LES POINTS JUMEAUX

DE

PIETER HENDRIK SCHOUTE

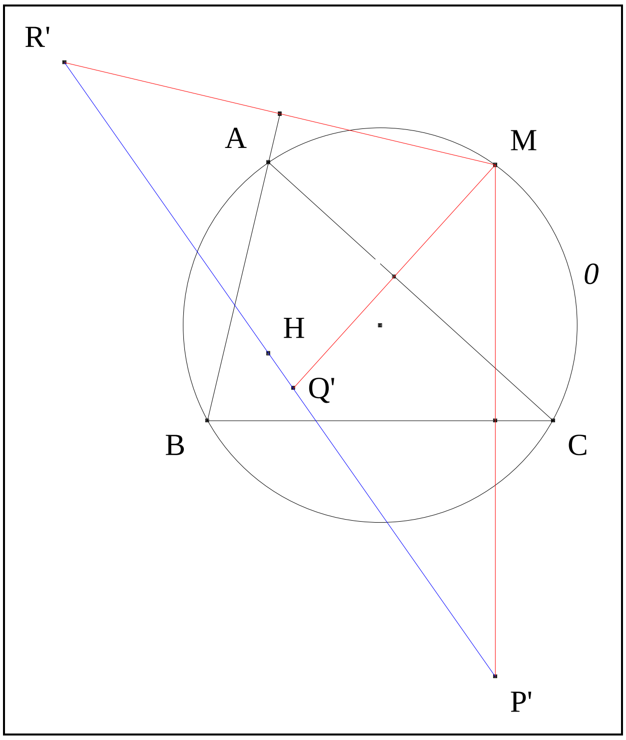
Jean-Louis AYME

Résumé. En prenant pour point de départ, l'antipoint de Steiner, nous prouvons un résultat de Darij Grinberg lequel permet d'aboutir aux cercles de S. N. Collings. Ce dernier résultat conjoint à la technique d'accentuation, conduit aux points jumeaux de P. H. Schoute.
Les théorèmes cités en annexe peuvent tous être démontrés synthétiquement.

1. L'ANTIPOINT DE STEINER

VISION

Figure :

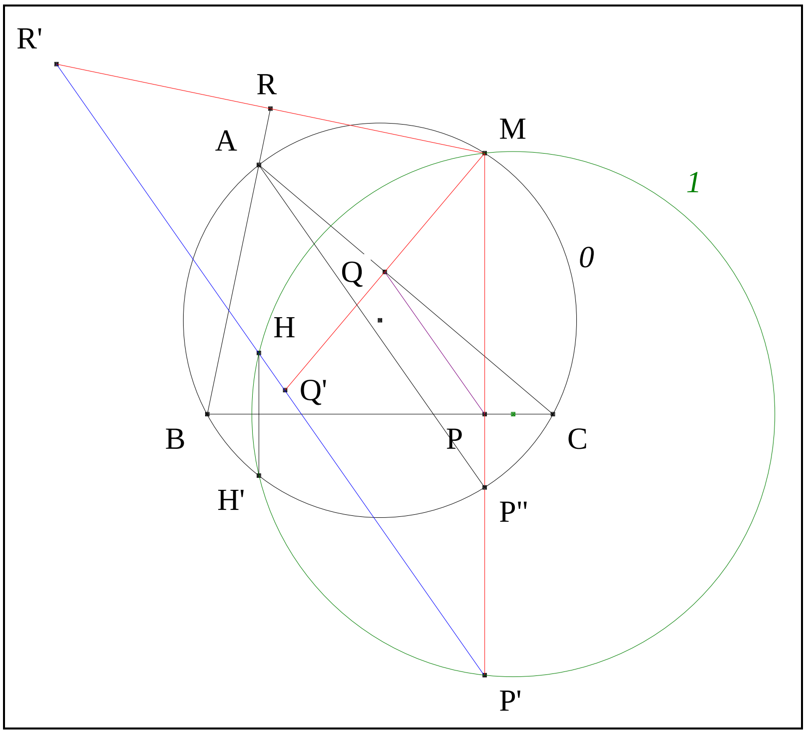


Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
M un point,

et P', Q', R' les symétriques de M par rapport à (BC), (CA), (AB).

Donné : M est sur *1* *si, et seulement si,* H, P', Q' et R' sont alignés.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons P, Q, R les points d'intersection de (MP') et (BC), de (MQ') et (CA), de (MR') et (AB)
  H' le symétrique de H par rapport à (BC)
  et P" le second point d'intersection de (MP) avec *0*.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. Annexe 1), H' est sur *0*.

