, X, Y et Z sont cocycliques.

VISUALISATION

- **Scolie :** d'après Miquel "Le point de…" (cf. Annexe 2), *0*, *1*, *2* et *3* sont concourants en M.



- Notons A', B', C' les seconds points d'intersection de (OA), (OB), (OC) resp. avec *1*, *2*, *3*.

- D'après "Un cercle de Morley" appliqué

  (1) à *0* et *1*, les points A', O, X et M sont cocycliques

  (2) à *0* et *2*, les points B', O, Y et M sont cocycliques

  (3) à *0* et *3*, les points C', O, Z et M sont cocycliques.

- D'après "Un cercle de Mannheim" appliqué

  à *1*, *2*, *3* et à O, les points A', B', C', O et M sont cocycliques.

- **Conclusion :** les points M, O, X, Y et Z sont cocycliques.

- Notons *4* ce cercle.

Scolies : *4* est "le cercle de Miquel relativement à ABC et *M*".

Énoncé traditionnel : les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles formés par quatre droites qui se coupent deux à deux, appartiennent à un même cercle.

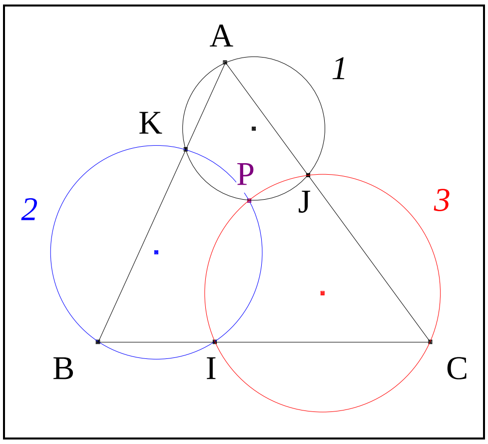
Note historique :
suite aux 10 questions posées sans preuve par Jacon Steiner[12] en 1827-28, l'élève Auguste Miquel de l'Institution Barbet à Paris, commence en 1836 par répondre quatre premières questions dans l'éphémère journal mathématique *Le Géomètre* fondé par Guillard. Ce résultat de Miquel correspond à la deuxième question de Steiner.
Pour être plus de précis, notons que T. S. Davies[13] avait déjà relaté et prouvé ce résultat en 1835 dans le *Leybourn's Mathematical Repository*.

---

[12] Steiner J., Questions 1°, 2°, 3°, 4°, *Annales* 18 (1827-28) 302-303.

ANNEXE

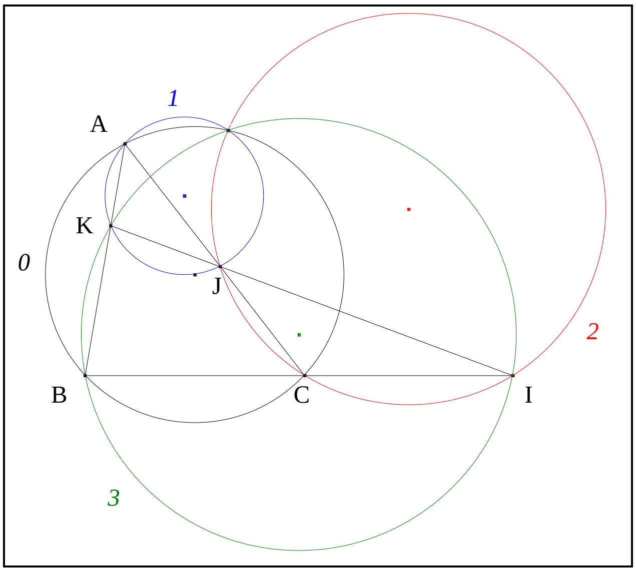
1. Le théorème du pivot[14]



Traits :	*1*, *2*, *3*	trois cercles sécants deux à deux,
	K, P	les points d'intersection de *1* et *2*,
	I	l'un des points d'intersection de *2* et *3*,
	J	l'un des points d'intersection de *3* et *1*,
	A	un point de *1*,
	B	le second point d'intersection de la monienne (AK) avec *2*
et	C	le second point d'intersection de la monienne (BI) avec *3*.

Donné : (CJA) est une monienne de *3* et *1* *si, et seulement si*, *3* passe par P.

2. Le point de Miquel-Wallace[15]



---

[13] Davies T. S., Question 555, *Leybourn's Mathematical Repository*, vol. 6 (1835).
[14] Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. 1, 3 (1838) 485-487.
[15] Wallace W., Leybourn's *Mathematical Repository*, vol. 1, part I (1804) 170.

Traits :	ABC	un triangle,
	I, J, K	trois points resp. de (BC), (CA), (AB),
	0	le cercle circonscrit à ABC,
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits à AKJ, BIK, CJI.

Donné : *si*, les points I, J et K sont alignés *alors*, *0*, *1*, *2* et *3* sont concourants.