''PAYSAGE OUVERT''

OR

''AN OPEN LANDSCAPE''

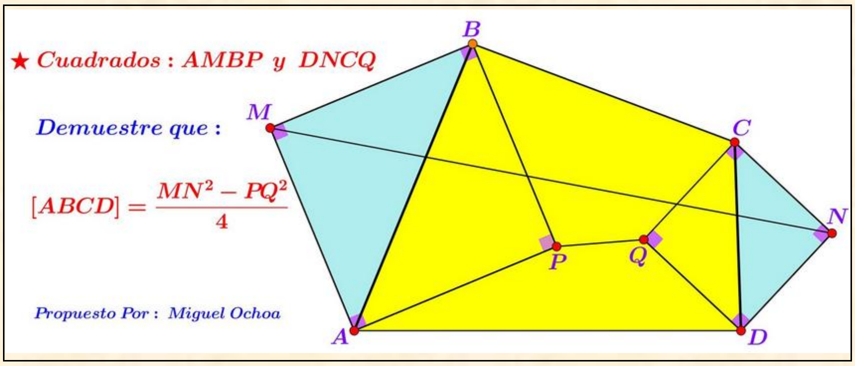
UN RÉSULTAT REMARQUABLE

DE

MIGUEL OCHOA SANCHEZ

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. Ce "Paysage ouvert" concerne un résultat remarquable du péruvien Miguel Ochoa Sanchez exprimant la relation entre l'aire d'un quadrilatère convexe et la différence de deux carrés comme le lecteur peut le voir sur la figure d'entrée. La démarche de l'auteur répond aux cinq stades de la prière préconisée au XIIe siècle par Guigues **II** le Chartreux dans *L'échelle des moines*.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. This "open landscape" concern a remarkable result of the Peruvian Miguel Ochoa Sánchez expressing the relationship between the area of a convex quadrilateral and the difference of two squares as the reader can see on the figure of entry. The approach of the author meets the five stages of prayer recommended in the 12th century by Guigues **II** the Carthusians in *The scale of the monks*.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/12/2015 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sommaire

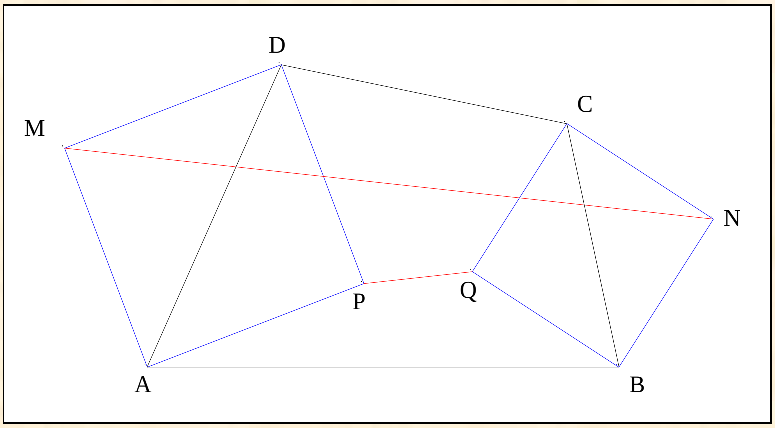
A. LE SUJET

DE

MIGUEL OCHOA SANCHEZ

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
APDM, CQBN deux carrés ayant pour diagonale resp. [AD], [BC]
et [ABCD] l'aire de ABCD.

Donné : $MN^2 - PQ^2 = 4.[ABCD]$. [2]

[3]

Commentaire : les deux solutions proposées recourent à l'utilisation des nombres complexes.
L'auteur a fait un lien qui pourrait être approfondi avec le résultat suivant

The outer and inner Napoleon triangles of any triangle ABC
differ in aera by [ABC]. [4]

---

2 Miguel Ochoa Sanchez, MN^2-PQ^2=4[ABCD], AoPS du 27/09/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1145954_mn2pq24abcd