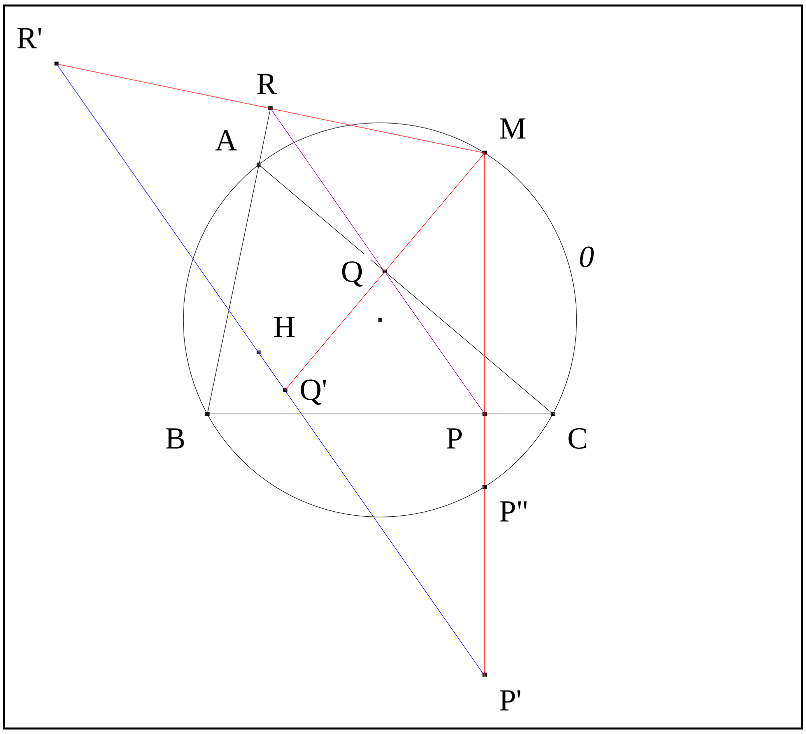
- Le quadrilatère HH'P'M étant un trapèze isocèle, est cyclique.

- Notons *1* son cercle circonscrit.

- Les cercles *1* et *0*, les point de base H' et M, les moniennes (HH'A) et (P'MP"), conduisent au théorème 0 de Reim ; il s'en suit que (HP') // (AP").

- **Scolie :** (PQR) est la droite de Simson de pôle M du triangle ABC.

- D'après Heinen "Direction d'une droite de Simson" (Cf. Annexe 2), (AP") // (PQ) ;
  par transitivité de la relation //, (HP') // (PQ).



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (HQ') // (QR)
  (HR') // (RP).

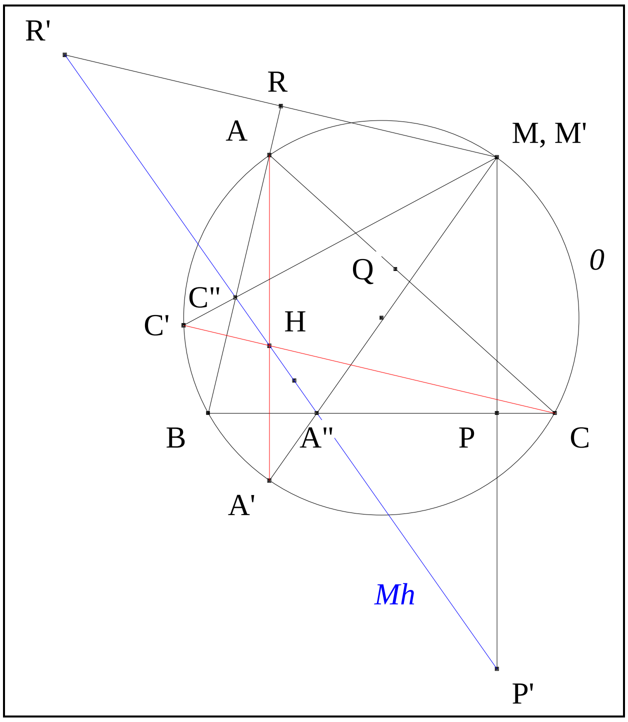
- D'après le postulat d'Euclide, (HP'), (HQ') et (HR') étant resp. parallèles à (PQR), sont confondues.

- **Conclusion :** H, P', Q' et R' sont alignés.

Scolie : (H'P'Q'R') est "la droite de Steiner de pôle M relativement à ABC".

Énoncé traditionnel : les symétriques d'un point M du cercle circonscrit à un triangle par rapport aux côtés de celui-ci, sont sur la droite de Steiner de ce triangle.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons *M*h la H-ménélienne (P'Q'R') de ABC,
  A', B', C' les seconds points d'intersection de (HA), de (HB), de (HC) avec *1*
  et A", B", C" les points d'intersection de *D* avec (BC), (CA), (AB)

- D'après "L'équivalence d'Aubert-Neuberg"[1], (A'A"), (B'B"), (C'C") sont concourantes sur *1*.

- Notons M' ce point de concours.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. Annexe 1),
  A' est le symétrique de H par rapport à (BC) ;
  en conséquence, (A'A") est la symétrique de *M*h par rapport à (BC).

- **Conclusion partielle :** le symétrique M de P' par rapport à (BC) est sur (A'A") i.e. (A'A") passe par M.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B'B") passe par M
  (C'C") passe par M ;
  en conséquence, M' = M.

- **Conclusion :** M est sur *1*.

Scolie : M est "l'antipoint de Steiner de *M*h relativement à ABC".

Énoncé traditionnel : les symétriques de la droite de Steiner d'un triangle par rapport aux côtés de celui-ci, concourent en un point situé sur le cercle circonscrit de ce triangle.