3 https://twitter.com/miguelochoasan2

4 Coxeter H.S.M., Greitzer S.L., *Geometry Revisited*, New Mathematical Library, New York, 1967, p. 63-65

B. LA PRIÈRE [5] DE L'AUTEUR

FACE

AU

SUJET

LA DEMANDE

Abordant ce Sujet à partir de son donné, l'auteur commence avec une ingéniosité toute naturelle par blatérer des théorèmes qui lui passent par la tête…
Ayant fait feu de tout bois durant ce bref assaut, l'effronté terrien pétaradant et clinquant, a cru durant un court instant, être le seul en tête avec une longueur d'avance et pouvoir se maintenir en pointe, avant qu'un Artefact [6] ennuage tout son point de vue et le contraigne à passer d'une verticalité illusoire à une situation de vaincu.
Bloqué dans sa progression, rendu aveugle par son propre aveuglement, l'auteur qui frisait l'imposture, se retrouve subitement sans vision, ce qui est pourtant essentiel dans la résolution d'un problème.
N'ayant plus de perspective, l'auteur en état de choc et d'échec se surprend à revoir ses ambitions à la baisse en réalisant que tout n'est pas possible et réalisable immédiatement, ce qui est nouveau pour lui.
Pour reprendre sa recherche dans le bon sens et ne pas rester rivé sur le carreau de l'académie qui, par sa suffisance insolente, propage partout dans le monde, une "culture de mort", il remet en question cette institution fermée sur elle-même en reconsidérant la "raison raisonnante" comme une faculté d'un principe d'ordre supérieur, l'Esprit Universel dont il en avait entendu parler durant son adolescence. Il réalise alors qu'un changement radical de point de vue, accompagné d'une certaine ouverture de sa part, est nécessaire s'il désire aller complètement dans ce sens, pour approcher autrement son Sujet.
Assis devant son écran d'ordinateur, il reprend avec une approche plus personnelle, voire hiératique [7], sa recherche au début. L'ambiance qui règne dans son espace privé où il s'est assuré de n'être point dérangé, est propice à la réflexion et au travail solitaire.
Dirigeant son regard sur un point lointain quelque part vers un espace limité et inaccessible, il **demande** pour la première fois et en plein travail, l'aide d'En-Haut pour continuer à avancer.

La demande
est
le premier degré de la prière

---

[5] Guigues **II** le Chartreux (**XII**e siècle) dans *L'échelle des moines*
[6] Effets réels de l'Art causés par l'Esprit et qui entraîne toujours plus haut
[7] Conforme aux normes de la Tradition

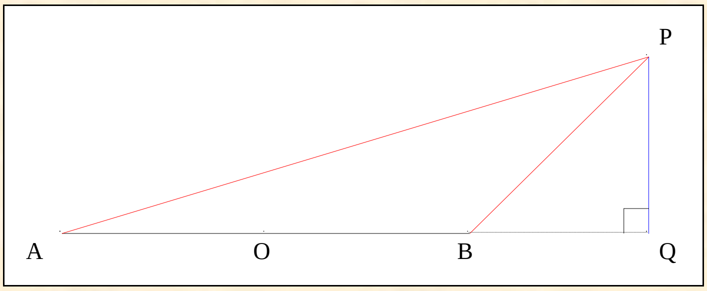
LECTIO

En courbant lentement sa nuque raide comme pour vouloir chercher quelque chose, l'auteur parcourt du regard dans le sens de la largeur son écran et **redemande** humblement de l'aide.
Par la grâce venue d'En-Haut sa demande trouve un point lointain dont le rayonnement qui en émane, est une "**Lectio**" [8] qui lui est opportun d'approfondir…

1. Apollonius de Perge [9] ou la différence de deux carrés

VISION

Figure :



Traits : [AB] un segment,
O le milieu de [AB],
P un point tel que PB < PA
et Q le pied de la perpendiculaire à (AB) issue de P.

Donné : $PA^2 - PB^2 = 2.AB.OQ.$ [10]

VISUALISATION

- Une chasse d'égalités :

  * par "La technique de la difference", $QA – QB = AB$
  * par "La technique de la somme", $QA + QB = 2.QO$
  * par "Identité remarquable", $QA^2 - QB^2 = 2.AB.OQ.$
  * par "Le théorème de Pythagore", $QA^2 = PA^2 - PQ^2$ et $QB^2 = PB^2 - PQ^2$

- **Conclusion :** par substitution, $PA^2 - PB^2 = 2.AB.OQ.$

Scolie : ce résultat se généralise à tout point P
en considérant la valeur absolue de la difference des deux carrés.