Note historique : cette visualisation suffisante a été présentée par S. N. Collings[2] en 1973.
Le nom du point de concours a été donné par Darij Grinberg[3] dans son article intitulé

---

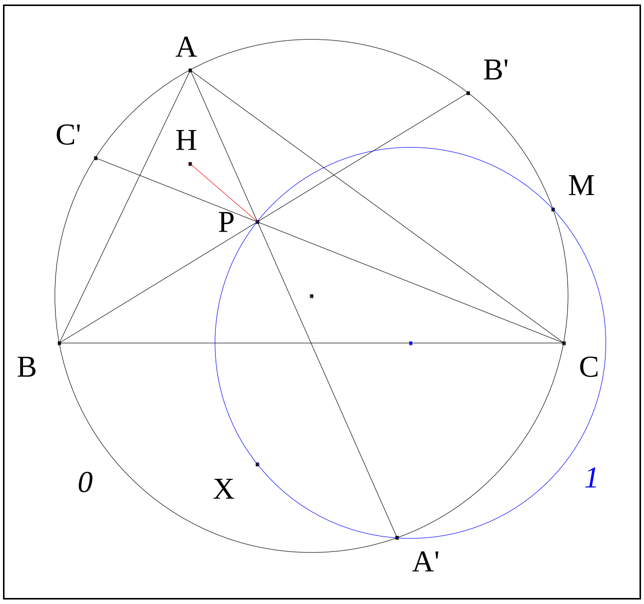
1 Ayme J.-L., La P-transversale de Q, G.G.G. volume (2008).
2 Collings S. N., Reflections on a triangle 1, *Mathematical Gazette* (1973) 291-293.
3 http://de.geocities.com/darij_grinberg/

"Anti-Steiner point with respect to a triangle" et publié sur son site.

2. UN CERCLE PASSANT PAR L'ANTIPOINT DE STEINER [4]

VISION

Figure :

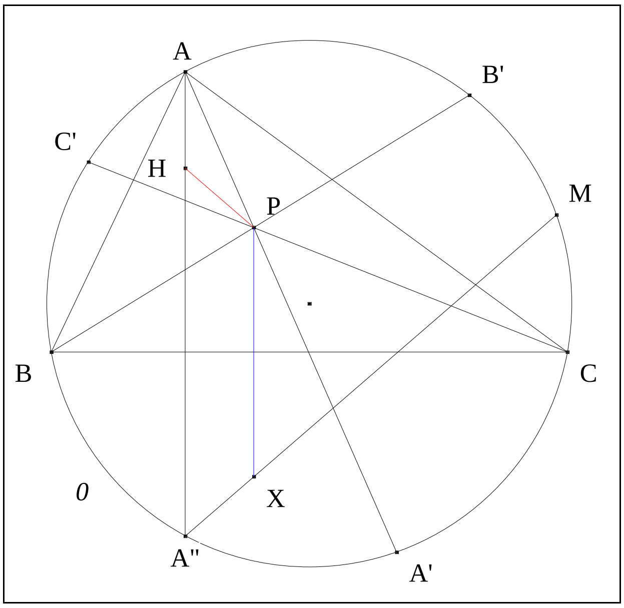


Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
P un point,
A'B'C' le triangle P-circumcévien de ABC,
X le symétrique de P par rapport à (BC),
M l'antipoint de Steiner de (HP) relativement à ABC
et *1* un cercle passant par P et A'.

Donné : *1* passe par X *si, et seulement si,* *1* passe par M.

VISUALISATION NÉCESSAIRE

[4] Grinberg D., Breaking the silence… (was circumcircles), Message *Hyacinthos* # 9791 du 16/05/2004.

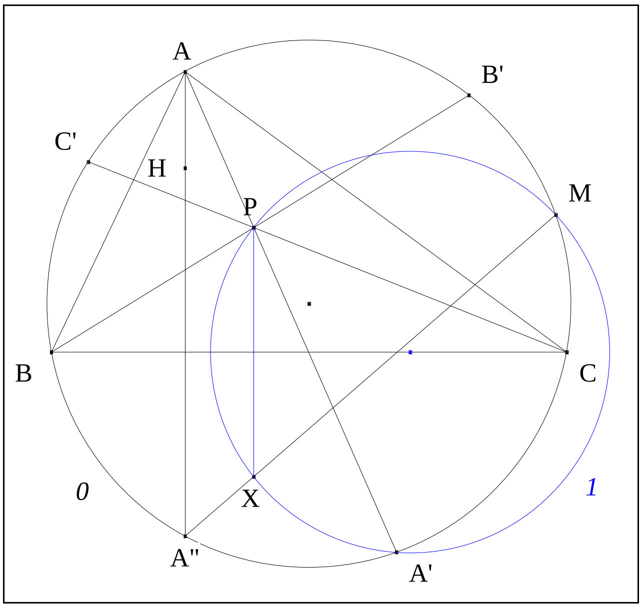


- Notons A" la circumtrace de la A-hauteur de ABC.

- Par construction, (AA") ⊥ (BC) ;
  par hypothèse, (BC) ⊥ (PX) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AA") // (PX).

- **Scolie :** (A"X) est la symétrique de (HP) par rapport à (BC).

- D'après 1. L'antipoint de Steiner, A", X et M sont alignés.



- Le cercle *0*, les points de base A' et M, les moniennes naissantes (AA'P) et (A"MX),
  les parallèles (AA") et (PX), conduisent au théorème **0"** de Reim ;
  en conséquence, A', M, P et X sont cocycliques.

- **Conclusion :** *1* passe par M.

VISUALISATION SUFFISANTE

- Procédons d'une façon identique.

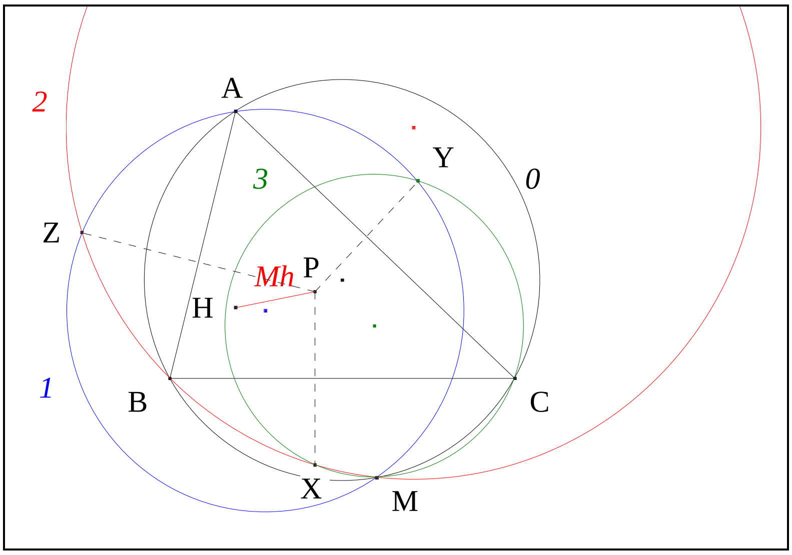
- **Conclusion :** *1* passe par X.

Note historique : dans son message *Hyacinthos*, Darij Grinberg propose quatre résultats dont la dernière correspond au résultat présenté.

3. LES CERCLES DE S. N. COLLINGS

VISION

Figure :

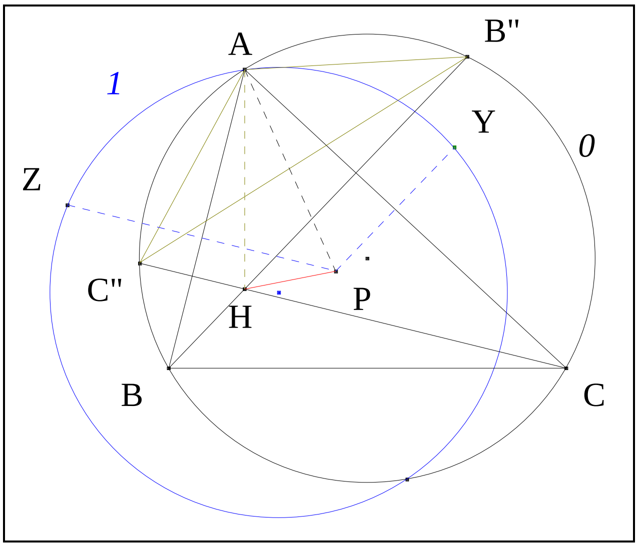


Traits :

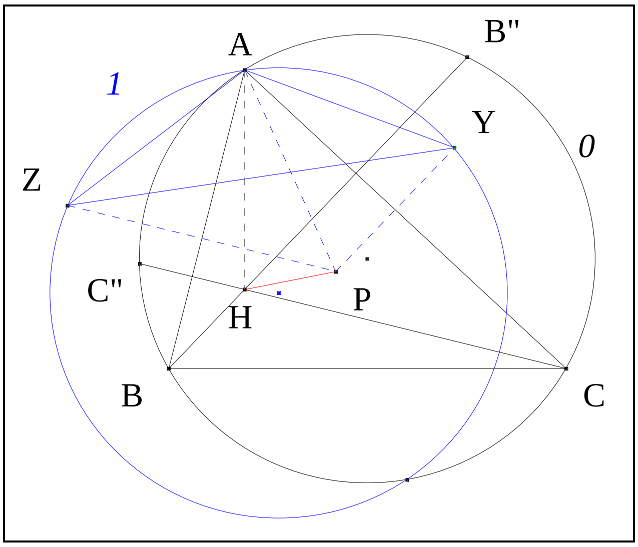
	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	H	l'orthocentre de ABC,
	*M*h	une ménélienne de ABC, passant par H,
	M	l'antipoint de Steiner,
	P	un point de *M*h,
	X, Y, Z	les symétriques de P par rapport à (BC), (CA), (AB)
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits aux triangles AYZ, BZX, CXY.

Donné : *0*, *1*, *2* et *3* sont concourants en M.