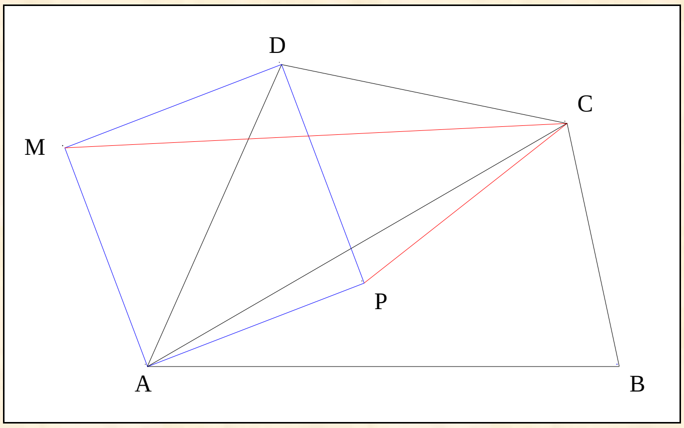
---

8 Une leçon qui propose des idées et une matière à méditer.
9 Appolonius de Perge, *Coniques*, Livre **VII**, p. 432
10 Tudosi M., MN^2-PQ^2=4[ABCD], AoPS du 27/09/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1145954_mn2pq24abcd

2. La fine observation de Mark Tudosi [11]

VISION

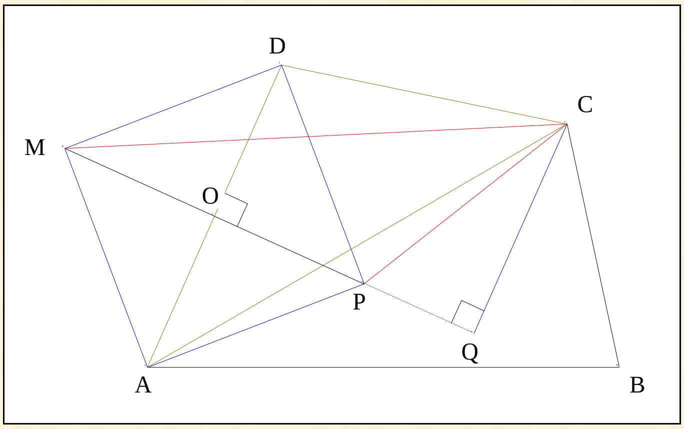
Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
APDM un carré ayant pour diagonale [AD]
et [ADC] l'aire du triangle ADC.

Donné : CM² - CP² = 4.[ADC]. [12]

VISUALISATION



- Notons O le centre de ABCD
  et Q le pied de la perpendiculaire à (MP) issue de C.

- **Scolies :** **(1)** MP = AD

  (2) (CQ) // (AD).

- D'après **B. 1.**, CM² - CP² = 2.MP.OQ ;

  par substitution, CM² - CP² = 2.AD.OQ.

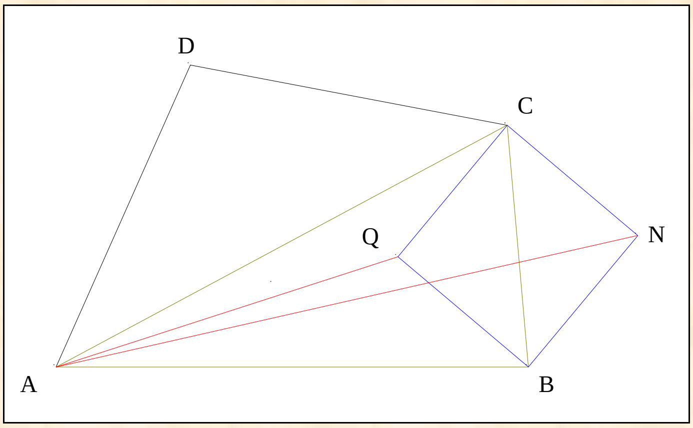
---

[11] dir Armpist sur le site AoPS ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6_geometry