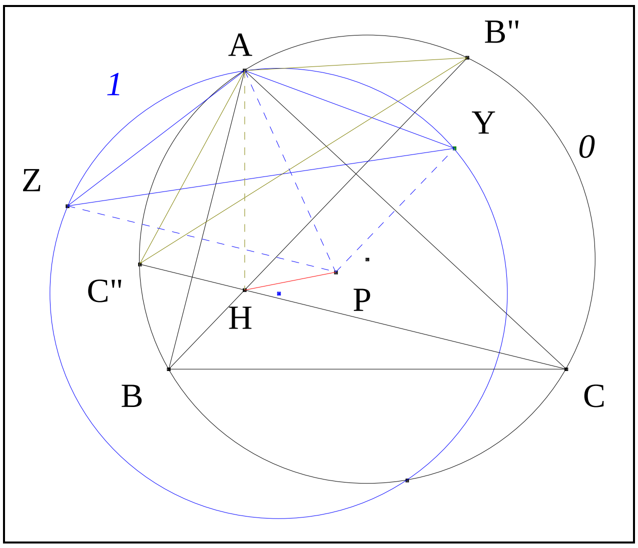
VISUALISATION



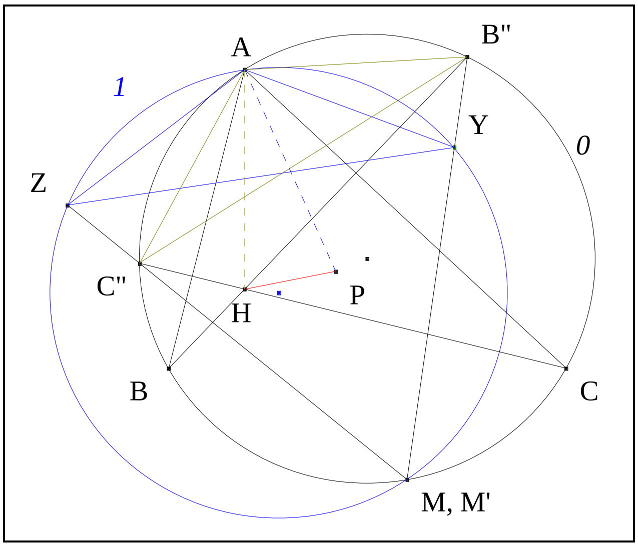
- Notons B", C" les circumtraces des B, C-hauteurs de ABC.
- D'après Carnot "Un triangle isocèle" (Cf. Annexe 3), le triangle AC"B" est A-isocèle.



- Par symétrie du point P, le triangle AZY est A-isocèle.



- Les triangles isocèles AZY et AC"B" ayant même angle au sommet, sont semblables.



- Notons M' le second point d'intersection de *0* et *1*.

- D'après "Deux triangles semblables construits sur deux côtés d'un triangle" (Cf. Annexe 4) appliqué

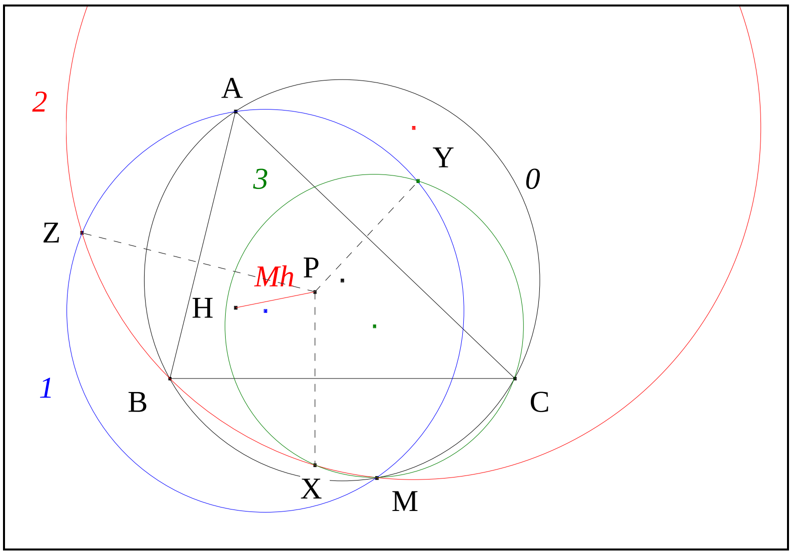
(1)	au triangle AZC",	B", Y et M' sont alignés
(2)	au triangle AYB",	C", Z et M' sont alignés

- D'après 1. L'antipoint de Steiner, M est sur *0*.

- D'après 2. Un cecle passant par l'anti-point de Steiner, B", Y et M sont alignés
C", Z et M sont alignés;

  en conséquence, M et M' sont confondus.

- **Conclusion partielle :** *1* passe par M.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que *2* passe par M
3 passe par M.

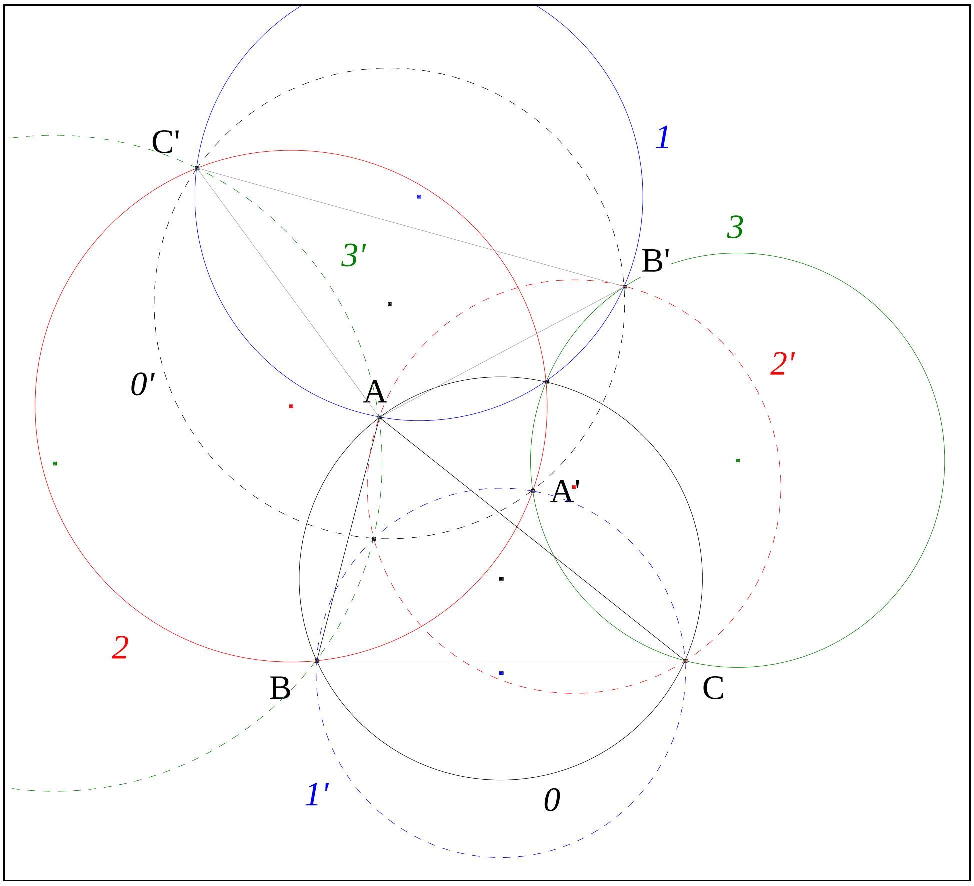
- **Conclusion :** *0*, *1*, *2* et *3* passe par M.

Note historique : ce résultat de S. N. Collings a été mentionné par Michael S. Longuet-Higgins[5] en 1974.
Darij Grinberg[6] dans son article intitulé "Anti-Steiner point with respect to a triangle" et publié sur son site, propose une preuve angulaire de ce résultat.

4. LA TECHNIQUE DE L'ACCENTUATION [7]

VISION

Figure :



Traits : ABC, A'B'C' deux triangles,
0, *0'* les cercles circonscrits resp. à ABC, A'B'C',
1, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. à AB'C', BC'A', CA'B',
et *1'*, *2'*, *3'* les cercles circonscrits resp. à A'BC, B'CA, C'AB.

Donné : *1'*, *2'* et *3'* concourent sur *0'* *si, et seulement si,* *1*, *2* et *3* concourent sur *0*.

---

[5] Longuet-Higgens M. S., Reflections on reflections 1, *Mathematical Gazette* (1974) 257-263.
[6] http://de.geocities.com/darij_grinberg/

[7] Ehrmann J.-P., Message *Hyacinthos*.

VISUALISATION

- D'après Miquel "Le théorème des six cercles"[8] appliqué

(1) au triangle ABC et aux points A', B', C'

1', *2'* et *3'* sont concourants *si, et seulement si,* *1*, *2* et *3* sont concourants

(2) au triangle AB'C' et aux points A', B, C

0', *3'* et 2*'* sont concourants *si, et seulement si,* *0*, *3* et *2* sont concourants.

- **Conclusion :** par conjonction logique,

1', *2'* et *3'* concourent sur *0'* *si, et seulement si,* *1*, *2* et *3* concourent sur *0*.

Scolies : **(1)** une notation
en notant (ABC) le cercle circonscrit du triangle ABC, nous avons

(A'BC), (B'CA), (C'AB) concourent sur (A'B'C')

si, et seulement si,

(AB'C'), (BC'A'), (CA'B') concourent sur (ABC).

(2) Trois règles d'accentuation

accentuation	d'un point	(A)' = A'
double accentuation	d'un point	(A')' = A
accentuation	d'un cercle	(AB'C')' = A'BC.

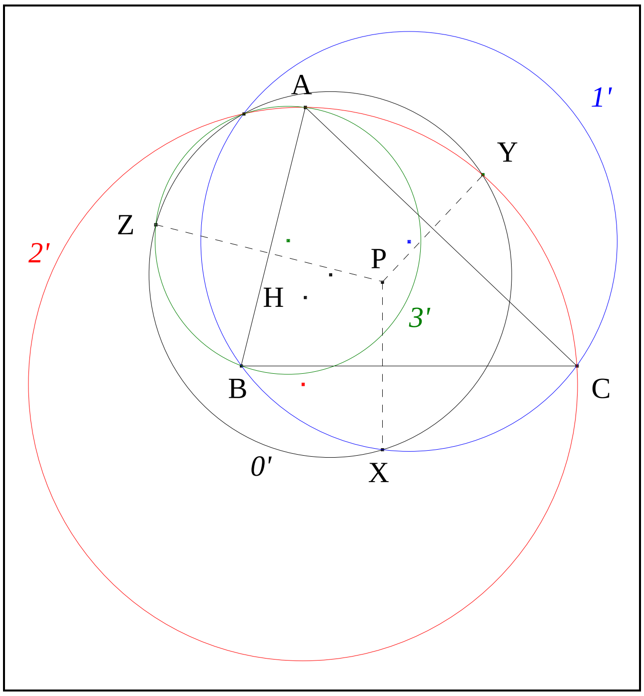
(3) Ces trois règles constituent la technique de l'accentuation.