[12] Tudosi M., MN^2-PQ^2=4[ABCD], AoPS du 27/09/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1145954_mn2pq24abcd

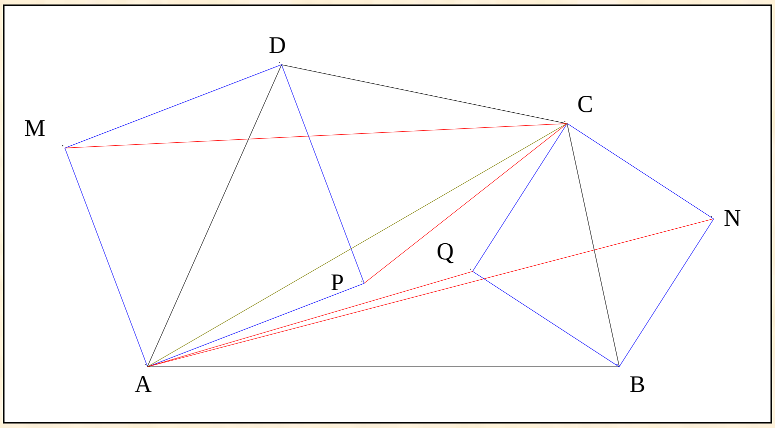
- **Conclusion :** par "La formule égyptienne de l'aire d'un triangle" appliquée à ADC, $CM^2 - CP^2 = 4.[ADC]$.

Scolies : **(1)** vision gémellaire



- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que $AN^2 - AQ^2 = 4.[ABC]$.

(2) Recomposition



- Par addition des résultats précédents, $CM^2 - CP^2 + AN^2 - AQ^2 = 4.[ADC] + 4.[ABC]$.

- **Conclusion :** $CM^2 - CP^2 + AN^2 - AQ^2 = 4.[ABCD]$.

MÉDITATIO

Manquant de souffle dans sa recherche attentive qui exclut tout bavardage, l'auteur se redresse, parcourt des yeux une zone lointaine et **demande** pour la troisième fois de l'aide.
Par la grâce venue d'En-Haut, sa demande trouve un écho lumineux qui l'invite à **un dépassement** et l'entraîne à "s'enfoncer en lui-même" i.e. dans une profonde médiation et **méditation**.

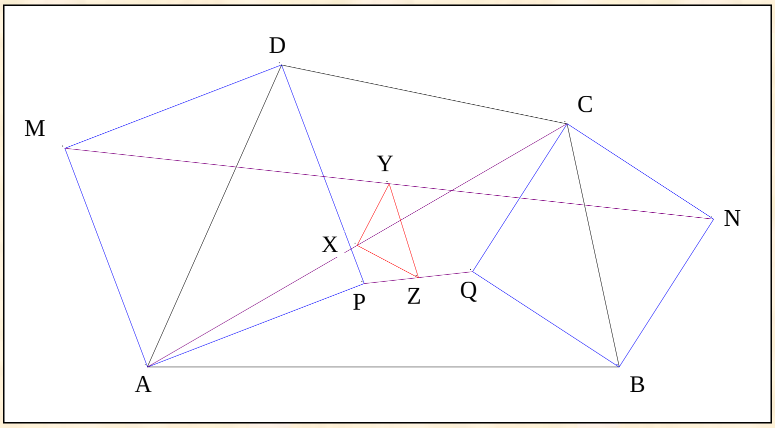
La méditation
ou
le second degré de la prière

L'auteur propose une étymologie non conventionnelle du mot méditation en considérant qu'il résulte de la combinaison de deux mots latins : "medio" et "stare", le premier signifiant "au milieu" et le second "se tenir".