4. LES POINTS JUMEAUX DE SCHOUTE [9]

VISION

Figure :

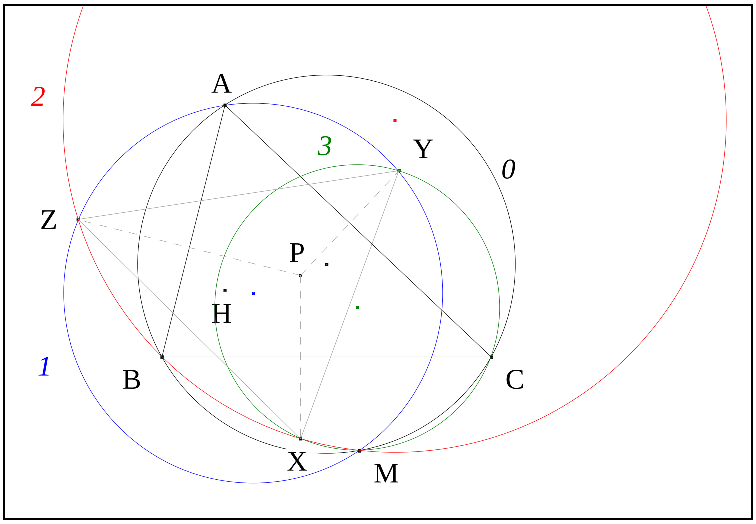
8 Ayme J.-L., Du théorème de Reim… Le théorème des six cercles, scolie 3, G.G.G. volume 8.
9 Schoute P. H., *Journal de Mathématiques Spéciales* n° 93, p. 57.



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	P	un point distinct de H,
	X, Y, Z	les symétriques de P par rapport à (BC), (CA), (AB),
et	*0'*, *1'*, *2'*, *3'*	les cercles circonscrits aux triangles XYZ, XBC, YCA, ZAB.

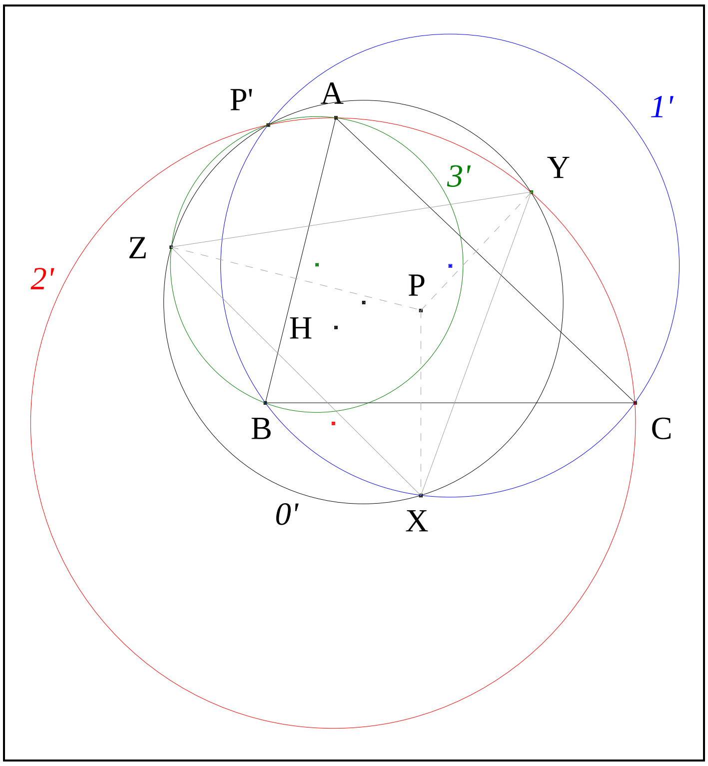
Donné : *1'*, *2'* et *3'* concourent sur *0'*.

VISUALISATION



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  M l'antipoint de Steiner de (HP) relativement à ABC,
  et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits aux triangles AYZ, BZX, CXY.

- D'après 3. Les cercles de Collings, *1*, *2* et *3* sont concourants sur *0* en M.



- **Scolie :** ABC, XYZ sont deux triangles tels que trois sommets quelconque ne soient pas alignés.
- **Conclusion :** d'après 4. La technique de l'accentuation, *1'*, *2'* et *3'* concourent sur *0'*.
- Notons P' ce point de concours.

Scolies : **(1)** P' est le "point jumeau de P relativement à ABC".

(2) Les symétriques de *1'*, *2'* et *3'* resp. par rapport à (BC), (CA) et (AB) passent par P.

(3) En anglais, P' est "the reflection conjugate of P with respect to ABC".

(4) Deux cas particuliers

si, P est l'orthocentre de ABC
alors, P' est indéterminé sur le cercle circonscrit ;

si, P est sur le cercle circonscrit
alors, P' est l'orthocentre de ABC.

Énoncé traditionnel : à trois cercles passant par un même point et par les extrémités de chacun des côtés d'un triangle, correspondent trois cercles symétriques qui passent par un même point.

Scolies : **(1)** en recourant aux angles de droites, nous avons :

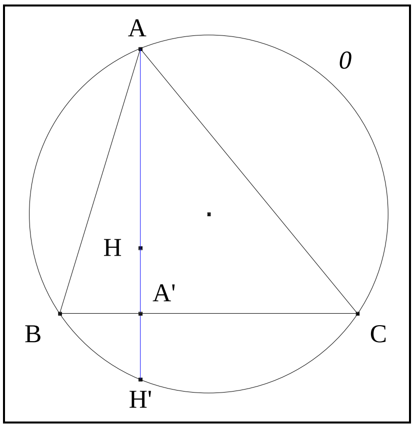
<BPC + <BP'C = 0 (mod pi)
<CPA + <CP'A = 0 (mod pi)
<APB + <AP'B = 0 (mod pi).

(2) P' est le "conjugué antigonal de P relativement à ABC".

Note historique : Pieter Hendrik Schoute (1846-1913) professeur à l'université de Groningue (Pays-Bas) est surtout connu pour avoir fait connaître dans un article de *Journal de Mathématiques Spéciales* 93, une nouvelle transformation dite "par cercles symétriques" qui consiste à faire correspondre à trois cercles passant par un même point et par deux des sommets d'un triangle, trois cercles symétriques passant aussi par un même point.

ANNEXE

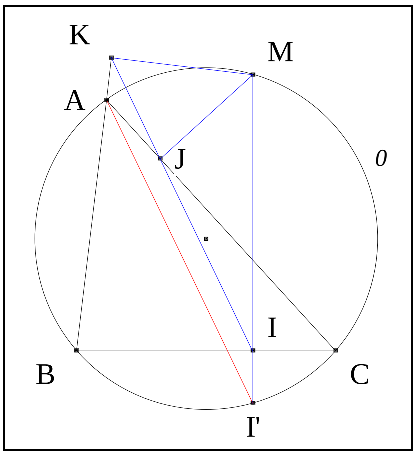
1. Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté[10]



Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre du triangle,
A' le pied de la hauteur de ABC en A,
0 le cercle circonscrit à ABC
et H' le pied de la hauteur de ABC en A sur *0*.

Donné : A' est le milieu de [HH'].

2. Direction d'une droite de Simson[11]



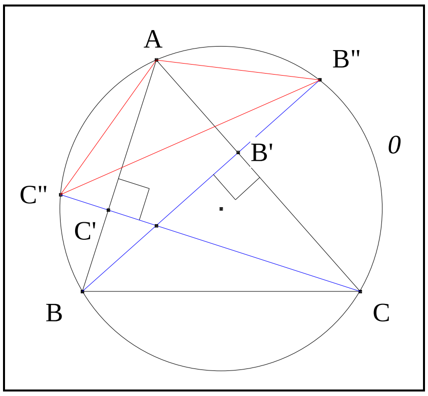
---

[10] Carnot, n° 142, *De la corrélation des figures géométriques* (1801) 101.
[11] Heinen, *Journal de Crelle* 3 (1828) 285-287.

Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	M	un point de *1*,
	I, J, K	les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur (BC), (CA), (AB)
et	I'	le second point d'intersection de (MI) avec *1*.

Donné : (AI') est parallèle à la droite de Simson (IJK).

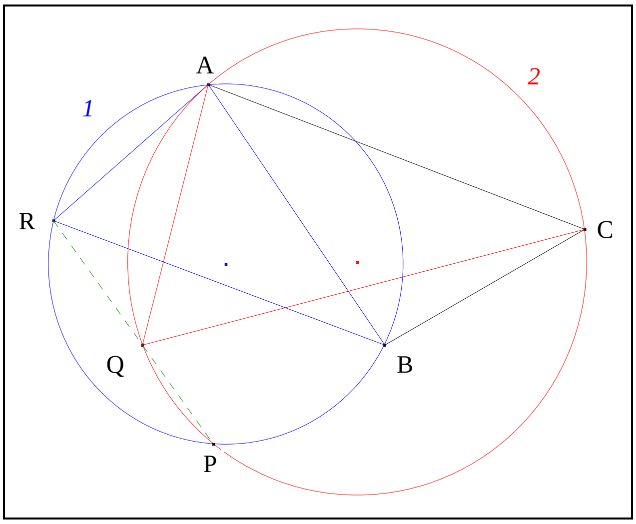
3. Un triangle isocèle [12]



Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	B', C'	les pieds des perpendiculaires abaissées de B et C sur (AC) et (AB),
	0	le cercle circonscrit à ABC
et	B", C"	les seconds points d'intersection de (BB') et (CC') avec *0* .

Donné : le triangle AC"B" est isocèle en A.

4. Deux triangles semblables construits sur deux côtés d'un triangle



Traits :	ABC	un triangle,
	ABR, ACQ	deux triangles semblables, le premier extérieur, le second intérieur à ABC,
	1, *2*	les cercles circonscrits à ABR, à ACQ
et	P	le second point d'intersection de *1* et *2*.

Donné : P, Q et R sont alignés.

---

[12] Carnot, *De la corrélation des figures géométriques* (1801) n° 142, p. 101.