3. Se tenir au milieu ou l'idée de l'auteur

VISION

Figure :

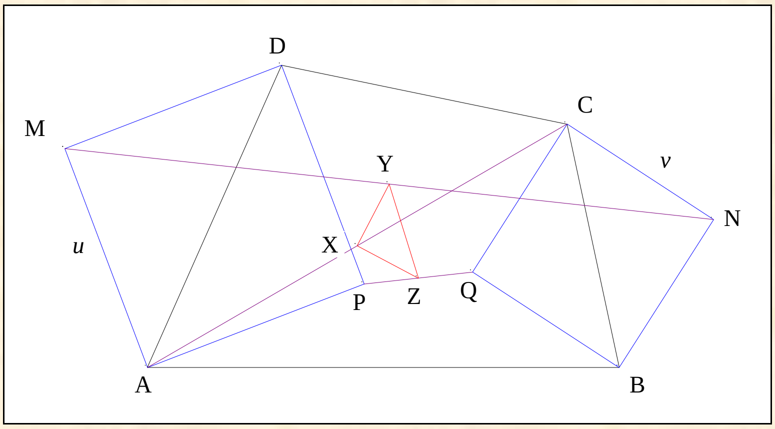


Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
APDM, CQBN deux carrés ayant pour diagonale resp. [AD], [BC]
et X, Y, Z les milieux resp. de [AC], [MN], [PQ].

Donné : le triangle XYZ est X-isocèle. [13]

VISUALISATION

[13] Ayme J.-L., An interesting result, AoPS du 30/10/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1157768_an_interesting_result



- Notons   <d, <c   les angles <ADC, <DCB
  et   u, v   resp. AM, BN.

- Une chasse angulaire à 2.π près : (la notation AM correspond au vecteur AM)

*	d'après "Relation de Chasles",	<AM,CN = <AM,AD + <AD,CD + <CD,CB + <CB,CN
*	en mesure,	<AM,CN = -π/2 +<d + <c + π/2
*	par simplification,	<AM,CN = <c + <d.

- D'après "La droite des milieux"
  appliqué au quadrilatère AMCN,   4.XY² = u² + v² + 2.u.v.cos <AM,CN

- Une chasse angulaire à 2.π près : (la notation AP correspond au vecteur AP)

*	d'après "Relation de Chasles",	<AP,CQ = <AP,AD + <AD,CD + <CD,CB + <CB,CQ
*	en mesure,	<AP,CQ = π/2 + <d + <c – π/2
*	par simplification,	<AP,CQ = <c + <d.
*	en conséquence,	<AP,CQ = <AM,CN.

- D'après "La droite des milieux"
  appliqué au quadrilatère APCQ,   4.XZ² = u² + v² + 2.u.v.cos <AP,CQ .

- **Conclusion :** le triangle XYZ est X-isocèle

Scolies :

(1) une chasse angulaire à 2.π près : (la notation MP correspond au vecteur MP)

*	d'après "Relation de Chasles",	<MP,NQ = <MP,DA + <DA,DC + <DC,BC + <BC,NQ
*	en mesure,	<MP,NQ = -π/2 + <d + <c + π/2
*	par simplification,	<MP,NQ = <d + <c
*	en conséquence,	<AP,CQ = <AM,CN = <MP,NQ.

- D'après "La droite des milieux"
  appliqué au quadrilatère MPQN,   4.YZ² = 2.u² + 2v² + 4u.v.cos <MP,NQ.

(2) le triangle XYZ est X-rectangle

- par addition, $4.XY^2 + 4.XZ^2 = u^2 + v^2 + 2.u.v.\cos <AM,CN + u^2 + v^2 + 2.u.v.\cos <AP,CQ$

  $= 2u^2 + 2v^2 + 4.u.v.\cos <MP,NQ$

  $= 4.YZ^2.$

- **Conclusion :** par réciproque du théorème de Pythagore, le triangle XYZ est X-rectangle.

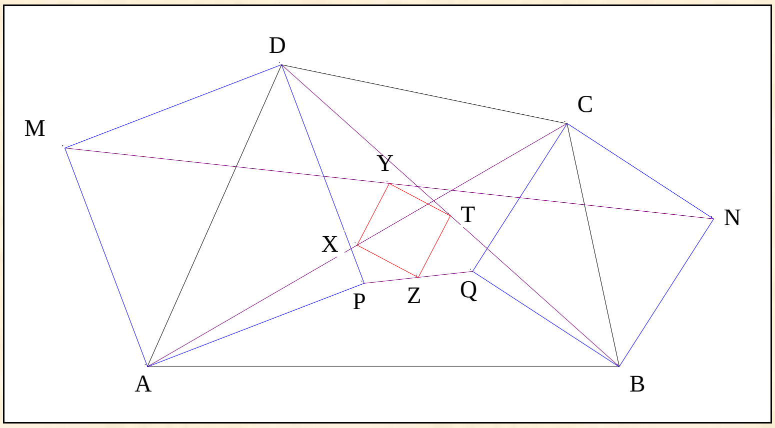
ORATIO

En s'ouvrant pour recevoir ce carré fructueux, l'auteur est poussé à approfondir et à pénétrer avec sapidité jusqu'au fond des choses.
L'acceptation de ce carré "étranger" au Sujet, l'éveille et stimule ses forces. En tolérant cet "intrus" jusqu'à lui accorder une place privilégiée au lieu de le chasser ou de l'ignorer, il l'absorbe et commence à dialoguer.

4. La remarque de Stan Fulger

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
APDM, CQBN deux carrés ayant pour diagonale resp. [AD], [BC]
et X, Y, Z, T les milieux resp. de [AC], [MN], [PQ], [BD].

Donné : le quadrilatère XYTZ est un carré. [14]

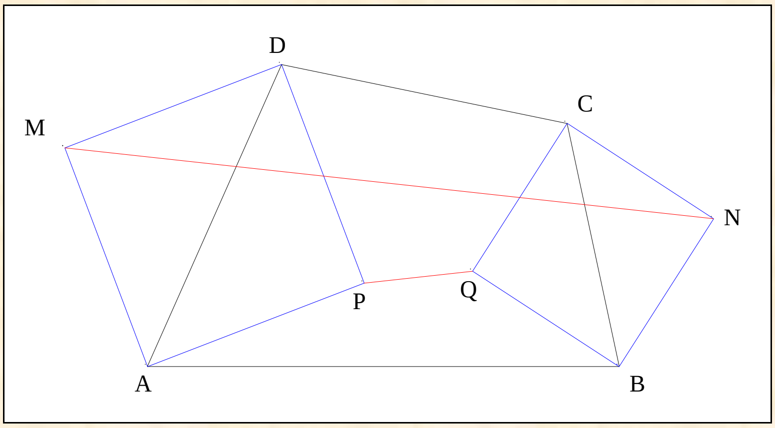
Commentaire : la preuve est analogue à la précédente.

[14] Ayme J.-L., An interesting result, AoPS du 30/10/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1157768_an_interesting_result

5. La preuve

VISION

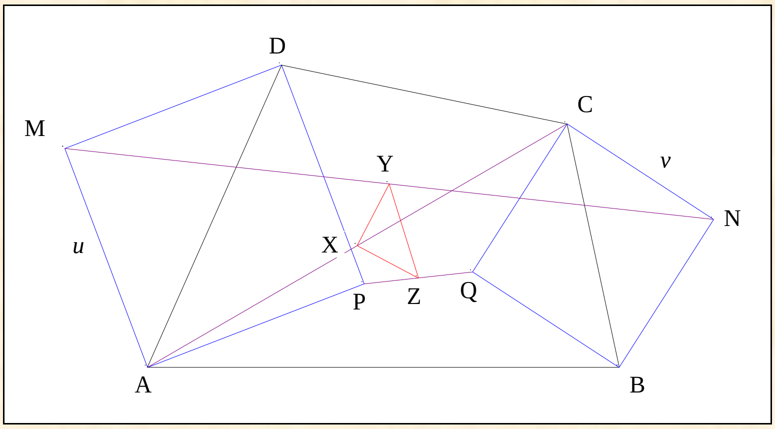
Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
APDM, CQBN deux carrés ayant pour diagonale resp. [AD], [BC]
et [ABCD] l'aire de ABCD.

Donné : $MN^2 - PQ^2 = 4.[ABCD]$. [15]

VISUALISATION



- Notons X, Y, Z les milieux resp. de [AC], [MN], [PQ].
- D'après **B. 2.** Scolie **2**, $4.[ABCD] = CM^2 - CP^2 + AN^2 - AQ^2$

* par la technique du "zéro",

$$4.[ABCD] = (CM^2 + CN^2 + AN^2 + AM^2) - CP^2 - AQ^2 - CN^2 - AM^2$$

* autre écriture,

$$4.[ABCD] = (CM^2 + CN^2 + AN^2 + AM^2) - (CP^2 + AQ^2 + CN^2 + AM^2)$$

---

15 Miguel Ochoa Sanchez, MN^2-PQ^2=4[ABCD], AoPS du 27/09/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1145954_mn2pq24abcd

* par hypothèse, $AM = AP$ et $CN = CQ$

* par substitution,

$$4.[ABCD] = (CM^2 + CN^2 + AN^2 + AM^2) - (CP^2 + PA^2 + AQ^2 + QC^2)$$

* par "La droite des milieux"
appliqué au quadrilatère MPQN,

$$4.[ABCD] = (MN^2 + AC^2 + 4.XY^2) \qquad - (AC^2 + PQ^2 + 4.XZ^2)$$

* d'après **B. 3.**, $4.[ABCD] = MN^2 - PQ^2$.

- **Conclusion :** $MN^2 - PQ^2 = 4.[ABCD]$.

CONTEMPLATIO

Par la grâce venue d'En-Haut, la courte et fervente prière de l'auteur lui fait découvrir une figure iconique dont la lumière est une émission venue des profondeurs qui lui va droit au cœur. Sa seule envie est alors de la décrypter.

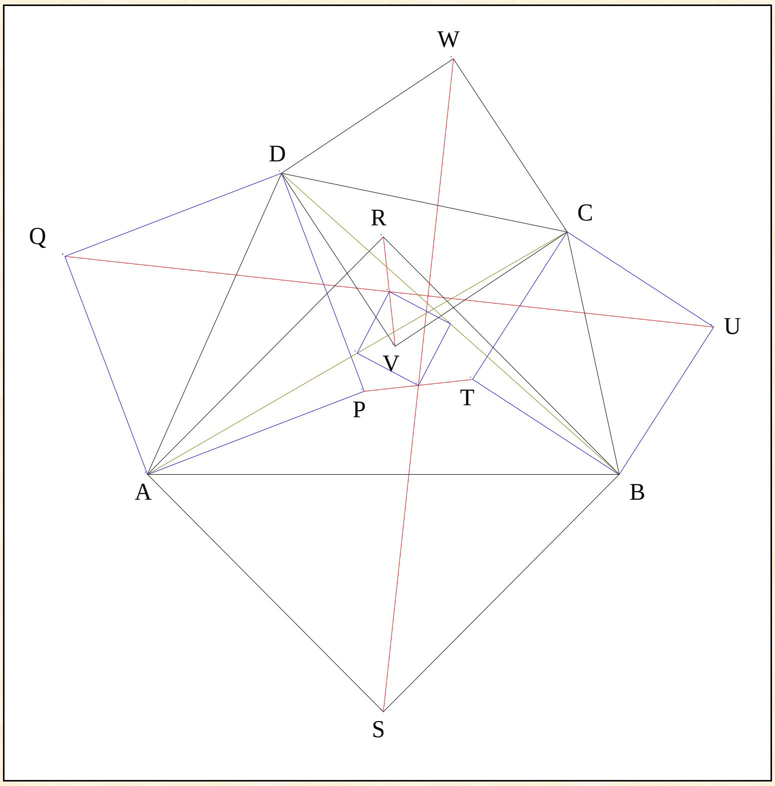
L'oraison jaculatoire
ou
le second degré de l'oraison

Pour l'auteur, c'est une libération de ses propres limites de réflexion, qui l'encourage à écouter silencieusement et à s'ouvrir pour converser et communiquer avec cette nouvelle richesse.

6. La figure iconique

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
et APDQ, BRAS, CTBU, DVCW quatre carrés ayant pour diagonale resp. [AD], [BC]

Donné : les milieux resp. de [AC], [BD], [PT], [QU], [RV], [SW] déterminent un carré. [16]

---

[16] Ayme J.-L., A hard square, AoPS du 03/11/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1158825_a_hard_square
Ayme J.-L., Quatre carrés plus un, *Les-Mathematiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/list.php?8